INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA DA PARAÍBA
CURSO SUPERIOR DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

Adalberto Marinho Vieira

Números Complexos: Da Dúvida da Existência no Passado para uma Realidade no Presente

CAMPINA GRANDE – PB

2025

Adalberto Marinho Vieira

Números Complexos: Da Dúvida da Existência no Passado para uma Realidade no Presente

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Curso Superior de Licenciatura em Matemática do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia da Paraíba (IFPB), como requisito parcial para a obtenção do título de Licenciado em Matemática.

Orientador: Prof. Me. Orlando Batista de Almeida

CAMPINA GRANDE – PB

2025

Catalogação na fonte:
Ficha catalográfica elaborada por Gustavo César Nogueira da Costa - CRB 15/479

V568n Vieira, Adalberto Marinho.

Números complexos: da dúvida da existência no passado para uma realidade no presente / Adalberto Marinho Vieira. - Campina Grande, 2025.
74 f.: il.

Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação em Licenciatura em Matemática) - Instituto Federal da Paraíba, 2025.
Orientadores: Prof. Me. Orlando Batista de Almeida.

1. Números complexos. 2. Matemática - História. 3. Aplicações da matemática. 4. Análise complexa. I. Almeida, Orlando Batista de. II. Título.

CDU 512.8

Números Complexos: Da Dúvida da Existência no Passado para uma Realidade no Presente

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Curso Superior de Licenciatura em Matemática do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia da Paraíba (IFPB), como requisito parcial para a obtenção do título de Licenciado em Matemática.

Orientador: Prof. Me. Orlando Batista de Almeida

Aprovado em: 18 / 08 / 2025

BANCA EXAMINADORA

Orlando Batista de Almeida

Prof. Me. Orlando Batista Almeida Barbosa - IFPB.

(Orientador)

Weidson A. Luna

Prof. Me. Weidson do Amaral Luna - IFPB.

(Membro da Banca)

Felipe Barbosa Cavalcante

Prof. Dr. Felipe Barbosa Cavalcante - IFPB.

(Membro da Banca)

AGRADECIMENTOS

Se alguém me dissesse, há alguns anos, que eu terminaria um trabalho sobre números complexos eu provavelmente não acreditaria. Mas aqui estamos, e essa jornada foi muito mais do que fórmulas e teorias: foi sobre descobrir que até o que parece abstrato pode transformar o mundo real. À minha família, especialmente, minha mãe, meus irmãos e meu pai, vocês sempre são meu porto seguro. Obrigado por me ouvirem falar sobre números "que não existem" com o mesmo entusiasmo com que eu falava de descobertas infantis.

Ao meu orientador**,** Orlando Batista de Almeida**,** pela paciência de quem entende que matemática também se faz com tentativa, erro e um pouco de intuição. Muita das vezes esqueceu o papel de professor e orientador, e assumiu o papel de pai o qual acolhe e abraça o filho com muito amor e carinho. E cada "vamos refazer essa parte" me ensinou mais do que qualquer livro.

Aos meus amigos, em especial, Israel Ribeiro da Silva, Ana Letícia Araújo Falcão, Evelly Dâmaris Andrade Venceslau, Erika Soares Silva e Maria Beatriz de Azevedo Silva – sim, vocês que me aguentaram cancelando planos para "só mais uma página" e ainda assim me enviaram memes de matemática para descontrair. Não trocaria nossas conversas aleatórias por nada, nem mesmo por uma fórmula mais simples que a de Euler! Jamais esquecerei do que vocês fizeram e fazem por mim. Quando comecei essa jornada pelos campos do IFPB, nunca imaginei que encontraria tantas pessoas especiais pelo caminho.

A todos os professores que plantaram a semente do conhecimento, meu profundo agradecimento: Ao professor Jose Jorge Casimiro dos Santos, que me mostrou pela primeira vez que ensinar é algo que não se explica e sim sente aquela emoção e amor e não era um sonho impossível, mas sim era possível e conseguiria abrir muitas portas para novos conceitos. A professora Daiana Estrela Ferreira Barbosa, cujas aulas de didática me fizeram ver a beleza escondida nas equações. Pessoa que transformou minha curiosidade inicial sobre ser professor em amor e desejo pela profissão, e pacientemente me guiando a cada versão de mim para sempre me tornar alguém melhor, mesmo quando eu chegava com mais dúvidas que respostas.

Ao IFPB, por todo acolhimento e ensinamentos que ganhei na instituição. Foram anos de aprendizado, desafios e crescimento que levarei para a vida toda.

A todos os colaboradores do IFPB que tanto fizeram e fazem por mim. Que cada palavra e sorriso forma essências para continuação deste projeto e cada vez que era necessária uma correção ou ajuste estiveram sempre dispostos a ajudar.

A CAPES E, por sempre proporcionar grandes contribuições para carreira acadêmica, trazendo oportunidades para ganho de experiencia e aprendizado.

E principalmente, a Deus, pois sem Ele, eu jamais seria algo ou alguém e apenas por seu amor e bondade eu consegui chegar a esse momento com a conclusão desta monografia.

“Em seu coração o homem planeja seu caminho, mas o Senhor determina seus passos”

RESUMO

Este trabalho tem como objetivo investigar o universo dos números complexos em suas aplicações, sua história e quais são seus principais fundamentos. Demonstrando como essa construção matemática que era abstrata se revela essencial tanto para o desenvolvimento da teoria da matemática quanto para avanços tecnológicos. A pesquisa inicia com uma análise dos números complexos, mostrando sua representação algébrica na forma $a + bi$ e suas propriedades operacionais, destacando como a introdução da unidade imaginária i, definida pela propriedade $i^2 = -1$, permitiu o avanço do conceito de número e a solução de equações que antes eram consideradas impossíveis de se resolver. Na história, o trabalho traz a trajetória dos números complexos desde seus primeiros estudos nas obras de matemáticos renascentistas como Gerolamo Cardano e Rafael Bombelli, passando pelas contribuições importantes de Leonhard Euler que estabeleceu a notação moderna, até a consolidação no século XIX com Carl Friedrich Gauss que lhe deu status de objeto matemático legítimo através de representações geométricas no plano complexo. A investigação então se volta para as aplicações práticas desses números em diversas áreas, demonstrando seu papel transformador onde são indispensáveis na matemática moderna, com estudos em outras áreas. Na matemática pura, o trabalho explora como os números complexos permitiram a demonstração do Teorema Fundamental da Álgebra e se tornaram ferramentas essenciais em análise complexa, como o conjunto de Mandelbrot que revelam padrões geométricos surpreendentes. As conclusões reforçam que os números complexos representam muito mais que uma mera curiosidade matemática, constituindo-se em uma das construções intelectuais mais incríveis da história da ciência, cuja utilidade prática só se tornou plenamente evidentes séculos após sua descoberta, servindo como testemunho do poder da abstração matemática e da importância para estudos de alunos da graduação, quanto alunos do ensino médio. Mostrando por fim a forma Polar e as duas formulas de De Moivre, e como facilitou cálculos que seriam bem mais profundos.

Palavras-chave: Números Complexos, Análise Complexa, Teorema Fundamental da Álgebra, Conjunto de Mandelbrot, Matemática Renascentista.

ABSTRACT

This work aims to investigate the universe of complex numbers, including their applications, history, and their main foundations. It demonstrates how this formerly abstract mathematical construct has proven essential for both the development of mathematical theory and technological advancements. The research begins with an analysis of complex numbers, showing their algebraic representation in the form a + bi and their operational properties. It highlights how the introduction of the imaginary unit i, defined by the property $i^2 = -1$, allowed for the advancement of the concept of number and the solution of equations previously considered impossible. Historically, the work traces the trajectory of complex numbers from their earliest studies in the works of Renaissance mathematicians such as Gerolamo Cardano and Rafael Bombelli, through the important contributions of Leonhard Euler, who established modern notation, to their consolidation in the 19th century with Carl Friedrich Gauss, who gave them the status of a legitimate mathematical object through geometric representations in the complex plane. The investigation then turns to the practical applications of these numbers in various fields, demonstrating their transformative role in modern mathematics, with studies in other fields. In pure mathematics, the work explores how complex numbers enabled the demonstration of the Fundamental Theorem of Algebra and became essential tools in complex analysis, such as the Mandelbrot set, which reveals surprising geometric patterns. The conclusions reinforce that complex numbers represent much more than a mere mathematical curiosity, constituting one of the most incredible intellectual constructions in the history of science, whose practical utility only became fully evident centuries after their discovery, serving as a testament to the power of mathematical abstraction and its importance for undergraduate and high school students. Finally, it shows the Polar form and de Moivre's two formulas, and how they facilitated calculations that would otherwise be much more profound.

Keywords: Complex Numbers, Complex Analysis, Fundamental Theorem of Algebra, Mandelbrot Set, Renaissance Mathematics.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1	Girolamo Cardano
Figura 2	Niccolò Fontana,
Figura 3	Scipione Del Ferro
Figura 4	Ars magna or The Rules of Algebra
Figura 5	Johann Carl Friedrich Gauss
Figura 6	Disquisitiones Arithmeticae
Figura 7	Plano de Argand Gauss
Figura 8	Abraham De Moivre
Figura 9	Leonhard Euler
Figura 10	Caspar Wessel
Figura 11	Jean-Robert Argand

LISTA DE SÍMBOLOS.

γ	Gama
Δ	Delta
θ	Theta
λ	Lambda
μ	Mu
π	Pi
Cos θ	Cosseno de Theta
Sen θ	Seno de Theta
$\pm$	Mais ou menos
$\neq$	Diferença
$<$	Menor que
$>$	Maior que
$\leq$	Menor ou igual que
$\geq$	Maior ou igual que
$\forall$	Para todo ou qualquer que seja
$\in$	Pertence
$\mathbb{C}$	Conjunto dos Números Complexos
$\mathbb{N}$	Conjunto dos Números Naturais
$\mathbb{R}$	Conjunto dos Números Reais
$\mathbb{Z}$	Conjunto dos Números Inteiros
$\mathbb{Z}_+$	Conjunto dos Números Inteiros Não Negativos
$\mathbb{Z}_-^*$	Conjuntos dos Números Inteiros Negativos

SUMÁRIO

1. INTRODUÇÃO **14**

1.1. CONTEXTUALIZAÇÃO. 14

1.2. JUSTIFICATIVA. 18

1.3. OBJETIVOS. 20

1.3.1 OBJETIVO GERAL. 20

1.3.2. OBJETIVOS ESPECÍFICOS. 20

1.4. METODOLOGIA. 20

1.5. PÚBLICO ALVO. 20

2. A SOLUÇÃO DA FORMAÇÃO CÚBICA. 22

2.1. A SOLUÇÃO CÚBICA. 22

2.2. A DEDUÇÃO DA FÓRMULA. 25

2.3. RESOLVENDO A EQUAÇÃO CÚBICA. 28

3. NÚMEROS COMPLEXOS NA GEOMETRIA. **31**

4. CARDANO E O ARS MAGNA. **35**

4.1. A CONSTRUÇÃO DO CONJUNTO NÚMEROS COMPLEXOS. 39

4.2. IGUALDADE DE DOIS NÚMEROS COMPLEXOS. 41

4.3. POTÊNCIAS DE NÚMEROS COMPLEXOS. 41

5. COMPLEXOS NO PLANO CARTESIANO (PLANO COMPLEXO). **44**

5.1. CONSTRUIR O NÚMERO COMPLEXO. 46

5.1.1. CONJUGADO DE UM NÚMERO COMPLEXO. 47

5.1.2. RELAÇÃO IMPORTANTE DOS NÚMEROS COMPLEXOS. 47

5.1.3. ARGUMENTO DE UM NÚMERO COMPLEXO. 48

6. FORMA POLAR OU TRIGONOMÉTRICA. **50**

6.1. SÉCULO XVIII: EULER E A FORMALIZAÇÃO. 51

6.2. FINAL DO SÉCULO XVIII: A INTERPRETAÇÃO GEOMÉTRICA COM ARGAND E WESSEL. 52

6.3. REPRESENTAÇÃO POLAR OU FORMA TRIGONOMÉTRICA DE UM NÚMERO COMPLEXO. 56

6.4. DISTÂNCIA ENTRE DOIS NÚMEROS COMPLEXOS. 57

6.5. ROTAÇÃO DE UM NÚMERO COMPLEXO. 58

6.6. OPERAÇÃO DE MULTIPLICAÇÃO COM A FORMA POLAR. 59

6.7. DIVISÃO DE NÚMEROS COMPLEXOS NA FORMA POLAR. 60

6.8. POTENCIAÇÃO DE NÚMERO COMPLEXO COM A FORMA POLAR. 60

7. FÓRMULA DE DE MOIVRE 62

7.1. FÓRMULA DA POTENCIAÇÃO PARA OS NÚMEROS COMPLEXOS: PRIMEIRA FÓRMULA DE DE MOIVRE. 63
7.2. FÓRMULA DE RADICIAÇÃO PARA OS NÚMEROS COMPLEXOS: SEGUNDA FÓRMULA DE DE MOIVRE. 64
7.3. EQUAÇÃO BINOMIAL. 66
7.4. EQUAÇÃO TRINOMIAL. 69
8. CONSIDERAÇÕES FINAIS. 73
REFERÊNCIAS 74

1. INTRODUÇÃO

1.1. CONTEXTUALIZAÇÃO.

Os números complexos surgem na história da matemática como um dos conceitos mais revolucionários e paradoxais, desafiando as noções tradicionais de números e quantidades. Sua trajetória diferente – desde objetos vistos com desconfiança até os pilares centrais da ciência moderna – oferece um caso exemplar de como ideias matemáticas abstratas podem encontrar aplicações imprevistas em domínios concretos. Este trabalho busca explorar essa dualidade fundamental, examinando como uma construção inicialmente considerada "imaginária" transformou-se em linguagem essencial para descrever fenômenos tão diversos quanto o comportamento de correntes elétricas, a estrutura do átomo ou os padrões caóticos da natureza.

A jornada dos números complexos começa com os algebristas renascentistas confrontando equações aparentemente insolúveis, passa pela genialidade de Euler que lhes deu forma moderna, e culmina na visão unificadora de Gauss que os elevou ao status de ferramenta matemática legítima. Essa evolução histórica revela não apenas o desenvolvimento de um conceito matemático específico, mas todo um processo de amadurecimento do pensamento científico, onde noções inicialmente rejeitadas como artificiais revelam-se portas para novos paradigmas.

No plano teórico, os números complexos encerram uma beleza peculiar, unindo álgebra, geometria e análise em um sistema coerente onde operações impossíveis nos reais tornam-se naturais. Sua representação geométrica no plano complexo, com a elegante simplicidade da fórmula de Euler $e^{i\theta} = cos\theta + iSen\theta$, mostra como conceitos aparentemente desconexos encontram síntese perfeita nesse domínio ampliado. Mas é talvez nas aplicações práticas que apenas falaremos, sem se aprofundar. Da engenharia à física teórica, da computação gráfica ao processamento de sinais, eles provaram ser muito mais que uma curiosidade matemática – são ferramentas indispensáveis para modelar a realidade.

O fato de que equações envolvendo a "ficção" da raiz quadrada de -1 descrevem com precisão fenômenos tão concretos quanto a ressonância de uma ponte ou o spin de um elétron permanece um dos mistérios mais profundos e fascinantes da relação entre matemática e mundo físico. Este trabalho pretende guiar o leitor por essa narrativa extraordinária, mostrando como os números complexos evoluíram de artifício algébrico para linguagem universal da ciência, num processo que ilustra de maneira exemplar o poder criativo da abstração matemática e sua capacidade de revelar padrões ocultos na estrutura da realidade. Ao fazê-lo, espera-se não apenas elucidar um tópico central da matemática moderna, mas também destacar como o desenvolvimento desse conceito reflete o próprio progresso do pensamento científico em sua busca por compreender e descrever o universo. Girolamo Cardano, foi um polímata italiano.

Escrevendo mais de 200 trabalhos sobre medicina, matemática, física, filosofia, religião e música. Na matemática foi o primeiro a introduzir as ideias gerais da teoria das equações algébricas. Seu hábito de jogar também o levou a formular as primeiras regras da teoria da probabilidade. Na medicina foi quem primeiro descreveu clinicamente a febre tifoide. Na física escreveu sobre as diferenças entre energia elétrica e magnetismo. (NAHIN, 1998).

(Figura 1 - Girolamo Cardano em https://edu.techmania.cz/cs/encyklopedie/vedec/1088/cardano)

Girolamo Cardano nasceu em Pavia, na Lombardia, a 24 de setembro de 1501. Cardano era filho ilegítimo (legitimado em 1524) de Chiara Micheria e do jurista e doutor matemático milanês Fazio. Cresceu em meio a maus tratos, doenças e muitas infelicidades; mas apesar disso, mostrou uma extraordinária precocidade para os estudos tido como célebre como astrólogo e mago, antes de ter dado provas da sua invulgar aptidão para o estudo das ciências naturais e da matemática.

Em 1526, depois de ter obtido o título de doutor em Medicina na Universidade de Pádua, começou imediatamente a exercer a sua atividade de médico em Siccolongo e, logo em seguida, em Pádua. Ainda em 1526 escreve o livro ***Liber de Ludo Aleae*** (Livro dos jogos de azar) resolvendo vários problemas de enumeração e retoma os problemas levantados por Luca Pacioli. A obra de Cardano, contudo, só veio a ser publicada em 1663. Cardano relata em sua autobiografia, ***De Propria Vita*** que era viciado em jogos. Escreve que havia jogado xadrez por 40 anos e dados por 25 anos.

Em 1534 obteve uma cadeira de matemática em Milão, mas continuou a estudar medicina, misturada com práticas de astrologia e de magia. A sua cultura enciclopédica e a sua poderosa inteligência, permitiram-lhe escrever sobre os assuntos mais diversos. O começo da história dos números complexos remonta da época em que as equações do segundo grau começaram a ser estudadas. Isso porque, algumas das equações apresentavam soluções claras, como a equação $x^2 - 5x + 6 = 0$, que tem como soluções 2 e 3. Enquanto outras equações, como $x^2 + x + 1 = 0$, pareciam não possuir soluções. Contudo, na época, esses casos não recebiam muita atenção, simplesmente se admitia que a equação não possuía soluções. Posteriormente, quando os matemáticos estudavam equações cúbicas, os italianos Scipione del Ferro e Tartaglia desenvolveram uma fórmula para resolver equações da forma $x^3 + px + q = 0$ (STEWART, 2023), encontrando a seguinte fórmula para a solução:

$$\boldsymbol{x} = \sqrt[3]{\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{\frac{q}{2} - \sqrt[3]{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}}$$

(Figura 2- Niccolò Fontana, Matemático Italiano em https://biographies123.blogspot.com/2009/10/niccolo-fontana-tartaglia.html)

Utilizando essa fórmula para resolver equações, um problema interessante surgiu. Analisaremos, por exemplo, a equação $x^3 = 15x + 4$. Utilizando fatoração, podemos encontrar as três raízes, que são 4, $-2 - \sqrt{3}\ e\ -2 + \sqrt{3}$. Contudo, utilizando a fórmula de Tartaglia, chegaremos que uma das soluções deveria ser : $\sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}}$, um número que envolve a raiz quadrada de um número negativo.

O matemático Rafael Bombelli resolveu tratá-los como números comuns e utilizar técnicas de fatoração para desenvolver esses números, e foi capas de concluir que, na verdade, $\sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}} = 4$. Esse foi o início do tratamento algébrico desse tipo de número. Inicialmente, eles eram usados apenas como artifício para a solução de problemas, mas, com os trabalhos de Abraham de Moivre, Euler e, posteriormente, Gauss, os números complexos passaram a ser entendidos como um conjunto numérico, que foi mais formalmente estruturado por esses matemáticos. Scipione del Ferro foi um matemático italiano que primeiro descobriu um método para resolver a equação cúbica reduzida.

(Figura 3 - Scipione Del Ferro em https://matematicavalencista.blogspot.com/2015/09/matematicas.html)

Essa solução teria sido passada por um estudante de ***del Ferro*** a Girolamo Cardano que a publicou em sua obra-prima matemática "Ars Magna", mostrando sua aplicação a Equações Cúbicas gerais. "Del Ferro" teria sido estudado posteriormente nessa solução pelo matemático chinês ***Wang Xiaotong*** no século VII.

O poeta persa Omar Khayyām também resolvera a equação pelo uso das curvas cónicas no século XI e previra uma futura solução mesma por métodos algébricos. Scipione del Ferro nasceu em Bolonha, no norte da Itália, filho de Floriano e Filippa Ferro. Seu pai, Floriano, trabalhou na indústria do papel, o que se deve à invenção da imprensa na década de 1450 e que provavelmente permitiu a Scipione acessar várias obras nos primeiros estágios de sua vida. Ele provavelmente tenha estudado na Universidade de Bolonha, onde se tornou professor de Aritmética e Geometria em 1496.

Nos seus últimos anos, ele também trabalhou como comerciante. Não existem scripts sobreviventes de del Ferro. Isso se deve em grande parte à sua resistência em comunicar suas obras. Em vez de publicar suas ideias, ele apenas as mostrava a um pequeno e seleto grupo de amigos e alunos. Tem suspeita que isso se deve à prática dos matemáticos na época de se desafiarem publicamente. Quando um matemático aceitava o desafio de outro, cada matemático precisava resolver os problemas do outro. O perdedor em um desafio normalmente perdia financiamento ou sua posição na universidade.

Del Ferro tinha medo de ser desafiado e bem provável que manteve seu maior segredo de trabalho para que ele pudesse usá-lo para se defender em caso de um desafio. Apesar desse segredo, ele tinha um caderno onde registrava todas as suas descobertas importantes. Após sua morte em 1526, este caderno foi herdado por seu genro Annibale della Nave, que era casado com a filha de del Ferro, Filippa. Nave também era um matemático e ex-aluno de del Ferro, e ele substituiu del Ferro na Universidade de Bolonha após sua morte. Em 1543, Gerolamo Cardano e Lodovico Ferrari (um dos alunos de Cardano) viajaram a Bolonha para encontrar Nave e aprender sobre o caderno de seu falecido sogro.

1.2. JUSTIFICATIVA.

A escolha dos números complexos como tema deste trabalho se deve não apenas à sua importância matemática, mas também a um problema educacional recente que foi a retirada deste conteúdo do currículo do terceiro ano do Ensino Médio.

Essa decisão, aparentemente técnica, tem implicações profundas na formação dos estudantes, limitando seu acesso a conceitos fundamentais para diversas áreas do conhecimento. Os números complexos, longe de serem apenas uma abstração matemática, são ferramentas essenciais em campos como engenharia elétrica, física quântica, processamento de sinais e até mesmo na computação gráfica. Ao eliminá-los do currículo básico, criamos uma geração de alunos que chegará ao ensino superior sem conhecer ferramentas indispensáveis para entender fenômenos naturais e tecnológicos.

Além do aspecto prático, há uma questão de princípio envolvida. A matemática não é apenas uma coleção de fórmulas para resolver problemas imediatos; é uma linguagem que desenvolve o pensamento lógico e a capacidade de abstração. Os números complexos, em particular, representam um marco na história da matemática, mostrando como a disciplina evolui ao enfrentar desafios aparentemente impossíveis, como a raiz quadrada de números negativos. Sua exclusão do currículo envia uma mensagem equivocada sobre o que é importante aprender, privilegiando um ensino utilitarista em detrimento de uma formação mais sólida e criativa.

Este trabalho, portanto, busca não apenas explorar as propriedades e aplicações dos números complexos, mas também chamar a atenção para os riscos de um currículo empobrecido. Ao estudar esse tema, reafirmamos o valor de uma educação matemática completa, que prepare os alunos não apenas para provas padronizadas, mas para os desafios intelectuais que encontrarão em suas trajetórias acadêmicas e profissionais. A decisão de omitir os números complexos do Ensino Médio pode parecer pequena, mas reflete uma tendência preocupante de simplificação excessiva do conhecimento, que precisamos questionar e reverter.

Os números complexos, muitas vezes vistos como um conceito abstrato no ensino básico, desempenham um papel fundamental em diversas áreas do conhecimento, desde a engenharia até a física e a computação. Surgidos como uma extensão dos números reais, eles foram inicialmente desenvolvidos para resolver equações que não tinham solução no mundo real, como aquelas que envolvem raízes quadradas de números negativos. No entanto, sua utilidade vai muito além da matemática teórica, encontrando aplicações práticas essenciais em situações cotidianas e avançadas.

Um dos campos em que os números complexos se mostram indispensáveis é o da engenharia elétrica, especialmente no estudo de circuitos de corrente alternada. Nesses sistemas, tensões e correntes variam periodicamente, e representá-las com números complexos simplifica enormemente os cálculos. Em vez de trabalhar com funções trigonométricas complicadas, os engenheiros usam números complexos para analisar a magnitude e a fase dos sinais elétricos, permitindo o projeto eficiente de redes de energia, motores e equipamentos eletrônicos.

Na área de telecomunicações e processamento de sinais, os números complexos são a base de técnicas como a Transformada de Fourier, que decompõe sinais de áudio, imagens e até transmissões de rádio em suas frequências componentes. Isso é crucial para o funcionamento de tecnologias como streaming de música, televisão digital e redes de celular, onde a informação precisa ser codificada, transmitida e decodificada com precisão. Outra aplicação relevante está no controle de sistemas dinâmicos, como os encontrados em robótica, aviões e processos industriais.

Engenheiros usam números complexos para analisar a estabilidade desses sistemas, prevendo como eles responderão a diferentes condições e garantindo que funcionem de maneira segura e eficiente. Na física, especialmente na mecânica quântica, os números complexos são parte integrante da descrição do comportamento de partículas subatômicas. A famosa equação de Schrödinger, que rege a evolução de sistemas quânticos, depende diretamente desses números para prever probabilidades e estados de partículas, sendo essencial para o desenvolvimento de tecnologias como computação quântica e imageamento médico.

Até mesmo na computação gráfica e em jogos eletrônicos, os números complexos e suas extensões, como os quatérnios, são usados para calcular rotações e movimentos em três dimensões, criando animações mais realistas e imersivas. Portanto, embora possam parecer inicialmente um conceito puramente matemático, os números complexos são ferramentas poderosas que permeiam muitas das tecnologias e avanços científicos que moldam o mundo moderno. Sua capacidade de simplificar problemas complexos e modelar fenômenos multidimensionais os torna indispensáveis tanto na pesquisa teórica quanto suas aplicações.

1.3. OBJETIVOS.

1.3.1 OBJETIVO GERAL.

Este trabalho tem como objetivo geral explorar o desenvolvimento dos números complexos, em seus aspectos históricos, desde a sua criação até os dias atuais.

1.3.2. OBJETIVOS ESPECÍFICOS.

- Conhecer a forma algébrica e polar dos números complexos;
- Aplicar a fórmula de De Moivre;
- Resolver equações cúbicas;
- Relacionar os aspectos geométricos e trigonométricos dessas entidades matemáticas.

1.4. METODOLOGIA.

O nosso trabalho será pautado por uma viagem ao longo da história, desde a descoberta dos números complexos até os dias de hoje. Começamos fazendo uma justificativa porque a escolha do tema, evidenciarmos a sua importância para nossa vida, discutiremos um pouco da evolução desses números, desde quando começaram os estudos com toda descrença até a formalização. Abordaremos alguns matemáticos que criaram e desenvolveram os números complexos, contando um pouco da história de cada e como foi sendo desenvolvido tais estudos e também sobre a importância da participação de cada um deles.

Será mostrado como resolver a equação cúbica, e também será feita uma ligação entre números complexos e geometria. Será feita uma abordagem da forma polar e sua ligação com a trigonometria contando um pouco da história dessa nova fase de descoberta de números complexos e como representa-los geometricamente.

Em seguida faremos uma pequena explanação de como são os números complexos e, partindo da percepção do que ocorre com a rotação dos números complexos passando pela definição da multiplicação, divisão potenciação e radiciação na forma polar com ênfase na primeira e segunda formula de De Moivre e, por fim, passamos a resolução das equações binomiais e trinomiais.

1.5. PÚBLICO ALVO.

Este trabalho foi elaborado para atender a demanda de professores, estudantes do terceiro ano médio, licenciandos em matemática. A estrutura e a abordagem do conteúdo foram pensadas para que o trabalho seja relevante e acessível a esses grupos. O trabalho é direcionado aos estudantes do ensino médio e superior que estão tendo o primeiro contato com os números complexos.

Para eles, o texto serve como uma introdução didática e clara, desmistificando o conceito e mostrando a sua utilidade para além da teoria. O objetivo é apresentar a lógica por trás da unidade imaginária e as operações básicas, demonstrando como os números complexos expandem nossa capacidade de resolver problemas matemáticos que a matemática real, por si só, não consegue abordar.

Em segundo lugar, o texto se aprofunda para se tornar uma ferramenta valiosa para universitários e profissionais das ciências exatas. Para esse público, o foco é nas aplicações práticas. São explorados exemplos concretos em áreas diversas. O objetivo é demonstrar como essa poderosa ferramenta matemática simplifica a análise de fenômenos complexos, tornando-se essencial para o desenvolvimento de soluções tecnológicas e científicas.

Por fim, este trabalho também se destina a educadores e pesquisadores que buscam material de apoio. A proposta é oferecer uma ponte entre a teoria e a prática, apresentando as aplicações de forma concisa e inspirando a exploração de temas mais avançados, como a análise complexa, e suas diversas ramificações. Em suma, este trabalho busca ser um guia, que conduz o leitor do conceito básico à aplicação avançada, reforçando que os números complexos são mais do que uma abstração, eles são um pilar fundamental da ciência e das engenharias modernas.

2. A SOLUÇÃO DA FORMAÇÃO CÚBICA.

2.1. A SOLUÇÃO CÚBICA.

Os matemáticos da época de del Ferro sabiam que a equação cúbica geral poderia ser simplificada para um dos dois casos chamados de equação cúbica reduzidas, para números positivos $\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}$ ***e*** $\boldsymbol{x}$.

$$x^3 = px + q$$

O termo em x^2, sempre pode ser removido tomando $x = x' + a$ para uma constante apropriada a. Embora não se saiba hoje com certeza qual método del Ferro usou, pensa-se que ele usou o fato de que $x = \sqrt{a + \sqrt{b}} + \sqrt{a - \sqrt{b}}$, resolve a equação $x^2 = \left(2\sqrt{a^2 - b^2}\right)x + 2a$, conjeturar que $x = \sqrt[3]{a + \sqrt{b}} + \sqrt[3]{a - \sqrt{b}}$, resolve $x^3 = \left(3\sqrt[3]{a^2 - b^2}\right)x + 2a$. Isso acabou sendo verdade. Então, com a substituição apropriada de parâmetros, pode-se derivar uma solução para a cúbica reduzida:

$$x = \sqrt[3]{\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}$$

Há conjecturas sobre se del Ferro trabalhou em uma solução para a equação cúbica como resultado do curto mandato de Luca Pacioli na Universidade de Bolonha em 1501-1502. Pacioli havia declarado anteriormente na *Summa de arithmetica* que acreditava que uma solução para a equação era impossível, alimentando um amplo interesse na comunidade matemática. Não se sabe se Scipione del Ferro resolveu os dois casos ou não.

No entanto, em 1925, manuscritos foram descobertos por Bortolotti que continham o método de del Ferro e fez Bortolotti suspeitar que del Ferro havia resolvido ambos os casos. Cardano, no livro *Ars Magna* (publicado em 1545) afirma que foi del Ferro o primeiro a resolver a equação cúbica e que a solução seria através do método de del Ferro. Girolamo Cardano desenvolveu uma fórmula para resolver equações cúbicas reduzida $x^3 + px + q = 0$, que é dada por:

$$x = \sqrt[3]{\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{\frac{q}{2} - \sqrt[3]{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}}$$

Observação:

Existem dois problemas os quais levaram Cardano a resolver a solução cúbica que seriam determinar dois números cuja soma é 10 e o produto é 40, e também sobre determinar a solução da equação que possui uma cúbica e uma reta, ou seja, $x^3 = 15x + 4$. A fórmula não é dele. Cardano a divulgou em forma de poema, apenas.

A seguir, reproduzimos os versos na sua versão original, tal como transcritos na página 120 da edição de 1554 dos Quesiti [6]:

"1. Quando che'l cubo con le cose appreso
Se aggaglia a qualque número discreto
Trovati due altri differenti in esso
2. Depoi terrai questo por consueto
Che'l lor produtto sempre sia eguale
Al terzo cubo delle cose neto
3. El resíduo poi suo generale
Delli lor lati cubi ben sostratti
Verra Ia tua cosa principale
4. In el secondo de coiesti aiti
Quando che'l cubo restasse lui solo
Tu osserverai quesfaltri contratti
5. Del número farai due, tal parfa volo
Cha l'uno e l'altro si produca schietto
El terzo delle cose in stelo
6. Delle qual poi, per commun precetto
Torrai li lati cubi incieme gionti
Et cotai somma será il tuo concetto
7. El terzo poi de questi nostri conti
Se solve con secondo, se ben guardi
Che ser natura son quasi congiontri

8. Questi trovai, et non con passi tardi
nel mille cinquecento quatro et trinta
Nella città dal maré intorno centa."

Uma tradução para o português ficaria, mais ou menos, assim:

"1. Quando o cubo com a coisa em apreço
Se igualam a qualquer número discreto
Acha dois outros diferentes nisso
2. Depois terás isto por consenso
Que seu produto seja sempre igual
Ao cubo do terço da coisa certo
3. Depois, o resíduo geral
Das raízes cúbicas subtraídas
Será tua coisa principal
4. Na segunda destas operações,
Quando o cubo estiver sozinho
Observarás estas outras reduções
5. Do número farás dois, de tal forma
Que um e outro produzam exatamente
O cubo da terça parte da coisa
6. Depois, por um preceito comum
Toma o lado dos cubos juntos
E tal soma será teu conceito
7. Depois, a terceira destas nossas contas
Se resolve como a segunda, se observas bem
Que suas naturezas são quase idênticas
8. Isto eu achei, e não com passo tardo
No mil quinhentos e trinta e quatro
Com fundamentos bem firmes e rigorosos
Na cidade cingida pelo mar."

2.2. A DEDUÇÃO DA FÓRMULA.

Temos que, $x^3 = px + q$. Note que:

$$(\mu + v)^3 = \mu^3 + 3\mu^2 v + 3\mu v^2 + v,$$

ou seja,

$$(\mu + v)^3 = 3\mu v.(\mu + v) + (\mu^3 + v^3).$$

Fazendo, $x = \mu + v$, obtemos:

$$x^3 = 3\mu v.x + (\mu^3 + v^3)$$

Assim, comparando com a primeira equação temos:

$$3\mu v = p \text{ e } \mu^3 + v^3 = q$$

Com isso, Cardano conseguiu algumas conclusões:

$$3\mu v = p \Rightarrow \mu = \frac{p}{3v}$$

Como, $\mu^3 + v^3 = q$, temos:

$$\left(\frac{p}{3v}\right)^3 + v^3 = q$$

$$\frac{p^3}{3v^3} + v^3 = q$$

Multiplicando por v^3, obtemos:

$$\left(\frac{p}{3}\right)^3 + v^6 = qv^3$$

$$v^6 - qv^3 + \left(\frac{p}{3}\right)^3 = 0$$

$$(v^3)^2 - q.(v^3) + \left(\frac{p}{3}\right)^3 = 0$$

Logo, também Cardano percebeu que poderia fazer algumas modificações e utilizando $v^3 = t$, ele obteve o seguinte:

$$t^2 - q.t + \left(\frac{p}{3}\right)^3 = 0$$

Logo;

$$t = \frac{q \pm \sqrt{(-q)^2 - 4.1.\left(\frac{p}{3}\right)^3}}{2.1}$$

$$t = \frac{q}{2} \pm \sqrt{\frac{q^2 - 4.\left(\frac{p}{3}\right)^3}{4}}$$

$$t = \frac{q}{2} \pm \sqrt{\frac{q^2}{4} - \frac{4}{4}\left(\frac{p}{3}\right)^3}$$

Chegando ao seguinte resultado;

$$t = \frac{q}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right) - \left(\frac{p}{3}\right)^3}$$

Assim, Cardano, usando o método citado anteriormente, substituir $v^3 = t$, prosseguiu com seus estudos e chegou à conclusão que:

$$v^3 = \frac{q}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 - \left(\frac{p}{3}\right)^3}$$

$$v = \sqrt[3]{\left(\frac{q}{2}\right) + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 - \left(\frac{p}{3}\right)^3}} \quad \text{e} \quad \mu = \sqrt[3]{\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 - \left(\frac{p}{3}\right)^3}}$$

Logo o nosso $\mu + v$, seria:

$$x = \sqrt[3]{\left(\frac{q}{2}\right) + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 - \left(\frac{p}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 - \left(\frac{p}{3}\right)^3}}$$

Um fato interessante é que, muitas vezes, essa fórmula descreve um resultado como a soma de duas raízes cúbicas de números complexos. Todavia, ao serem calculadas, as partes imaginárias somadas se anulam, entregando como soma um número real.

Esse fato um tanto quanto intrigante à época foi um forte estopim para o desenvolvimento investigação acerca de números inicialmente tidos como gambiarras para a resolução de problemas ou números imaginários e, posteriormente, formalizados como um novo conjunto de números sobre os reais se visto como espaço vetorial, mas pode ser visto como um corpo por si só. (PESIC, 2003, p. 35)

Vejamos um exemplo na prática sobre a dedução de Cardano:

1- Resolvendo a equação cúbica $x^3 = 6x + 9$.

Solução:

Temos que, $p = 6$ *e* $q = 9$*, logo:*

$$\left(\frac{q}{2}\right) - \left(\frac{p}{3}\right)^3 = \left(\frac{9}{2}\right)^2 - \left(\frac{6}{3}\right)^3 = \frac{81}{4} - 8 = \frac{81}{4} - \frac{32}{4} = \frac{49}{4}$$

Contudo;

$$\frac{q}{2} = \frac{9}{2} \qquad e \qquad \frac{p}{3} = \frac{6}{3} = 2$$

Então, para encontrar μ *e* v*, utilizamos:*

$$\mu = \sqrt[3]{\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 - \left(\frac{p}{3}\right)^3}}$$

$$\mu = \sqrt[3]{\frac{9}{2} + \sqrt{\frac{81}{4} - 8}}$$

$$\mu = \sqrt[3]{\frac{9}{2}\sqrt{\frac{49}{4}}}$$

$$\mu = \sqrt[3]{\frac{9}{2} + \frac{7}{2}} = \sqrt[3]{\frac{16}{2}} = \sqrt[3]{8} = 2$$

E para o v;

$$v = \sqrt[3]{\frac{9}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 - \left(\frac{p}{3}\right)^3}}$$

$$v = \sqrt[3]{\frac{9}{2} - \frac{7}{2}} = \sqrt[3]{\frac{2}{2}} = 1$$

Então;

$$x = \mu + v$$

$$x = 2 + 1$$

$$x = 3$$

Determinando assim, a solução real da equação $x^3 = 6x + 9$. *E o valor seria de* $x = 3$.

2.3. RESOLVENDO A EQUAÇÃO CÚBICA.

Considerando a equação $x^3 = 15x + 4$, temos:

$$\frac{q}{2} = \frac{4}{2} = 2 \quad \text{e} \quad \frac{p}{3} = \frac{15}{3} = 5$$

$$\left(\frac{q}{2}\right)^2 - \left(\frac{p}{3}\right)^3 = 2^2 - 5^3 = 4 - 125 = -121$$

Para o cálculo de μ, encontramos;

$$\mu = \sqrt[3]{\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 - \left(\frac{p}{3}\right)^3}}$$

$$\mu = \sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}}$$

E, para determinar v, obtemos;

$$v = \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}}$$

Nessa resolução, Bombeli se deparou com a $\sqrt{-121}$, mas acreditando que fazia sentido, continuou o cálculo, escrevendo;

$$\sqrt{-121} = \sqrt{121.(-1)} = \sqrt{121}.\sqrt{-1} = 11.\sqrt{-1}$$

Como se fosse números reais. Ele percebeu que;

$$\left(2 + \sqrt{-1}\right)^3 = 8 + 12\sqrt{-1} - 6\text{-}\sqrt{-1} = 2 + 11\sqrt{-1}$$

e

$$\left(2 - \sqrt{-1}\right)^3 = 8 - 12\sqrt{-1} - 6 + \sqrt{-1} = 2 - 11\sqrt{-1}$$

Procedendo com esse entendimento e acreditando que os cálculos realizados faziam sentido, determinamos μ e v, assim;

$$\mu = \sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} = \sqrt[3]{2 + 11\sqrt{-1}} = \sqrt[3]{(2\sqrt{-1})^3} = 2 + \sqrt{-1}$$

e

$$v = \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}} = \sqrt[3]{2 - 11\sqrt{-1}} = \sqrt[3]{(2 - \sqrt{-1})^3} = 2 - \sqrt{-1}$$

Portanto;

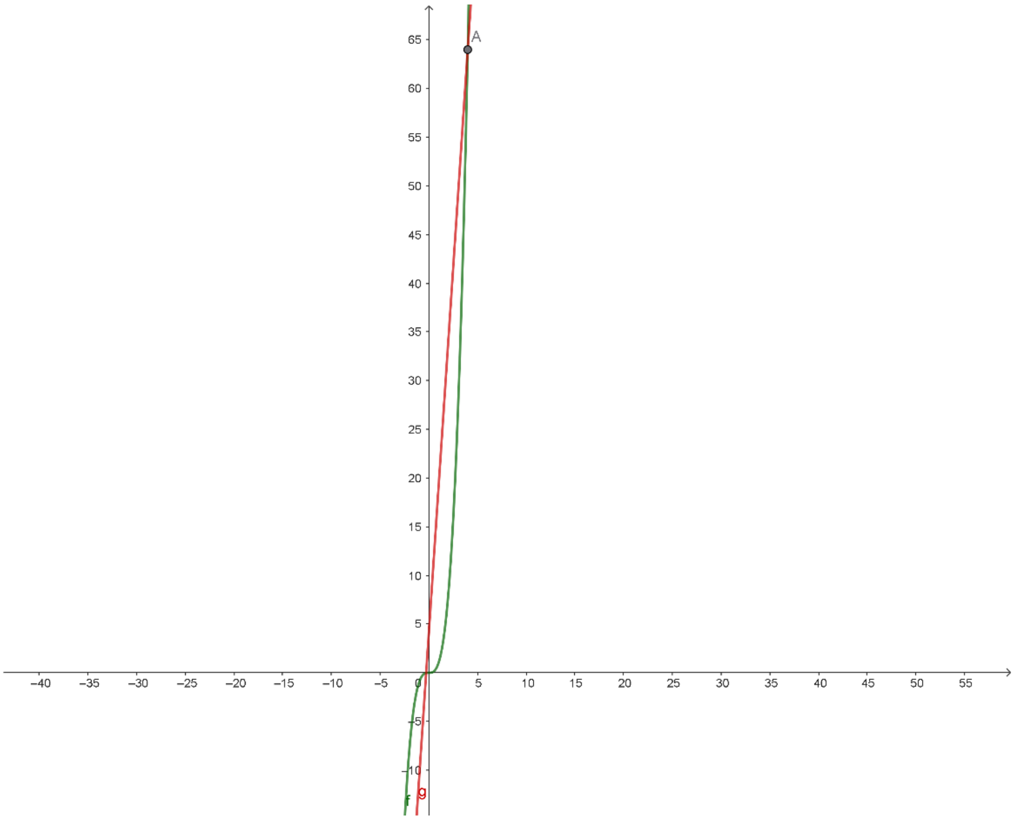
$$x = \mu + v$$

Logo;

$$x = \left(2 + \sqrt{-1}\right) + \left(2 - \sqrt{-1}\right)$$

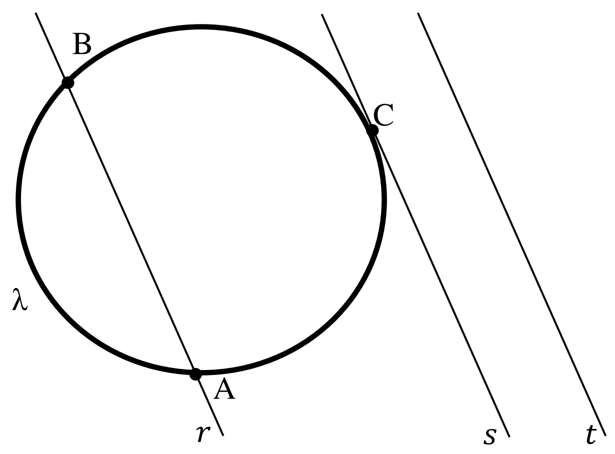
Resultando $x = 4$, que é a solução real da equação $x^3 = 15x + 4$.

É importante notar que para equação $x^3 = 15x + 4$, se tiver $f(x) = x^3$ e $g(x) = 15x + 4$ e construirmos os seus gráficos, notamos que a solução real é $x = 4$, e Bombelli tinha razão, pois encontrou a solução real, que para a época era o que fazia sentido.
De fato: $f(x) = 4^3 = 64$ e $g(x) = 15.4. +4 = 64$.



3. NÚMEROS COMPLEXOS NA GEOMETRIA.

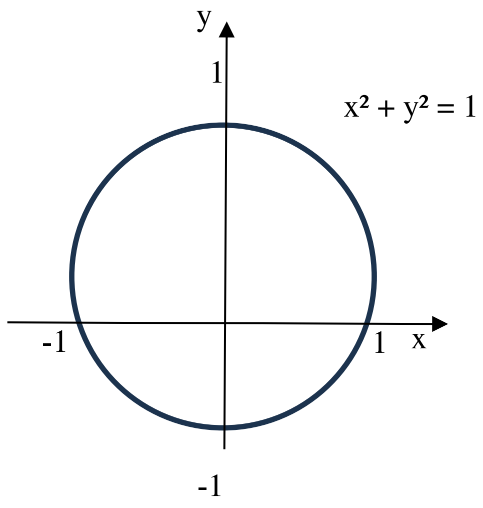
A ideia que temos de números complexos é que foram criados para resolver problemas de equação que até então não haviam soluções, como já citado antes, em que delta era negativo e esses tipos de problemas surgiram na geometria analítica no estudo da posição relativa entre reta e circunferência, ou seja, verificar se a reta intercepta em um ponto, corta em dois pontos ou não a circunferência.

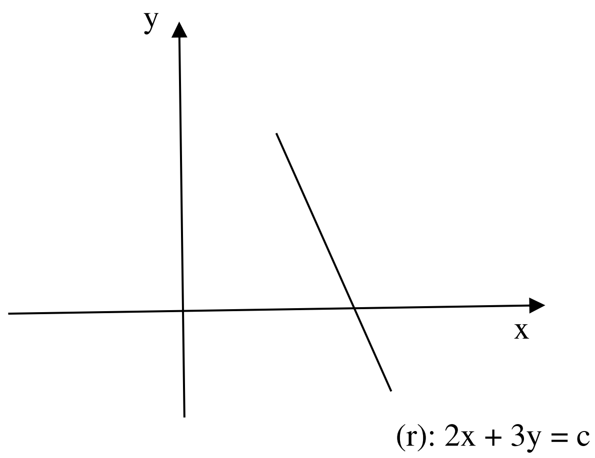


Com, $\lambda \cap r = \{A, B\}$ secantes, $\lambda \cap s = \{c\}$ tangentes, $\lambda \cap t = \{\}$ Exteriores. Para determinarmos essa intercessão resolvermos um sistema que recai sobre uma equação do segundo grau. r

Vejamos alguns exemplos:

Se considerarmos a circunferência $(\lambda): x^2 + y^2 = 1$ e a reta $(r): 2x + 3y = c$.

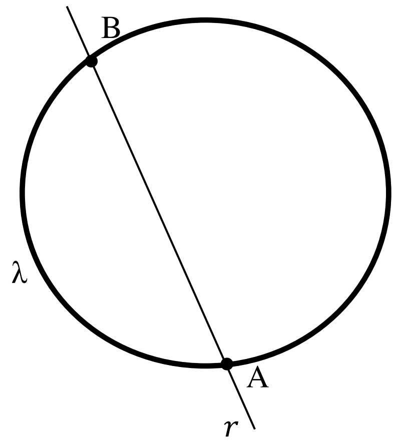




Determinando o valor de $x,$ temos:

$$x = \frac{c - 2y}{3}$$

Se $c = 2$, teremos;



x² + y² = 1 e x= $\frac{2-3y}{2}$

Com:

$$\frac{4 - 12y + 9y^2}{4} + y^2 = 1$$

$$4 - 12y + 9y + 4y^2 = 4$$

$$13y^2 - 12y = 0$$

Logo;

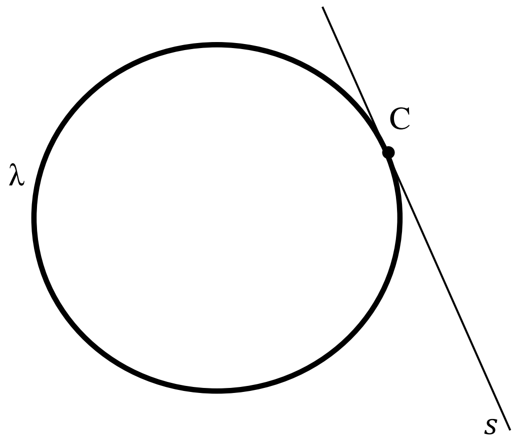
$$y = 0 \; ou \; y = \frac{12}{13}$$

Contudo, se $y = 0$, temos que $x = 1$, logo, $A(1{,}0)$ e se $y = \frac{12}{13}$, temos que $x = \frac{-5}{13}$, logo:

$$B = \left(\frac{-5}{13}, \frac{12}{13}\right).$$

Portando, as curvas $\lambda \; e \; r$ são secantes.

Se **C=** $\sqrt{\mathbf{13}}$, então;



$$\mathbf{x^2 + y^2 = 1} \quad \mathbf{e} \quad \mathbf{x= \frac{\sqrt{13}-3y}{2}}$$

Com, $13 - 6\sqrt{13y} + 9y^2 + 4y^2 = 4$, logo:

$$13y^2 - 6\sqrt{13y} + 9 = 0$$

Assim;

$$y = \frac{6\sqrt{13} \pm 0}{26}$$

Daí;

$$y = \frac{2\sqrt{13}}{13} \quad \text{e} \quad x = \frac{7\sqrt{13}}{26}$$

De onde concluímos que o ponto C é $\left(\frac{7\sqrt{13}}{26}, \frac{2\sqrt{13}}{13}\right)$ e as curvas $\lambda\ e\ s$ são tangentes.

Se **C= 5** , então $x^2 + y^2 = 1$ e $x = \frac{5-3y}{2}$, temos:

$$\left(\frac{5-3y}{2}\right)^2 + y^2 = 1$$

$$25 - 30y + 9y^2 + 4y^2 = 4$$

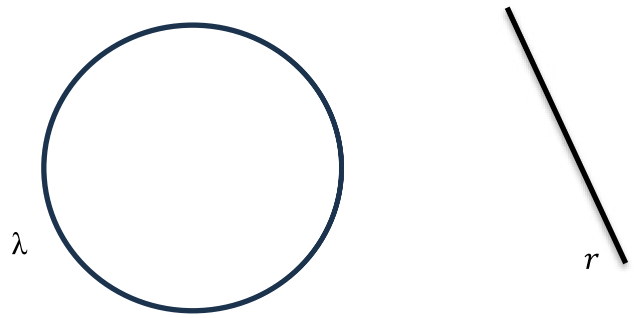
$$13y^2 - 30y + 21 = 0$$

Resolvendo a equação do segundo grau, obtemos:

$$\Delta = (-30)^2 - 4.13.21$$

$$\Delta = -192$$

Com $\Delta < 0$. Então, as curvas λ e $t$são exteriores.



Observe que esse problema geométrico não possui solução.

4. CARDANO E O ARS MAGNA.

Como citado antes, Girolamo Cardano foi um dos primeiros matemáticos a lidar com números complexos, embora de forma hesitante. Em seu livro Ars Magna (CARDANO, 1545), ele apresentou a fórmula geral para a solução de equações cúbicas, que às vezes levava a expressões envolvendo raízes quadradas de números negativos. Isso o obrigou a considerar essas quantidades, mas ele próprio as chamou de "sofisticadas" e não acreditava que tivessem um significado real. Mesmo sem compreender totalmente seu significado, Cardano reconheceu que essas expressões eram úteis para resolver certos problemas algébricos. No entanto, foi Rafael Bombelli quem posteriormente desenvolveu uma interpretação mais estruturada dos números complexos, mostrando como manipulá-los corretamente.

Ars Magna, de Girolamo Cardano, é uma das obras mais importantes da história da álgebra. Seu título completo é Ars Magna sive de Regulis Algebraicis (A Grande Arte, ou Sobre as Regras da Álgebra), e nele Cardano apresenta métodos sistemáticos para resolver equações polinomiais, em particular as cúbicas e quárticas e teve como principais Contribuições:

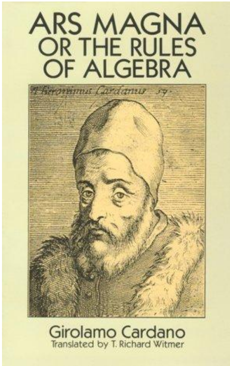
I. Solução das equações cúbicas: Cardano publicou a famosa fórmula para resolver equações cúbicas, que aprendeu com Niccolò Tartaglia. Essa descoberta foi um marco na matemática renascentista.

II. Solução das equações quárticas: Ele também incluiu a solução para equações do quarto grau, desenvolvida por seu aluno Lodovico Ferrari.

III. Primeiro contato com números complexos: Durante o processo de resolução das cúbicas, surgiam raízes quadradas de números negativos, algo que Cardano mencionou, mas não compreendeu plenamente.

IV. Sistema algébrico mais estruturado: Ele introduziu notações mais organizadas e discutiu a ideia de que equações deveriam ter múltiplas raízes.

Apesar de sua relutância com os números complexos, Ars Magna abriu caminho para o estudo sistemático da álgebra e influenciou gerações de matemáticos.



(Figura 4 - Ars magna or The Rules of Algebra – 1545 em https://m.media-amazon.com/images/I/51WMXJ338YL._SY466_.jpg)

De Cardano, 1545, na época do renascimento, era tido como problema, a existência dos números x e y, tais que $x + y = 10$ e $x.y = 40$. Veja:

$$x + y = 10 \rightarrow y = 10 - x$$

$$x.y = 40$$

$$x.(10 - x) = 40$$

$$-x^2 + 10x - 40 = 0$$

Multiplicando por (-1):

$$x^2 - 10x - 40 = 0$$

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

$$\Delta = 100 - 1160$$

$$\Delta = -60$$

Veja que $\Delta < 0$. Encontrando o x.

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$x = \frac{10 \pm \sqrt{4.(-15)}}{2}$$

$$x = 5 \pm \sqrt{-15}$$

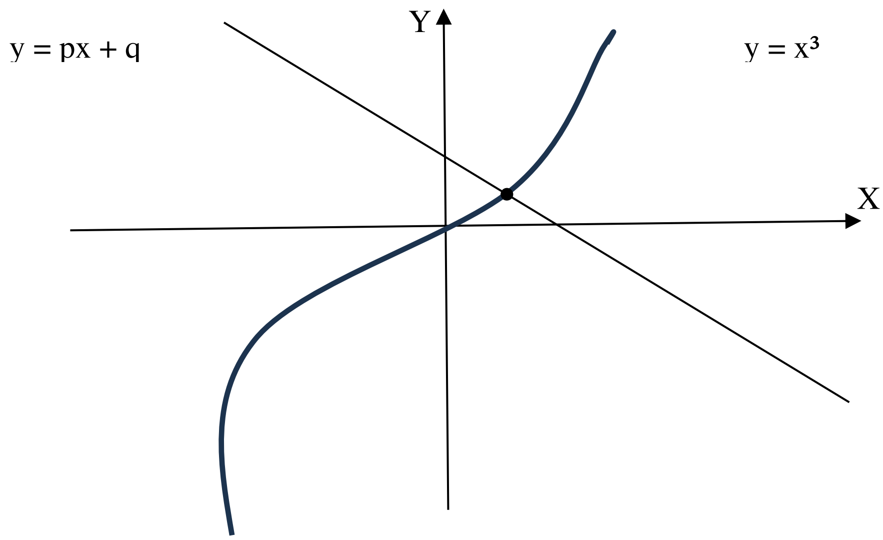
Logo;

$$x = 5 - \sqrt{-15} \quad \text{e} \quad y = 5 + \sqrt{-15}$$

Note que;

$$\begin{cases} x + y = 10 \\ x.y = 25 - (-15) \\ x.y = 40 \end{cases}$$

No livro, Ars Magna, Cardano começou a busca pela resolução da equações cúbicas na forma $x^3 = px + q$. Graficamente, tem-se:



Diferente do caso da circunferência e da reta, neste caso temos sempre uma solução porque nossa reta sempre cortará a raiz cúbica. Assim, Cardano desenvolveu a seguinte ideia para resolver a equação cúbica $x^3 = px + q$, pois toda equação do terceiro grau pode ser escrita dessa forma. Com isso, podemos obter a sua resolução. Sabemos que:

$$(\mu + v)^3 = \mu^3 + 3\mu^2 v + 3\mu v x^2 + v^3,$$

ou ainda,

$$(\mu + v) = 3\mu v.(\mu + v) + (\mu^3 + v^3).$$

Comparando com o resultado acima a equação cúbica, temos:

$$3\mu v = p \quad e \quad \mu^3 + v^3 = q$$

Onde $x = \mu + v$ é a nossa solução da equação $x^3 = px + q$.

Como, $3\mu v = p \rightarrow v = \frac{p}{3\mu}$ e, substituindo em $\mu^3 + v^3 = q$, obtemos:

$$\mu^3 + \left(\frac{p}{3\mu}\right)^3 = q$$

$$\mu^3 + \left(\frac{p}{3}\right)^3 . \frac{1}{\mu^3} = q$$

.

Ou seja;

$$\mu^6 + \left(\frac{p}{3}\right)^3 = q\mu^3$$

$$\mu^6 - q\mu^3 + \left(\frac{p}{3}\right)^3 = 0$$

Que é uma equação biquadrada.

Fazendo $\mu^3 = t$, temos:

$$t^2 - qt + \left(\frac{p}{3}\right)^3 = 0$$

Que é uma equação do segundo grau na variável t, obtemos:

$$t = \frac{q \pm \sqrt{q^2 - 4.\left(\frac{p}{3}\right)^3}}{2}$$

Reescrevendo, temos;

$$t = \frac{q}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 - \left(\frac{p}{3}\right)^3}$$

Como $\mu^3 = t \rightarrow \mu = \sqrt[3]{t}$, logo:

$$\mu = \sqrt[3]{\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 - \left(\frac{p}{3}\right)^3}} \quad \text{e} \quad v = \sqrt[3]{\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 - \left(\frac{p}{3}\right)^3}}$$

Como $x = \mu + v$, temos que:

$$x = \sqrt[3]{\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 - \left(\frac{p}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 - \left(\frac{p}{3}\right)^3}}$$

A qual seria a forma resolutiva da equação $x^3 = px + q$.

4.1. A CONSTRUÇÃO DO CONJUNTO NÚMEROS COMPLEXOS.

Os números complexos, como já citado antes, é todo número na forma $z = x + yi$, com $x\ e\ y \in \mathbb{R}$ e $i^2 = -1$. Temos que;

$x \rightarrow$ É a parte real de $z, \left(\mathbb{R}_{(z)} = x\right)$

$y \rightarrow$ É parte imaginária de $z, (Im_{(z)} = y)$

$i \rightarrow$ É Unidade imaginária de z.

Conjunto dos números complexos, identificado com o plano $\mathbb{R}^2 = \{(x, y); x, y \in \mathbb{R}\}$. Vamos fazer a seguinte identificação:

$$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2(\mathbb{C})$$
$$(x, y) \leftrightarrow f(x, y) = x + yi = z, \text{ onde } i^2 = -1$$

Dessa forma, o conjunto dos números complexos $\mathbb{C}$, pode ser definido como $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$, com as três operações: Adição, Subtração e Divisão.. Considerando $z_1 = x_1 + y_1 i$ e $z_2 = x_2 + y_2 i$, definimos:

I- Adição:

$$z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + (y_1 + y_2)i$$

II- Multiplicação:

$$z_1 . z_2 = (x_1 . x_2 - y_1 . y_2) + (x_1 . y_2 + x_2 . y_1)i$$

III- Divisão:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1}{z_2} . \frac{\bar{z}_2}{\bar{z}_2}$$

É importante lembrar também que:

1°) $i^2 = i.i = (0,1).(0,1) = (0.0 - 1.1, 0.1 + 1.0) = (-1,0) = -1$

2°) $(-i)^2 = [(-1).i]^2 = (-1)^2.i^2 = 1.(-1) = -1$

Logo, os números complexos $-i$ e i podem ter operações equivalentes.

3°) Note que:

$$(x - yi).(x + yi) = x^2 + xyi - xyi + y^2 = (x^2 + y^2) + 0i = x^2 + y^2 \in \mathbb{R}.$$

Se $x + yi = 0,$ temos também:

$$(x + yi).(x - yi) = x^2 + y^2$$

Então:

$$x^2 + y^2 = 0$$

$$x = y = 0$$

A única expressão da forma $x + yi$ para ser zero é da forma $0 + 0i$.

Vejamos alguns exemplos:

1) Dado dois números complexos, $z_1 = 6 + 5i$ e $z_2 = 2 - i$, calcule a soma.
   Solução:
   $$(6 + 5i) + (2 - i) = 6 + 2 + 5i - i = 8 + (5 - 1)i = 8 + 4i$$
   Portando $z_1 + z_2 = 8 + 4_i$

2) Determine a divisão entre os números complexos $z_1 = 1 + 5i$ e $z_2 = 3 + 2i$.
   Solução:
   Calculando o quociente de $\frac{1+5i}{3+2i}$, *como o conjugado de* $3 + 2i$ *é* $3 - 2i$ *temos:*
   $$\frac{1 + 5i}{3 + 2i} = \frac{1 + 5i}{3 + 2i}.\frac{3 - 2i}{3 - 2i}$$
   $$= \frac{3 - 2i + 5i - 10i^2}{3^2 + 2^2}$$
   $$= \frac{13 + 13i}{13} = 1 + i$$

3) Multiplique os números complexos $z_1 = 2 + 5i$ e $z_2 = 1 - 2_i$.

Solução:

$$(2 + 5i).(1 - 2i) = 2 - 4i + 5i - 10i^2.$$

Considerando que $i^2 = -1$, *temos:*

$$2 - 4i + 5i + 10 = 12 + i$$

4.2. IGUALDADE DE DOIS NÚMEROS COMPLEXOS.

Sejam:

$$z_1 = x_1 + y_1 i \quad \text{e} \quad z_2 = x_2 + y_2 i$$

Temos;

$$z_1 = z_2, x_1 = x_2 \; e \; y_1 = y_2$$

$$z_1 = z_2, z_1 - z_2 = 0$$

$$(x_1 + y_1 i) - (x_2 + y_2 i) = 0$$

$$(x_1 - x_2) + (y_1 - y_2)i = 0$$

Com isso;

$$x_1 - x_2 = 0$$

$$x_1 = x_2$$

e

$$y_1 - y_2 = 0$$

$$y_1 = y_2$$

Concluindo-se assim a igualdade para dois números complexos, ou seja, para que dois números complexos sejam iguais é necessário que as partes reais sejam iguais e, também as partes, imaginárias sejam iguais.

4.3. POTÊNCIAS DE NÚMEROS COMPLEXOS.

O número imaginário i é definido como a raiz quadrada de -1, ou seja: $\sqrt{-1}$. As potências de i são os resultados dessa base elevada a um expoente qualquer (n), sendo n um número natural i^n. O número i, também conhecido como unidade imaginária, está incluído no conjunto dos números complexos, uma vez não ser possível classificá-lo como um número real. Perceba que não existe um número real que multiplicado por si, resulte em -1.

As potências de i seguem um padrão cíclico, simplificando seu cálculo para qualquer expoente n. Esse padrão se repete a cada quatro expoentes.

i^n	Cálculo	Potência de i
i^0	$i^0 = 1$	1
i^1	$i^1 = i$	i
i^2	$Se\ i = \sqrt{-1}, então\ i^2 = -1$	-1
i^3	$i^3 = i^2 . i^1 = -1 . i = -i$	$-i$
i^4	$i^4 = i^3 . i^1 = -i . i = -i^2 = -(1) = 1$	1
i^5	$i^5 = i^2 . i^1 . i^2 = (-1) . i . (-1) = i$	i
i^6	$i^6 = i^2 . i^2 . i^2 = (-1) . (-1) . (-1) = -1$	-1
i^7	$i^7 = i^2 . i^2 . i^2 . i = (-1) . (-1) . (-1) . i = -i$	$-i$

Propriedade:

Se $n \in \mathbb{Z}$ e r é o resto da divisão de n por 4, então $i^n = i^r$.

Prova:

Considerando $n \in \mathbb{Z}$. Como as potências de i, ou seja, se repetem de quatro em quatro, temos que:

$$\begin{array}{c|c} n & 4 \\ \hline r & q \end{array}$$

Logo, $n = 4q + r$, onde $r \in \{0,1,2,3\}$.

Assim;

$$i^n = i^{4q+r},$$

ou seja,

$$i^n = i^{4q} . i^r = (i^4)^q . i^r = 1^q . i^r = 1 . i^r = i^r$$

Vejamos esse exemplo:

Calcular a potência de i, quando $n = 243$.

Solução:

$$i^{243} = ?$$

Resolvendo a divisão, temos:

$$\begin{array}{r|l} 243 & 4 \\ \cline{2-2} \underline{-003} & 60 \\ 3 & \end{array}$$

Logo;

$$243 = 60.4 + 3$$

Então;

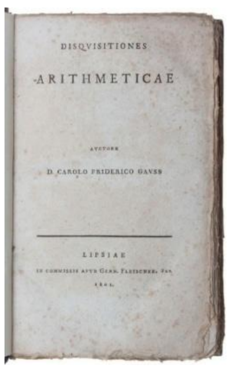
$$i^{243} = i^3 = -i$$

5. COMPLEXOS NO PLANO CARTESIANO (PLANO COMPLEXO).

Johann Carl Friedrich Gauss, conhecido popularmente como o “príncipe dos matemáticos”, foi uma referência incontornável na matemática, na geometria, na física e na astronomia. Entre as suas maiores conquistas acadêmicas está a invenção do telégrafo. Carl Friedrich Gauss nasceu no dia 30 de abril de 1777 em Brunswick, na Alemanha.

(Figura 5 - Johann Carl Friedrich Gauss em https://tse1.mm.bing.net/th/id/OIP.dJUZOZBbgz62oIUCoKFzSQHaEK?pid=Api&P=0&h=180)

Em 1796, o matemático descobriu um método para desenhar um heptadecágono (um polígono de 17 lados) apenas com uma régua e um compasso. Esse foi um desafio que intrigou os pesquisadores durante mais de 2000 anos até ter sido solucionado por Carl Gauss. Em 1801, o intelectual publicou Disquisitiones Arithmeticae, um livro de matemática fundamental que reunia as suas principais ideias.

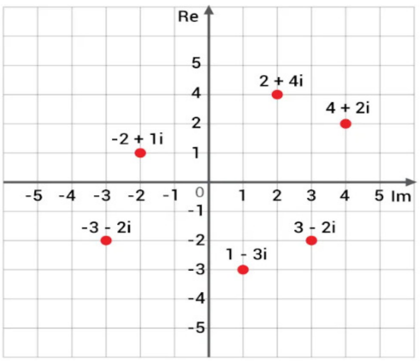


(Figura 6 - Disquisitiones Arithmeticae em https://i.pinimg.com/originals/d1/88/ea/d188eacf02200a81ba1df6b382764ef7.jpg)

No princípio do século XIX, deixou a aritmética para se dedicar exclusivamente a astronomia, o seu principal interesse no novo campo de estudo era acompanhar a órbita dos satélites. Como tinha também habilidades manuais, ajudou no aprimoramento de uma série de instrumentos para medição da luz e também das distâncias astronômicas (DUNNINGTON, 2004).

Durante a década de 1830, se juntou a uma série de pesquisadores que investigavam o magnetismo terrestre. Juntos, ele fizeram o primeiro levantamento mundial do campo magnético da Terra, que foi feito com um instrumento que Gauss havia recém inventado, o magnetômetro. Carl foi tão importante para esse campo do conhecimento que o seu sobrenome - Gauss - é usado para chamar uma unidade de medida magnética (NAHIN, 1998).

O plano de Argand-Gauss representa os números complexos em um plano, com o eixo horizontal, que é o eixo da parte real, e o eixo vertical, que é o eixo da parte imaginária. O plano de Argand-Gauss é formado por dois eixos: um vertical (conhecido como eixo imaginário) e um na horizontal (conhecido como eixo real). Nele é possível representar geometricamente números complexos que estão na forma algébrica.

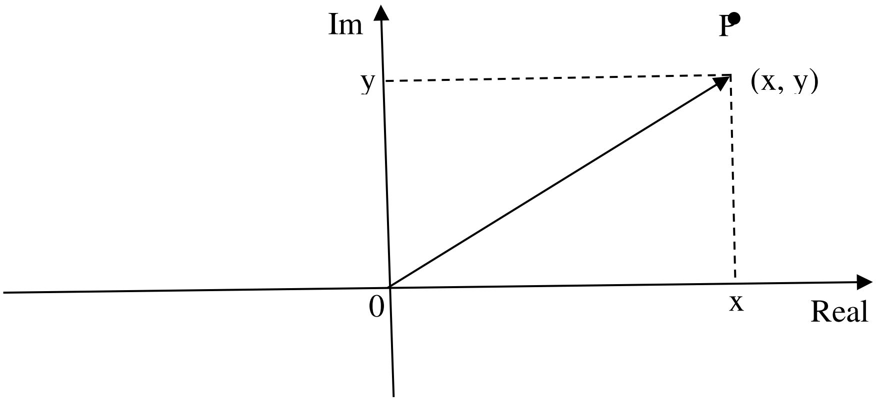


(Figura 7 - Plano de Ardend Gauss em https://s2.static.brasilescola.uol.com.br/be/2021/02/1-plano-de-argand-gauss.jpg)

Por meio dessa representação geométrica, é possível desenvolver alguns conceitos, como o módulo e o argumento de um número complexo. Os números complexos são representados algebricamente por $z = a + bi$, então eles são representados por pontos *(a, b)*, representação essa que recebe o nome de afixo.

5.1. CONSTRUIR O NÚMERO COMPLEXO.

Consideramos o seguinte: $z = x + yi$ ou $z = (x, y)$. Portando z no plano complexo, temos:



Na geometria analítica podemos considerar ou interpretar um número complexo z qualquer como:

I- Um ponto $\rightarrow x = (x, y) \quad (par\ ordenado)$;

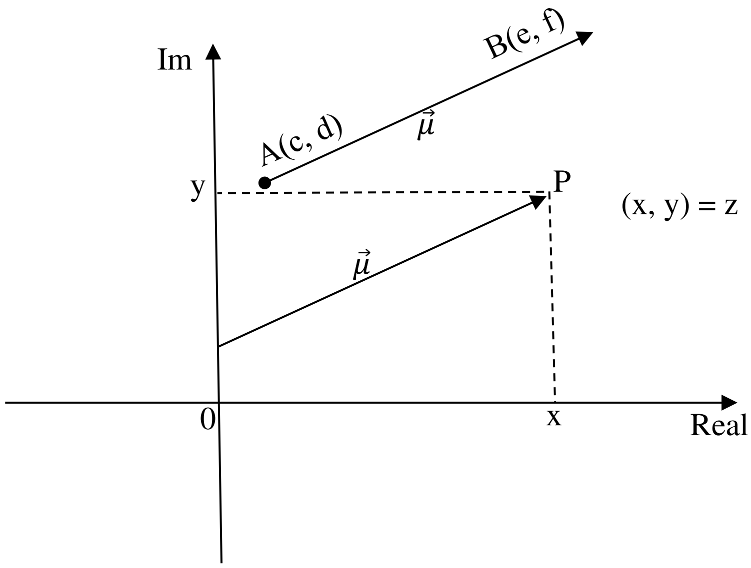
II- Uma seta → com origem 0 e extremidade no ponto P.

III- Vetor $\vec{z} = (x, y)$.

A representação geométrica de z é denominada de afixo.

Observação:

Veja a diferença de interpretar pares ordenados como ponto e vetor



$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{AB} \rightarrow (x, y) = (e - c, f - d) = \overrightarrow{AB}$$

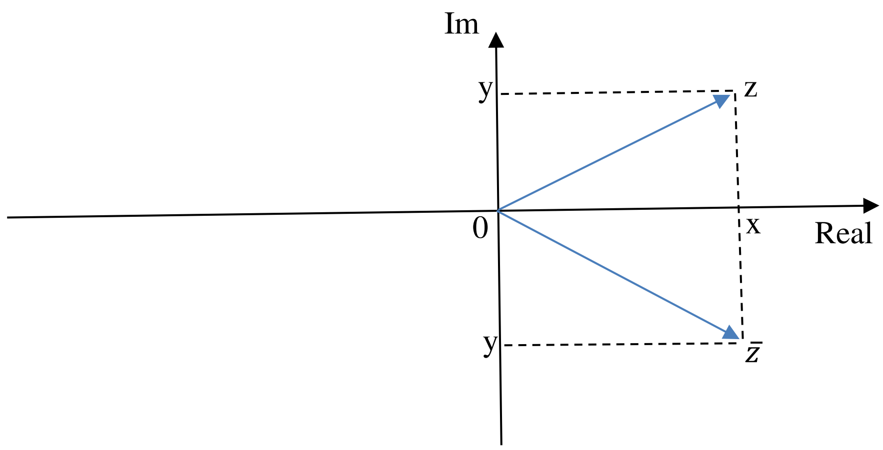
Temos que;

$$\|\mu\| = \|z\| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{OP}$ são equivalentes, com mesmos: Comprimento, Direção e Sentido.

5.1.1. CONJUGADO DE UM NÚMERO COMPLEXO.

Definimos o conjugado de um número complexo $z = x + yi$ é o número complexo que é denotado por $\bar{z}$, definido por: $\bar{z}$ = x – yi,



Veja que $\bar{z}$ é uma reflexão de z com relação ao eixo real. Propriedades:

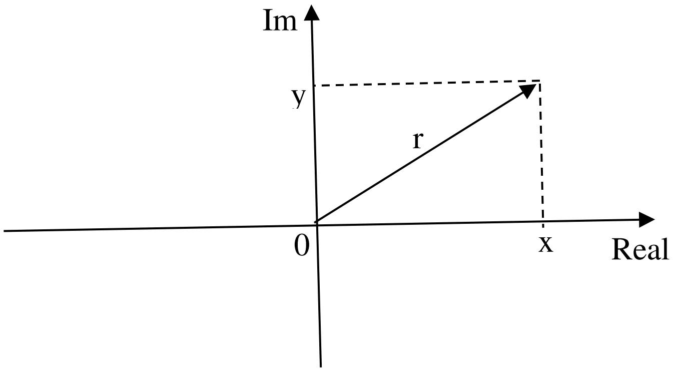
- $\bar{\bar{z}} = z, \forall z \in \mathbb{C}$;
- $\overline{z_1 + z_2} = \bar{z_1} + \bar{z_2}, \forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}$;
- $\overline{z_1 . z_2} = \bar{z_1} . \bar{z_2}, \forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}$;
- $\bar{z} = z, \bar{z} \in \mathbb{R}$ $(número\ real)$;
- $\bar{z} = -z, z \in \mathbb{R}_i$ $(imaginário\ puro)$.

5.1.2. RELAÇÃO IMPORTANTE DOS NÚMEROS COMPLEXOS.

Se $z = x + yi$, onde $x, y \ \in \mathbb{R}$, então;

$$z.\bar{z} = x^2 + y^2 \in \mathbb{R}$$

Temos duas formas de abordar o módulo de um número complexo, ambas apontando para a mesma definição, que é acerca do comprimento, ou da distância do afixo do número complexo até a origem do sistema de coordenadas. Vejamos o gráfico a seguir:



Temos que, $r = \|z\| \geq 0$ (distância).

Logo;

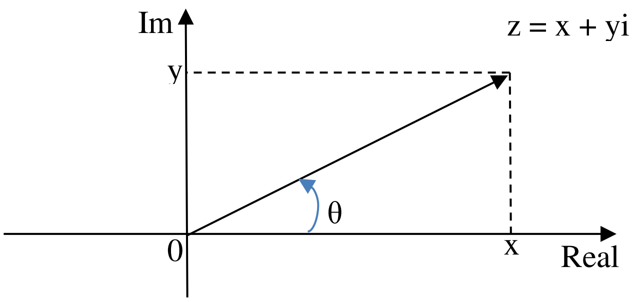
$$r^2 = x^2 + y^2 = \sqrt{x^2 + y^2} \quad \text{ou} \quad \|z\| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Ou seja;

$$r = \sqrt{z.\bar{z}}.$$

5.1.3. ARGUMENTO DE UM NÚMERO COMPLEXO.

Se temos, com $0 \leq \theta < 2\pi$ ou $0° \leq \theta < 360°$ e $\arg(z) = \theta$ o argumento de um número complexo é o ângulo θ formado com o eixo horizontal e o segmento de reta que liga a representação geométrica de um número complexo à origem do plano de Argand-Gauss. Dado um número complexo da forma x + yi, podemos representá-lo em sua forma geométrica como o ponto z(x, y).



$$\arg(z) = \theta \rightarrow argumento\ do\ número\ complexo\ z.$$

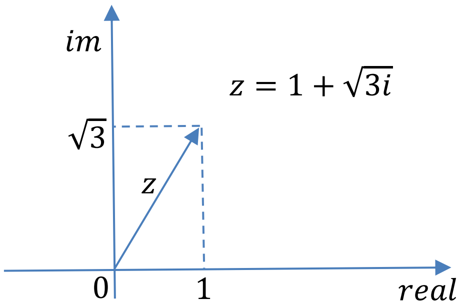
Aplicando as relações trigonométricas a um triângulo, obtemos:

$$\begin{cases} cos\theta = \dfrac{x}{r} \\ \\ sen\theta = \dfrac{y}{r} \end{cases}$$

$$tg\theta = \frac{y}{x}$$

Exemplo.

Veja como representar no plano complexo e determinar o argumento do número complexo $z = 1 + \sqrt{3i}$. Temos que $x = 1$ e $y = \sqrt{3}$. Logo;



$$\|z\| = \sqrt{1^2 + (\sqrt{3})^2} = 2$$

$$\begin{cases} cos\theta = \dfrac{1}{2} \\ sen\theta = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

Logo, $\arg(z) = 60°$ ou $\arg(z) = \frac{\pi}{3} rad$

6. FORMA POLAR OU TRIGONOMÉTRICA.

A forma polar dos números complexos, expressa como $r(cos\theta + i.sen\theta)$ e $re^{i\theta}$ surgiu no século XVIII como uma evolução natural da manipulação algébrica e geométrica dos números complexos. Seu desenvolvimento está ligado a uma transição na matemática, quando os estudiosos começaram a buscar representações mais intuitivas e eficientes para operar com esses números, especialmente em multiplicações e potências.

(Figura 8 - Matemático Abraham De Moivre em https://tse3.mm.bing.net/th/id/OIP.BhXHcXgRT1l3Ri2qROWopgAAAA?pid=Api&P=0&h=180)

Matemático francês nascido em Vitry, próximo a Paris, que fez carreira profissional na Inglaterra, onde foi professor particular e tornou-se um destacado pesquisador com grandes contribuições fora no campo da teoria das probabilidades, porém sem se tornar professor universitário por causa de sua nacionalidade. Após cinco anos na Academia Protestante em Sedan, foi estudar lógica em Saumur (1682-1684).

Indo para Paris, estudou no Collège de Harcourt, mas por causa de sua convicção religiosa fugiu para a Inglaterra (1685) após a revogação do Edito de Nantes e a conseqüente expulsão dos huguenotes. Foi eleito membro da Royal Society (1697), da Academia de Paris e da de Berlim, nas quais publicou vários trabalhos em seus periódicos (STIGLER, 1986).

Devido à sua amizade com Newton, integrou a comissão criada pela Royal Society (1710) para esclarecer a paternidade do cálculo entre seu amigo e Leibniz. Pioneiro do desenvolvimento de geometria analítica e a teoria de probabilidade, publicou o célebre Doctrine of Chances (1718), sobre a teoria do acaso, onde expôs a definição de independência estatística junto com muitos problemas com dados e outros jogos. Também pesquisou estatísticas de mortalidade e a fundou a teoria de anuidades.

Outra grande publicação no assunto foi Miscellanea analytica (1730), onde destacou o emprego da trigonometria na probabilidade. Neste livro apresentou uma fórmula injustamente atribuiu a Stirling, na qual ele usou para derivar a curva normal como uma aproximação para o binômio (1733). Na realidade Stirling contribuiu para a melhoria da fórmula na segunda edição do livro (1738).

A despeito de sua enorme produção e prestígio nos meios científicos da época morreu em condições de pobreza em Londres. O contexto da forma polar começa a tomar forma no final do século XVII com Abraham de Moivre (1667–1754). Em 1722, ele publicou o teorema que leva seu nome: **Fórmula de De Moivre** $(cos\theta + i\ sen\theta)^n = cos\ n\theta + i\ sen\theta$ (NAHIN, 1998).

Esse resultado, voltado para potências de números complexos, foi um marco inicial. Embora De Moivre não tenha explicitamente usado a forma polar como um sistema geral de representação, seu teorema sugeriu que operações com números complexos podiam ser simplificadas ao trabalhar com ângulos e magnitudes. Isso plantou a semente para a ideia de multiplicar módulos e somar argumentos, características centrais da forma polar. O trabalho de De Moivre foi motivado por problemas algébricos da época, como a resolução de equações e o cálculo de raízes, mas ele ainda operava em um contexto onde os números complexos não tinham uma interpretação geométrica clara ou uma notação unificada.

6.1. SÉCULO XVIII: EULER E A FORMALIZAÇÃO.

A grande mudança para a forma polar veio com Leonhard Euler no século XVIII. Em 1748, em uma de suas obras, Euler apresentou a fórmula $e^{i\theta} = cos\theta + i\ sen\theta$ que ligou exponenciais às funções trigonométricas. Essa descoberta foi bastante útil e mudou o cenário na época, porque transformou a representação $r(cos\theta + i\ sen\theta)$ em $re^{i\theta}$, mostrando que a multiplicação de dois números complexos na forma polar:

$$r_1e^{i\theta_1}.r_2e^{i\theta_2} = r_1r_2e^{i(\theta_1+\theta_2)}$$

Era simplesmente a multiplicação dos módulos e a soma dos ângulos.

(Figura 9 - Leonhard Euler em https://2.bp.blogspot.com/-JyxA1iukjJI/UNeP708lCXI/AAAAAAAAAtw/vTeZMsgywvc/s1600/Leonhard%2BEuler.jpg)

Leonhard Euler (1707-1783) foi um importante matemático e cientista suíço, foi considerado um dos maiores estudiosos da matemática, de sua época. Sua contribuição teve como um dos pilares a Introdução à Análise dos Infinitos, obra que constitui um dos fundamentos da matemática moderna.

O contexto da época era de intensa exploração da análise matemática. Euler, trabalhando em São Petersburgo e depois em Berlim, estava imerso em um ambiente de avanços na teoria das séries e funções. Sua fórmula surgiu como uma resposta elegante a problemas de manipulação de números complexos, que antes exigiam cálculos tediosos na forma retangular ($a + bi$). A forma polar, com essa base exponencial, tornou-se uma ferramenta prática e teoricamente rica.*(fonte: https://www.ebiografia.com/leonhard_euler/)*

6.2. FINAL DO SÉCULO XVIII: A INTERPRETAÇÃO GEOMÉTRICA COM ARGAND E WESSEL.

A forma polar ganhou uma dimensão geométrica no final do século XVIII. Em 1797, o norueguês Caspar Wessel (1745–1818) descreveu os números complexos como vetores em um plano, com um módulo (comprimento) e um argumento (ângulo). Ele publicou seu trabalho em dinamarquês, o que limitou sua divulgação na época, mas sua ideia foi um passo pioneiro para visualizar a forma polar: o número $r(cos\theta + i\ sen\theta)$ podia ser visto como um ponto a uma distância ($\boldsymbol{r}$) da origem, em um ângulo (θ).

(Figura 10 - Caspar Wessel em https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Wessel/wessel_1.jpg)

Caspar Wessel (1745–1818) foi um matemático e cartógrafo norueguês-dinamarquês que desempenhou um papel importante no desenvolvimento da representação geométrica dos números complexos, sendo um dos primeiros a propor o que hoje associamos à forma polar. Apesar de sua contribuição pioneira, ele permaneceu relativamente desconhecido durante sua vida, em grande parte porque publicou seu trabalho em dinamarquês, uma língua menos acessível à comunidade científica internacional da época.

Wessel nasceu em 8 de junho de 1745, em Jonsrud, na Noruega (então parte do Reino da Dinamarca-Noruega). Ele era o sexto de treze filhos de uma família modesta. Seu irmão mais velho, Johan Herman Wessel, tornou-se conhecido como poeta e dramaturgo, mas Caspar seguiu um caminho mais técnico e matemático.

Em 1763, aos 18 anos, ele ingressou na Universidade de Copenhague para estudar direito, mas logo se voltou para a matemática e a topografia, áreas que dominariam sua carreira. Wessel trabalhou como cartógrafo para o governo dinamarquês, participando de projetos de mapeamento da Dinamarca e da Noruega.

Esse trabalho exigia habilidades geométricas e trigonométricas, o que provavelmente influenciou suas ideias sobre números complexos. Ele passou grande parte de sua vida em Copenhague, onde morreu em 25 de março de 1818. A principal contribuição de Wessel à matemática veio em 1797, quando ele apresentou um ensaio intitulado *Om Directionens analytiske Betegning* ("Sobre a Representação Analítica da Direção") à Academia Real Dinamarquesa de Ciências e Letras. O trabalho foi publicado em 1799 nas atas da academia. Nesse ensaio, Wessel propôs uma interpretação geométrica dos números complexos que antecipou o que hoje chamamos de "plano complexo" e a forma polar.

Ele sugeriu que um número complexo $a + bi$ poderia ser representado como um vetor no plano, com ($\boldsymbol{a}$) no eixo horizontal e ($\boldsymbol{b}$) no eixo vertical. Mais importante, ele introduziu a ideia de que esses números poderiam ser descritos por um comprimento (módulo) e um ângulo (direção ou argumento). Em sua notação, um número complexo era expresso em termos de uma magnitude e uma orientação, essencialmente a forma polar $r(cos\theta + i\ sen\theta$, embora ele não usasse exatamente essa formulação trigonométrica.

Wessel também descreveu como multiplicar dois números complexos nesse sistema: os comprimentos (módulos) eram multiplicados, e os ângulos (direções) eram somados. Isso é exatamente o que define a multiplicação na forma polar moderna. Por exemplo, para dois números complexos representados como vetores com comprimentos $r_1\ e\ r_2$ e ângulos $\theta_1\ e\ \theta_2$, o produto teria comprimento $r_1 r_2$ e ângulo $\theta_1 + \theta_2$.

Pouco depois, em 1806, Jean-Robert Argand (1768–1822), um matemático suíço, publicou um ensaio independente com uma ideia semelhante. Ele representou os números complexos no plano cartesiano, hoje chamado de "plano de Argand", onde a forma polar emergia naturalmente como coordenadas polares (r, θ).

Esse enfoque geométrico reforçava a intuição da multiplicação na forma polar: multiplicar dois números complexos correspondia a escalar o comprimento (módulo) e rotacionar o ângulo (argumento). O trabalho de Argand, escrito em francês, alcançou maior circulação e ajudou a popularizar essa representação. *(fonte: https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Wessel/)*

(Figura 11 - Jean-Robert Argand em https://prabook.com/web/show-photo.jpg?id=2509602&cache=false)

Jean-Robert Argand (1768–1822) foi um matemático suíço, de origem francesa, conhecido por sua contribuição ao desenvolvimento da representação geométrica dos números complexos. Ele é amplamente reconhecido por popularizar o que hoje chamamos de "plano de Argand", uma representação visual que associa números complexos a pontos no plano cartesiano e que está intimamente ligada à forma polar.

Diferentemente de muitos matemáticos famosos de sua época, Argand não era um acadêmico profissional, mas um amador talentoso cuja obra teve impacto duradouro. Argand nasceu em 18 de julho de 1768, em Genebra, na Suíça, numa família de origem huguenote francesa. Pouco se sabe sobre sua infância e formação inicial, mas ele não parece ter seguido um caminho acadêmico tradicional.

Adulto, trabalhou como contador e gerente de uma livraria em Paris, para onde se mudou no início do século XIX. Sua vida foi marcada por uma existência modesta e discreta, e ele dedicou-se à matemática por paixão, sem buscar fama ou posição acadêmica. Argand viveu em uma época de grandes transformações, incluindo a Revolução Francesa (1789–1799) e o subsequente período napoleônico, mas não há evidências de que esses eventos influenciaram diretamente seu trabalho matemático.

Ele morreu em 13 de agosto de 1822, em Paris, aos 54 anos, possivelmente em condições de pobreza, já que pouco se sabe sobre seus últimos anos. A principal contribuição de Argand veio em 1806, quando ele publicou, de forma anônima, um pequeno ensaio intitulado Essai sur une manière de représenter les quantités imaginaires dans les constructions géométriques ("Ensaio sobre uma maneira de representar quantidades imaginárias nas construções geométricas").

Esse trabalho foi impresso às suas próprias custas e distribuído a um círculo restrito de matemáticos, o que reflete seu status de outsider na comunidade científica. No ensaio, Argand propôs que os números complexos **a + bi** poderiam ser representados como pontos no plano cartesiano: (**a**) no eixo horizontal (parte real) e (**b**) no eixo vertical (parte imaginária). Essa ideia não era inteiramente nova — Caspar Wessel a havia apresentado em 1797 —, mas Argand foi além ao explorar as implicações geométricas dessa representação, incluindo sua conexão com a forma polar.

Ele interpretou o número complexo como um vetor com um módulo $r = \sqrt{a^2 + b^2}$ (a distância da origem ao ponto) e um argumento $\theta = \arctan\left(\frac{a}{b}\right)$ (o ângulo com o eixo real positivo). Embora Argand não usasse a notação trigonométrica moderna $r(cos\theta + i\ sen\theta)$ de maneira explícita, ele descreveu como a multiplicação de números complexos correspondia a uma operação geométrica: os módulos eram multiplicados, e os ângulos, somados. Essa é a essência da multiplicação na forma polar.

Por exemplo, Argand mostrou que multiplicar: Para $z = 1 + i$ com módulo $\sqrt{2}$ por si mesmo resultava em $|z| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$ pois $\sqrt{2}.\sqrt{2} = 2$ e 45° + 45° = 90°, ajustando o módulo final para (1) após a rotação. Sua abordagem era intuitiva e geométrica, complementando a visão algébrica de Euler. No início do século XIX, Carl Friedrich Gauss (1777–1855) consolidou a forma polar ao usá-la em seus estudos de teoria dos números e geometria.

Embora ele não tenha sido o criador da representação, Gauss a empregou de forma sistemática, especialmente em problemas como a construção de polígonos regulares com régua e compasso, onde a rotação no plano complexo (ligada ao argumento) era essencial. Seu prestígio ajudou a legitimar a forma polar como uma ferramenta padrão na matemática. O desenvolvimento da forma polar ocorreu em um período de transição na matemática, marcado pela busca por unificação e simplicidade.

No século XVIII, os matemáticos estavam fascinados por conexões entre álgebra, geometria e trigonometria, e a forma polar exemplificava essa síntese. A necessidade de resolver equações, calcular potências e entender fenômenos periódicos (como oscilações) impulsionou o interesse por uma representação que facilitasse essas operações. A forma polar respondeu a esse chamado, oferecendo um método visual e algébrico que tornava a multiplicação mais natural do que na forma retangular.

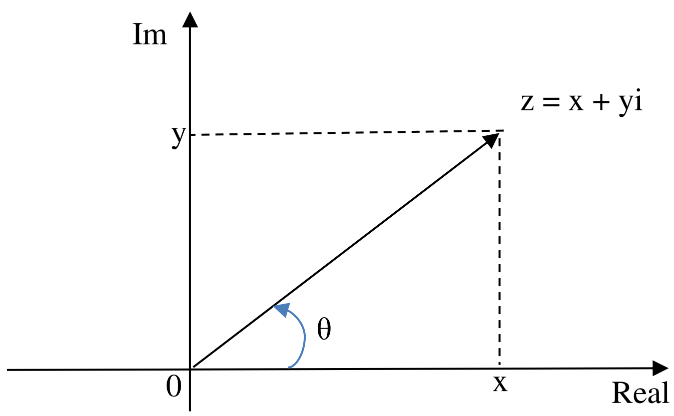
A forma polar emergiu entre os séculos XVII e XIX como resultado de contribuições sucessivas: De Moivre sugeriu suas propriedades trigonométricas, Euler a formalizou com uma base exponencial, Wessel e Argand a interpretaram geometricamente, e Gauss a consolidou como prática comum. O contexto histórico reflete um esforço coletivo para transformar os números complexos em uma linguagem mais acessível e poderosa, culminando em uma das representações mais elegantes da matemática. *(fonte:https://www.britannica.com/biography/Jean-Robert-Argand)*

6.3. REPRESENTAÇÃO POLAR OU FORMA TRIGONOMÉTRICA DE UM NÚMERO COMPLEXO.

Sabemos que um número complexo possui forma geométrica igual a $z = a + bi$, onde a recebe a denominação de parte real e b parte imaginária de z. Por exemplo, para o número complexo $z = 3 + 5i$, temos $a = 3$ e $b = 5$ ou $Re(z) = 3$ e $Im(z) = 5$. Os números complexos também possuem uma forma trigonométrica ou polar, que será demonstrada com base no argumento de z $(para\ z \neq 0)$. Considere o número complexo z = a + bi, em que z ≠ 0, dessa forma temos que:

$$cos\theta = \frac{a}{p} \quad \text{e} \quad sen\theta = \frac{b}{p}.$$

Essa relações podem ser escritas de outra forma, acompanhe. Vejamos o gráfico a seguir:



Com tudo, podemos obter uma forma algébrica do número z. $z = x + yi$. Como:

$$cos\theta = \frac{x}{r} \rightarrow x = r\ cos\theta \quad \text{e} \quad sen\theta = \frac{y}{r} \rightarrow y = r\ sen\theta$$

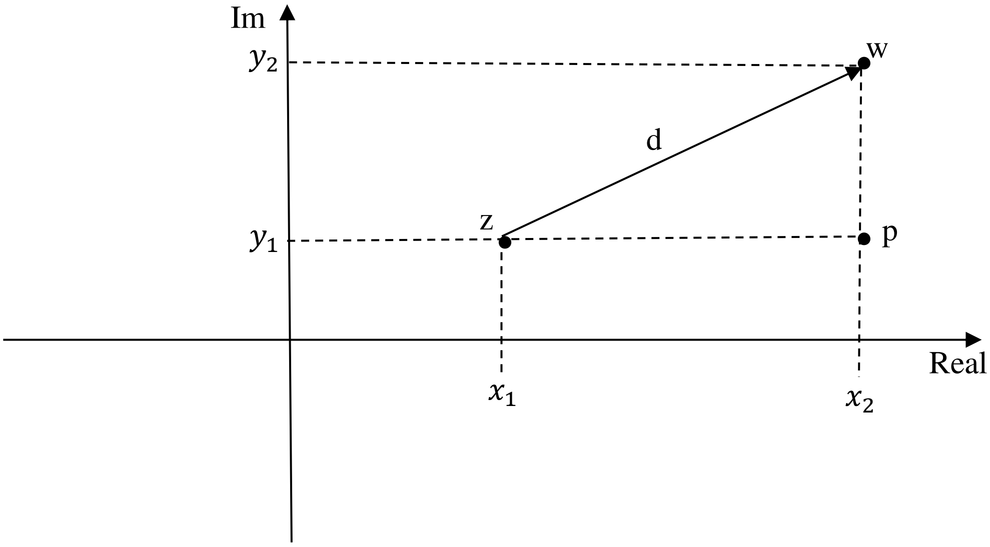
Temos que;

$$z = r.cos\theta + r.sen\theta.i, \text{ ou seja, } z = r.(cos\theta + i\ sen\theta).$$

Que é denominada de forma trigonométrica ou forma polar de z.

6.4. DISTÂNCIA ENTRE DOIS NÚMEROS COMPLEXOS.

Podemos definir também a distância entre dois números complexos. Veja a seguir o gráfico:



Onde podemos ter;

$$d = |\overrightarrow{zw}|$$

$$d = |w - z|$$

Ou se preferirmos:

$$d = |(x_2, y_2) - (x_1, y_1)|$$

$$d = |(x_2 - x_1, y_2 - y_1)|$$

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1) + (y_2 - y_1)}$$

Exemplo:

Dado os números complexos $z = 3 - 4i$ e $w = -5 + 2i$, determinar a distância de z e w.

Solução:

$$d = |\overrightarrow{zw}||w - z| = |(-5 + 2i) - (3 - 4i)|$$

$$d = |(-5 - 3) + (2 + 4)i|$$

$$d = |-8 + 6i|$$

$$d = \sqrt{(-8)^2 + 6^2}$$

$$d = 10\ u.d.$$

Com $u.d.$ *sendo Unidade de Distância.*

6.5. ROTAÇÃO DE UM NÚMERO COMPLEXO.

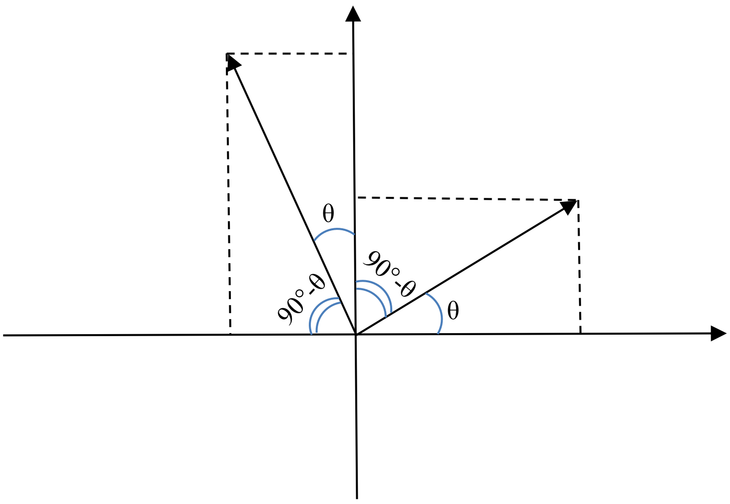
Podemos rotacionar das seguintes formas:

I- Multiplicando um número complexo $z = x + yi$ por i, significa rotacionar de z de 90° no sentido do ciclo trigonométrico (sentido anti-horário).

É importante ressaltar que sendo $z = x + yi$ qualquer, obtemos:

$$i.z = i(x + yi) = -y + xi$$

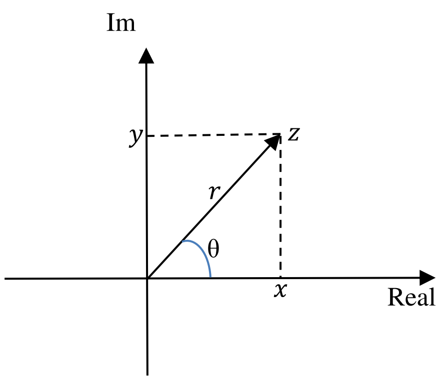
No gráfico temos;



II- Rotacionar um número complexo $z = x + yi$ de um ângulo θ_0 é uma transformação linear, onde:

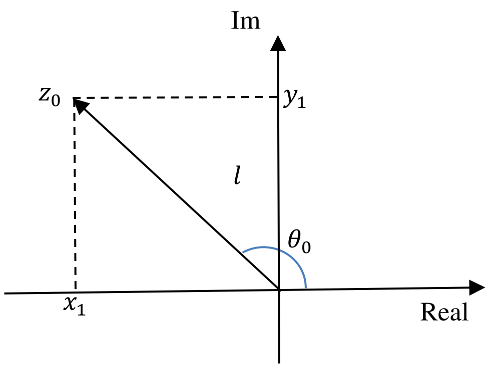
$$rot(\theta_0): \mathbb{C} \to \mathbb{C}$$
$$z \to z.z_0 = rot(\theta_0)$$

Mostrando geometricamente, temos;

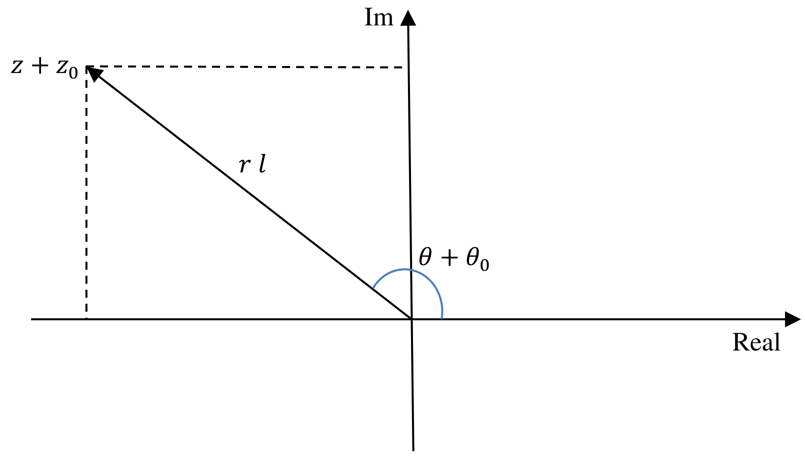


$|z| = r$

→



$|z_0| = l$



$|z.z_0| = r.l$

Rotacionar de um ângulo θ_0 significa encontrar um novo número complexo em que o seu módulo é o produto dos módulos dos números complexos z e z_0 e multiplicando z por z_0 e utilizando as relações trigonométricas, obtemos:

$$z.z_0 = \cdots$$

Então, rotacionar um número complexo z de ângulo θ_0 significa multiplicar os seus módulos e somar seus argumentos (ângulos). Demonstrando algebricamente, temos que:

$$z = r.(cos\theta + i.sen\theta)$$

$$z_0 = l.(cos\theta_0 + i.sen\theta_0)$$

Logo;

$$z.z_0 = [r.(cos\theta + i.sen\theta)].[l.(cos\theta_0 + i.sen\theta_0)]$$

$$z.z_0 = r.l[(cos\theta.cos\theta_0 - sen\theta.sen\theta_0) + i(cos\theta sen\theta_0 + cos\theta_0 sen\theta)]$$

$$z.z_0 = r.l[(\cos(\theta + \theta_0) + i.sen(\theta + \theta_0)$$

Então, rotacionar um número complexo $z\hat{o}g$ a um ângulo θ_0 significa multiplicar os seus módulos e multiplicar os seus ângulos.

6.6. OPERAÇÃO DE MULTIPLICAÇÃO COM A FORMA POLAR.

Os números complexos, quando representados na forma polar, oferecem uma maneira simplificada de realizar operações como a multiplicação. Considere os seguintes números complexos:

$$z_1 = r_1 cis\theta_1 \text{ e } z_2 = r_2 cis\theta_2$$

ou

$$z_1 = r_1(cos\theta_1 + i.sen\theta_1) ou\ (z_2 = r_2(cos\theta_2 + i.sen\theta_2).$$

Por simplicidade de notação, escrevemos $sen\theta$ para representar.

Assim;

$$z_1.z_2 = (r_1cis\theta_1).(r_2cis\theta_2)$$

$$z_1.z_2 = (r_1.r_2).[(cos\theta_1 + i.sen\theta_1).(cos\theta_2 + i.sen\theta_2)$$

$$z_1.z_2 = (r_1.r_2).(cos\theta_1cos\theta_2 + i.cos\theta_1sen\theta_2 + i.sen\theta_1cos\theta_2 - sen\theta_1sen\theta_2$$

$$z_1.z_2 = (r_1.r_2).[(cos\theta_1cos\theta_2 - sen\theta_1sen\theta_2) + i(sen\theta_1cos\theta_2 + cos\theta_1sen\theta_2)]$$

$$z_1.z_2 = (r_1.r_2).[\cos(\theta_1 + \theta_2) + i.sen(\theta_1 + \theta_2)$$

6.7. DIVISÃO DE NÚMEROS COMPLEXOS NA FORMA POLAR.

A divisão de números complexos na forma polar apresenta uma elegante simplificação quando comparada à forma algébrica tradicional. Enquanto na forma retangular ($z = a + bi$) o processo exige a racionalização do denominador, a representação polar transforma a operação em um procedimento direto. Considere os números complexos:

$$z_1 = r_1.cis\theta_1 \text{ e } z_2 = r_2cis\theta_2 \neq 0$$

Logo:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1(cos_{\theta 1} + i.sen\theta_1)}{r_2(cos\theta_2 + isen\theta_2)}$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1(cos\theta_1 + i.sen\theta_1).(cos\theta_2 - i.sen\theta_2)}{r_2(cos\theta_2 + i.sen\theta_3).(cos\theta_2 - isen\theta_2)}$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}.\frac{(cos\theta_1cos\theta_2 + sen\theta_1sen\theta_2) + i(sen\theta_1cos\theta_2 - cos\theta_1sen\theta_2}{cos^2\theta_2 + sen^2\theta_2}$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}.[(cos\theta_1cos\theta_2 + sen\theta_1sen\theta_2) + i(sen\theta_1cos\theta_2 - cos\theta_1sen\theta_2)$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}.[\cos(\theta_1 - \theta_2) + i.sen(\theta_1 - \theta_2)$$

6.8. POTENCIAÇÃO DE NÚMERO COMPLEXO COM A FORMA POLAR.

A potenciação de números complexos, quando trabalhada na forma polar, se torna uma operação surpreendentemente simples e elegante, graças a fórmula de De Moivre (CHURCHILL; BROWN, 2013).

Considere:

$$z = r.cis\theta = r.(cos\theta + i.sen\theta)$$

As operações de multiplicação, divisão e potenciação com números complexos não são apenas regras matemáticas; são ferramentas que simplificam a ciência e a engenharia. Usando a forma polar, a multiplicação e a divisão se tornam incrivelmente simples: basta multiplicar/dividir os módulos e somar/subtrair os ângulos.

Essa facilidade é crucial para representar rotações e escalas, sendo a base para a análise de circuitos elétricos, onde a fase e a amplitude de sinais são alteradas. A potenciação, com o Teorema de De Moivre, permite calcular rapidamente qualquer potência de um número complexo. Isso é vital para entender o comportamento de sistemas dinâmicos e vibratórios na física e na engenharia. Dominar essas operações transforma problemas complexos em processos diretos, tornando os números complexos uma ferramenta essencial.

7. FÓRMULA DE DE MOIVRE

A Fórmula de De Moivre representa um dos marcos fundamentais no desenvolvimento da teoria dos números complexos, estabelecendo uma relação profunda entre a álgebra e a trigonometria. Descoberta pelo matemático francês Abraham de Moivre no século XVIII, essa fórmula não apenas simplificou operações com números complexos, mas também abriu caminho para avanços significativos em diversas áreas da matemática e das ciências aplicadas.

O contexto histórico da fórmula remonta ao período em que os números complexos ainda eram objeto de intenso debate entre os matemáticos. Embora inicialmente vistos com desconfiança, esses números ganharam gradualmente aceitação à medida que suas aplicações práticas se tornavam evidentes.

Abraham de Moivre, um huguenote francês exilado na Inglaterra, foi um dos pioneiros no estudo sistemático dessas entidades matemáticas. Seus trabalhos, desenvolvidos no início do século XVIII, demonstraram como as potências de números complexos podiam ser expressas através de funções trigonométricas.

As implicações da Fórmula de De Moivre são vastas. Na matemática pura, ela se tornou ferramenta essencial para o cálculo de raízes n-ésimas de números complexos e para o estudo das raízes da unidade. Nas aplicações práticas, encontrou uso imediato na física e na engenharia, particularmente no estudo de fenômenos oscilatórios e ondulatórios.

Posteriormente, a fórmula serviu de base para o desenvolvimento da ainda mais abrangente Fórmula de Euler, que estabelece a fundamental relação entre exponenciais complexas e funções trigonométricas. O legado da Fórmula de De Moivre estende-se até os dias atuais, encontrando aplicações em áreas tão diversas quanto o processamento de sinais digitais, a computação gráfica e a mecânica quântica.

Sua importância histórica reside não apenas no resultado em si, mas na maneira como ajudou a consolidar os números complexos como ferramenta matemática indispensável, superando as resistências iniciais da comunidade científica.

A fórmula permanece como testemunho do poder unificador da matemática, capaz de revelar conexões profundas entre áreas aparentemente distintas do conhecimento. (fonte: https://brasilescola.uol.com.br/matematica/formulas-de-moivre.htm)

7.1. FÓRMULA DA POTENCIAÇÃO PARA OS NÚMEROS COMPLEXOS: PRIMEIRA FÓRMULA DE DE MOIVRE.

Considere: $z = r.cis\theta = r.(cos\theta + i.sen\theta)$, com $n \in \mathbb{Z}$. Temos que;

$$z^n = r^n.\left(\cos(n\theta) + isen(n\theta)\right).$$

A prova será feita o princípio de indução finita utilizando em duas partes.

Parte 1:

Se $n = 0$, então:

$$z^0 = 1\ e r^0.\left(\cos(0,\theta) + i.sen(0,\theta)\right) = 1.$$

Logo temos;

$$z^2 = (r.r).[\cos(\theta + \theta) + i.sen(\theta + \theta)]$$

Então;

$$z^2 = r^2.(\cos(2\theta) + i.sen(2\theta)$$

Primeira fórmula de De Moivre:

Considere o número complexo $z = r.(cos\theta + i.sen\theta)$. Sendo $n \in \mathbb{Z}$, temos que:

$$z^n = r^n.[(cos(n\theta) + i.sen(n\theta)]$$

Prova:

A prova será feita em duas etapas, utilizando o princípio de indução finita. *Primeira parte:;*

Considere $n \in \mathbb{Z}_+$, assim;

i- Se $n = 0$, então $z^0 = 1$. De onde concluímos a necessidade da fórmula para $n = 0$.

ii- Vamos supor que a fórmula é verdadeira para $n = k - 1$, logo:

$$z^{k-1} = r^{k-1}.[\cos(k-1).\theta + i.sen(k-1).\theta]$$

iii- Devemos mostrar que a fórmula é válida para $n = k$, assim;

$$z^k = z^{k-1}.z = \{r^{k-1}.[\cos(k-1).\theta + i.sen(k-1).\theta]\}.[r.(cos\theta + i.sen\theta)]$$

$$z^k = [\,r^{k-1}.r].\left[\cos\left((k-1).\theta + \theta\right) + i.sen\left((k-1)\theta + \theta\right)\right]$$

$$z^k = r^k.[\cos(k\theta) + i.sen(k\theta)].$$

Portanto, por i), ii), e iii) a fórmula é válida para $n \in \mathbb{Z}_+$.

Parte 2:

Considere agora $n \in \mathbb{Z}^{*}_{-}$, assim sendo $n < 0$, logo teremos $n = -m \in \mathbb{Z}_{+}$, portanto a m se aplica a fórmula.

$$z^n = z^{-m}$$

$$z^n = \frac{1}{z^m}$$

$$z^n = \frac{1}{r^m\big(\cos(m\theta) + i.sen(m\theta)\big)} \cdot \frac{\cos(m\theta) - i.sen(m\theta)}{\cos(m\theta) - i.sen(m\theta)}$$

$$z^n = \frac{\cos(m\theta) - i.sen(m\theta)}{r^m.[cos^2(m\theta) + sen^2(m\theta)]}$$

$$z^n = r^{-m}.[\cos(-m\theta) + i.sen(-m\theta)]$$

Portando:

$$z^n = r^n.[\cos(n\theta) + i.sen(n\theta)]$$

Desta forma, concluímos que pela primeira e segunda etapas, que a primeira fórmula de De Moivre é válida para todo $n \in \mathbb{Z}$.

7.2. FÓRMULA DE RADICIAÇÃO PARA OS NÚMEROS COMPLEXOS: SEGUNDA FÓRMULA DE DE MOIVRE.

Considere $z = r.(cos\theta + i.sen\theta)$ e $n \in \mathbb{Z}_{+}$. Com $n \geq 2$.

Temos que, $\sqrt[n]{z} = z_k \; e \; z_k^n = z$.

Assim;

$$z_k = \sqrt[n]{r}.\left[\cos\left(\frac{\theta}{n} + k.\frac{2\pi}{n}\right) + i.sen\left(\frac{\theta}{n} + k.\frac{2\pi}{n}\right)\right]$$

Com, $\sqrt[n]{r} \in \mathbb{R}_{+}$ e k variando de 0 a $n - 1$.

Demonstração:

Vamos determinar todos os números complexos z_k tais que $\sqrt[n]{z} = z_k$. Considerando $z_k = \rho(cos\alpha + i.sen\alpha)$, vamos considerar ρ e α, desde que:

$$\sqrt[n]{z} = z_k \; e \; z_k^n = z$$

- Se $n = k - 1$, então:

$$z^{k-1} = r^{k-1}.(\cos(k-1).\theta + i.sen(k-1)\theta)$$

Devemos mostrar que é válida para $n = k$.

$$z^k = z^{k-1}.z = [r^{k-'}.(\cos(\mathrm{k}-1).\theta + \mathrm{i.sen(k}-1)\theta].[\mathrm{r.}(\cos\theta + \mathrm{i.sen}\theta)]$$

$$z^k = (r^{k-1}.r).[\cos\left((\mathrm{k}-1)\theta + \theta + \mathrm{i.sen}\big((\mathrm{k}-1).\theta + \theta\big)\right]$$

$$z^k = r^k(\cos(k\theta) + i.sen(n\theta))$$

Observações importantes!

I- Supondo que $0 \leq \theta \leq 2\pi$, existem n valores para α no intervalo $[0, 2\pi[$.

De fato:

$$Para\ k = 0 \rightarrow \alpha = \frac{\theta}{n}$$

$$Para\ k = 1 \rightarrow \alpha = \frac{\theta}{n} + \frac{2\pi}{n}$$

$$Para\ k = 2 \rightarrow \alpha = \frac{\theta}{n} + 2.\frac{2\pi}{n}$$

...

$$Para\ k = n - 1 \rightarrow \alpha = \frac{\theta}{n} + (n-1).\frac{2\pi}{n}$$

Note que;

Param, $k = n \rightarrow \alpha = \frac{\theta}{n} + n.\frac{2\pi}{n} = \frac{\theta}{n} + 2n$. Logo, não pertence ao intervalo $[0, 2\pi[$.

1- Todo número complexo **z**, não nulo, admite n raízes enézimas distintas, as quais tem mesmo módulo $\rho = \sqrt[n]{|z|}$ e os argumentos principais formando uma progressão aritmética (P.A.) com primeiro termo $\frac{\theta}{n}$ e razão $\frac{2\pi}{n}$.

2- Esses números complexos são vértices de um polígono regular inscrito em uma circunferência, se $n \geq 3$.

Exemplo:

Temos que,

$\rho^n = r \rightarrow \rho = \sqrt[n]{r}$ e $\cos(n\alpha) = cos\theta$, com $sen(n\alpha) = sen\theta$.

Logo;

$$n\alpha = \theta + 2k\pi$$
$$\alpha = \frac{\theta + 2k\pi}{n}$$

Ou ainda;

$$\alpha = \frac{\theta}{n} + k.\frac{2\pi}{n}$$

Com $k \in \mathbb{Z}$.

Portanto, $z_k = \sqrt[n]{r}.\left[\cos\left(\frac{\theta}{n} + k.\frac{2\pi}{n}\right) + i.sen\left(\frac{\theta}{n} + k.\frac{2\pi}{n}\right)\right]$.

7.3. EQUAÇÃO BINOMIAL.

Na álgebra, um binômio é um polinômio formado por dois termos, e uma equação binomial é uma equação polinomial em que o polinômio possui exatamente dois termos, geralmente igualado a zero, sendo expressa como $ax^n + b = 0$. Nesse caso, até o termo de grau *n*, onde *n* é um inteiro positivo, e *b* é o termo constante, com *a* e *b* como coeficientes reais ou complexos, sendo $a \neq 0$.

Essa equação se destaca pela simplicidade estrutural, diferindo de trinomiais ou polinômios com mais termos, e seu grau *n* determina o número de soluções, que podem ser reais ou complexas, conforme o teorema fundamental da álgebra. A resolução consiste em isolar *x*, resultando em:

$$ax^n = -b \; e \; x^n = -\frac{b}{a} \rightarrow x = (-\frac{b}{a})^{\frac{1}{n}}$$

As soluções variam conforme *n*: para $n = 1$, há uma raiz real; para $n = 2$, duas raízes, que podem ser reais ou imaginárias; para $n \geq 3$, n raízes complexas, frequentemente expressas na forma polar.

Para $n = 1$, temos $a.x^1 + b = 0$, assim:

$$ax = -b$$

$$x = -\frac{b}{a}$$

Logo, o conjuto solução é:

$$S = \left\{-\frac{b}{a}\right\}$$

Para $n = 2$, temos $ax^2 + b = 0$.

$$ax^2 = -b$$

$$x^2 = -\frac{b}{a}$$

$$\sqrt{x^2} = \sqrt{-\frac{b}{a}}$$

$$x = \pm\sqrt{-\frac{b}{a}}$$

Se $-\frac{b}{a} < 0$, então as raízes serão dois números complexos conjugados, se $-\frac{b}{a} < 0$, então as raízes serão reais e opostas. Para $n \geq 3$, as n raízes da equação serão complexas.

Com isso definimos toda equação na forma;

$$a.x^n + b = 0$$

Onde, $a, b \in \mathbb{C}$ com $a \neq 0$ e $n \in \mathbb{N}$, é denominada de equação binômia.

Exemplo:

1- Resolver a equação $3x^6 + 192 = 0$.

Solução:

$$3x^6 + 192 = 0$$

$$x^6 = -64$$

$$x = \sqrt[6]{-64}$$

Logo, $z = -64, r = 64, \theta = \pi$ e $n = 6$. Assim;

$$z_k = \sqrt[6]{64}.\left[\cos\left(\frac{\pi}{6} + k.\frac{2\pi}{6}\right) + i.sen\left(\frac{\pi}{6} + k.\frac{2\pi}{6}\right)\right]$$

$$z_k = 2.\left[\cos\left(\frac{\pi}{6} + k.\frac{2\pi}{6}\right) + i.sen\left(\frac{\pi}{6} + k.\frac{2\pi}{6}\right)\right]$$

Temos que;

$$z_0 = 2.\left[\cos\left(\frac{\pi}{6} + 0.\frac{2\pi}{6}\right) + i.sen\left(\frac{\pi}{6} + 0.\frac{2\pi}{6}\right)\right] = 2.\left[cos\frac{\pi}{6} + i.sen\frac{\pi}{6}\right] = 2.\left[\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right]$$

Logo, $z_0 = \sqrt{3} + i$.

$$z_1 = 2.\left[\cos\left(\frac{\pi}{6} + 1.\frac{2\pi}{6}\right) + i.sen\left(\frac{\pi}{6} + 1.\frac{2\pi}{6}\right)\right] = 2.\left[cos\frac{\pi}{2} + i.sen\frac{\pi}{2}\right] = 2.[0 + i.1]$$

Logo, $z_1 = 2i$.

$$z_2 = 2.\left[\cos\left(\frac{\pi}{6} + 2.\frac{2\pi}{6}\right) + i.sen\left(\frac{\pi}{6} + 2.\frac{2\pi}{6}\right)\right] = 2.\left[cos\frac{5\pi}{6} + i.sen\frac{5\pi}{6}\right]$$
$$= 2.\left[-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right]$$

Logo, $z_2 = -\sqrt{3} + i$.

$$z_3 = 2.\left[\cos\left(\frac{\pi}{6} + 3.\frac{2\pi}{6}\right) + i.sen\left(\frac{\pi}{6} + 3.\frac{2\pi}{6}\right)\right] = 2.[cos\frac{7\pi}{6} + i.sen\frac{7\pi}{6}$$
$$= 2.\left[-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right]$$

Logo, $z_3 = -\sqrt{3} + i$.

$$z_4 = 2.\left[\cos\left(\frac{\pi}{6} + 4.\frac{2\pi}{6}\right) + i.sen\left(\frac{\pi}{6} + 4.\frac{2\pi}{6}\right)\right] = 2.\left[cos\frac{3\pi}{2} + i.sen\frac{3\pi}{2}\right]$$
$$= 2.[0 + (-1).i]$$

Logo, $z_4 = -2i$.

$$z_5 = 2.\left[\cos\left(\frac{\pi}{6} + 5.\frac{2\pi}{6}\right) + i.sen\left(\frac{\pi}{6} + 5.\frac{2\pi}{6}\right)\right] = 2.\left[cos\frac{11\pi}{6} + i.sen\frac{11\pi}{6}\right]$$

$$= 2.\left[-\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i.\right]$$

Logo, $z_5 = \sqrt{3} - i.$

$$z_6 = 2.\left[\cos\left(\frac{\pi}{6} + 6.\frac{2\pi}{6}\right) + i.sen\left(\frac{\pi}{6} + 6.\frac{2\pi}{6}\right)\right] = 2.\left[cos\frac{13\pi}{6} + i.sen\frac{13\pi}{6}\right]$$

$$z_6 = 2.\left[cos\frac{\pi}{6} + i.sen\frac{\pi}{6}\right] = 2.\left[\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right]$$

Logo, $z_6 = \sqrt{3} + i.$

A partir de $k = 6$ as raízes começam a se repetirem.

Importante!

As raízes encontradas na solução da equação $3x^6 + 192 = 0$ são os vértices de um hexágono regular inscrito em uma circunferência de centro e e raio de 2.

7.4. EQUAÇÃO TRINOMIAL.

Definição:

Toda equação da forma $a.x^{2n} + b.x^n + c = 0,$ onde $a, b, c \in \mathbb{C}$, com $a \neq 0.b \neq 0$ e $n \in \mathbb{N}$, é denominada de equação trinomial. A equação trinômia quadrática, expressa na forma $ax^2 + bx + c = 0$, possui uma história que remonta às civilizações antigas. Os babilônios (c. 2000–1600 a.C.) foram pioneiros ao resolver problemas equivalentes, como $x^2 + px = q$, utilizando métodos geométricos baseados em completar o quadrado, registrados em tabuletas cuneiformes (BOYER, 2010).

Na Grécia Antiga, Euclides (c. 300 a.C.) abordou essas equações geometricamente em Elementos, limitando-se a soluções positivas (KATZ, 2008). Já na Índia, Brahmagupta (598–668) avançou ao aceitar raízes negativas em sua obra Brahmasphutasiddhanta. No Renascimento, Girolamo Cardano (1501–1576) introduziu as raízes imaginárias em Ars Magna (1545), ampliando o entendimento das soluções.

No século XVIII, Leonhard Euler (1707–1783) conectou as raízes complexas à forma polar. Entre os estudiosos, Al-Khwarizmi (780–850) destaca-se como o principal responsável pela sistematização da resolução algébrica da equação trinômia quadrática. Em sua obra Al-Jabr (c. 820), ele classificou tipos de equações quadráticas (como $x^2 + bx = c$) e desenvolveu o método de completar o quadrado (KATZ, 2008; STRUIK, 1987), oferecendo uma abordagem geral que influenciou a álgebra medieval e moderna. Sua contribuição deu origem ao termo "álgebra" e pavimentou o caminho para a fórmula atual onde temos $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$.

Exemplo.

Resolver a equação $x^6 - 72x^3 + 512 = 0$.

Solução.

Temos que;

$$(x^3)^2 - 72.(x^3) + 512 = 0$$

Fazendo $x^3 = t$, obtemos:

$$t^2 - 72t + 512 = 0$$

Determinando as raízes da equação pela fórmula resolutiva para equação do segundo grau, temos:

$$t = \frac{72 \pm \sqrt{72^2 - 4.1.512}}{2.1}$$

$$t = \frac{72 \pm 56}{2}$$

Para t', temos:

$$t' = \frac{72 - 56}{2}$$

$$t' = \frac{16}{2}$$

$$t' = 8$$

Para t'', temos:

$$t'' = \frac{72 + 56}{2}$$

$$t'' = \frac{128}{2}$$

$$t'' = 64$$

Sendo $x^3 = t$, temos para $t = 8$ que:

$$x^3 = 8 \rightarrow x = \sqrt[3]{8}.$$

Logo: $z = 8, r = 8\ e\ \theta = 0$.

$$z_k = \sqrt[n]{r}.\left[\cos\left(\frac{\theta}{n} + k.\frac{2\pi}{n}\right) + i.sen\left(\frac{\theta}{n} + k.\frac{2\pi}{n}\right)\right]$$

$$z_k = \sqrt[3]{8}.\left[\cos\left(\frac{0}{3} + k.\frac{2\pi}{3}\right) + i.sen\left(\frac{0}{3} + k.\frac{2\pi}{3}\right)\right]$$

$$z_k = 2.\left[\cos\left(k.\frac{2\pi}{3}\right) + i.sen\left(k.\frac{2\pi}{3}\right)\right]$$

Com isso, podemos fazer

$$z_0 = 2.\left[\cos\left(0.\frac{2\pi}{3}\right) + i.sen\left(0.\frac{2\pi}{3}\right)\right] = 2.[cos0 + i.sen)] = 2.[1 + i.0] = 2$$

$$z_1 = 2.\left[\cos\left(1.\frac{2\pi}{3}\right) + i.sen\left(1.\frac{2\pi}{3}\right)\right] = 2.\left[cos\frac{2\pi}{3} + i.sen\frac{2\pi}{3}\right] = 2.\left[-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right]$$

$$= -1 + \sqrt{3}i$$

$$z_2 = 2.\left[\cos\left(2.\frac{2\pi}{3}\right) + i.sen\left(2.\frac{2\pi}{3}\right)\right] = 2.\left[cos\frac{4\pi}{3} + i.sen\frac{4\pi}{3}\right] = 2.\left[-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right] = -1\sqrt{3}i$$

Fazendo para $t = 64$, obternos:

$$x^3 = 64 \rightarrow x = \sqrt[3]{64},$$

Logo, $z = 64, r = 64\ e\ \theta = 0$. Assim;

$$z_k = \sqrt[3]{64}.\left[\cos\left(\frac{0}{3} + k.\frac{2\pi}{3}\right) + i.sen\left(\frac{0}{3} + k.\frac{2\pi}{3}\right)\right]$$

$$z_k = 4.\left[\cos\left(k.\frac{2\pi}{3}\right) + i.sen\left(k.\frac{2\pi}{3}\right)\right]$$

Podemos então;

$$z_0 = 4.\left[\cos\left(0.\frac{2\pi}{3}\right) + i.sen\left(0.\frac{2\pi}{3}\right)\right] = 4.[cos0 + i.sen0] = 4.[1 + i.0] = 4$$

$$z_1 = 4.\left[\cos\left(1.\frac{2\pi}{3}\right) + i.sen\left(1.\frac{2\pi}{3}\right)\right] = 4.\left[cos\frac{2\pi}{3} + i.sen\frac{2\pi}{3}\right] = 4.\left[-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right]$$
$$= -2 + 2\sqrt{3}i$$

$$z_2 = 4.\left[\cos\left(2.\frac{2\pi}{3}\right) + i.sen\left(2.\frac{2\pi}{3}\right)\right] = 4.[\cos\left(\frac{4\pi}{3}\right) + i.sen\left(\frac{4\pi}{3}\right) = 4.\left[-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right]$$
$$= -2 - 2\sqrt{3}i$$

Portanto, a resolução, conforme visto das equações, usando a forma polar não apenas mostra a potência do Teorema de De Moivre, mas também revela a beleza junto aos números complexos. Cada raiz, calculada a partir da forma apresentada, distribui-se precisamente no plano complexo, refletindo a estrutura cíclica das operações com estes números.

Este exercício reforça como a abstração matemática, guiada pelas resoluções citadas, como a forma polar, transforma problemas aparentemente sem soluções em como responder. Assim, confirmamos que os números complexos são muito mais que meras ideias algébricas: são a chave para desvendar acontecimentos que vão desde rotações geométricas até outras áreas do conhecimento, consolidando-se como um dos conceitos mais unificadores e aplicáveis da matemática moderna.

8. CONSIDERAÇÕES FINAIS.

Ao final deste trabalho podemos afirmar que o nosso proposito foi alcançado, porque através dessa pesquisa bibliográfica, conseguimos mostrar que os números complexos representa uma das construções mais fascinantes e úteis da matemática, passando de uma descrença a uma realidade, pois embora tenha surgido de uma abstração puramente teórica para resolver equações que não possuíam solução no conjunto dos números reais eles se revelaram fundamentais em inúmeras aplicações práticas que vão desde a engenharia até a física moderna.

A jornada através deste tema nos mostrou que os números complexos não são apenas uma curiosidade matemática, mas sim, uma ferramenta poderosa que permite descrever fenômenos naturais e resolver problemas que seriam intratáveis apenas com números reais a representação geométrica no Plano de Argand-Gauss, por exemplo, transformou conceitos abstratos em visualizações concretas facilitando a compreensão de operações como rotações e dilatações.

Além disso, a capacidade dos números complexos de simplificar cálculos em circuitos elétricos e ondas eletromagnéticas demonstra sua importância na tecnologia atual sem eles muitas das inovações que dependem do processamento de sinais ou da análise de sistemas dinâmicos simplesmente não seriam possíveis da mesma forma a física quântica que descreve o comportamento das partículas em nível atômico utiliza números complexos de maneira essencial provando que sua utilidade vai muito além da matemática pura.

Este trabalho também destacou como os números complexos unificam diferentes áreas do conhecimento mostrando que a matemática é uma linguagem universal capaz de conectar teoria e prática de forma elegante e eficiente, portanto longe de serem apenas um tópico acadêmico os números complexos são uma peça chave no desenvolvimento científico e tecnológico continuando a inspirar novas descobertas e aplicações.

Em síntese os números complexos são um exemplo brilhante de como ideias que parecem abstratas no papel podem se transformar em ferramentas indispensáveis para o progresso humano, sua história e suas aplicações mostram que a matemática é viva e está em constante evolução sempre pronta para surpreender e enriquecer nosso entendimento do universo.

REFERÊNCIAS

[1] NAHIN, Paul J. **An Imaginary Tale: The Story of √-1**. Princeton: Princeton University Press, 1998.

[2] STEWART, Ian. **História da Matemática**. Tradução de Sergio Florence. 1ª ed. São Paulo: Editora Zahar, 2023.

[3] PESIC, Peter. **Abel's Proof: An Essay on the Sources and Meaning of Mathematical Unsolvability**. Cambridge: MIT Press, 2003.

[4] CARDANO, Girolamo. **Artis Magnæ, Sive, de Regulis Algebraicis Liber Unus. Nürnberg**: Johann Petreius, 1545.

[5] DUNNINGTON, G. Waldo; GRAY, Jeremy; DOHAN, Fritz-Egbert. Carl Friedrich Gauss: **Titan of Science. Washington,** DC: Mathematical Association of America, 2004.

[6] CHURCHILL, Ruel V.; BROWN, James W. **Complex Variables and Applications**. 9th ed. New York: McGraw-Hill, 2013.

[7] BOYER, Carl B. **História da Matemática**. 3. ed. São Paulo: Editora Blucher, 2010.

[8] KATZ, Victor J. **A History of Mathematics: An Introduction**. 3rd ed. Boston: Addison-Wesley, 2008.

PÁGINAS ELETRÔNICAS

[9] https://www.youtube.com/watch?v=Utg_UdlvMUc, acesso em 01/05/2023, [D].

[10] https://www.youtube.com/watch?v=ozlTKX9ygh4, acesso em 01/05/2023, [E].

[11] https://www.youtube.com/watch?v=d1NGOvflbos&t=452s, acesso em 01/05/2023, [F].

INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA DA PARAÍBA
Campus Campina Grande - Código INEP: 25137409
R. Tranqüilino Coelho Lemos, 671, Dinamérica, CEP 58432-300, Campina Grande (PB)
CNPJ: 10.783.898/0003-37 - Telefone: (83) 2102.6200

Documento Digitalizado Ostensivo (Público)

Trabalho de Conclusão de Curso

Assunto:	Trabalho de Conclusão de Curso
Assinado por:	Luis Havelange
Tipo do Documento:	Dissertação
Situação:	Finalizado
Nível de Acesso:	Ostensivo (Público)
Tipo do Conferência:	Cópia Simples

Documento assinado eletronicamente por:

- **Luis Havelange Soares, COORDENADOR(A) DE CURSO - FUC1 - CCLM-CG**, em 06/10/2025 14:07:24.

Este documento foi armazenado no SUAP em 06/10/2025. Para comprovar sua integridade, faça a leitura do QRCode ao lado ou acesse https://suap.ifpb.edu.br/verificar-documento-externo/ e forneça os dados abaixo:

Código Verificador: 1633467
Código de Autenticação: 763bcd0e87