



INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA DA PARAÍBA
UNIVERSIDADE ABERTA DO BRASIL
CAMPUS PATOS
CURSO DE ESPECIALIZAÇÃO EM ENSINO DE CIÊNCIAS E MATEMÁTICA

YAN BARBOSA MEDEIROS

**ANÁLISE E APLICAÇÕES DO OPERADOR LAPLACIANO EM COORDENADAS
POLARES, CILÍNDRICAS E ESFÉRICAS: TEORIA, DERIVAÇÃO E SOLUÇÕES
PARA EQUAÇÕES DIFERENCIAIS PARCIAIS EM GEOMETRIAS NÃO
CARTESIANAS**

PATOS-PB

2025

Yan Barbosa Medeiros

**ANÁLISE E APLICAÇÕES DO OPERADOR LAPLACIANO EM COORDENADAS
POLARES, CILÍNDRICAS E ESFÉRICAS: TEORIA, DERIVAÇÃO E SOLUÇÕES
PARA EQUAÇÕES DIFERENCIAIS PARCIAIS EM GEOMETRIAS NÃO
CARTESIANAS**

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia da Paraíba, Campus Patos, como requisito parcial para obtenção do título de especialista pelo Curso de Especialização em Ensino de Ciências e Matemática.

Orientador: **Prof. Dr. Fernando Henrique
Antunes de Araújo**

PATOS-PB

2025

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA BIBLIOTECA CAMPUS PATOS/IFPB

M488a Medeiros, Yan Barbosa.

Análise e aplicações do operador laplaciano em coordenadas polares, cilíndricas e esféricas: teoria, derivação e soluções para equações diferenciais parciais em geometrias não cartesianas / Yan Barbosa Medeiros. - Patos, 2025
45 f. : il.

Trabalho de Conclusão de Curso (Curso de Especialização em Ensino de Ciências e Matemática)-Instituto Federal da Paraíba,Campus Patos-PB, 2025.

Orientador(a): Prof. Dr. Fernando Henrique Antunes de Araújo.

1. Equações de Laplace e de Poisson 2. Operador Laplaciano
3. Equações Diferenciais Parciais 4. Coordenadas Curvilíneas I.
Título II. Araújo, Fernando Henrique Antunes de III. Instituto Federal da Paraíba.

CDU – 517.956.2253

Yan Barbosa Medeiros

**ANÁLISE E APLICAÇÕES DO OPERADOR LAPLACIANO EM COORDENADAS
POLARES, CILÍNDRICAS E ESFÉRICAS: TEORIA, DERIVAÇÃO E SOLUÇÕES
PARA EQUAÇÕES DIFERENCIAIS PARCIAIS EM GEOMETRIAS NÃO
CARTESIANAS**

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecno-
logia da Paraíba, Campus Patos, como requisito
parcial para obtenção do título de especialista
pelo Curso de Especialização em Ensino de Ci-
ências e Matemática.

Aprovado em: 25 de setembro de 2025

Documento assinado digitalmente
 **FERNANDO HENRIQUE ANTUNES DE ARAUJO**
Data: 23/10/2025 14:53:40-0300
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

**Prof. Dr. Fernando Henrique Antunes de
Araújo**

Orientador (Presidente da Banca)

Documento assinado digitalmente
 **WUALLISON FIRMINO DOS SANTOS**
Data: 23/10/2025 14:26:46-0300
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

Prof. Dr. Wuallison Firmino dos Santos

IFPB – Examinador Interno

Documento assinado digitalmente
 **GEOVANE DE SOUZA FERREIRA JUNIOR**
Data: 23/10/2025 10:15:25-0300
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

Prof. Me. Geovane de Souza Ferreira Junior

UEPB – Examinador Externo

PATOS-PB

2025

Dedico este trabalho à minha família, por ser meu porto seguro e a fonte de minha motivação. A todos aqueles que me instigaram a almejar patamares superiores, me encorajando a ir além dos meus próprios limites. E aos futuros leitores, que este estudo sirva de farol, iluminando o caminho da pesquisa e do aprendizado.

AGRADECIMENTOS

À minha família, meu porto seguro e a fonte de toda a minha motivação. Em especial à minha mãe, Maria Lúcia, e ao meu pai, Wedman, por todo o apoio, amor e paciência ao longo desta jornada. Aos meus irmãos e sobrinhos, que me serviram de inspiração e me fortaleceram em cada passo.

A Deus, por me guiar, me iluminar e por me dar a força necessária para superar cada desafio.

Ao professor Fernando Henrique Antunes de Araújo, sua disponibilidade em me orientar, mesmo sem me conhecer pessoalmente, foi essencial para a realização deste trabalho. Sua confiança e orientações foram inestimáveis.

Aos professores do curso de especialização, que com sua paixão pelo Ensino das Ciências e Matemática, me mostraram que a educação e o conhecimento são, de fato, uma jornada sem limites.

Por fim, agradeço ao Instituto Federal da Paraíba (IFPB) por me proporcionar a oportunidade de aprofundar meus conhecimentos e concluir mais esta importante etapa da minha vida.

RESUMO

O operador Laplaciano é uma ferramenta matemática central em diversas áreas da física e da engenharia, figurando em equações fundamentais como as de Laplace, Poisson e a equação de onda. Contudo, sua apresentação em sistemas de coordenadas não cartesianas é frequentemente abordada no ensino superior como uma fórmula pronta, omitindo-se a dedução matemática que a origina e, conseqüentemente, limitando a uma compreensão superficial por parte dos estudantes. Este trabalho teve como objetivo principal preencher essa lacuna pedagógica, oferecendo uma análise sistemática e detalhada da derivação do operador Laplaciano em coordenadas polares, cilíndricas e esféricas. A metodologia empregada partiu de uma revisão bibliográfica de obras canônicas da física-matemática, seguida pela dedução rigorosa das expressões do operador através da aplicação da regra da cadeia para transformações de coordenadas. Subsequentemente, a utilidade prática das expressões deduzidas foi demonstrada pela aplicação na resolução de problemas clássicos da física, como o cálculo do potencial eletrostático e gravitacional em sistemas com simetria circular, axial e esférica. Os resultados evidenciaram que a escolha de um sistema de coordenadas compatível com a geometria do problema simplifica drasticamente a solução de equações diferenciais parciais complexas. Concluímos então que uma abordagem focada na dedução, em vez da memorização, promove uma compreensão mais profunda da íntima relação entre a simetria física de um sistema e a estrutura da ferramenta matemática necessária para descrevê-lo, reforçando a importância do raciocínio analítico no ensino de ciências e matemática.

Palavras-chaves: Operador Laplaciano, Coordenadas Curvilíneas, Equações Diferenciais Parciais.

ABSTRACT

The Laplacian operator is a central mathematical tool in several areas of physics and engineering, featuring in fundamental equations such as those of Laplace, Poisson, and the wave equation. However, its presentation in non-Cartesian coordinate systems is often approached in higher education as a ready-made formula, omitting the mathematical derivation from which it originates and, consequently, limiting students to a superficial understanding. This work's main objective was to fill this pedagogical gap by offering a systematic and detailed analysis of the derivation of the Laplacian operator in polar, cylindrical, and spherical coordinates. The methodology employed began with a bibliographic review of canonical works in mathematical physics, followed by the rigorous deduction of the operator's expressions through the application of the chain rule for coordinate transformations. Subsequently, the practical utility of the deduced expressions was demonstrated by applying them to solve classic problems in physics, such as the calculation of electrostatic and gravitational potential in systems with circular, axial, and spherical symmetry. The results showed that choosing a coordinate system compatible with the problem's geometry drastically simplifies the solution of complex partial differential equations. It is concluded that an approach focused on derivation, rather than memorization, promotes a deeper understanding of the intimate relationship between a system's physical symmetry and the structure of the mathematical tool required to describe it, reinforcing the importance of analytical reasoning in science and mathematics education.

Key-words: Laplacian Operator, Curvilinear Coordinates, Partial Differential Equations.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1	– Eixo polar e representação de um ponto P em coordenadas polares.	14
Figura 2	– Relação entre coordenadas polares e cartesianas. As projeções mostram as componentes x e y do ponto P	15
Figura 3	– Sistema de coordenadas cilíndricas. O ângulo θ está no plano xy que representa o plano das coordenadas polares, e a coordenada z vertical (altura) adiciona o formato cilíndrico.	16
Figura 4	– Relação entre coordenadas cilíndricas e cartesianas. O ângulo θ está no plano xy (largura e profundidade), e a coordenada z é vertical (altura). As projeções mostram as componentes x , y e z do ponto P	17
Figura 5	– Sistema de coordenadas esféricas. O ângulo θ (azimute) está no plano xy , e ϕ (polar) mede a inclinação em relação ao eixo z	18
Figura 6	– Relação entre coordenadas esféricas e cartesianas. As projeções mostram as componentes x , y e z em função de ρ , θ e ϕ	19

LISTA DE SÍMBOLOS

α	Letra grega minúscula Alpha
ϕ	Letra grega minúscula Phi
θ	Letra grega minúscula Theta
ρ	Letra grega minúscula Rho
∂	Operador Derivada Parcial
∇f	Operador Gradiente
$\nabla \cdot F$	Operador Divergente
∇^2	Operador Laplaciano

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	11
2	OPERADORES DIFERENCIAIS E SISTEMAS DE COORDENADAS	12
2.1	Operador Gradiente	12
2.2	Operador Divergente	13
2.3	Operador Laplaciano	13
2.4	Coordenadas Polares: Definição e Transformações	14
2.4.1	Definição e Relação com Coordenadas Cartesianas (Polares)	14
2.5	Coordenadas Cilíndricas: Definição e Transformações	15
2.5.1	Definição e Relação com Coordenadas Cartesianas (Cilíndricas)	15
2.6	Coordenadas Esféricas: Definição e Transformações	17
2.6.1	Definição e Relação com Coordenadas Cartesianas (Esféricas)	17
3	DEDUÇÃO DO OPERADOR LAPLACIANO	20
3.1	Dedução do Laplaciano em Coordenadas Polares	20
3.2	Dedução do Laplaciano em Coordenadas Cilíndricas	23
3.3	Dedução do Laplaciano em Coordenadas Esféricas	25
4	APLICAÇÕES EM PROBLEMAS FÍSICOS	31
4.1	Aplicação em Coordenadas Polares	31
4.1.1	Exemplo: Potencial Dentro de um Cilindro Condutor	32
4.2	Aplicação em Coordenadas Cilíndricas	33
4.2.1	Exemplo: Potencial de um Fio Longo e Carregado	33
4.3	Aplicação em Coordenadas Esféricas	34
4.3.1	Exemplo: Campo Gravitacional de uma massa pontual M	34
4.4	Conclusão	35
5	CONSIDERAÇÕES FINAIS	36
	REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	38
	APÊNDICES	40
	APÊNDICE A – DEMONSTRAÇÕES	41

1 INTRODUÇÃO

O operador Laplaciano, denotado pelo símbolo ∇ (Nabla) com um expoente 2, e escrito como ∇^2 , é um dos operadores diferenciais mais relevantes nas ciências exatas, atuando como uma peça central em diversas equações fundamentais da física e da matemática. Sua presença é marcante em equações diferenciais parciais como a equação de Laplace $\nabla^2\phi = 0$, a equação de Poisson $\nabla^2\phi = \rho$, a equação do calor $\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha\nabla^2 u$ e a equação de onda $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2\nabla^2$ (Strauss, 2007). Essas equações modelam diversos fenômenos, desde distribuição de temperatura em sólidos e a propagação de ondas sonoras, até o comportamento de campos eletromagnéticos e a dinâmica de partículas quânticas.

Em problemas práticos, a escolha do sistema de coordenadas adequado, seja ele, cartesiano, polar, cilíndrico ou esférico, é crucial para simplificar a resolução das equações. Sistemas esféricos, por exemplo, são ideais para simetrias radiais (como potenciais de campos gravitacionais de um planeta), enquanto coordenadas cilíndricas facilitam a análise de fenômenos com simetrias axiais (como fluxos percorrendo dentro de tubos). Contudo, as expressões do laplaciano nesses sistemas são frequentemente apresentadas como fórmulas prontas, sem uma exploração detalhada de sua origem. Essa abordagem, embora possa ser simples e prática, pode levar a uma aprendizagem superficial e ineficiente, na qual o estudante memoriza fórmulas sem compreender as transformações matemáticas que existem por trás (Mazur, 1997; Sabah, 2023).

Esse trabalho busca preencher essa lacuna pedagógica, oferecendo uma análise sistemática das deduções do operador laplaciano nos diferentes sistemas de coordenadas possíveis (Lima; Mello, 2021). Para poder prosseguir neste trabalho iremos explorar os conceitos dos operadores gradiente, divergente e laplaciano, e também iremos desenvolver um pouco da álgebra de mudanças de coordenadas, além de utilizar exemplos práticos para mostrar como a escolha adequada do sistema de coordenadas simplifica problemas físicos que podem parecer complexos. A metodologia adotada combina uma revisão bibliográfica de obras clássicas de Cálculo e Física-Matemática com deduções demonstradas passo a passo, de forma a tornar o processo acessível a estudantes de graduação. O trabalho está organizado em capítulos que abordam sequencialmente a definição dos operadores diferenciais, métodos de conversão entre sistemas de coordenadas, a conversão do próprio operador laplaciano para outros sistemas e por fim uma aplicação em contextos físicos, culminando numa discussão crítica sobre o impacto pedagógico do ensino através dessa abordagem.

2 OPERADORES DIFERENCIAIS E SISTEMAS DE COORDENADAS

A análise de fenômenos físicos e matemáticos requerem, frequentemente, o uso de ferramentas matemáticas avançadas, que permitem descrever e resolver problemas. Muitas vezes, para facilitar a compreensão da situação física e simplificar a resolução de um determinado problema, convém fazer uma mudança do sistema de coordenadas utilizado. Assim, neste capítulo, serão abordados conceitos fundamentais que servem como base para a compreensão do desenvolvimento que será apresentado posteriormente neste trabalho.

O Operador Laplaciano é um dos operadores de derivadas mais importantes na matemática e na física, ele desempenha um papel central na resolução de equações diferenciais parciais, como a equação de Laplace, a equação de Poisson e a equação de onda. Ele descreve a divergência do gradiente de um campo escalar e é essencial para modelar fenômenos como difusão, potencial gravitacional e eletrostático (Boas, 2006; Arfken et al., 2013; Riley; Hobson; Bence, 2006).

E para aplicar o Operador Laplaciano de forma eficiente em diferentes contextos, é necessário saber utilizar sistemas de coordenadas adequados às simetrias do problema. E alguns dos sistemas de Coordenadas mais utilizados são o sistema de Coordenadas Polares, Coordenadas Cilíndricas e Coordenadas Esféricas (Spiegel, 1959).

Neste capítulo, será explorado detalhadamente os operadores diferenciais e as mudanças entre os sistemas de coordenadas, fornecendo as ferramentas matemáticas necessárias para o desenvolvimento das expressões do Operador Laplaciano em diferentes sistemas de coordenadas e a análise de problemas físicos e matemáticos em diversas áreas do conhecimento.

2.1 Operador Gradiente

O operador gradiente (∇f) é uma operação fundamental que, ao atuar sobre uma função escalar $f(x, y, z)$, resulta em um campo vetorial (Spiegel, 1959; Stewart, 2015; Kreyszig, 2010). Este vetor, denotado por ∇f , possui uma interpretação geométrica e física: ele aponta na direção e sentido para os quais a função f cresce mais rapidamente, e sua magnitude corresponde exatamente a essa taxa máxima de variação.

Essa propriedade torna o gradiente uma ferramenta essencial na física para relacionar potenciais (escalares) a campos de força (vetoriais). Por exemplo, o campo elétrico $\vec{E}$ deriva de potencial elétrico V através da relação $\vec{E} = -\nabla V$, e uma força conservativa $\vec{F}$ deriva da energia potencial U como $\vec{F} = -\nabla U$ (Griffiths, 2013).

Em coordenadas cartesianas, a expressão do gradiente é dada por:

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial x} \hat{i} + \frac{\partial f}{\partial y} \hat{j} + \frac{\partial f}{\partial z} \hat{k} \quad (1)$$

O campo vetorial gerado pelo gradiente é a base sobre a qual outros operadores, como o divergente e o rotacional, atuam para revelar mais propriedades do sistema físico. Seguindo nosso trabalho, analisaremos o que ocorre quando medimos o "fluxo" de um campo vetorial com o operador divergente.

2.2 Operador Divergente

O operador divergente é uma operação diferencial fundamental da análise vetorial, que atua sobre campos vetoriais. Ele mede a tendência de um campo vetorial de “sair” (divergir) de um ponto específico no espaço. Intuitivamente, a divergência quantifica a densidade de “fontes” ou “sumidouros” de um campo vetorial, sendo extremamente útil na formulação de leis físicas como a Lei de Gauss, tanto na gravitação quanto no eletromagnetismo (Griffiths, 2013).

Dado um campo vetorial $\vec{F}(x, y, z) = F_x \hat{i} + F_y \hat{j} + F_z \hat{k}$ em coordenadas cartesianas, a divergência de $\vec{F}$ é definida como:

$$\nabla \cdot \vec{F} = \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z} \quad (2)$$

Essa operação resulta em uma função escalar e é interpretada como a variação de fluxo por unidade de volume. Em regiões onde $\nabla \cdot \vec{F} > 0$, o campo se comporta como uma fonte; quando $\nabla \cdot \vec{F} < 0$, como um sumidouro; e quando $\nabla \cdot \vec{F} = 0$, o campo é dito solenoidal, ou seja, não possui fontes nem sumidouros locais (Schey, 2005).

A importância do operador divergente se torna ainda mais evidente quando consideramos sua aplicação sobre o gradiente de uma função escalar.

2.3 Operador Laplaciano

O Operador Laplaciano é um operador diferencial de segunda ordem, utilizado em matemática e física para descrever fenômenos que envolvem difusão, potencial e propagação de ondas. Ele é denotado por ∇^2 e é definido como a divergência do gradiente de uma função escalar f (Griffiths, 2013; Arfken et al., 2013):

$$\nabla^2 f = \nabla \cdot (\nabla f) \quad (3)$$

Isso significa que o Laplaciano combina dois operadores fundamentais da análise vetorial: o gradiente, que mede a taxa de variação espacial de uma função escalar, e a divergência, que mede o quanto esse gradiente “espalha” ou “converge” ao longo do espaço. O resultado é

uma medida da curvatura local ou da concavidade da função, e está diretamente relacionado a fenômenos de difusão, condução de calor, comportamento de potenciais e propagação de ondas.

Para uma função em coordenadas cartesianas definida por $f(x, y, z)$, o laplaciano é dado por:

$$\nabla^2 f(x, y, z) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial f}{\partial z} \right) \quad (4)$$

$$\nabla^2 f(x, y, z) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \quad (5)$$

Existem muitas outras expressões mais complicadas envolvendo ∇^2 e um ou mais funções escalares ou vetoriais, que surgem em várias aplicações da análise vetorial (Boas, 2006). Embora a expressão do Laplaciano em coordenadas cartesianas seja simples, muitos problemas físicos possuem simetrias que tornam outros sistemas de coordenadas mais adequados para a resolução de problemas (Griffiths, 2013), é por isso torna-se necessário conhecê-los.

2.4 Coordenadas Polares: Definição e Transformações

As coordenadas polares são um sistema de coordenadas bidimensional que descrevem a posição de um ponto no plano por meio de uma distância radial r e um ângulo θ . Esse sistema é particularmente útil em problemas com simetria circular, como o movimento de partículas em órbitas ou a resolução de equações diferenciais com simetria radial (Spiegel, 1959).

2.4.1 Definição e Relação com Coordenadas Cartesianas (Polares)

Em coordenadas polares, um ponto P no plano é representado por um par (r, θ) , onde r é a distância do ponto à origem (também chamada de raio). E θ é o ângulo entre o eixo x positivo e a linha que conecta a origem ao ponto P .

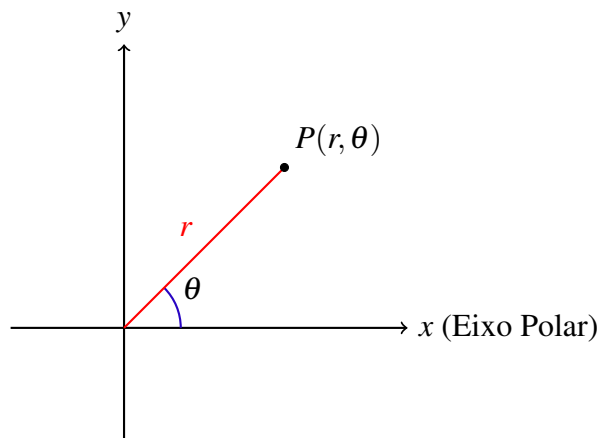


Figura 1 – Eixo polar e representação de um ponto P em coordenadas polares.

A Figura 1 ilustra o sistema de coordenadas polares, mostrando o eixo polar (eixo x) e o ângulo θ que define a direção do ponto P .

A transformação entre coordenadas polares (r, θ) e coordenadas cartesianas (x, y) é dada por:

$$\begin{aligned} x &= r \cos \theta \\ y &= r \sin \theta \end{aligned} \tag{6}$$

A Figura 2 mostra geometricamente como as coordenadas polares se relacionam com as coordenadas cartesianas, incluindo as projeções do ponto P nos eixos x e y e pode-se perceber que a transformação de coordenadas cartesianas para polares pode ser obtida utilizando apenas trigonometria (Spiegel, 1959).

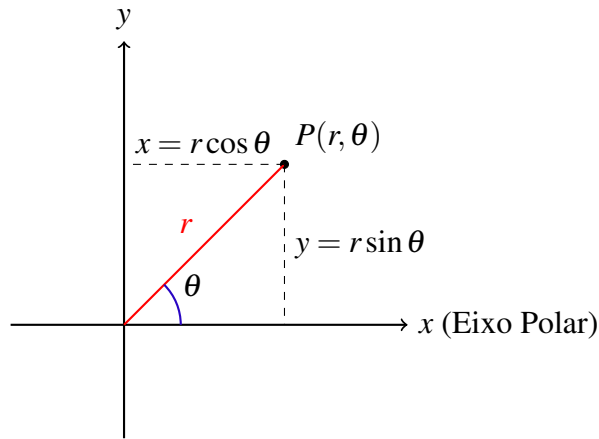


Figura 2 – Relação entre coordenadas polares e cartesianas. As projeções mostram as componentes x e y do ponto P .

2.5 Coordenadas Cilíndricas: Definição e Transformações

As coordenadas cilíndricas são uma extensão das coordenadas polares para o espaço tridimensional, adicionando uma coordenada z para descrever a altura ao longo do eixo vertical. Esse sistema é particularmente útil em problemas com simetria axial, como o fluxo de fluidos em tubos ou campos magnéticos em solenoides (Spiegel, 1959).

2.5.1 Definição e Relação com Coordenadas Cartesianas (Cilíndricas)

Em coordenadas cilíndricas, um ponto P no espaço é representado por uma tripla (r, θ, z) , onde r é a distância do ponto ao eixo z (raio). θ é o ângulo entre a projeção do ponto no plano xy e o eixo x positivo. E z é a altura do ponto ao longo do eixo z .

A Figura 3 ilustra o sistema de coordenadas cilíndricas, mostrando as componentes r , θ e z .

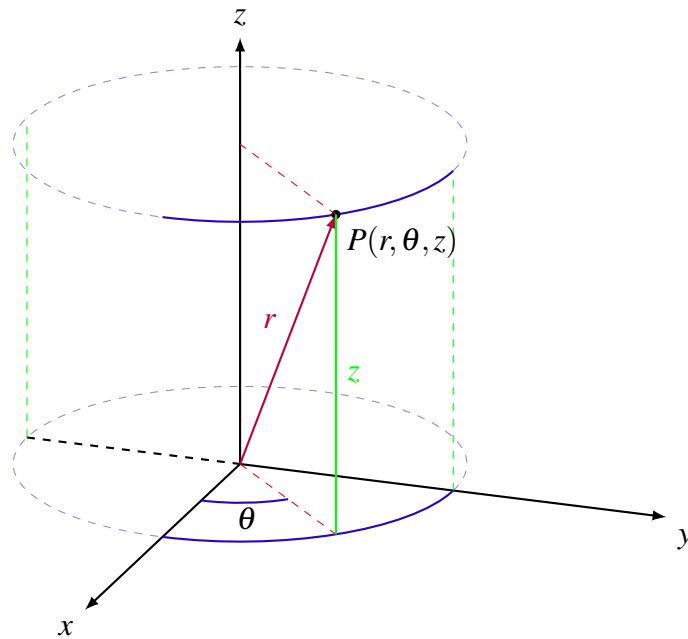


Figura 3 – Sistema de coordenadas cilíndricas. O ângulo θ está no plano xy que representa o plano das coordenadas polares, e a coordenada z vertical (altura) adiciona o formato cilíndrico.

A transformação entre coordenadas cilíndricas (r, θ, z) e coordenadas cartesianas (x, y, z) é dada por:

$$\begin{aligned} x &= r \cos \theta \\ y &= r \sin \theta \\ z &= z \end{aligned} \tag{7}$$

A Figura 4 mostra geometricamente como as coordenadas cilíndricas se relacionam com as coordenadas cartesianas, incluindo as projeções do ponto P nos eixos x , y e z .

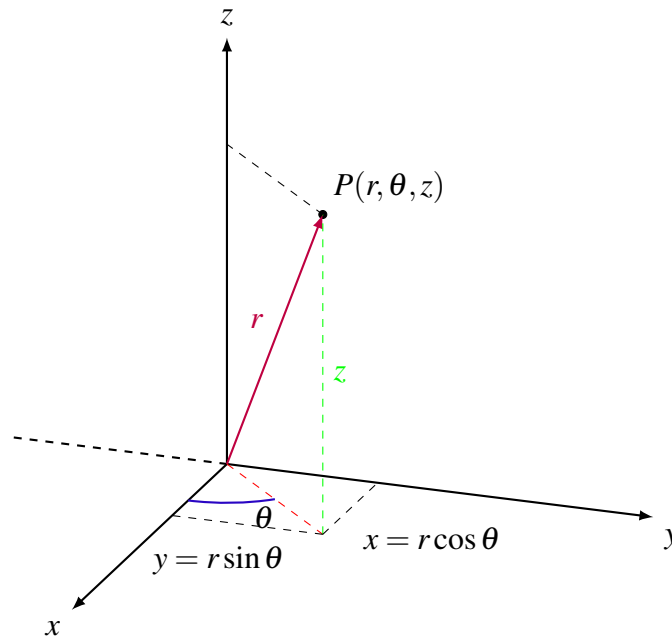


Figura 4 – Relação entre coordenadas cilíndricas e cartesianas. O ângulo θ está no plano xy (largura e profundidade), e a coordenada z é vertical (altura). As projeções mostram as componentes x , y e z do ponto P .

2.6 Coordenadas Esféricas: Definição e Transformações

As coordenadas esféricas também são uma extensão das coordenadas polares para o espaço tridimensional, adicionando um novo ângulo para descrever mais uma rotação ao longo do espaço. Elas descrevem a posição de um ponto no espaço tridimensional usando três parâmetros: uma distância radial e dois ângulos. Esse sistema é ideal para problemas com simetria esférica, como campos gravitacionais ou potenciais eletrostáticos em torno de cargas pontuais (Spiegel, 1959).

2.6.1 Definição e Relação com Coordenadas Cartesianas (Esféricas)

Um ponto P em coordenadas esféricas é representado por (ρ, θ, ϕ) , onde ρ é a distância da origem ao ponto P . θ representa o ângulo no plano xy entre a projeção de ρ e o eixo x positivo (azimute). E ϕ é o ângulo entre o vetor $\vec{P}$ e o eixo z positivo (polar).

A Figura 5 ilustra esse sistema.

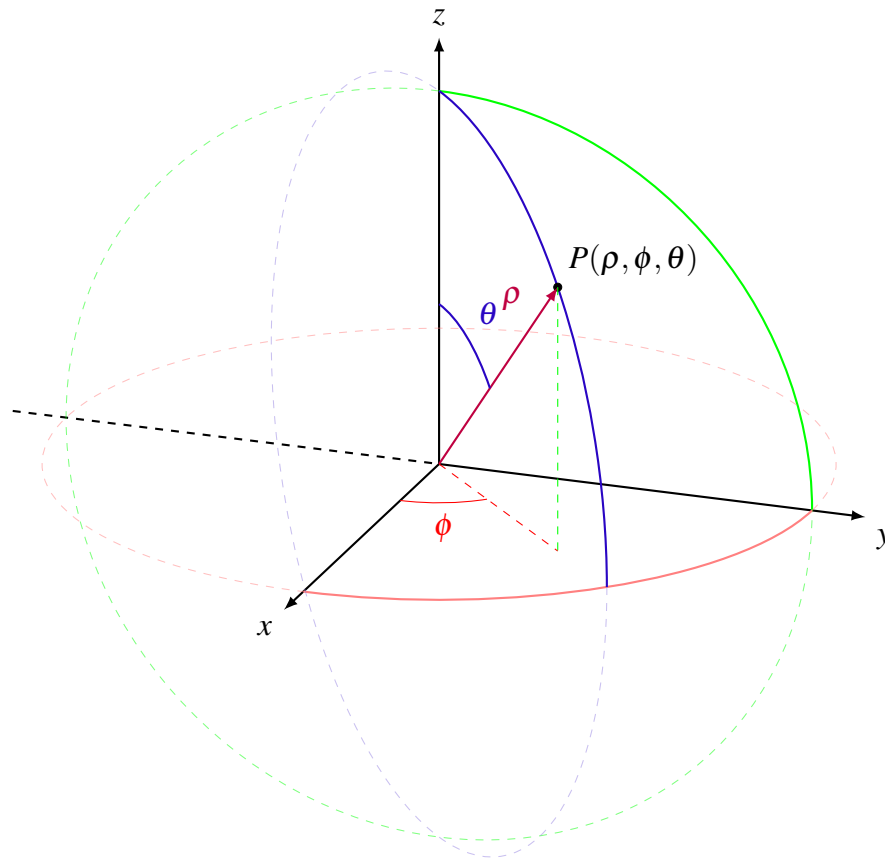


Figura 5 – Sistema de coordenadas esféricas. O ângulo θ (azimute) está no plano xy , e ϕ (polar) mede a inclinação em relação ao eixo z .

A transformação entre coordenadas esféricas e cartesianas é dada por:

$$\begin{aligned} x &= \rho \sin \theta \cos \phi \\ y &= \rho \sin \phi \sin \theta \\ z &= \rho \cos \theta \end{aligned} \tag{8}$$

A Figura 6 mostra as projeções de P nos eixos cartesianos.

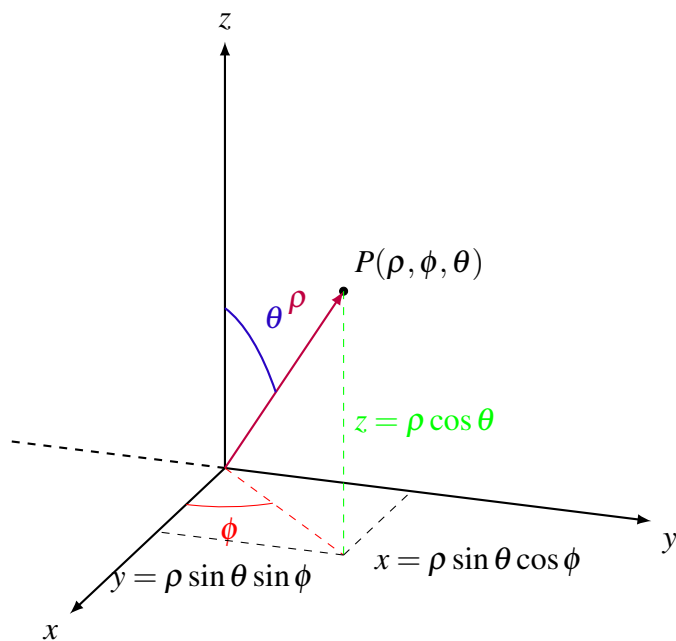


Figura 6 – Relação entre coordenadas esféricas e cartesianas. As projeções mostram as componentes x , y e z em função de ρ , θ e ϕ .

3 DEDUÇÃO DO OPERADOR LAPLACIANO

Nesta seção, derivaremos a expressão do operador Laplaciano nos diferentes sistemas de coordenadas (Polares, Cilíndricas e Esféricas), partindo de sua definição em coordenadas cartesianas e aplicando transformações de coordenadas. O processo envolve duas etapas principais: (1) definição das relações entre coordenadas, já feita no capítulo 2 e (2) aplicação da fórmula geral do Laplaciano em sistemas curvilíneos.

3.1 Dedução do Laplaciano em Coordenadas Polares

Sabemos que as coordenadas polares se relacionam com as coordenadas cartesianas por:

$$\begin{aligned}x &= r \cos \theta \\y &= r \sin \theta\end{aligned}\tag{9}$$

e a partir dessa transformação podemos escrever que:

$$\begin{aligned}r &= \sqrt{x^2 + y^2} \\ \theta &= \arctan\left(\frac{y}{x}\right)\end{aligned}\tag{10}$$

Da expressão do laplaciano em coordenadas cartesianas (5), temos:

$$\nabla^2 f(x, y, z) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}\tag{11}$$

A partir daqui será necessário calcular derivadas segundas de f . Para facilitar a visualização começaremos utilizando (4) para calcular as derivadas primeiras, conforme a expressão:

$$\nabla f(x, y, z) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial f}{\partial z} \right)\tag{12}$$

Fazendo a mudança de coordenadas na função, teremos: $f(x, y, z) \rightarrow f(r, \theta, 0)$.

Para converter os termos de derivadas aplicaremos a regra da cadeia para derivadas, de modo a obter a derivada de f em relação a x e f em relação a y no novo sistema de coordenadas.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial x}\tag{13}$$

Como sabemos a relação de r e x podemos realizar a derivada de r em relação a x

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \sqrt{x^2 + y^2} = \frac{1}{2} \frac{2x}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{r \cos \theta}{r} = \cos \theta\tag{14}$$

E pela relação de θ e x , temos:

$$\frac{\partial \theta}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \arctan\left(\frac{y}{x}\right) = -\frac{y}{x^2 + y^2} = -\frac{r \sin \theta}{r^2} = -\frac{\sin \theta}{r} \quad (15)$$

Daí:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial x} = \cos \theta \frac{\partial f}{\partial r} - \frac{\sin \theta}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} \quad (16)$$

Para a obter a derivada de f em relação a y , sabendo a relação entre eles, teremos:

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial y} \quad (17)$$

Como sabemos a relação de r e y podemos realizar a derivada de r em relação a y

$$\frac{\partial r}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \sqrt{x^2 + y^2} = \frac{1}{2} \frac{2y}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{r \sin \theta}{r} = \sin \theta \quad (18)$$

E pela relação de θ e y , temos:

$$\frac{\partial \theta}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \arctan\left(\frac{y}{x}\right) = \frac{x}{x^2 + y^2} = \frac{r \cos \theta}{r^2} = \frac{\cos \theta}{r} \quad (19)$$

Daí:

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial y} = \sin \theta \frac{\partial f}{\partial r} + \frac{\cos \theta}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} \quad (20)$$

Como em coordenadas polares $z = 0$, então a função se torna $f(x, y) \rightarrow f(r, \theta)$, e as derivadas primeiras tomam as expressões

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= \cos \theta \frac{\partial f}{\partial r} - \frac{\sin \theta}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= \sin \theta \frac{\partial f}{\partial r} + \frac{\cos \theta}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} \end{aligned} \quad (21)$$

Agora, calculando as derivadas segundas, teremos:

Para x :

$$\frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\cos \theta \frac{\partial f}{\partial r} - \frac{\sin \theta}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} \right) \quad (22)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial x} = \left(\frac{\partial r}{\partial x} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial \theta}{\partial x} \frac{\partial}{\partial \theta} \right) \left(\cos \theta \frac{\partial f}{\partial r} - \frac{\sin \theta}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} \right) \quad (23)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial x} = \left(\cos \theta \frac{\partial}{\partial r} - \frac{\sin \theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \right) \left(\cos \theta \frac{\partial f}{\partial r} - \frac{\sin \theta}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} \right) \quad (24)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \left(\cos \theta \frac{\partial}{\partial r} - \frac{\sin \theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \right) \left(\cos \theta \frac{\partial f}{\partial r} - \frac{\sin \theta}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} \right) \quad (25)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} &= \cos \theta \frac{\partial}{\partial r} \left(\cos \theta \frac{\partial f}{\partial r} \right) + \cos \theta \frac{\partial}{\partial r} \left(-\frac{\sin \theta}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} \right) \\ &\quad - \frac{\sin \theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\cos \theta \frac{\partial f}{\partial r} \right) - \frac{\sin \theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(-\frac{\sin \theta}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} \right) \end{aligned} \quad (26)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} &= \cos^2 \theta \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} - \cos \theta \sin \theta \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} \right) \\ &\quad - \frac{\sin \theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\cos \theta \frac{\partial f}{\partial r} \right) + \frac{\sin \theta}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial f}{\partial \theta} \right) \end{aligned} \quad (27)$$

E fazendo os mesmos cálculos das derivadas para a variável y :

$$\frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\sin \theta \frac{\partial f}{\partial r} + \frac{\cos \theta}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} \right) \quad (28)$$

$$\frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial f}{\partial y} = \left(\frac{\partial r}{\partial y} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial \theta}{\partial y} \frac{\partial}{\partial \theta} \right) \left(\sin \theta \frac{\partial f}{\partial r} + \frac{\cos \theta}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} \right) \quad (29)$$

$$\frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial f}{\partial y} = \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\cos \theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \right) \left(\sin \theta \frac{\partial f}{\partial r} + \frac{\cos \theta}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} \right) \quad (30)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\cos \theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \right) \left(\sin \theta \frac{\partial f}{\partial r} + \frac{\cos \theta}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} \right) \quad (31)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} &= \sin \theta \frac{\partial}{\partial r} \left(\sin \theta \frac{\partial f}{\partial r} \right) + \sin \theta \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\cos \theta}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} \right) \\ &\quad + \frac{\cos \theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial f}{\partial r} \right) + \frac{\cos \theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{\cos \theta}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} \right) \end{aligned} \quad (32)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} &= \sin^2 \theta \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} + \sin \theta \cos \theta \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} \right) \\ &\quad + \frac{\cos \theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial f}{\partial r} \right) + \frac{\cos \theta}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\cos \theta \frac{\partial f}{\partial \theta} \right) \end{aligned} \quad (33)$$

Somando as equações 27 e 33, obteremos a seguinte expressão

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} &= (\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} + (\sin \theta \cos \theta - \cos \theta \sin \theta) \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} \right) \\
&\quad + \frac{\cos \theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial f}{\partial r} \right) + \frac{\cos \theta}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\cos \theta \frac{\partial f}{\partial \theta} \right) \\
&\quad - \frac{\sin \theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\cos \theta \frac{\partial f}{\partial r} \right) + \frac{\sin \theta}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial f}{\partial \theta} \right)
\end{aligned} \tag{34}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} &= \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} + \frac{\cos \theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial f}{\partial r} \right) + \frac{\cos \theta}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\cos \theta \frac{\partial f}{\partial \theta} \right) \\
&\quad - \frac{\sin \theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\cos \theta \frac{\partial f}{\partial r} \right) + \frac{\sin \theta}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial f}{\partial \theta} \right)
\end{aligned} \tag{35}$$

E desenvolvendo os termos das derivadas de θ (desenvolvidas no apêndice), a expressão se reduz a:

$$\nabla^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \tag{36}$$

$$\nabla^2 f(r, \theta) = \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} \tag{37}$$

Que é a expressão do operador laplaciano no sistema de coordenadas polares. A derivação para os sistemas de coordenadas cilíndricas e esféricas segue uma metodologia análoga e com as ferramentas aqui obtidas, podem ser facilmente derivadas.

3.2 Dedução do Laplaciano em Coordenadas Cilíndricas

A dedução do operador Laplaciano em coordenadas cilíndricas (r, θ, z) segue uma abordagem similar à empregada para coordenadas polares, com a vantagem de que a coordenada z permanece inalterada em relação ao sistema cartesiano. Como vimos em (7) as relações entre as coordenadas cartesianas e cilíndricas são dadas por:

$$\begin{aligned}
x &= r \cos \theta \\
y &= r \sin \theta \\
z &= z
\end{aligned} \tag{38}$$

e a partir dessa transformação podemos escrever que:

$$\begin{aligned}
r &= \sqrt{x^2 + y^2} \\
\theta &= \arctan \left(\frac{y}{x} \right) \\
z &= z
\end{aligned} \tag{39}$$

Da expressão do laplaciano em coordenadas cartesianas (5), temos:

$$\nabla^2 f(x, y, z) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \quad (40)$$

A partir daqui será necessário calcular derivadas segundas de f . Para facilitar a visualização começaremos utilizando (4) para calcular as derivadas primeiras, conforme a expressão:

$$\nabla^2 f(x, y, z) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial f}{\partial z} \right) \quad (41)$$

Fazendo a mudança de coordenadas na função, teremos: $f(x, y, z) \rightarrow f(r, \theta, z)$.

Para converter os termos de derivadas aplicaremos a regra da cadeia para derivadas, de modo a obter as expressões das derivadas de f em relação a x , f em relação a y e f em relação a z no novo sistema de coordenadas.

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= \frac{\partial f}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= \frac{\partial f}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial y} \\ \frac{\partial f}{\partial z} &= \frac{\partial f}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial z} + \frac{\partial f}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial z} + \frac{\partial f}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial z} \end{aligned} \quad (42)$$

Perceba que z não depende de x ou y , de modo que nas expressões das derivadas de f em relação a x e f em relação a y , os termos $\frac{\partial f}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial x}$ e $\frac{\partial f}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial y}$ são nulos e as derivadas de f em relação a essas coordenadas replicam o resultado obtido em (21).

Desenvolvendo o termo de f em relação a z , podemos perceber que r e θ também não dependem das coordenadas z , de modo que essas derivadas são nulas e a derivada de f em relação a z é ela própria.

Assim, as derivadas primeiras são dadas por

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= \cos \theta \frac{\partial f}{\partial r} - \frac{\sin \theta}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= \sin \theta \frac{\partial f}{\partial r} + \frac{\cos \theta}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} \\ \frac{\partial f}{\partial z} &= \frac{\partial f}{\partial z} \end{aligned} \quad (43)$$

Prosseguindo para o cálculo das derivadas segundas, teremos:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\cos \theta \frac{\partial f}{\partial r} - \frac{\sin \theta}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} \right) \\
\frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial f}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial y} \left(\sin \theta \frac{\partial f}{\partial r} + \frac{\cos \theta}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} \right) \\
\frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial f}{\partial z} &= \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial f}{\partial z} \right)
\end{aligned} \tag{44}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} &= \left(\frac{\partial r}{\partial x} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial \theta}{\partial x} \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial}{\partial z} \right) \left(\cos \theta \frac{\partial f}{\partial r} - \frac{\sin \theta}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} \right) \\
\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} &= \left(\frac{\partial r}{\partial y} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial \theta}{\partial y} \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial}{\partial z} \right) \left(\sin \theta \frac{\partial f}{\partial r} + \frac{\cos \theta}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} \right) \\
\frac{\partial^2 f}{\partial z^2} &= \left(\frac{\partial r}{\partial z} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial \theta}{\partial z} \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{\partial z}{\partial z} \frac{\partial}{\partial z} \right) \left(\frac{\partial f}{\partial z} \right)
\end{aligned} \tag{45}$$

Como já vimos no cálculo para as derivadas primeiras, termos de z em relação a x e y , e termos de r e θ em relação a z são nulos, de modo que para as coordenadas x e y , obtemos o mesmo resultado das derivadas em coordenadas polares, e o termo em z se reduz a uma única derivadas segunda.

Pela expressão do laplaciano temos

$$\nabla^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \tag{46}$$

Como o resultado das derivadas segundas em relação a x e a y se repetem das coordenadas polares, temos a partir da equação (37)

$$\nabla^2 f(r, \theta, z) = \nabla^2 f(r, \theta) + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \tag{47}$$

De forma que chegamos na expressão para o operador laplaciano em coordenadas cilíndricas. Esta forma é fundamental em inúmeras aplicações de engenharia e física aplicada (Kreyszig, 2010)

$$\nabla^2 f(r, \theta, z) = \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \tag{48}$$

3.3 Dedução do Laplaciano em Coordenadas Esféricas

A construção do Laplaciano em coordenadas esféricas difere das abordagens anteriores, aqui temos dois parâmetros de ângulos (ϕ, θ) e um parâmetro de raio (r). Utilizando as transformações em (8) podemos fazer a conversão de coordenadas cartesianas para coordenadas esféricas e prosseguir com o desenvolvimento do laplaciano.

$$\begin{aligned}
x &= \rho \sin \theta \cos \phi \\
y &= \rho \sin \theta \sin \phi \\
z &= \rho \cos \theta
\end{aligned} \tag{49}$$

Com essas informações podemos obter as expressões para cada um dos parâmetros

$$\begin{aligned}
\rho^2 &= x^2 + y^2 + z^2 \\
\tan \phi &= \frac{y}{x} \\
\cos \theta &= \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}
\end{aligned} \tag{50}$$

Da expressão do laplaciano em coordenadas cartesianas (5), temos:

$$\nabla^2 f(x, y, z) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \tag{51}$$

A partir daqui será necessário calcular derivadas segundas de f . Vamos utilizar uma abordagem de mostrar quem são as derivadas primeiras para facilitar a visualização na expressão (4), para em seguida calcular as derivadas segundas, conforme a expressão:

$$\nabla^2 f(x, y, z) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial f}{\partial z} \right) \tag{52}$$

Fazendo a mudança de coordenadas na função, teremos: $f(x, y, z) \rightarrow f(\rho, \phi, \theta)$.

Podemos obter os termos de primeiras derivadas aplicando a regra da cadeia para derivadas, de modo a obter as expressões das derivadas em relação a x , f em relação a y e f em relação a z no sistema esférico de coordenadas.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x} &= \frac{\partial \rho}{\partial x} \frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{\partial}{\partial \phi} + \frac{\partial \theta}{\partial x} \frac{\partial}{\partial \theta} \\
\frac{\partial}{\partial y} &= \frac{\partial \rho}{\partial y} \frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{\partial \phi}{\partial y} \frac{\partial}{\partial \phi} + \frac{\partial \theta}{\partial y} \frac{\partial}{\partial \theta} \\
\frac{\partial}{\partial z} &= \frac{\partial \rho}{\partial z} \frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{\partial \phi}{\partial z} \frac{\partial}{\partial \phi} + \frac{\partial \theta}{\partial z} \frac{\partial}{\partial \theta}
\end{aligned} \tag{53}$$

A construção das derivadas para cada termo é semelhante, então desenvolveremos aqui os termos de x , e desenvolveremos as expressões para as outras coordenadas no apêndice A.

Desesenvolvendo os termos de x das derivadas (Apêndice: expressão 100), teremos:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \rho}{\partial x} &= \cos \phi \sin \theta \\
\frac{\partial \phi}{\partial x} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\sin \phi}{\sin \theta} \\
\frac{\partial \theta}{\partial x} &= \frac{1}{\rho} \cos \phi \cos \theta
\end{aligned} \tag{54}$$

Com esses resultados podemos desenvolver os termos de derivadas segundas de maneira mais prática. Para a derivada segunda em relação a x , teremos a derivada da derivada primeira em relação a x :

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \rho}{\partial x} \frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{\partial}{\partial \phi} + \frac{\partial \theta}{\partial x} \frac{\partial}{\partial \theta} \right) \tag{55}$$

Aplicando a propriedade da linearidade das derivadas e a regra do produto em cada uma de suas partes teremos:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \rho}{\partial x} \right) \frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{\partial \rho}{\partial x} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial}{\partial \rho} \right) \\
&+ \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right) \frac{\partial}{\partial \phi} + \frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial}{\partial \phi} \right) \\
&+ \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \theta}{\partial x} \right) \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{\partial \theta}{\partial x} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial}{\partial \theta} \right)
\end{aligned} \tag{56}$$

Afim de trazer clareza ao desenvolvimento, vamos resolver cada linha da expressão de forma separada. Iniciaremos desenvolvendo os termos de ρ :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \rho}{\partial x} \frac{\partial}{\partial \rho} \right) &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \rho}{\partial x} \right) \frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{\partial \rho}{\partial x} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial}{\partial \rho} \right) \\
&= \left(\frac{\partial \rho}{\partial x} \frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{\partial}{\partial \phi} + \frac{\partial \theta}{\partial x} \frac{\partial}{\partial \theta} \right) \left(\frac{\partial \rho}{\partial x} \right) \frac{\partial}{\partial \rho} \\
&+ \frac{\partial \rho}{\partial x} \left(\frac{\partial \rho}{\partial x} \frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{\partial}{\partial \phi} + \frac{\partial \theta}{\partial x} \frac{\partial}{\partial \theta} \right) \left(\frac{\partial}{\partial \rho} \right)
\end{aligned} \tag{57}$$

Rearranjando os termos na expressão, ficamos com:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \rho}{\partial x} \frac{\partial}{\partial \rho} \right) &= \frac{\partial \rho}{\partial x} \left[\frac{\partial \rho}{\partial x} \frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{\partial}{\partial \phi} + \frac{\partial \theta}{\partial x} \frac{\partial}{\partial \theta} \right] \frac{\partial}{\partial \rho} \\
&+ \left[\frac{\partial \rho}{\partial x} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\frac{\partial \rho}{\partial x} \right) + \frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{\partial}{\partial \phi} \left(\frac{\partial \rho}{\partial x} \right) + \frac{\partial \theta}{\partial x} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{\partial \rho}{\partial x} \right) \right] \frac{\partial}{\partial \rho}
\end{aligned} \tag{58}$$

Nesta expressão podemos substituir os termos já conhecidos de (54) para chegar a expressão:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \rho}{\partial x} \frac{\partial}{\partial \rho} \right) &= \frac{1}{\rho} (\sin^2 \phi + \cos^2 \phi \cos^2 \theta) \frac{\partial}{\partial \rho} + \cos^2 \phi \sin^2 \theta \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} \\ &\quad - \frac{1}{\rho} \cos \phi \sin \phi \frac{\partial^2}{\partial \phi \partial \rho} + \frac{1}{\rho} \cos^2 \phi \cos \theta \sin \theta \frac{\partial^2}{\partial \theta \partial \rho} \end{aligned} \quad (59)$$

Agora que encontramos uma expressão para os termos de ρ em relação a x , vamos desenvolver os termos relacionados ao parâmetro ϕ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{\partial}{\partial \phi} \right) &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right) \frac{\partial}{\partial \phi} + \frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial}{\partial \phi} \right) \\ &= \left(\frac{\partial \rho}{\partial x} \frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{\partial}{\partial \phi} + \frac{\partial \theta}{\partial x} \frac{\partial}{\partial \theta} \right) \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right) \frac{\partial}{\partial \phi} \\ &\quad + \frac{\partial \phi}{\partial x} \left(\frac{\partial \rho}{\partial x} \frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{\partial}{\partial \phi} + \frac{\partial \theta}{\partial x} \frac{\partial}{\partial \theta} \right) \left(\frac{\partial}{\partial \phi} \right) \end{aligned} \quad (60)$$

Ao manipular os termos, obtemos:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{\partial}{\partial \phi} \right) &= \frac{\partial \phi}{\partial x} \left[\frac{\partial \rho}{\partial x} \frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{\partial}{\partial \phi} + \frac{\partial \theta}{\partial x} \frac{\partial}{\partial \theta} \right] \frac{\partial}{\partial \phi} \\ &\quad + \left[\frac{\partial \rho}{\partial x} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right) + \frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{\partial}{\partial \phi} \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right) + \frac{\partial \theta}{\partial x} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right) \right] \frac{\partial}{\partial \phi} \end{aligned} \quad (61)$$

E substituindo pelos termos conhecidos de (54) obtemos o seguinte resultado:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{\partial}{\partial \phi} \right) &= \frac{1}{\rho^2} \left(\sin \phi \cos \phi + \frac{\cos \phi \sin \phi}{\sin^2 \theta} + \cos \phi \sin \phi \frac{\cos^2 \theta}{\sin^2 \theta} \right) \frac{\partial}{\partial \phi} \\ &\quad - \frac{\cos \phi \sin \phi}{\rho} \frac{\partial^2}{\partial \rho \partial \phi} + \frac{1 \sin^2 \phi}{\rho \sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} - \frac{1 \cos \phi \sin \phi \cos \theta}{\rho^2 \sin \theta} \frac{\partial^2}{\partial \theta \partial \phi} \end{aligned} \quad (62)$$

De maneira similar podemos conseguir uma expressão para os termos envolvendo o parâmetro θ

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \theta}{\partial x} \frac{\partial}{\partial \theta} \right) &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \theta}{\partial x} \right) \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{\partial \theta}{\partial x} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial}{\partial \theta} \right) \\ &= \left(\frac{\partial \rho}{\partial x} \frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{\partial}{\partial \phi} + \frac{\partial \theta}{\partial x} \frac{\partial}{\partial \theta} \right) \left(\frac{\partial \theta}{\partial x} \right) \frac{\partial}{\partial \theta} \\ &\quad + \frac{\partial \theta}{\partial x} \left(\frac{\partial \rho}{\partial x} \frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{\partial}{\partial \phi} + \frac{\partial \theta}{\partial x} \frac{\partial}{\partial \theta} \right) \left(\frac{\partial}{\partial \theta} \right) \end{aligned} \quad (63)$$

Fazendo uma manipulação nos termos, teremos a expressão:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \theta}{\partial x} \frac{\partial}{\partial \theta} \right) &= \frac{\partial \theta}{\partial x} \left[\frac{\partial \rho}{\partial x} \frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{\partial}{\partial \phi} + \frac{\partial \theta}{\partial x} \frac{\partial}{\partial \theta} \right] \frac{\partial}{\partial \theta} \\ &+ \left[\frac{\partial \rho}{\partial x} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\frac{\partial \theta}{\partial x} \right) + \frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{\partial}{\partial \phi} \left(\frac{\partial \theta}{\partial x} \right) + \frac{\partial \theta}{\partial x} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{\partial \theta}{\partial x} \right) \right] \frac{\partial}{\partial \theta} \end{aligned} \quad (64)$$

Utilizando os termos conhecidos de (54) obtemos a seguinte expressão para as derivadas do parâmetro θ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \theta}{\partial x} \frac{\partial}{\partial \theta} \right) &= \frac{1}{\rho^2} \left(-2 \cos^2 \phi \cos \theta \sin \theta + \sin^2 \phi \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \right) \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{1}{\rho} \cos^2 \phi \cos \theta \sin \theta \frac{\partial^2}{\partial \rho \partial \theta} \\ &- \frac{1}{\rho^2} \cos \phi \sin \phi \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \frac{\partial^2}{\partial \phi \partial \theta} + \frac{1}{\rho^2} \cos^2 \phi \cos^2 \theta \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \end{aligned} \quad (65)$$

Com isso temos todas as expressões para calcular a expressão (56). Fazendo o mesmo desenvolvimento para as coordenadas y e z (Apêndice: expressões 103 e 110), podemos encontrar a expressão completa do operador laplaciano em coordenadas esféricas.

Sabemos, da expressão (5) que o laplaciano é a soma das segundas derivadas parciais de cada uma das coordenadas. E sabemos que podemos expandir cada uma das coordenadas pelo método que expandimos a expressão (56), de forma que podemos escrever o laplaciano da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \nabla^2 &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \rho}{\partial x} \frac{\partial}{\partial \rho} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{\partial}{\partial \phi} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \theta}{\partial x} \frac{\partial}{\partial \theta} \right) \\ &+ \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \rho}{\partial y} \frac{\partial}{\partial \rho} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \phi}{\partial y} \frac{\partial}{\partial \phi} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \theta}{\partial y} \frac{\partial}{\partial \theta} \right) \\ &+ \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial \rho}{\partial z} \frac{\partial}{\partial \rho} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial \phi}{\partial z} \frac{\partial}{\partial \phi} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial \theta}{\partial z} \frac{\partial}{\partial \theta} \right) \end{aligned} \quad (66)$$

Fazendo separadamente a soma de cada parâmetro das coordenadas esféricas chegamos no seguinte resultado:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \rho}{\partial x} \frac{\partial}{\partial \rho} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \rho}{\partial y} \frac{\partial}{\partial \rho} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial \rho}{\partial z} \frac{\partial}{\partial \rho} \right) &= \frac{2}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} \\ \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{\partial}{\partial \phi} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \phi}{\partial y} \frac{\partial}{\partial \phi} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial \phi}{\partial z} \frac{\partial}{\partial \phi} \right) &= \frac{1}{\rho^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} \\ \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \theta}{\partial x} \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \theta}{\partial y} \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial \theta}{\partial z} \frac{\partial}{\partial \theta} \right) &= \frac{\cos \theta}{\rho^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \end{aligned} \quad (67)$$

De tal forma que o laplaciano em coordenadas esféricas é dado por:

$$\nabla^2 = \frac{2}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} + \frac{\cos \theta}{\rho^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \quad (68)$$

Ou numa forma mais comum de se encontrar nos livros didáticos (Griffiths, 2013; Boas, 2006; Spiegel, 1959; Arfken et al., 2013; Riley; Hobson; Bence, 2006; Jackson, 1998):

$$\nabla^2 = \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho^2 \frac{\partial}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\rho^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} \quad (69)$$

Neste capítulo, deduzimos sistematicamente as expressões para o operador Laplaciano em coordenadas polares, cilíndricas e esféricas. Partindo da sua forma fundamental em coordenadas cartesianas, demonstramos, passo a passo, como a aplicação da regra da cadeia e das transformações de coordenadas permite obter as fórmulas equivalentes para geometrias não cartesianas.

As expressões finais para o Laplaciano em coordenadas polares, cilíndricas e esféricas são ferramentas matemáticas essenciais. Com estas deduções detalhadas, criamos a base para a compreensão e aplicação no próximo capítulo, onde a importância prática desses resultados será evidenciada. Abordaremos problemas físicos específicos e demonstraremos como a escolha do sistema de coordenadas adequado, alinhado à simetria do problema, simplifica drasticamente a análise e a solução de problemas.

4 APLICAÇÕES EM PROBLEMAS FÍSICOS

O operador laplaciano surge de forma recorrente na formulação matemática de problemas físicos. Seja em eletrostática, em condução de calor, na propagação de ondas ou na mecânica dos fluidos, a presença do laplaciano traduz a relação entre a variação local de uma grandeza e seu comportamento global no espaço.

Neste capítulo, iremos apresentar alguns exemplos de como o laplaciano, quando expresso em diferentes sistemas de coordenadas, facilita a resolução de equações diferenciais parciais associadas a situações físicas concretas. O objetivo é destacar não apenas o papel central do operador, mas também como a escolha adequada das coordenadas simplifica a matemática e evidencia a simetria intrínseca dos sistemas que iremos analisar.

4.1 Aplicação em Coordenadas Polares

Um dos contextos mais relevantes em que o operador laplaciano em coordenadas polares se torna indispensável é na resolução de problemas de eletrostática com simetria circular bidimensional. O potencial eletrostático $V(r, \theta)$, associado a uma densidade de carga $\rho(r, \theta)$, satisfaz a equação de Poisson (Jackson, 1998; Feynman; Leighton; Sands, 2011):

$$\nabla^2 V(r, \theta) = -\frac{\rho(r, \theta)}{\epsilon_0} \quad (70)$$

onde ϵ_0 é a permissividade elétrica do vácuo.

Já sabemos que para coordenadas polares (r, θ) , o laplaciano assume a forma da expressão (37)

$$\nabla^2 V(r, \theta) = \frac{\partial^2 V}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 V}{\partial \theta^2} \quad (71)$$

De tal forma que podemos reescrever a equação de Poisson como:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 V}{\partial \theta^2} = -\frac{\rho(r, \theta)}{\epsilon_0} \quad (72)$$

Esta equação constitui uma equação diferencial parcial elíptica não homogênea, cujo termo fonte é a densidade de carga ρ .

Em uma situação de vácuo, onde não há carga distribuída na região considerada, podemos considerar a densidade de carga como sendo nula e obtemos a equação de Laplace:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 V}{\partial \theta^2} = 0 \quad (73)$$

Ou ainda:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial V}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 V}{\partial \theta^2} = 0 \quad (74)$$

4.1.1 Exemplo: Potencial Dentro de um Cilindro Condutor

Vamos consideremos o problema de determinar o potencial eletrostático dentro de uma região circular de raio R , onde a borda é mantida a um potencial conhecido $V(r, \theta) = f(\theta)$. Afim de resolver essa equação vamos assumir que o potencial pode ser escrito como um produto de duas funções, uma para o parâmetro r e outra para o parâmetro θ

$$V(r, \theta) = R(r)\Theta(\theta) \quad (75)$$

Reescrevendo a equação de Laplace, teremos:

$$\frac{r}{R} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dR}{dr} \right) = - \frac{1}{\Theta} \frac{d^2 \Theta}{d\theta^2} \quad (76)$$

Como cada termo depende apenas de uma variável, logo ambos devem ser iguais a uma constante de separação que chamaremos de $-m^2$

$$\frac{r}{R} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dR}{dr} \right) = -m^2 \quad \text{e} \quad \frac{1}{\Theta} \frac{d^2 \Theta}{d\theta^2} = m^2 \quad (77)$$

A equação diferencial em θ fornece soluções periódicas da forma:

$$\Theta(\theta) = a_n \cos(n\theta) + b_n \sin(n\theta) \quad (78)$$

A equação diferencial em r é uma equação diferencial de Cauchy-Euler, cuja solução é:

$$R(r) = c_n r^n + \frac{D_n}{r^n} \quad (79)$$

Se descartamos o termo divergente r^{-n} para o interior do círculo, obtemos uma solução para o potencial da forma:

$$V(r, \theta) = R(r)\Theta(\theta) = c_n r^n (a_n \cos(n\theta) + b_n \sin(n\theta)) \quad (80)$$

Onde n é um número inteiro e positivo. De tal forma podemos escrever a solução geral para potencial como sendo:

$$V(r, \theta) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} r^n (A_n \cos(n\theta) + B_n \sin(n\theta)) \quad (81)$$

Onde A_n e B_n são as constantes que podem ser determinadas pelas condições de contorno na borda do círculo.

Este resultado é de grande importância física e matemática, pois mostra que o problema de determinar o potencial eletrostático em regiões circulares reduz-se ao cálculo dos coeficientes de Fourier do potencial imposto na fronteira (Jackson, 1998). Aqui podemos perceber que o uso do laplaciano em coordenadas polares não é apenas uma escolha conveniente, mas uma necessidade natural imposta pela geometria do problema. Em coordenadas cartesianas, a equação de Poisson apresentaria termos que dificultariam a resolução quando aplicados a regiões circulares. Já em coordenadas polares, o operador laplaciano se adapta à simetria do sistema. Essa reformulação acaba evidenciando a natureza radial e angular da distribuição de potencial, permitindo que utilizemos outras técnicas, como a separação de variáveis e a expansão em séries de Fourier.

4.2 Aplicação em Coordenadas Cilíndricas

O sistema de coordenadas cilíndricas (r, θ, z) é o mais apropriado para descrever problemas com simetria axial, ou seja, situações em que a geometria do problema ou a distribuição de fontes não depende do ângulo θ ou da coordenada z . Tais casos são muito comuns em eletrostática, magnetostática, condução de calor e mecânica dos fluidos.

O potencial eletrostático $V(r, \theta, z)$ associado a uma densidade de carga $\rho(r, \theta, z)$ satisfaz a equação de Poisson

$$\nabla^2 V(r, \theta, z) = -\frac{\rho(r, \theta, z)}{\epsilon_0}. \quad (82)$$

Em coordenadas cilíndricas, a equação de Poisson torna-se:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial V}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 V}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = -\frac{\rho(r, \theta, z)}{\epsilon_0} \quad (83)$$

E em regiões de vácuo, onde $\rho = 0$, obtemos novamente a equação de Laplace:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial V}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 V}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0 \quad (84)$$

4.2.1 Exemplo: Potencial de um Fio Longo e Carregado

Um exemplo clássico de aplicação é a determinação do potencial eletrostático gerado por um fio condutor retilíneo, muito longo e carregado uniformemente, disposto ao longo do eixo z . Nesse caso, devido à simetria cilíndrica, o potencial não depende nem de θ nem de z , dependendo apenas da coordenada radial r .

De tal forma que a equação de Laplace se reduz a unicamente a uma simples equação diferencial:

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dV}{dr} \right) = 0 \quad (85)$$

Essa é uma equação diferencial de fácil resolução, bastante apenas separar as variáveis e em seguida realizar a integral para obter a solução:

$$\frac{dV}{dr} = \frac{C_1}{r} \Rightarrow V(r) = C_1 \ln(r) + C_2. \quad (86)$$

As constantes C_1 e C_2 podem ser determinadas pelas condições de contorno, como o potencial imposto na superfície do fio (raio R) e a referência de potencial escolhida para grandes distâncias.

O resultado mostra que o potencial devido a um fio infinitamente longo varia de forma logarítmica com a distância do centro do cilindro. Essa solução é especialmente relevante em problemas de eletrostática, mas aparece também em condução de calor em cilindros longos e em mecânica dos fluidos ao analisar o escoamento laminar em tubos.

Assim como no caso das coordenadas polares, o uso do laplaciano em coordenadas cilíndricas se mostra fundamental: ele se adapta à simetria do problema e permite simplificar a equação de Laplace, o que a reduz a uma equação diferencial ordinária simples. Em coordenadas cartesianas, a mesma situação levaria a expressões muito mais complicadas e de difícil interpretação física.

4.3 Aplicação em Coordenadas Esféricas

As coordenadas esféricas (r, θ, ϕ) são particularmente úteis em problemas com simetria radial, ou seja, situações em que a grandeza de interesse depende apenas da distância a um ponto central.

4.3.1 Exemplo: Campo Gravitacional de uma massa pontual M

Um exemplo clássico ocorre no estudo do campo gravitacional de uma massa pontual M . O potencial gravitacional $\Phi(r, \theta, \phi)$ satisfaz a equação de Poisson (Taylor, 2005):

$$\nabla^2 \Phi(r, \theta, \phi) = 4\pi G \rho(r, \theta, \phi) \quad (87)$$

onde G é a constante gravitacional e $\rho(r, \theta, \phi)$ é a densidade de massa. Em problemas com simetria esférica, como o de uma massa pontual, o potencial depende apenas da coordenada radial ρ . Dessa forma, os termos angulares desaparecem, e a equação de Poisson em regiões de vácuo ($\rho = 0$) se reduz para a equação de Laplace:

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{d\Phi}{dr} \right) = 0 \quad (88)$$

Para resolver a equação de Laplace, basta que integremos:

$$r^2 \frac{d\Phi}{dr} = C_1 \quad \Rightarrow \quad \frac{d\Phi}{dr} = \frac{C_1}{r^2} \quad \Rightarrow \quad \Phi(r) = -\frac{GM}{r} + C_2, \quad (89)$$

onde $C_1 = GM$ foi escolhido para coincidir com a Lei da Gravitação Universal, e C_2 é uma constante arbitrária.

Este exemplo evidencia como o uso do laplaciano em coordenadas esféricas facilita a resolução de problemas com simetria radial, transformando a equação de Laplace parcial em uma equação diferencial ordinária simples. Em coordenadas cartesianas, a mesma situação exigiria lidar com três variáveis interdependentes, tornando a análise muito mais complexa. A escolha de coordenadas apropriadas, e a escolha da utilização do laplaciano em coordenadas esféricas, não é apenas uma conveniência matemática, mas uma ferramenta essencial para explorar a simetria natural do sistema e obter soluções físicas de forma direta e elegante que evidencia a eficiência da escolha adequada de um sistema de coordenadas na resolução de problemas com simetrias.

4.4 Conclusão

A partir destes exemplos, podemos ver que o papel do laplaciano é central: ele traduz as propriedades físicas do problema em uma forma matemática compatível com a geometria do domínio. É justamente essa versatilidade que faz do operador laplaciano uma ferramenta fundamental em problemas, o que o torna uma ponte entre simetria física e tratabilidade matemática.

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Este trabalho partiu da constatação de uma lacuna pedagógica recorrente no ensino de física e matemática: a apresentação do operador Laplaciano em sistemas de coordenadas não cartesianas como uma fórmula pronta, desprovida de sua origem matemática. Esse tipo de abordagem, embora simples e prática, acaba por promover uma aprendizagem superficial, baseada na memorização em detrimento da compreensão conceitual profunda. O objetivo central deste trabalho foi preencher essa lacuna, oferecendo um percurso didático completo que vai da fundamentação teórica à aplicação prática.

Para alcançar este objetivo, estruturamos o trabalho com uma progressão lógica. Iniciamos com a solidificação dos conceitos fundamentais dos operadores diferenciais e dos sistemas de coordenadas, estabelecendo as ferramentas necessárias para a análise. Em seguida, realizamos a dedução sistemática e detalhada das expressões do Laplaciano em coordenadas polares, cilíndricas e esféricas, demonstrando passo a passo como a aplicação da regra da cadeia e das transformações de coordenadas resulta nas conhecidas fórmulas. Finalmente, o capítulo de aplicações serviu como a prova da tese, ilustrando com exemplos canônicos da física que a complexidade de uma equação diferencial parcial pode ser drasticamente reduzida pela escolha de um sistema de coordenadas que espelhe a simetria intrínseca do problema.

A principal contribuição deste trabalho reside na demonstração de que o entendimento do operador Laplaciano não é apenas ligado meramente ao conhecimento de suas fórmulas. A verdadeira compreensão surge do processo de sua derivação e da subsequente aplicação, onde se torna evidente que o Laplaciano não é uma entidade matemática arbitrária, mas uma ferramenta flexível que se adapta a geometria do espaço. Ao verificar a simplificação de um problema físico complexo em uma equação diferencial ordinária, o estudante não apenas aprende uma técnica de resolução, mas internaliza o princípio fundamental da conexão entre a descrição matemática e a simetria física.

Embora neste trabalho tenhamos nos concentrado nas três geometrias mais comuns e em problemas clássicos com alta simetria, a abordagem aqui apresentada concede as bases para uma exploração de geometrias ainda mais complexas e problemas com simetrias que se adequem a mesmas. Uma extensão natural seria a dedução do Laplaciano em outros sistemas de coordenadas, como o parabólico ou o elíptico, e a aplicação em problemas mais complexos da engenharia e da física. Adicionalmente, uma pesquisa futura de caráter pedagógico poderia avaliar empiricamente o impacto desta abordagem dedutiva no desempenho e na compreensão conceitual de estudantes de graduação, comparando-a com métodos de ensino tradicionais.

Por fim, neste trabalho reafirmamos que a profundidade do conhecimento em física-matemática não está na capacidade de memorizar um vasto conjunto de equações, mas na

habilidade de compreender sua origem, sua interconexão e, acima de tudo, seu propósito. Ao desmistificar a origem do operador Laplaciano, esperamos ter fornecido uma ferramenta didática valiosa que capacite estudantes e educadores a abordar as equações da física não como obstáculos a serem superados, mas como descrições elegantes e poderosas do mundo natural.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ARFKEN, G. et al. *Mathematical Methods for Physicists: A Comprehensive Guide*. Elsevier Science, 2013. ISBN 9780123846549. Disponível em: <https://books.google.com.br/books?id=qLFo_Z-PoGIC>. Citado 3 vezes nas páginas 12, 13 e 30.

BOAS, M. *Mathematical Methods in the Physical Sciences*. Wiley, 2006. (Wiley student edition). ISBN 9788126508105. Disponível em: <<https://books.google.com.br/books?id=5Il7Jh5-mPcC>>. Citado 3 vezes nas páginas 12, 14 e 30.

FEYNMAN, R.; LEIGHTON, R.; SANDS, M. *The Feynman Lectures on Physics, Vol. II: The New Millennium Edition: Mainly Electromagnetism and Matter*. Basic Books, 2011. (The Feynman Lectures on Physics). ISBN 9780465024940. Disponível em: <<https://books.google.com.br/books?id=hlRhwGK40fgC>>. Citado na página 31.

GRIFFITHS, D. J. *Introduction to electrodynamics*. [S.l.]: Pearson, 2013. Citado 4 vezes nas páginas 12, 13, 14 e 30.

JACKSON, J. *Classical Electrodynamics*. Wiley, 1998. ISBN 9780471309321. Disponível em: <<https://books.google.com.br/books?id=FOBBEAAAQBAJ>>. Citado 3 vezes nas páginas 30, 31 e 33.

KREYSZIG, E. *Advanced Engineering Mathematics*. John Wiley & Sons, 2010. ISBN 9780470458365. Disponível em: <<https://books.google.com.br/books?id=UnN8DpXI74EC>>. Citado 2 vezes nas páginas 12 e 25.

LIMA, F. M. S.; MELLO, B. C. An instructional derivation of the laplacian operator in spherical coordinates. *Mathematics*, v. 9, n. 22, p. 2943, 2021. Citado na página 11.

MAZUR, E. *Peer Instruction: A User's Manual*. Prentice Hall, 1997. 253 p. (Series in Educational Innovation). Disponível em: <[/files/mazur/files/rep_0.pdf](https://files.mazur/files/rep_0.pdf)>. Citado na página 11.

RILEY, K.; HOBSON, M.; BENCE, S. *Mathematical Methods for Physics and Engineering: A Comprehensive Guide*. Cambridge University Press, 2006. ISBN 9781139450997. Disponível em: <<https://books.google.com.br/books?id=Mq1nlEKHnCsC>>. Citado 2 vezes nas páginas 12 e 30.

SABAH, S. Science and engineering students' difficulties in understanding vector concepts. *Eurasia Journal of Mathematics, Science and Technology Education*, v. 9, p. 1, 08 2023. Citado na página 11.

SCHEY, H. *Div, Grad, Curl, and All that: An Informal Text on Vector Calculus*. W.W. Norton, 2005. ISBN 9780393925166. Disponível em: <<https://books.google.com.br/books?id=sembQgAACAAJ>>. Citado na página 13.

SPIEGEL, M. R. *Vector Analysis and an Introduction to Tensor Analysis*. McGraw-Hill Education (India) Pvt Limited, 1959. ISBN 9780070682580. Disponível em: <<https://books.google.com.br/books?id=vKzq3P1x0aYC>>. Citado 5 vezes nas páginas 12, 14, 15, 17 e 30.

STEWART, J. *Calculus: Early Transcendentals*. Cengage Learning, 2015. ISBN 9781305482463. Disponível em: <<https://books.google.com.br/books?id=hEF-BAAAQBAJ>>. Citado na página 12.

STRAUSS, W. *Partial Differential Equations: An Introduction*. Wiley, 2007. ISBN 9780470054567. Disponível em: <<https://books.google.com.br/books?id=m2hvDwAAQBAJ>>. Citado na página 11.

TAYLOR, J. *Classical Mechanics*. University Science Books, 2005. (G - Reference, Information and Interdisciplinary Subjects Series). ISBN 9781891389221. Disponível em: <<https://books.google.com.br/books?id=P1kCtNr-pJsC>>. Citado na página 34.

Apêndices

APÊNDICE A – DEMONSTRAÇÕES

Termos de derivadas em coordenadas polares

termo $\frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial r}$

Iniciamos desenvolvendo os termos de x , para em seguida desenvolver os termos de y e por fim somar os dois termos

$$\begin{aligned} \frac{\cos \theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial f}{\partial r} \right) &= \frac{\cos \theta}{r} \left(\frac{\partial f}{\partial r} \frac{\partial}{\partial \theta} \sin \theta + \frac{\partial^2 f}{\partial \theta \partial r} \sin \theta \right) \\ &= \frac{\cos \theta}{r} \left(\cos \theta \frac{\partial f}{\partial r} + \sin \theta \frac{\partial^2 f}{\partial \theta \partial r} \right) \\ &= \frac{\cos^2 \theta}{r} \frac{\partial f}{\partial r} + \frac{\cos \theta \sin \theta}{r} \frac{\partial^2 f}{\partial \theta \partial r} \end{aligned} \quad (90)$$

$$\begin{aligned} -\frac{\sin \theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\cos \theta \frac{\partial f}{\partial r} \right) &= -\frac{\sin \theta}{r} \left(\frac{\partial f}{\partial r} \frac{\partial}{\partial \theta} \cos \theta + \cos \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \frac{\partial f}{\partial r} \right) \\ &= -\frac{\sin \theta}{r} \left(-\sin \theta \frac{\partial f}{\partial r} + \cos \theta \frac{\partial^2 f}{\partial \theta \partial r} \right) \\ &= \frac{\sin^2 \theta}{r} \frac{\partial f}{\partial r} - \frac{\sin \theta \cos \theta}{r} \frac{\partial^2 f}{\partial \theta \partial r} \end{aligned} \quad (91)$$

Somando ambos os termos:

$$\begin{aligned} \frac{\cos \theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial f}{\partial r} \right) - \frac{\sin \theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\cos \theta \frac{\partial f}{\partial r} \right) &= \frac{\cos^2 \theta}{r} \frac{\partial f}{\partial r} + \frac{\cos \theta \sin \theta}{r} \frac{\partial^2 f}{\partial \theta \partial r} \\ &\quad + \frac{\sin^2 \theta}{r} \frac{\partial f}{\partial r} - \frac{\sin \theta \cos \theta}{r} \frac{\partial^2 f}{\partial \theta \partial r} \end{aligned} \quad (92)$$

$$\begin{aligned} \frac{\cos \theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial f}{\partial r} \right) - \frac{\sin \theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\cos \theta \frac{\partial f}{\partial r} \right) &= \frac{(\cos^2 \theta + \sin^2 \theta)}{r} \frac{\partial f}{\partial r} \\ &\quad + \frac{(\cos \theta \sin \theta - \sin \theta \cos \theta)}{r} \frac{\partial^2 f}{\partial \theta \partial r} \end{aligned} \quad (93)$$

$$\frac{\cos \theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial f}{\partial r} \right) - \frac{\sin \theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\cos \theta \frac{\partial f}{\partial r} \right) = \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial r} \quad (94)$$

Termo $\frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2}$

Iniciamos desenvolvendo os termos de x , para em seguida desenvolver os termos de y e por fim somar os dois termos

$$\begin{aligned}
\frac{\cos \theta}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\cos \theta \frac{\partial f}{\partial \theta} \right) &= \frac{\cos \theta}{r^2} \left(\frac{\partial f}{\partial \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \cos \theta + \cos \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \frac{\partial f}{\partial \theta} \right) \\
&= \frac{\cos \theta}{r^2} \left(-\sin \theta \frac{\partial f}{\partial \theta} + \cos \theta \frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} \right) \\
&= -\frac{\cos \theta \sin \theta}{r^2} \frac{\partial f}{\partial \theta} + \frac{\cos^2 \theta}{r^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2}
\end{aligned} \tag{95}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\sin \theta}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial f}{\partial \theta} \right) &= \frac{\sin \theta}{r^2} \left(\frac{\partial f}{\partial \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \sin \theta + \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \frac{\partial f}{\partial \theta} \right) \\
&= \frac{\sin \theta}{r^2} \left(\cos \theta \frac{\partial f}{\partial \theta} + \sin \theta \frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} \right) \\
&= \frac{\sin \cos \theta}{r^2} \frac{\partial f}{\partial \theta} + \frac{\sin^2 \theta}{r^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2}
\end{aligned} \tag{96}$$

Somando ambos os termos:

$$\begin{aligned}
\frac{\cos \theta}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\cos \theta \frac{\partial f}{\partial \theta} \right) + \frac{\sin \theta}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial f}{\partial \theta} \right) &= -\frac{\cos \theta \sin \theta}{r^2} \frac{\partial f}{\partial \theta} + \frac{\cos^2 \theta}{r^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} \\
&\quad + \frac{\sin \cos \theta}{r^2} \frac{\partial f}{\partial \theta} + \frac{\sin^2 \theta}{r^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2}
\end{aligned} \tag{97}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\cos \theta}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\cos \theta \frac{\partial f}{\partial \theta} \right) + \frac{\sin \theta}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial f}{\partial \theta} \right) &= \frac{(\cos \theta \sin \theta - \sin \theta \cos \theta)}{r^2} \frac{\partial f}{\partial \theta} \\
&\quad + \frac{(\cos^2 \theta + \sin^2 \theta)}{r^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2}
\end{aligned} \tag{98}$$

$$\frac{\cos \theta}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\cos \theta \frac{\partial f}{\partial \theta} \right) + \frac{\sin \theta}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial f}{\partial \theta} \right) = \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} \tag{99}$$

Termos de derivadas em coordenadas esféricas

Derivadas de $\frac{\partial \rho}{\partial x}$, $\frac{\partial \phi}{\partial x}$ e $\frac{\partial \theta}{\partial x}$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \rho}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial x} \sqrt{(x^2 + y^2 + z^2)} = \frac{x}{\sqrt{(x^2 + y^2 + z^2)}} = \frac{x}{\rho} = \cos \phi \sin \theta \\
\frac{\partial \phi}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial x} \arctan \frac{y}{x} = -\frac{y}{x^2 + y^2} = -\frac{\rho \sin \phi \sin \theta}{\rho^2 ((\cos \phi \sin \theta)^2 + (\sin \phi \sin \theta)^2)} = -\frac{\sin \phi}{\rho \sin \theta} \\
\frac{\partial \theta}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial x} \arccos \left(\frac{z}{\sqrt{(x^2 + y^2 + z^2)}} \right) = \frac{1}{\rho} \cos \theta \cos \phi
\end{aligned} \tag{100}$$

Derivadas de $\frac{\partial \rho}{\partial y}$, $\frac{\partial \phi}{\partial y}$ e $\frac{\partial \theta}{\partial y}$

$$\begin{aligned}\frac{\partial \rho}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial y} \sqrt{(x^2 + y^2 + z^2)} = \frac{x}{\sqrt{(x^2 + y^2 + z^2)}} = \frac{x}{\rho} = \cos \phi \sin \theta \\ \frac{\partial \phi}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial y} \arctan \frac{y}{x} = \frac{x}{x^2 + y^2} = \frac{\rho \cos \phi \sin \theta}{\rho^2 ((\cos \phi \sin \theta)^2 + (\sin \phi \sin \theta)^2)} = \frac{\cos \phi}{\rho \sin \theta} \\ \frac{\partial \theta}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial y} \arccos \left(\frac{z}{\sqrt{(x^2 + y^2 + z^2)}} \right) = \frac{1}{\rho} \cos \theta \sin \phi\end{aligned}\quad (101)$$

Derivadas de $\frac{\partial \rho}{\partial z}$, $\frac{\partial \phi}{\partial z}$ e $\frac{\partial \theta}{\partial z}$

$$\begin{aligned}\frac{\partial \rho}{\partial z} &= \frac{\partial}{\partial z} \sqrt{(x^2 + y^2 + z^2)} = \frac{z}{\sqrt{(x^2 + y^2 + z^2)}} = \frac{z}{\rho} = \cos \theta \\ \frac{\partial \phi}{\partial z} &= \frac{\partial}{\partial z} \arctan \frac{y}{x} = 0 \\ \frac{\partial \theta}{\partial z} &= \frac{\partial}{\partial z} \arccos \left(\frac{z}{\sqrt{(x^2 + y^2 + z^2)}} \right) = -\frac{1}{\rho} \sin \theta\end{aligned}\quad (102)$$

Derivadas segundas de y

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2}{\partial y^2} &= \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \rho}{\partial y} \right) \frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{\partial \rho}{\partial y} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial}{\partial \rho} \right) \\ &\quad + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \phi}{\partial y} \right) \frac{\partial}{\partial \phi} + \frac{\partial \phi}{\partial y} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial}{\partial \phi} \right) \\ &\quad + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \theta}{\partial y} \right) \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{\partial \theta}{\partial y} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial}{\partial \theta} \right)\end{aligned}\quad (103)$$

Resolvendo cada linha separadamente teremos:

Para y e ρ :

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \rho}{\partial y} \frac{\partial}{\partial \rho} \right) &= \frac{\partial \rho}{\partial y} \left[\frac{\partial \rho}{\partial y} \frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{\partial \phi}{\partial y} \frac{\partial}{\partial \phi} + \frac{\partial \theta}{\partial y} \frac{\partial}{\partial \theta} \right] \frac{\partial}{\partial \rho} \\ &\quad + \left[\frac{\partial \rho}{\partial y} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\frac{\partial \rho}{\partial y} \right) + \frac{\partial \phi}{\partial y} \frac{\partial}{\partial \phi} \left(\frac{\partial \rho}{\partial y} \right) + \frac{\partial \theta}{\partial y} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{\partial \rho}{\partial y} \right) \right] \frac{\partial}{\partial \rho}\end{aligned}\quad (104)$$

Utilizando os termos obtidos na expressão (101):

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \rho}{\partial y} \frac{\partial}{\partial \rho} \right) &= \frac{1}{\rho} (\cos^2(\phi) + \sin^2(\phi) \cos^2(\theta)) \frac{\partial}{\partial \rho} + \sin^2(\phi) \sin^2(\theta) \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} \\ &\quad + \frac{1}{\rho} \cos(\phi) \sin(\phi) \frac{\partial}{\partial \phi} \frac{\partial}{\partial \rho} + \sin^2(\phi) \cos(\theta) \sin(\theta) \frac{\partial}{\partial \theta} \frac{\partial}{\partial \rho}\end{aligned}\quad (105)$$

Para y e ϕ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \phi}{\partial y} \frac{\partial}{\partial \phi} \right) &= \frac{\partial \phi}{\partial y} \left[\frac{\partial \rho}{\partial y} \frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{\partial \phi}{\partial y} \frac{\partial}{\partial \phi} + \frac{\partial \theta}{\partial y} \frac{\partial}{\partial \theta} \right] \frac{\partial}{\partial \phi} \\ &+ \left[\frac{\partial \rho}{\partial y} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\frac{\partial \phi}{\partial y} \right) + \frac{\partial \phi}{\partial y} \frac{\partial}{\partial \phi} \left(\frac{\partial \phi}{\partial y} \right) + \frac{\partial \theta}{\partial y} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{\partial \phi}{\partial y} \right) \right] \frac{\partial}{\partial \phi} \end{aligned} \quad (106)$$

Utilizando os termos obtidos na expressão (101), obteremos:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \phi}{\partial y} \frac{\partial}{\partial \phi} \right) &= \frac{1}{\rho^2} \left(-\cos(\phi) \sin(\phi) - \frac{\cos(\phi) \sin(\phi)}{\sin^2(\theta)} - \cos(\phi) \sin(\phi) \frac{\cos^2(\theta)}{\sin^2(\theta)} \right) \frac{\partial}{\partial \phi} \\ &+ \frac{1}{\rho^2} \frac{\cos^2(\phi)}{\sin^2(\theta)} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} + \frac{1}{\rho^2} \cos(\phi) \sin(\phi) \frac{\cos(\theta)}{\sin(\theta)} \frac{\partial}{\partial \theta} \frac{\partial}{\partial \phi} \\ &+ \frac{1}{\rho} \cos(\phi) \sin(\theta) \frac{\partial}{\partial \rho} \frac{\partial}{\partial \phi} \end{aligned} \quad (107)$$

Para y e θ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \theta}{\partial y} \frac{\partial}{\partial \theta} \right) &= \frac{\partial \theta}{\partial y} \left[\frac{\partial \rho}{\partial y} \frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{\partial \phi}{\partial y} \frac{\partial}{\partial \phi} + \frac{\partial \theta}{\partial y} \frac{\partial}{\partial \theta} \right] \frac{\partial}{\partial \theta} \\ &+ \left[\frac{\partial \rho}{\partial y} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\frac{\partial \theta}{\partial y} \right) + \frac{\partial \phi}{\partial y} \frac{\partial}{\partial \phi} \left(\frac{\partial \theta}{\partial y} \right) + \frac{\partial \theta}{\partial y} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{\partial \theta}{\partial y} \right) \right] \frac{\partial}{\partial \theta} \end{aligned} \quad (108)$$

Utilizando os termos obtidos na expressão (101), teremos:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \theta}{\partial y} \frac{\partial}{\partial \theta} \right) &= \frac{1}{\rho^2} \left(-\sin^2(\phi) \cos(\theta) \sin(\theta) + \cos^2(\phi) \frac{\cos(\theta)}{\sin(\theta)} - \sin^2(\phi) \cos(\theta) \sin(\theta) \right) \frac{\partial}{\partial \theta} \\ &+ \frac{1}{\rho} \sin^2(\phi) \cos(\theta) \sin(\theta) \frac{\partial}{\partial \rho} \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{1}{\rho} \cos(\phi) \sin(\phi) \frac{\cos(\theta)}{\sin(\theta)} \frac{\partial}{\partial \phi} \frac{\partial}{\partial \theta} \\ &+ \frac{1}{\rho^2} \sin^2(\phi) \cos^2(\theta) \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \end{aligned} \quad (109)$$

Derivadas segundas de z

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial z^2} &= \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial \rho}{\partial z} \right) \frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{\partial \rho}{\partial z} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial}{\partial \rho} \right) \\ &+ \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial \phi}{\partial z} \right) \frac{\partial}{\partial \phi} + \frac{\partial \phi}{\partial z} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial}{\partial \phi} \right) \\ &+ \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial \theta}{\partial z} \right) \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{\partial \theta}{\partial z} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial}{\partial \theta} \right) \end{aligned} \quad (110)$$

Resolvendo cada linha separadamente teremos:

Para z e ρ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial \rho}{\partial z} \frac{\partial}{\partial \rho} \right) &= \frac{\partial \rho}{\partial z} \left[\frac{\partial \rho}{\partial z} \frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{\partial \phi}{\partial z} \frac{\partial}{\partial \phi} + \frac{\partial \theta}{\partial z} \frac{\partial}{\partial \theta} \right] \frac{\partial}{\partial \rho} \\ &+ \left[\frac{\partial \rho}{\partial z} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\frac{\partial \rho}{\partial z} \right) + \frac{\partial \phi}{\partial z} \frac{\partial}{\partial \phi} \left(\frac{\partial \rho}{\partial z} \right) + \frac{\partial \theta}{\partial z} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{\partial \rho}{\partial z} \right) \right] \frac{\partial}{\partial \rho} \end{aligned} \quad (111)$$

Utilizando os termos conhecidos da expressão (102), teremos:

$$\frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial \rho}{\partial z} \frac{\partial}{\partial \rho} \right) = \frac{1}{\rho} \sin^2(\theta) \frac{\partial}{\partial \rho} + \cos^2(\theta) \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} - \frac{1}{\rho} \cos(\theta) \sin(\theta) \frac{\partial}{\partial \theta} \frac{\partial}{\partial \rho} \quad (112)$$

Para z e ϕ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial \phi}{\partial z} \frac{\partial}{\partial \phi} \right) &= \frac{\partial \phi}{\partial z} \left[\frac{\partial \rho}{\partial z} \frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{\partial \phi}{\partial z} \frac{\partial}{\partial \phi} + \frac{\partial \theta}{\partial z} \frac{\partial}{\partial \theta} \right] \frac{\partial}{\partial \phi} \\ &+ \left[\frac{\partial \rho}{\partial z} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\frac{\partial \phi}{\partial z} \right) + \frac{\partial \phi}{\partial z} \frac{\partial}{\partial \phi} \left(\frac{\partial \phi}{\partial z} \right) + \frac{\partial \theta}{\partial z} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{\partial \phi}{\partial z} \right) \right] \frac{\partial}{\partial \phi} \end{aligned} \quad (113)$$

Utilizando os termos conhecidos da expressão (102), iremos obter:

$$\frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial \phi}{\partial z} \frac{\partial}{\partial \phi} \right) = 0 \quad (114)$$

Para z e θ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial \theta}{\partial z} \frac{\partial}{\partial \theta} \right) &= \frac{\partial \theta}{\partial z} \left[\frac{\partial \rho}{\partial z} \frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{\partial \phi}{\partial z} \frac{\partial}{\partial \phi} + \frac{\partial \theta}{\partial z} \frac{\partial}{\partial \theta} \right] \frac{\partial}{\partial \theta} \\ &+ \left[\frac{\partial \rho}{\partial z} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\frac{\partial \theta}{\partial z} \right) + \frac{\partial \phi}{\partial z} \frac{\partial}{\partial \phi} \left(\frac{\partial \theta}{\partial z} \right) + \frac{\partial \theta}{\partial z} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{\partial \theta}{\partial z} \right) \right] \frac{\partial}{\partial \theta} \end{aligned} \quad (115)$$

Utilizando os termos conhecidos da expressão (102), obteremos:

$$\frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial \theta}{\partial z} \frac{\partial}{\partial \theta} \right) = \frac{2}{\rho^2} \cos(\theta) \sin(\theta) \frac{\partial}{\partial \theta} - \frac{1}{\rho} \sin(\theta) \cos(\theta) \frac{\partial}{\partial \rho} \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{1}{\rho^2} \sin^2(\theta) \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \quad (116)$$