



**INSTITUTO FEDERAL DA PARAÍBA
CAMPUS CAJAZEIRAS
CURSO DE ESPECIALIZAÇÃO EM MATEMÁTICA**

MATEUS ROCHA DE SOUSA

**OS AVANÇOS DA MATEMÁTICA PARA O CÁLCULO DE ÁREAS E
VOLUMES UTILIZANDO OS MÉTODOS DA EXAUSTÃO, CÁLCULO
DIFERENCIAL E INTEGRAL E DO TEOREMA FUNDAMENTAL DA
PROPORCIONALIDADE**

CAJAZEIRAS - PB

2025

MATEUS ROCHA DE SOUSA

**OS AVANÇOS DA MATEMÁTICA PARA O CÁLCULO DE ÁREAS E
VOLUMES UTILIZANDO OS MÉTODOS DA EXAUSTÃO, CÁLCULO
DIFERENCIAL E INTEGRAL E DO TEOREMA FUNDAMENTAL DA
PROPORCIONALIDADE**

Monografia apresentada junto ao **Curso de
Especialização em Matemática** do **Instituto
Federal da Paraíba**, como requisito à obten-
ção do título de **Especialista em Matemática**.

Orientador(a):

Prof. Me. Leonardo Ferreira Soares.

Coorientador(a):

Prof. Me. Emanuel Abdalla Pinheiro.

Cajazeiras - PB

2025

MATEUS ROCHA DE SOUSA

**OS AVANÇOS DA MATEMÁTICA PARA O CÁLCULO DE ÁREAS E
VOLUMES UTILIZANDO OS MÉTODOS DA EXAUSTÃO, CÁLCULO
DIFERENCIAL E INTEGRAL E DO TEOREMA FUNDAMENTAL DA
PROPORCIONALIDADE**

Monografia apresentada ao programa de **Curso de
Especialização em Matemática** do **Instituto Federal
da Paraíba**, como requisito à obtenção do título de
Especialista em Matemática.

Data de aprovação: 14/11/2025

Banca Examinadora:

Documento assinado digitalmente:
 **LEONARDO FERREIRA SOARES**
Data: 15/11/2025 18:11:19-0300
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

Prof. Me. Leonardo Ferreira Soares
Instituto Federal da Paraíba - IFPB

Documento assinado digitalmente:
 **EMANUEL ABDALLA PINHEIRO**
Data: 15/11/2025 18:00:14-0300
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

Prof. Me. Emanuel Abdalla Pinheiro
Instituto Federal da Paraíba - IFPB

Documento assinado digitalmente:
 **ANTONIO EUDES FERREIRA**
Data: 17/11/2025 09:48:13-0300
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

Prof. Me. Antônio Eudes Ferreira
Instituto Federal da Paraíba - IFPB

Documento assinado digitalmente:
 **MARCIO ALISSON LEANDRO COSTA**
Data: 18/11/2025 08:06:29-0300
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

Prof. Me. Márcio Alisson Leandro Costa
Instituto Federal da Paraíba - IFPB

Documento assinado digitalmente:
 **REGINALDO AMARAL CORDEIRO JUNIOR**
Data: 18/11/2025 12:34:08-0300
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

Prof. Me. Reginaldo Amaral Cordeiro Junior
Instituto Federal da Paraíba - IFPB

IFPB / Campus Cajazeiras
Coordenação de Biblioteca
Biblioteca Prof. Ribamar da Silva
Catalogação na fonte: Cícero Luciano Félix CRB-15/750

S725a	Sousa, Mateus Rocha de. Os avanços da matemática para o cálculo de áreas e volumes utilizando os métodos da exaustão, cálculo diferencial e integral e do teorema fundamental da proporcionalidade / Mateus Rocha de Sousa.– 2025. 94f. : il. Trabalho de Conclusão de Curso (Especialização em Matemática) - Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia da Paraíba, Cajazeiras, 2025. Orientador(a): Prof. Me. Leonardo Ferreira Soares. Coorientador(a): Prof. Me. Emanuel Abdalla Pinheiro. 1. Geometria. 2. Cálculo diferencial e integral. 3. Teorema fundamental da probabilidade. 4. Método de exaustão. I. Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia da Paraíba. II. Título.
IFPB/CZ	CDU: 511.4(043.2)

Dedico este trabalho aos meus bisavós José Rocha Dantas e Raimunda Maciel de Sousa (in memorian), por todo amor, ensinamentos e dedicação a minha pessoa. E, além disso, por sempre incentivarem na busca pelo conhecimento.

AGRADECIMENTOS

A conclusão deste trabalho marca um ponto importante na minha jornada acadêmica, e não poderia deixar de expressar minha gratidão a todos que, de alguma forma, contribuíram para essa conquista.

Primeiramente, agradeço ao nosso Senhor Jesus, pela sabedoria concedida durante essa jornada, que me iluminou e me deu discernimento nas minhas escolhas. Me acolhendo e dando forças nos momentos de turbulência.

À minha família, em especial ao meu pai Jose Francisco de Sousa e minha tia Francisca Rocha Dantas que nunca mediram esforços para me ajudar sempre que precisei e me confortando durante a realização deste trabalho.

À minha namorada Maria Edlane Nascimento Oliveira, que sempre me entendeu durante a realização deste, nos momentos de ausência e por sua felicidade e empenho que me incentivou a conclusão do curso e em busca dos meus objetivos.

Ao Prof. Me. Leonardo Ferreira Soares, meu orientador que desde o primeiro dia de aula falava acerca da escrita e que durante as aulas de Resolução de Problemas mostrou o quanto a geometria é bela e se tornou um amigo em que veio me orientar e este trabalho tem sua marca intelectual. E pelo desafio dado a minha pessoa quanto a escrita do tema.

Aos professores do curso da especialização, pelo conhecimento compartilhados e o compromisso com o ensino. Em especial, ao meu coorientador o Prof. Me. Emanuel Abdalla Pinheiro que ficou conhecido durante o curso de Trigonometria que me fez ver alguns conceitos de forma diferentes e na sua ajuda durante a realização desta pesquisa.

À banca examinadora, composta, pelos Professores Me. Antônio Eudes Ferreira, Me. Márcio Alisson Leandro Costa e o Me. Reginaldo Amaral Cordeiro Junior, pelo tempo dedicado à leitura e a avaliação deste trabalho, pelas valiosas contribuições e sugestões que certamente enriquecerão minha trajetória acadêmica.

A todos vocês, meu sincero agradecimento e minha eterna gratidão.

*“A vaidade da ignorância é um abismo de
miséria humana.”*

Olavo de Carvalho

RESUMO

As fórmulas das áreas de figuras planas convexas e dos volumes dos sólidos geométricos são por vezes tomadas como verdade sem que sejam demonstradas, o que é uma falha no ensino de matemática pois a rigor a beleza desta área encontra-se em suas demonstrações. Na geometria, para se calcular áreas e volumes buscou-se evidenciá-los de maneira clara e precisa sem a perda do formalismo matemático apresentando os métodos da Exaustão, Cálculo Diferencial e Integral e do Teorema Fundamental da Proporcionalidade. Este estudo mostra a evolução em que as ferramentas matemáticas utilizadas foram se aperfeiçoando em ordem cronológica de desenvolvimento e aparições na literatura. A pesquisa, possui uma abordagem qualitativa, realizada por meio da leitura de livros, artigos e dissertações. O estudo realizado indicou que é possível fazer a demonstração para o cálculo das áreas de algumas figuras planas convexas e pouquíssimos sólidos geométricos com a exclusividade dos três métodos propostos.

Palavras-chave: Áreas de figuras planas. Volumes de sólidos geométricos. Método da Exaustão. Cálculo Diferencial e Integral. Teorema Fundamental da Proporcionalidade.

ABSTRACT

The formulas for the areas of convex plane figures and the volumes of geometric solids are sometimes taken as truth without being demonstrated, which is a flaw in mathematics education, for strictly speaking the beauty of this area is found in its demonstrations. In geometry, in order to calculate areas and volumes, an effort was made to make them evident in a clear and precise way without the loss of mathematical formalism, presenting the Methods of Exhaustion, Differential and Integral Calculus, and the Fundamental Theorem of Proportionality. This study shows the evolution in which the mathematical tools used were being perfected in chronological order of development and appearances in the literature. The research has a qualitative approach, carried out through the reading of books, articles, and dissertations. The study carried out indicated that it is possible to make the demonstration for the calculation of the areas of some convex plane figures and very few geometric solids exclusively with the three proposed methods.

Keywords: Areas of plane figures. Volumes of geometric solids. Method of Exhaustion. Differential and Integral Calculus. Fundamental Theorem of Proportionality.

LISTA DE FIGURAS

Figura 2.1 – Eudoxo de Cnido	16
Figura 2.2 – Arquimedes de Siracusa	16
Figura 2.3 – Segmentos	17
Figura 2.4 – Inserção de $\mathbf{m}$ pontos no segmento $\mathbf{AB}$	18
Figura 2.5 – Quadrado de área unitária	19
Figura 2.6 – Retângulo de lados racionais e quadrado da divisão do unitário	19
Figura 2.7 – Retângulo de lados irracionais e quadrado subdividido do unitário . . .	19
Figura 2.8 – Cubo de volume unitário	20
Figura 2.9 – Cubo dividido do unitário e sólido de arestas racionais	20
Figura 2.10–Subdivisão do cubo unitário	20
Figura 2.11–Sólido de arestas irracionais	21
Figura 3.1 – Gottfried Wilhelm Leibniz	25
Figura 3.2 – Isaac Newton	25
Figura 3.3 – Área da região S	28
Figura 3.4 – Áreas limitadas por lados retos	28
Figura 3.5 – Gráfico de $y = x^2$ e área da região S de 0 a 1	29
Figura 3.6 – Área subdividida em quatro faixas	29
Figura 3.7 – Aproximações de áreas utilizando a extremidade esquerda e direita . .	30
Figura 3.8 – Partição de $[a, b]$	32
Figura 3.9 – Georg Friedrich Bernhard Riemann	33
Figura 3.10–Escolha de φ_i qualquer em $[x_{i-1}, x_i]$	33
Figura 3.11–Componentes do símbolo da integral	35
Figura 3.12–Área de $\mathbf{f}$ e a partição de $[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$	35
Figura 3.13–Partição do intervalo $[a, b]$	41
Figura 3.14–Área entre curvas	48
Figura 3.15–Área entre curvas	48
Figura 3.16–Área entre curvas	48
Figura 3.17–Sólidos simples ideia intuitiva	49
Figura 3.18–Sólido seccionado por um plano	50
Figura 3.19–Volume da secção cilíndrica	50
Figura 5.1 – Retângulo de lados b e h	63
Figura 5.2 – Retângulo de lados $b, h \in \mathbb{Z}_+^*$	63
Figura 5.3 – Retângulo de lados $b, h \in \mathbb{Q}_+^*$	64
Figura 5.4 – Retângulo de lados $b, h \in \mathbb{R}_+^* - \mathbb{Q}_+^*$	64
Figura 5.5 – Retângulo determinado por $f(x) = h$	65
Figura 5.6 – Retângulo determinado por $f(x) - g(x)$	66

Figura 5.7 – Retângulo dobrando ou triplicando b	67
Figura 5.8 – Retângulo dobrando ou triplicando h	67
Figura 5.9 – Quadrado de lado l	68
Figura 5.10–Quadrado de lado l	69
Figura 5.11–Paralelogramo de base (b) e altura (h)	70
Figura 5.12–Paralelogramo e reorganização de figuras	71
Figura 5.13–Paralelogramo como um retângulo	71
Figura 5.14–Paralelogramo pelas funções f, g e h	72
Figura 5.15–Triângulo de base b e altura h	74
Figura 5.16–Triângulo como quadrilátero	74
Figura 5.17–Triângulo quando D não está sobre $\overline{AD}$	75
Figura 5.18–Triângulo como um paralelogramo	75
Figura 5.19–Triângulo determinado por f, g	76
Figura 5.20–Trapézio	78
Figura 5.21–Trapézio com suas diagonais	78
Figura 5.22–CASO (1) Trapézio pelas funções f, g, t	80
Figura 5.23–Losango	82
Figura 5.24–Losango como um retângulo	82
Figura 5.25–Losango pela função f	83
Figura 5.26–Paralelepípedo retângulo	86
Figura 5.27–Paralelepípedo retângulo com $b, h, H \in \mathbb{Z}_+^*$	86
Figura 5.28–Paralelepípedo retângulo com $b, h, H \in \mathbb{Q}_+^*$	87
Figura 5.29–Paralelepípedo retângulo com b, h e $H \in \mathbb{R}_+^* - \mathbb{Q}_+^*$	88
Figura 5.30–Paralelepípedo retângulo como função da área da secção	89
Figura 5.31–Paralelepípedo retângulo e suas proporcionalidades	90
Figura 5.32–Cubo	91
Figura 5.33–Cubo como função da área da secção	92

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	13
2	MÉTODO DA EXAUSTÃO	15
2.1	Contexto Histórico	15
2.2	Princípio de Exaustão	17
2.2.1	Áreas	18
2.2.2	Volumes	19
3	CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL	24
3.1	Contexto Histórico	24
3.2	Cálculo Diferencial	26
3.3	Cálculo Integral	27
3.3.1	O Problema da Área	27
3.3.2	A Integral Definida	31
3.3.3	Teorema Fundamental do Cálculo	42
3.3.4	A Integral Indefinida	45
3.3.5	Aplicações de Integrais	47
4	PROPORCIONALIDADE	52
4.1	Contexto Histórico	52
4.2	Teoria das Proporções	53
4.2.1	Áreas	60
4.2.2	Volumes	60
5	APLICAÇÕES	62
6	CONSIDERAÇÕES FINAIS	93
	REFERÊNCIAS	95

1 INTRODUÇÃO

A geometria é um ramo da matemática no qual se abre à várias vertentes desde a parte básica de figuras construídas com réguas e compasso, até o desenvolvimento de geometrias muito avançadas como, por exemplo, geometria Diferencial e geometria Riemanniana, dentre esses leques presentes no âmbito da geometria chega-se a áreas de figuras planas e volumes dos sólidos geométricos com mais adendo a formas convexas as quais estão extremamente ligadas a métodos que advêm da Exaustão, Cálculo Integral e o Teorema Fundamental da Proporcionalidade. Nos quais foram desenvolvidos e aprimorados por grandes nomes como Eudoxo, Arquimedes, Leibniz, Newton dentre inúmeros outros personagens que construíram toda a matemática durante milênios.

Portanto, indaga-se: as fórmulas para as áreas das figuras planas e o volume de sólidos geométricos sempre funcionam? Parte-se da hipótese, apresentar de forma clara e precisa uma melhor demonstração destas expressões, já que no acervo da literatura não foram encontrados embasamentos suficientes que mostrasse tão claramente. Dessa maneira, serão utilizados três maneiras diferentes para realizar estas demonstrações. Através da evolução das ferramentas escolhidas para este processo tem-se o método da Exaustão, das Integrais e também do Teorema Fundamental da Proporcionalidade, em ordem cronológica de desenvolvimento dessas ferramentas matemáticas.

Diante desta busca, objetiva-se de forma geral apresentar o avanço da matemática por meio do Método da Exaustão, Cálculo Diferencial e Integral e do Teorema Fundamental da Proporcionalidade com ênfase ao cálculo de áreas de figuras planas e volumes de alguns sólidos geométricos. Como também, foram delineados os objetivos específicos:

- Apresentar o Método da Exaustão para o cálculo de áreas e volumes;
- Mostrar a utilização do Cálculo Diferencial e Integral para áreas e volumes;
- Provar o Teorema Fundamental da Proporcionalidade e utiliza-lo para o cálculo de áreas e volumes;
- Demonstrar a fórmula de áreas de figuras planas e volume de alguns sólidos geométricos, aplicando o Método da Exaustão, Cálculo Diferencial e Integral e o Teorema Fundamental da Proporcionalidade.

A presente pesquisa foi realizada por meio de um levantamento bibliográfico com caráter narrativo, cuja abordagem é qualitativa já que não apresenta dados numéricos

possuindo uma composição indutiva do assunto. Enquanto à natureza, pode-se classificar como básica, pois um dos propósitos é aumentar o acervo literário da temática. Dessa forma, quanto aos objetivos é possível denotar como exploratória, que tem como propósito apresentar um avanço matemático no cálculo de áreas de figuras planas convexas e de volumes de alguns sólidos geométricos.

No capítulo 2, realiza-se uma contextualização histórica do Método da Exaustão evidenciando os seus principais nomes como o de Eudoxo e Arquimedes, além de apresentar a própria teoria e como pode-se aplicar a áreas e volumes comparando a uma unidade de medida pré-estabelecida, onde faz-se inserções na figura a qual deseja calcular a área, assim como para volumes, mas claro a unidade utilizada para área é distinta da unidade de volume, visto que trata-se de conceitos diferentes.

No capítulo 3, faz-se um breve resumo na parte histórica com os seus principais nomes sendo Gottfried Wilhelm Leibniz e Isaac Newton os quais são considerados os pais do cálculo. E logo após, uma pequena apresentação do cálculo diferencial, assim tornando-se necessário que o leitor tenha uma noção razoável de limites e derivadas para fechar com a parte densa de integrais onde apresenta-se as definições mais importantes com suas proposições e propriedades sendo provadas as mais relevantes, além da demonstração do Teorema Fundamental do Cálculo em suas duas partes, finalizando com as aplicações deste conceito ao cálculo de áreas e volumes.

No capítulo 4, apresenta-se um pequeno retrato histórico da teoria das proporções em seu famoso papiro, sendo ele escrito pelo escriba Ames, ficando conhecido como Papiro de Rhind. Já as proporções ligadas as artes como na obra de Leonardo da Vinci, em “Monalisa”, foram relacionadas com o número de ouro, que é a proporção áurea. E em seguida, mostra-se a teoria das proporções definindo quando são diretamente ou inversamente proporcionais, além de tornar-se necessário o conhecimento de funções reais para a realização da demonstração do Teorema Fundamental da Proporcionalidade e finalizando com as aplicações do teorema ao cálculo de áreas e volumes.

No capítulo 5, realiza-se a aplicação das teorias apresentadas anteriormente fazendo as demonstrações das fórmulas de áreas de figuras planas convexas e de volumes de alguns sólidos geométricos por meio dos três conceitos descritos.

Ao final, no capítulo 6, conclui-se que os objetivos são atendidos e a pergunta respondida com a confirmação da hipótese, indicando a necessidade de mais ferramentas matemáticas para uma maior abrangência dos resultados.

2 MÉTODO DA EXAUSTÃO

O *método da exaustão* se tornou um instrumento belíssimo para a prova de fórmulas uma vez conhecidas, já que trata de um método rigoroso mais estéril. Onde por si só não funciona tão bem para uma descoberta inicial, isto é, em termos de aspecto se assemelha muito ao *Princípio de Indução Matemática (PIM)*, Eves (2011).

Este capítulo objetiva trazer um breve retrospecto histórico deste método apresentando no âmbito do cálculo de áreas e volumes, tomando como embasamentos artigos/dissertações como (Silva et al., 2014), (Lima et al., 2013), (Vaccari; Pacheco, 2011). Além de livros textos sendo (Eves, 2011), (Neto, 2013), (Lima et al., 2016a), (Lima et al., 2016b), (Marques, 2012), (Dolce; Pompeo, 2013b), (Dolce; Pompeo, 2013a) e não podendo deixar de consultar o clássico e o mais celebre texto da geometria o (Euclides, 2009). E as aplicações deste método será mostrado no Capítulo 5, mostrando aqui somente a parte teórica.

2.1 CONTEXTO HISTÓRICO

A matemática grega que buscava a quadratura de um círculo e de outras figuras curvas. Uma importantíssima contribuição e das mais antigas relacionada a este problema é creditada a Antífon, o Sofista. Consta que o teria feito por sucessivas duplicações do número de lados de um polígono regular inscrito no círculo, em que a diferença entre o círculo e o polígono chegará a ser nula, Eves (2011).

Além de Antífon que deu um pontapé a essa ideia foi com *Eudoxo de Cnido* 408 a.C. – 355 a.C., que no âmago de seus estudos e de maneira árdua criou e inventou o então denominado “Método da Exaustão”, que tem sua base na primeira proposição do Livro X do excelente geômetra *Euclides de Alexandria*, no seu famoso livro (Euclides, 2009). Iremos nos verificar a notação de como era na antiguidade e aqui deixamos claro que na notação a seguir em que magnitudes é como se fosse um segmento que tem medida.

Sendo expostas duas magnitudes desiguais, caso da maior seja subtraída uma maior do que a metade e, da que é deixada, uma maior do que a metade, e isso aconteça sempre, alguma magnitude será deixada, a qual será menor do que a menor magnitude exposta. (Euclides, 2009, p. 354)

Figura 2.1 – Eudoxo de Cnido

Fonte: (Silva et al., 2019, p.16)

O celebre Eudoxo nascido em Cnido uma antiga cidade grega que atualmente pertence a Turquia por volta de $408 a.C.$ e seu falecimento na mesma cidade por volta de $355 a.C.$. Foi um astrônomo e matemático grego, além de ter sido médico por alguns anos que talvez por influência familiar sendo composta de grandes médicos. E como filósofo tendo estudado com Platão, Silva et al. (2019). Já que para sua idealização Eudoxo criou o lema e alguns a chama de LEMA OU AXIOMA DE ARQUIMEDES, que diz

Caso magnitudes, em quantidade qualquer, sejam o mesmo múltiplo de magnitudes, em quantidade qualquer, iguais em quantidades, cada uma de cada uma, quantas vezes uma das magnitudes é de uma, tantas vezes todas serão todas. (Euclides, 2009, p.207)

Na historiografia outro nome que aparece atrelado ao método da exaustão é o de *Arquimedes de Siracusa* $287 a.C.$ – $212 a.C.$, no qual o aprimorou este método que usando a ideia de Eudoxo, além de inscrever um polígono de área conhecida, Arquimedes também circunscreveu o mesmo polígono naquele que queremos descobrir sua área, o também se repete para o cálculo de volumes.

Figura 2.2 – Arquimedes de Siracusa

Fonte: (Assis, 2008, p.1)

Um dos maiores matemáticos da antiguidade, Arquimedes nascido em uma província de Siracusa, na Magna Grécia, que atualmente pertence a Itália. Por volta de $287 a.C.$ e tendo sua vida ceifada durante o ataque de Siracusa, pelos romanos em $219 a.C.$, Silva et al. (2019). O grande Arquimedes além de matemático, ele também era físico e astrônomo. E um grande inventor, tendo creditado a ele diversos instrumentos até bélicos que ajudaram à Siracusa quando invadida pelos romanos.

2.2 PRINCÍPIO DE EXAUSTÃO

É um método muito antigo que é usado para o cálculo de áreas de figuras planas e volumes de sólidos geométricos. Desenvolvidos por volta do século *IV a.C.*, pelo grande matemático Eudoxo e aprimorado por Arquimedes. Que conseguiu seu desenvolvimento por meio de conceito criado a época que atualmente seria encontrar um múltiplo qualquer para quaisquer segmentos dados, veja o LEMA DE EUDOXO-ARQUIMEDES que encontra-se em (Euclides, 2009, p.354). Reescrevendo em linguagem atual este princípio, temos

Teorema 1. (*Princípio de Eudoxo-Arquimedes*) *Sejam dadas duas grandezas desiguais, se da maior grandeza retirarmos uma parte maior que a sua metade, repetimos esse processo de maneira contínua, sobrará uma grandeza menor do que a menor grandeza dada.*

Demonstração: Considere duas grandezas da mesma espécie como mostra a Figura 2.3a e que sem perda de generalidade suponha que $\alpha > \beta$. Da Definição 4 encontra-se em (Euclides, 2009, p.210), garante a existência de um d natural, tal que $d\beta > \alpha$, como mostra a Figura 2.3b.

Figura 2.3 – Segmentos



Fonte: Próprio autor

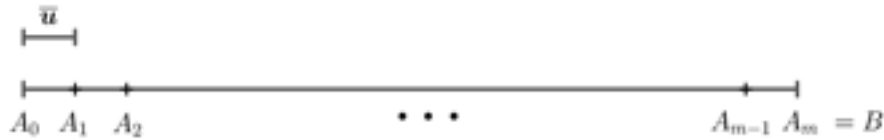
Assim dadas essas condições, tome as grandezas α e $d\beta$. E de α retirar uma parte maior que sua metade, e de $d\beta$ retirar β (que é menor que sua metade de $d\beta$), restando duas grandezas $\alpha_1 < \frac{1}{2}\alpha$ e $(d-1)\beta$, tais que $(d-1)\beta > \alpha_1$. Se repetir o mesmo processo tem-se duas grandezas $\alpha_2 < \frac{1}{2}\alpha_1 < \frac{1}{4}\alpha$ e $(d-2)\beta$, tais que $(d-2)\beta > \alpha_2$. Repetindo o processo $(d-1)$ vezes terá duas grandezas $\alpha_{d-1} < \frac{1}{2}\alpha_n < \frac{1}{2^{d-1}}\alpha$ e β , tais que $\beta > \alpha_{d-1}$. Ou seja, ao repetir o processo $(d-1)$ vezes encontrará a grandeza α_{d-1} que é menor do que β , a menor das grandezas dadas.

■

É importante destacar aqui o conceito criado pelos pitagóricos no século *V a.C.*, que é o conhecimento dos números irracionais, isto é, são números que não podem ser escrito como uma fração de números inteiros com o denominador diferente de zero.

Tome o segmento AB que tem medida $\overline{AB}$ sendo um número. E agora tome $\bar{u}$ a medida de um segmento unitário a qual dirá que é igual a 1. Se $\bar{u}$ cabe m vezes em $\overline{AB}$ com m inteiros diz-se que $\overline{AB}$ é comensurável, ou seja, tomando m pontos entre A e B de modo que $A_0 = A < A_1 < A_2 < \dots < A_m = B$ e que $\overline{A_i A_{i+1}} = \bar{u}$, com $i = 0, 1, \dots, m-1$, veja a Figura 2.4,

Figura 2.4 – Inserção de m pontos no segmento AB



Fonte: Próprio autor

como temos m partes e quando somamos todos tem-se exatamente $\overline{AB}$, isto é

$$\overline{A_0 A_1} + \overline{A_1 A_2} + \dots + \overline{A_{m-1} A_m} = m \cdot \bar{u} = \overline{AB}.$$

Agora tome $\overline{AB}$ menor que $\bar{u}$, suponha que existe uma medida $\bar{x}$ tal que caiba m vezes em $\overline{AB}$ e que $\bar{x}$ caiba n vezes em $\bar{u}$, sendo m e n inteiros. Assim $\bar{x}$ é um múltiplo comum de $\overline{AB}$ e $\bar{u}$, conseqüentemente $\overline{AB}$ e $\bar{u}$ são comensuráveis, e logo $\overline{AB} = \frac{m}{n} \bar{u}$, já que $\bar{u} - n\bar{x}$, assim $\bar{x}$ é a n -ésima parte de $\bar{u}$, ou seja, $\bar{x} = \frac{1}{n} \bar{u}$.

Agora se para $\bar{u}$ não se pode escrever como uma fração $\frac{m}{n}$ que caiba em $\overline{AB}$, logo $\overline{AB}$ é incomensurável. Agora, tem-se n um inteiro positivo, dividindo $\bar{u}$ em n partes iguais, que tem comprimento iguais a $\bar{x}$ sua medida. Logo existe um inteiro m que $\overline{AB}$ possui m segmentos $\bar{x}$ mas que falta algo ainda para completar $\overline{AB}$ e que $m+1$ segmentos de $\bar{x} = \frac{1}{n} \bar{u}$ forma um segmento maior que AB , assim

$$\frac{m}{n} < \overline{AB} < \frac{m+1}{n}.$$

E desta maneira $\frac{m}{n}$ é uma aproximação por falta com um erro inferior a $\frac{1}{n}$ já que quando adicionar mais um $\bar{x}$ tem-se $\frac{m+1}{n}$ que é uma aproximação em excesso de $\overline{AB}$, com um erro inferior a $\frac{1}{n}$.

2.2.1 Áreas

Segundo Dolce e Pompeo (2013b), a área é uma região limitada que está associada a um número real positivo. Que é um conceito decorrente da comparação entre figuras planas, aqui deixaremos claro, para o nosso objetivo será necessário o leitor ter conhecimento básicos de geometria como lados, figuras planas, dimensões e as principais características das figuras planas como exemplo o círculo em que a distância da borda ao centro para

qualquer ponto na borda é igual a qual denomina-se de raio. A este conceito associa a comparação em que a área é dada em função de um quadrado de lado 1 (unitário), e diremos que a esse quadrado tem área igual a 1, que será denotado como o quadrado unitário, veja a Figura 2.5.

Figura 2.5 – Quadrado de área unitária



Fonte: Próprio autor

E para lados inteiros ou comensuráveis basta inscrevermos o quadrado unitário e verificar quantos cabem dentro da figura. Assim como para lados racionais divide-se o lado do quadrado unitário em partes iguais de modo que o novo quadrado caiba um número inteiro de vezes no interior da superfície que deseja calcular, como mostra a Figura 2.6

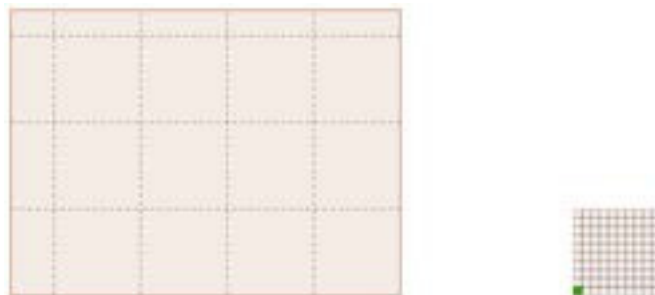
Figura 2.6 – Retângulo de lados racionais e quadrado da divisão do unitário



Fonte: Próprio autor

E quando os lados são incomensuráveis, utilizara o conceito aplicado ao segmento e dividi-se a área do quadrado unitário em pequenas partes e mensurará por falta e excesso até que ambos convirja a um único valor, ao qual chama-se de uma dupla redução ao absurdo, assim a essa ideia pode-se visualizar como mostra a Figura 2.7.

Figura 2.7 – Retângulo de lados irracionais e quadrado subdividido do unitário



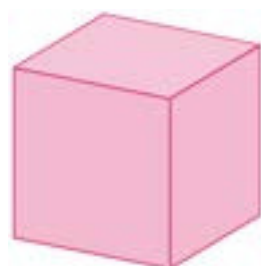
Fonte: Próprio autor

2.2.2 Volumes

Segundo Lima et al. (2016a), o volume é a quantidade de espaço ocupado por um objeto. Sendo um conceito desenvolvido por meio da comparação de sólidos, aqui faz-se

necessário que o leitor conheça os conceitos básicos da geometria espacial como arestas, planos, seções, sólidos, prismas, pirâmides, esferas, cones e cilindros. A este conceito intuitivo de volumes associa a comparação em que o volume é dado em função de um cubo de arestas 1 (unitário), e a esse cubo defini-se o volume igual a 1 ou volume unitário, veja a Figura 2.8

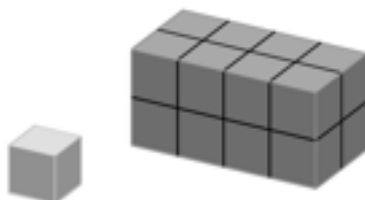
Figura 2.8 – Cubo de volume unitário



Fonte: Próprio autor

E para arestas inteiras inscrever o cubo unitário e verificar quantos cabem dentro do novo sólido. Assim como para arestas racionais divide-se a aresta do cubo unitário em partes iguais de modo que o novo cubo caiba um número inteiro de vezes no interior do sólido que deseja calcular o volume, como mostra a Figura 2.9.

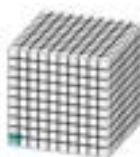
Figura 2.9 – Cubo dividido do unitário e sólido de arestas racionais



Fonte: Próprio autor

E quando as arestas são incomensuráveis irá se utilizar o conceito que foi usado para a área, isto é, dividir o cubo unitário em pequenos cubos como mostra a Figura 2.10.

Figura 2.10 – Subdivisão do cubo unitário



Fonte: Próprio autor

E o mensurar por falta e por excesso até que ambos convirja a um único valor ao qual chama-se de uma dupla redução ao absurdo, assim pode-se visualizar o sólido de arestas irracionais como mostra a Figura 2.11.

Figura 2.11 – Sólido de arestas irracionais



Fonte: Próprio autor

Note que até o momento foi mostrado como calcular o volume de sólidos que pode inscrever o cubo unitário mas se quiser calcular o volumes de sólidos como esferas, cones, cilindros e pirâmides mostra-se muito facilmente por Cálculo Diferencial e Integral, mas que por este método de Exaustão irá se utilizar de uma soma de finitos termos de partes muito pequenas iniciando um conceito intuitivo de cálculo integral, por meio da série numérica do tipo

$$S_t = 1^t + 2^t + 3^t + \dots + n^t$$

onde t é um número inteiro e para os sólidos mencionados anteriormente precisará apenas das somas em que $t = 1$ e $t = 2$. Assim para $t = 1$, tem-se

Corolário 1. *(Soma dos n primeiros números naturais) A soma S_1 dos n primeiros números naturais, isto é, $(1 + 2 + 3 + \dots + n)$ é dada por*

$$S_1 = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Demonstração: Desenvolvendo o binômio de Newton, $(x+a)^2 = x^2 + 2xa + a^2$. Fazendo $a = 1$ e x variando no conjunto $\{1, 2, 3, 4, \dots, n\}$, tem-se

$$\begin{cases} x = 1 & \implies (1+1)^2 = 2^2 = 1^2 + 2 \cdot 1 \cdot 1 + 1^2 \\ x = 2 & \implies (2+1)^2 = 3^2 = 2^2 + 2 \cdot 2 \cdot 1 + 1^2 \\ & \vdots \\ x = n & \implies (n+1)^2 = (n+1)^2 = n^2 + 2 \cdot n \cdot 1 + 1^2. \end{cases}$$

Agora somando membro a membro os termos das equações e fazendo as devidas simplificações, tem-se

$$\begin{aligned} & \begin{cases} \cancel{2^2} = 1^2 + 2 \cdot 1 \cdot 1 + 1^2 \\ \cancel{3^2} = \cancel{2^2} + 2 \cdot 2 \cdot 1 + 1^2 \\ \vdots \\ \cancel{n^2} = \cancel{(n-1)^2} + 2 \cdot (n-1) \cdot 1 + 1^2 \\ (n+1)^2 = \cancel{n^2} + 2 \cdot n \cdot 1 + 1^2 \end{cases} \\ & \hline (n+1)^2 &= 1^2 + 2 \cdot (1 + 2 + 3 + \dots + n) + \underbrace{(1 + 1 + \dots + 1)}_{n \text{ termos}} \end{aligned}$$

A partir de agora se resolve a soma dos n primeiros números naturais de onde irá denotar por $S_1 = 1 + 2 + 3 + \dots + n$ e a soma dos n primeiros naturais, e fazendo uma resolução simples utilizando a matemática básica

$$\begin{aligned}
 (n+1)^2 &= 1^2 + 2 \cdot \underbrace{(1 + \dots + n)}_{S_1} + \underbrace{(1 + \dots + 1)}_{n \cdot 1} \\
 (n+1)^2 &= 1^2 + 2 \cdot S_1 + n \\
 S_1 &= \frac{(n+1)^2 - 1^2 - n}{2} \\
 &= \frac{n^2 + 2 \cdot n \cdot 1 + \cancel{1^2} - \cancel{1^2} - n}{2} \\
 &= \frac{n^2 + n}{2} \\
 &= \frac{n(n+1)}{2}
 \end{aligned}$$

■

Já é uma fórmula muito conhecida como a soma de uma progressão aritmética de razão 1. E agora faz-se para o $t = 2$,

Corolário 2. (Soma dos quadrados) A soma S_2 dos quadrados dos n primeiros números naturais, isto é, $(1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + (n-1)^2 + n^2)$ é dada por

$$S_2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Demonstração: Desenvolvendo o binômio de Newton, $(x+a)^3 = x^3 + 3x^2a + 3xa^2 + a^3$. Fazendo $a = 1$ e x variando no conjunto $\{1, 2, 3, 4, \dots, n\}$, tem-se

$$\begin{cases}
 x = 1 & \implies (1+1)^3 = 2^3 = 1^3 + 3 \cdot 1^2 \cdot 1 + 3 \cdot 1 \cdot 1^2 + 1^3 \\
 x = 2 & \implies (2+1)^3 = 3^3 = 2^3 + 3 \cdot 2^2 \cdot 1 + 3 \cdot 2 \cdot 1^2 + 1^3 \\
 \vdots & \\
 x = n & \implies (n+1)^3 = (n+1)^3 = n^3 + 3 \cdot n^2 \cdot 1 + 3 \cdot n \cdot 1^2 + 1^3.
 \end{cases}$$

Agora somando membro a membro os termos das equações e fazendo as devidas simplificações, tem-se

$$+ \begin{cases}
 \cancel{2^3} = 1^3 + 3 \cdot 1^2 \cdot 1 + 3 \cdot 1 \cdot 1^2 + 1^3 \\
 \cancel{3^3} = \cancel{2^3} + 3 \cdot 2^2 \cdot 1 + 3 \cdot 2 \cdot 1^2 + 1^3 \\
 \vdots \\
 \cancel{n^3} = \cancel{(n-1)^3} + 3 \cdot (n-1)^2 \cdot 1 + 3 \cdot (n-1) \cdot 1^2 + 1^3 \\
 (n+1)^3 = \cancel{n^3} + 3 \cdot n^2 \cdot 1 + 3 \cdot n \cdot 1^2 + 1^3
 \end{cases}$$

$$(n+1)^3 = 1^3 + 3 \cdot (1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2) + 3 \cdot (1 + 2 + 3 + \dots + n) + \underbrace{(1 + 1 + \dots + 1)}_{n \text{ termos}}$$

A partir de agora se resolve a soma dos quadrados dos n primeiros números naturais de onde irá denotar por $S_2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + (n-1)^2 + n^2$ e a soma dos n primeiros naturais é dado pelo Corolário 1 na qual a soma é dada por $S_1 = \frac{n(n+1)}{2}$, e faz-se uma resolução simples utilizando a matemática básica

$$\begin{aligned} (n+1)^3 &= 1^3 + 3 \cdot \underbrace{(1^2 + \dots + n^2)}_{S_2} + 3 \cdot \underbrace{(1 + \dots + n)}_{S_1} + \underbrace{(1 + \dots + 1)}_{n \cdot 1} \\ (n+1)^3 &= 1^3 + 3 \cdot S_2 + 3 \cdot S_1 + n \\ S_2 &= \frac{(n+1)^3 - 1^3 - 3 \cdot S_1 - n}{3} \\ &= \frac{n^3 + 3n^2 + 3n + 1 - 1 - 3 \cdot \underbrace{\frac{(n+1)n}{2}}_{S_1} - n}{3} \\ &= \frac{2n^3 + 6n^2 + 6n - 3n^2 - 3n - 2n}{6} \\ &= \frac{2n^3 + 3n^2 + n}{6} \\ &= \frac{n(2n+1)(n+1)}{6}. \end{aligned}$$

■

3 CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL

O cálculo diferencial e integral fundamenta-se em dois conceitos de muita importância, além do estudo dos números, a conhecer, a ideia de função e a noção de limite. É notório que estas representações são vistas desde a matemática antiga, mas é na moderna que sua beleza estrutural e seus significados são universalmente difundidos, Courant e McShane (1934). Desenvolvido no século XVII com uma enorme contribuição de Isaac Newton e Gottfried Wilhelm Leibniz, o cálculo infinitesimal revolucionou a ciência e a engenharia, tornando-se essencial para a física, a economia e a tecnologia.

Este capítulo tem como objetivo apresentar um panorama histórico do cálculo, suas principais definições, teoremas fundamentais e aplicações. Evidenciando a importância do cálculo integral por meio da sua capacidade de resolver problemas com ênfase no cálculo de áreas de figuras planas e volumes de sólidos geométricos, tomando como embasamentos teóricos os textos de (Stewart, 2013), (Courant; McShane, 1934), (Thomas; Weir; Hass, 2012), (Neto et al., 1985) e (Guidorizzi, 2013).

3.1 CONTEXTO HISTÓRICO

No final do período grego, os matemáticos estavam investigando curvas geométricas mais gerais e complexas do que simplesmente retas, circunferências e elipses. As curvas as quais detinham seus interesses eram as curvas que surgiram como lugares geométricos à determinadas condições, por exemplo parábolas e a Conchoide de Nicomedes. No século XVII, Pierre de Fermat desenvolveu métodos para encontrar tangentes a curvas, o que abriu caminho para o conceito de derivada. Isaac Newton e Gottfried Wilhelm Leibniz, de forma independente, formalizaram o cálculo infinitesimal. Enquanto Newton aplicava suas descobertas à física e descrevia mudanças por meio das "fluxões", Leibniz desenvolveu uma notação matemática mais intuitiva, como os símbolos para diferenciação e para integração. Apesar de uma longa disputa sobre a prioridade da descoberta, hoje reconhece-se a importância das contribuições de ambos para a consolidação do cálculo diferencial e integral.

Figura 3.1 – Gottfried Wilhelm Leibniz

Fonte: (Leibniz, 2007)

Gottfried Wilhelm Leibniz (1646 – 1716) foi um dos maiores pensadores do século XVII, destacando-se como filósofo, matemático, lógico, jurista, diplomata e inventor. Nascido em Leipzig, Alemanha. Teve uma formação acadêmica ampla, mas foi na matemática que deixou sua marca mais profunda e duradoura, sendo amplamente reconhecido como um dos criadores do cálculo diferencial e integral, ao lado de Isaac Newton. O desenvolvimento do seu cálculo foi motivado por problemas práticos, como o cálculo de áreas sob curvas, tangentes a curvas, e taxas de variação. Leibniz é uma figura central não apenas para a história do cálculo, mas para a própria construção do pensamento científico moderno.

Figura 3.2 – Isaac Newton

Fonte: (Newton, 2016)

Isaac Newton (1643 – 1727) é uma das figuras mais influentes da história da ciência. Sendo matemático, físico, astrônomo e filósofo natural. Nascido em Lincolnshire na Inglaterra. Foi responsável por desenvolver, de forma independente, o cálculo diferencial e integral, tendo uma abordagem entrelaçada com seus estudos em física e astronomia. A motivação para o desenvolvimento do cálculo surgiu da necessidade de compreender e descrever o movimento dos corpos celestes, as forças que agem sobre eles e as mudanças nas quantidades físicas ao longo do tempo. Criando assim uma ferramenta matemática capaz de lidar com variações contínuas e instantâneas ao que chamamos hoje de cálculo diferencial, e com o acúmulo de quantidades o que reconhecemos hoje por cálculo integral.

3.2 CÁLCULO DIFERENCIAL

A estrutura cerne do chamado cálculo infinitesimal é o conceito de limites, que ao princípio de sua descoberta era tratado como duas partes distintas sendo elas o *cálculo integral* e o *cálculo diferencial*. Mas, logo em seguida foi demonstrado por meio do Teorema Fundamental do Cálculo, que será visto na seção de integrais, que esses dois conceitos estão intimamente ligados, sendo até o inverso um ao outro.

Aqui vale ressaltar que não será feito um estudo minucioso acerca do cálculo diferencial, tendo em vista o escopo do presente trabalho, portanto faz-se necessário que o leitor conheça a teoria de limites e consequentemente a de derivadas que também é um limite, donde mostra-se sua definição e também um quadro resumo, veja o Quadro 3.1 onde estará exposto as regras de derivação e algumas derivadas consideradas básicas.

Definição 1. (*Derivada*) A derivada de uma curva/função dada por $y = f(x)$ na variável x é uma função f' , cujo valor em x é dado pelo limite

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

desde que o limite exista.

Diante da ênfase em integrais, será omitido aqui as demonstrações de funções simples fazendo-se necessário a criação de um quadro resumo acerca das regras de derivação. A seguir suponha que:

- a e b , são constantes reais;
- f , g , e h , são funções deriváveis na variável t .

Quadro 3.1 – Algumas derivadas básicas e regras de derivação

Regras de Derivação		Derivadas básicas	
$\alpha(t)$	$\alpha'(t)$	$\alpha(t)$	$\alpha'(t)$
$a \cdot f$	$a \cdot f'$	$\log_a t$	$\frac{1}{t \cdot \ln a}$
$f \pm g$	$f' \pm g'$	$\text{sen}(t)$	$\cos(t)$
$f \cdot g$	$f' \cdot g + f \cdot g'$	$\cos(t)$	$-\text{sen}(t)$
$f \cdot g \cdot h$	$f' \cdot g \cdot h + f \cdot g' \cdot h + f \cdot g \cdot h'$	a	0
$\frac{f}{g}$	$\frac{f' \cdot g - f \cdot g'}{g^2}$	t^a	at^{a-1}
$f(g(t))$	$f'(g(t)) \cdot g'(t)$	a^t	$a^t \cdot \ln a$

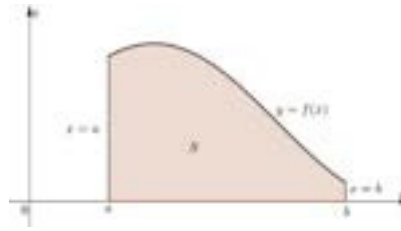
Fonte: Próprio autor

3.3 CÁLCULO INTEGRAL

Nesta seção será estudado um dos conceitos fundamentais da matemática, a integral, que trata de soma contínua de pequenas partes, permitindo calcular grandezas como áreas, volumes, probabilidade e trabalho. Surgindo da necessidade de resolver problemas que envolvem medidas de superfícies e volumes irregulares, sendo hoje amplamente utilizada na física, engenharia, estatística, economia e diversas outras áreas. Aqui destacará apenas as definições importantes, por exemplo o Teorema Fundamental do Cálculo, técnicas para integração que ajudará no cálculo de áreas e volumes de figuras planas e sólidos geométricos.

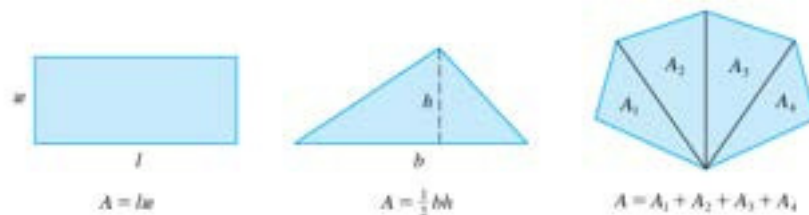
3.3.1 O Problema da Área

Para determinar a área sob uma curva, primeiro será necessário entender o que é área, veja a Figura 3.3, note que a área é uma região que está limitada por algumas propriedades como visto na Figura 3.3, tem-se que a região S sendo à área abaixo da curva $y = f(x)$ que vai de a até b . Isto significa que a região S , na Figura 3.3 está limitada pelo gráfico da função contínua f com $f(x) \geq 0$, pelas retas verticais à direita por $x = b$ e à esquerda por $x = a$, assim como está limitada inferiormente pela reta $x = 0$, ou também o eixo x .

Figura 3.3 – Área da região S 

Fonte: Próprio autor

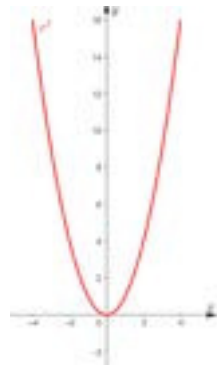
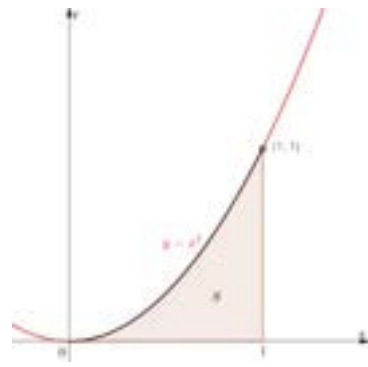
Como visto acima a área é um conceito não tão simples para uma curva como a da Figura 3.3. Neste sentido facilita um pouco quando essa região é limitada por retas ou simplesmente lados retos como por exemplo, ver a Figura 3.4, onde são polígonos e que neste caso são de mais facilidade de encontrar sua área lembra-se aqui será assumido como verdade as áreas de polígonos como retângulos e triângulos mas tendo como objetivo fazer suas respectivas demonstrações, assim pode-se afirmar que a área de um retângulo é dada pelo produto de comprimento (l) e sua largura (w) da mesma forma terá que para um triângulo sua área é dada pelo produto da metade de sua base (b) pela sua altura (h), ver a Figura 3.4.

Figura 3.4 – Áreas limitadas por lados retos

Fonte: (Stewart, 2013, p. 326)

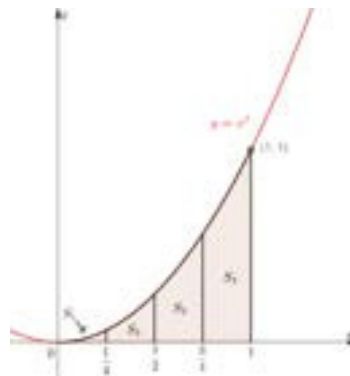
Já para um polígono que possui mais de quatro lados sua área é dado por sua subdivisão da área em triângulos como mostrado no terceiro polígono da esquerda para a direita, da Figura 3.4. E sua área é a soma de todas as áreas dos triângulos formados dentro do polígono.

Exemplo 1. Utilizando de retângulos estime a área abaixo da parábola $y = x^2$ de 0 até 1, ver a Figura 3.5a a parábola, e a área da região parabólica, ver a Figura 3.5b.

Figura 3.5 – Gráfico de $y = x^2$ e área da região S de 0 a 1**(a) Gráfico de x^2** **(b) Área da região S** 

Fonte: Próprio autor

Solução: Primeiro perceba que a região S está dentro de um quadrado de lado 1, em especificidade entre 0 e 1 e abaixo da parábola $y = x^2$. Agora divide-se a região S em quatro faixas limitadas pelas retas verticais $x = \frac{1}{4}$, $x = \frac{1}{2}$, $x = \frac{3}{4}$ e $x = 1$, ver a Figura 3.6, produzindo quatro áreas S_1 , S_2 , S_3 e S_4 .

Figura 3.6 – Área subdividida em quatro faixas

Fonte: Próprio autor

tomando cada faixa aproximando por um retângulo com base igual a largura de cada faixa, já que as faixas possui uma mesma largura pois foi dividido em quatro partes iguais sendo calculado da seguinte maneira $\frac{1-0}{4} = \frac{1}{4}$, e para a altura será tomada igual ao lado esquerdo da faixa de maneira que a altura coincide com o valor da parábola neste ponto, veja a Figura 3.7a, assim cada retângulo tem base igual a $\frac{1}{4}$ e altura 0^2 , $\left(\frac{1}{4}\right)^2$, $\left(\frac{1}{2}\right)^2$ e $\left(\frac{3}{4}\right)^2$, veja que a região S_1 desaparece porque a altura é zero. Assim somando todas as áreas dos retângulos utilizando a extremidade esquerda com quatro faixas, onde denotando por (S_{E_4}) , obtém:

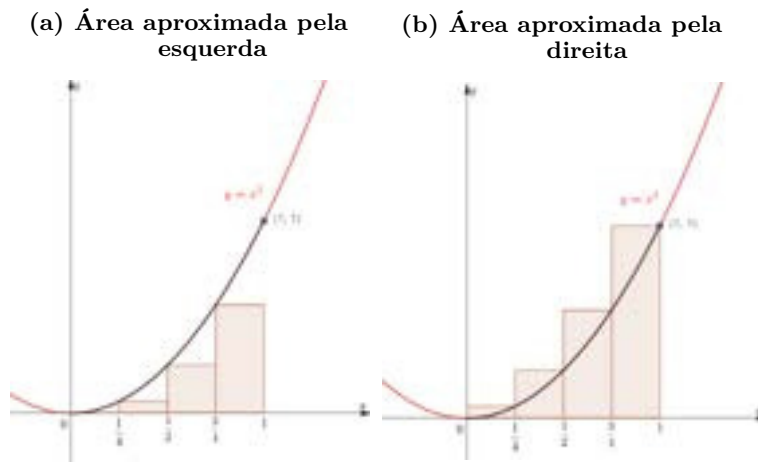
$$\begin{aligned}
 S_{E_4} &= \underbrace{\frac{1}{4} \cdot 0}_{S_1} + \underbrace{\frac{1}{4} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^2}_{S_2} + \underbrace{\frac{1}{4} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2}_{S_3} + \underbrace{\frac{1}{4} \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^2}_{S_4} \\
 &= 0 + \frac{1}{64} + \frac{1}{16} + \frac{9}{64} \\
 &= \frac{1+4+9}{64}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{14}{64} \\
&= 0,21875 \quad \Longleftrightarrow \quad S_{E_4} = 0,21875
\end{aligned}$$

Então a área da região é $S_{E_4} = 0,21875$. Note que a área da região S é maior que a área da região S_{E_4} , ou seja, por estimativas obtemos:

$$S > S_{E_4}. \quad (1)$$

Figura 3.7 – Aproximações de áreas utilizando a extremidade esquerda e direita



Fonte: Próprio autor

Analogamente fazendo as aproximações com retângulos de base igual a largura da faixa e que sua altura será igual ao lado direito da faixa que coincide com o valor da parábola nesse ponto, veja a Figura 3.7b, logo note que cada retângulo tem base igual a $\frac{1}{4}$ e altura $\left(\frac{1}{4}\right)^2$, $\left(\frac{1}{2}\right)^2$, $\left(\frac{3}{4}\right)^2$ e 1^2 . Assim, fazendo a soma das áreas dos retângulos utilizando as extremidades direitas com quatro faixas (S_{D_4}), segue que:

$$\begin{aligned}
S_{D_4} &= \underbrace{\frac{1}{4} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^2}_{S_1} + \underbrace{\frac{1}{4} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2}_{S_2} + \underbrace{\frac{1}{4} \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^2}_{S_3} + \underbrace{\frac{1}{4} \cdot 1^2}_{S_4} \\
&= \frac{1}{64} + \frac{1}{16} + \frac{9}{64} + \frac{1}{4} \\
&= \frac{1+4+9+16}{64} \\
&= \frac{30}{64} \\
&= 0,46875
\end{aligned}$$

Portanto a área da região $S_{D_4} = 0,46875$. Então, a área da região S é menor que a área da região S_{D_4} , isto é, por estimativas obtém:

$$S < S_{D_4}. \quad (2)$$

Dessa maneira, tomando como base as desigualdades 1 e 2 obtém que a área S está limitada superiormente por S_{D_4} e inferiormente por S_{E_4} , ou seja:

$$S_{E_4} < S < S_{D_4} \quad \Longleftrightarrow \quad 0,21875 < S < 0,46875.$$

Dessa forma repetindo esse processo para calcular a área com mais faixas pode-se ter uma melhor aproximação para esta área seria aumentar a quantidade de retângulos (n) e analisar para qual valor a soma das áreas dos retângulos com a altura na extremidade a esquerda (S_{E_n}) e com altura na extremidade a direita (S_{D_n}), veja a Tabela 3.1.

Tabela 3.1 – Valores das áreas com extremidade na esquerda e direita

n	S_{E_n}	S_{D_n}	n	S_{E_n}	S_{D_n}
10	0,285	0,38500	100	0,32835	0,33835
20	0,30875	0,35875	200	0,33084	0,33584
40	0,32094	0,34594	500	0,33233	0,33433
50	0,32340	0,34340	900	0,33278	0,33389

Fonte: Próprio autor

Veja que em quanto mais aumentar a quantidade de retângulos mais a soma de suas áreas seja com extremidade a esquerda ou direita, vai se aproximando de 0,33. Então uma boa aproximação para a área abaixo da parábola de 0 até 1 é $S \approx 0,33 u.a.$

3.3.2 A Integral Definida

A partir de agora definirá uma maneira para se calcular áreas e volumes de figuras com propriedades mais complexas, como as que são limitadas por parábolas, elipses, hipérboles e inúmeras outras curvas, que para o seu conceito de volume fará um rotação em torno de um eixo específico e já para área calcula-se a região abaixo da curva ou acima dependendo de sua especificidade. Para isso é que uma ferramenta essencial a *integral definida* em cálculo existe em conceitos importantes como áreas, volumes, comprimento de linhas curvas, dentre inúmeros conceitos que podem ser feito com a integral. A ideia que está amparando a integral é que pode-se calcular por meios de quantidades arbitrariamente muitas pequenas, mas para que possa se aprofundar a este conceito, primeiro se define uma partição e a soma de Riemann. Os conceitos apresentados nesta seção podem ser encontrados em livros textos como (Guidorizzi, 2013), (Thomas; Weir; Hass, 2012) e (Lima, 2017). Alguns desses conceitos não serão demonstrados.

Partição de um intervalo

Seja $[a, b]$ um intervalo fechado, e neste intervalo define uma partição $\mathcal{P}$, da seguinte maneira

Definição 2. (*Partição de um intervalo*) Uma partição $\mathcal{P}$ de um intervalo fechado $[a, b]$ é um conjunto finito $\mathcal{P} = \{x_0, x_1, \dots, x_{n-1}, x_n\}$ donde $a = x_0 < x_1 < x_2 < x_3 < \dots < x_i < \dots < x_{n-1} < x_n = b$. E $\mathcal{P}$ divide $[a, b]$ em n subintervalos $[x_{i-1}, x_i]$ com $i = 1, 2, 3, \dots, n-1, n$. Tome essa partição numa reta real, veja a Figura 3.8.

Figura 3.8 – Partição de $[a, b]$



Fonte: Próprio autor

A amplitude do subintervalo $[x_{i-1}, x_i]$ será indicada por $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$.

Assim com essa partição, os n subintervalos produzirá n amplitudes de valor $\Delta x_i \in \mathbb{R}$, ou seja,

$$\begin{array}{ll} [x_0, x_1] & \Rightarrow \Delta x_1 = x_1 - x_0 \\ [x_1, x_2] & \Rightarrow \Delta x_2 = x_2 - x_1 \\ \vdots & \vdots \\ [x_{n-1}, x_n] & \Rightarrow \Delta x_n = x_n - x_{n-1} \end{array}$$

Onde as amplitudes Δx_i para todo $i = 1, 2, \dots, n$ não são necessariamente iguais. E o maior valor das amplitudes seja Δx_i denomina-se de amplitude da partição $\mathcal{P}$ e será denotada por $\max \Delta x_i$.

Soma de Riemann

É um número que é resultado da soma de várias parcelas, sendo introduzido e aplicado primariamente pelo grande matemático **Georg Friedrich Bernhard Riemann** (1826 – 1866), mais conhecido por *Riemann*. Natural da Alemanha, ele detinha uma mentalidade fértil e de muitos interesses tendo trabalhos e descobertas inovadoras nas áreas de análise, teoria dos números e geometria a qual nesta obteve uma excelente descoberta onde em uma conferência generalizou todas as geometrias euclidianas e não-euclidianas, criando a sua geometria denominada de Geometria Riemanniana, que serviu de suporte para a Teoria da Relatividade de Einstein. Além de facilitar o entendimento do

cálculo por meio da integral de uma função, definindo o que se conhece hoje por integral de Riemann, utilizando-se da *Soma de Riemann*.

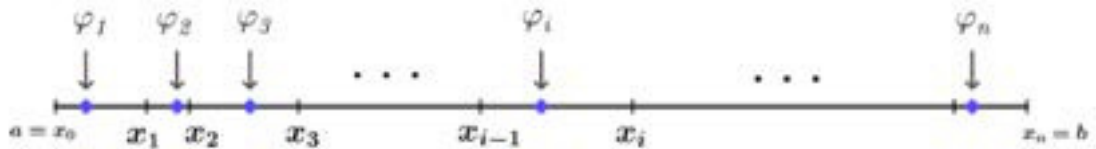
Figura 3.9 – Georg Friedrich Bernhard Riemann



Fonte: adaptada de (Nunes, 2015)

Seja f uma função definida em $[a, b]$ e $\mathcal{P}$ uma partição do intervalo fechado onde $\mathcal{P} = \{a = x_0, x_1, \dots, x_{n-1}, x_n = b\}$. E para cada subintervalo $[x_{i-1}, x_i]$ com $i = \{1, 2, \dots, n\}$ tome φ_i de modo que $\varphi_i \in [x_{i-1}, x_i]$ escolhido de maneira arbitrária, ou seja, podendo ser qualquer valor no intervalo inclusive os seus extremos. Como mostra a Figura 3.10

Figura 3.10 – Escolha de φ_i qualquer em $[x_{i-1}, x_i]$



Fonte: Próprio autor

Então Riemann definiu que o número

$$\sum_{i=1}^n f(\varphi_i) \cdot \Delta x_i = f(\varphi_1)\Delta x_1 + f(\varphi_2)\Delta x_2 + \dots + f(\varphi_n)\Delta x_n \quad (3)$$

a qual denomina-se *soma de Riemann* da função f , relativa à partição $\mathcal{P}$ e ao números φ_i . Lembre-se da Definição 2 e veja que Δx_i é a amplitude de cada intervalo.

Integral de Riemann: definição

Ao calcularmos a área como no Exemplo 1 quando aumenta indefinidamente a quantidade de faixas, aparece um tipo de limite específico, definido pela seguinte fórmula

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(x_i) \Delta x = f(x_1)\Delta x + f(x_2)\Delta x + \dots + f(x_n)\Delta x$$

note que este último limite remete a *soma de Riemann* como mostra a Equação 3, apenas tomando o limite da soma tendendo ao (∞) e as amplitudes de cada subintervalo de maneira iguais. E sabe-se que para este tipo de limites aparece em uma grande variedade de situações como por exemplo comprimento de curvas, volumes de sólidos, trabalho e centro de massas entre outras aplicações, mesmo quando f não é necessariamente uma função positiva. Para este tipo de limites quando existir tem nome e notação especial, isto é, chamará de integral e denota com a letra S esticada que representa a soma das áreas, e que possui o símbolo $\int$. Daí, de maneira formal define-se a integral.

Definição 3. (*Integral Definida*) Seja $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ uma função limitada em um intervalo fechado $[a, b]$, com $a < b$. Diz que um número real K é a **integral definida de f no intervalo $[a, b]$** se, para todo $\epsilon > 0$, existir $\delta > 0$ tal que, para toda partição $\mathcal{P} = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ de $[a, b]$ com $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ satisfazendo

$$\max \Delta x_i < \delta,$$

e para qualquer escolha de $\varphi_i \in [x_{i-1}, x_i]$, com $i = \{1, 2, \dots, n\}$ temos

$$\left| \sum_{i=1}^n f(\varphi_i) \Delta x_i - K \right| < \epsilon.$$

Quando tal número K existir, ele é único em virtude das propriedades dos limites e chama-se K de integral de *Riemann* de f no intervalo $[a, b]$, denotando

$$\int_a^b f(x) dx = K = \lim_{\max \Delta x_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\varphi_i) \Delta x_i. \quad (4)$$

A definição de integral se utiliza de processo de limites no qual o $\max \Delta x_i$ vai para zero. Nos casos em que uma partição $\mathcal{P}$ tiver todos os subintervalos iguais, ou seja, cada subintervalo terá amplitude igual a $\Delta x = \frac{b-a}{n}$, escolhendo de maneira arbitrária $\varphi_i \in [x_{i-1}, x_i]$. Se o limite das somas de Riemann existe e é igual a K quando $n \rightarrow \infty$, pois como o $\max \Delta x_i \rightarrow 0$ então o número de subintervalos aumenta infinitamente. Então K é a integral definida de f em $[a, b]$, desta maneira tem-se

$$\int_a^b f(x) dx = K = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(\varphi_i) \cdot \frac{b-a}{n}.$$

O grande matemático Leibniz foi quem primariamente utilizou o limite de *somas de Riemann* como integral e introduziu o símbolo $\int$ como notação para integrais. Este incremento é um S alongado e foi escolhido assim porque a integral é um limite das *somas de Riemann*. O símbolo para o número K na definição de integral definida é

$$\int_a^b f(x) dx$$

que é lido como “integral de a até b de f de x e dx ” ou também apenas como “integral de a até b de f em relação a x ”. Os outros componentes do símbolo da integral também tem denominação, veja a Figura 3.11

Figura 3.11 – Componentes do símbolo da integral

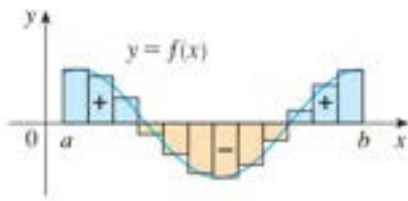


Fonte: Próprio autor

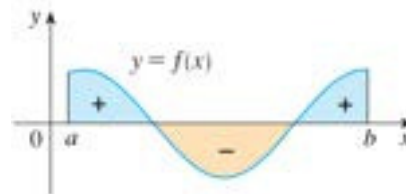
Note que até o momento foi tratado da integral como sendo uma interpretação de área abaixo da curva e sempre a curva é positiva, mas e se a curva assumir valores negativos, o que acontece? Como fica nossa interpretação? Para nos facilitar a visualização, veja as Figuras 3.12a e 3.12b

Figura 3.12 – Área de f e a partição de $[a, b]$

(a) Área com valores negativos



(b) Interpretação geométrica com a função com valores negativos



Fonte: (Stewart, 2013, p.338)

Dessa maneira, se a f assume valores negativos e positivos, veja a Figura 3.12a, a soma de *Riemann* que é o limite das somas das áreas dos retângulos e que se os valores de $f > 0$ então a soma das áreas dos retângulos acima do eixo x e já para valores em que $f < 0$ então a soma das áreas dos retângulos abaixo do eixo x , e como a altura dos retângulos é igual ao valor em que a função assume no ponto, isto é, para $f > 0$ as alturas são positivas e consequentemente suas áreas são positivas, já para $f < 0$ as alturas são negativas e consequentemente suas áreas são negativas, assim a soma de *Riemann* resultante é igual a diferença das áreas positivas (retângulos azuis) pelas áreas negativas (retângulos amarelos), ver a Figura 3.12b. Assim a integral definida pode ser interpretada como a área resultante, ou seja, a diferença das

$$\int_a^b f(x)dx = P(f, \mathcal{P}) - N(f, \mathcal{P})$$

onde $\mathcal{P} = \{a, x_1, x_2, \dots, b\}$ uma partição, como a descrita na Definição 2, e $P(f, \mathcal{P})$ é a área da região acima do eixo x e abaixo da curva/gráfico da função assim como $N(f, \mathcal{P})$ é a área da região abaixo do eixo x e acima da curva/gráfico da função.

Propriedades da Integral Definida

Agora será demonstrado algumas propriedades básicas das integrais.

Proposição 1. (*Propriedades das Integrais Definidas*) Sejam $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, com f e g funções integráveis no intervalo fechado $[a, b]$, e seja $c \in \mathbb{R}$, uma constante. Então, valem as seguintes propriedades:

(i) (*Ordem de integração*) Se tomarmos os limites de integração de b até a , temos

$$\int_a^b f(x)dx = - \int_b^a f(x)dx$$

(ii) (*Intervalo de largura zero*) Se $a = b$, então

$$\int_a^a f(x)dx = 0$$

(iii) (*Multiplicação por uma constante*) $c \cdot f$ é integrável em $[a, b]$ e

$$\int_a^b c \cdot f(x)dx = c \cdot \int_a^b f(x)dx$$

(iv) (*Soma e subtração*) $f \pm g$ é integrável em $[a, b]$ e

$$\int_a^b [f(x) \pm g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx$$

(v) (*Partição do intervalo*) se $a < c < b$ e f é integrável em $[a, c]$ e $[c, b]$, então

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

(vi) (*Função constante*) se $f(x) = c$, então

$$\int_a^b cdx = c(b - a)$$

Demonstração: Sabe-se que f e g são funções integráveis no intervalo fechado $[a, b]$, aqui irá se utilizar da Definição 3,

(i) Note que sempre move-se da esquerda para a direita ao longo do intervalo de integração que é $[a, b]$, assumindo de certa forma que $a < b$. Mas note que a definição faz sentido mesmo quando $a > b$, pois a definição como o limite das somas de *Riemann* faz sentido já que ao inverter a e b , o Δx que é dado por $\frac{b-a}{n}$ fica $\frac{a-b}{n} = -\frac{(b-a)}{n}$

logo tem-se $\sum_{i=1}^n f(x_i)[- \Delta x] = - \sum_{i=1}^n f(x_i)\Delta x$, é quando aplica o limite fica,

$$\int_a^b f(x)dx = - \int_b^a f(x)dx$$

A essa igualdade diz que é a propriedade da ordem de integração, assim quando inverte os limites de integração muda o sinal do valor da integral.

- (ii) E se ainda tomar os limites de integração iguais, isto é, $b = a$, tem-se que $\Delta x = 0$ e portanto

$$\int_a^a f(x)dx = 0$$

já que $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(\varphi_i) \Delta x = 0$.

- (iii) Seja $\mathcal{P}$ uma partição do intervalo fechado $[a, b]$ com subintervalos $[x_{i-1}, x_i]$ para $i = 1, 2, \dots, n$. Em cada subintervalo, se $c \geq 0$, tem

$$\begin{aligned} \min_{x \in [x_{i-1}, x_i]} \{c \cdot f(x)\} &= c \cdot \min_{x \in [x_{i-1}, x_i]} \{f(x)\}, & \text{assim como} \\ \max_{x \in [x_{i-1}, x_i]} \{c \cdot f(x)\} &= c \cdot \max_{x \in [x_{i-1}, x_i]} \{f(x)\} \end{aligned}$$

Se $c < 0$, mínimos globais viram máximos globais e os máximos globais viram mínimos globais, portanto

$$\begin{aligned} \min_{x \in [x_{i-1}, x_i]} \{c \cdot f(x)\} &= c \cdot \max_{x \in [x_{i-1}, x_i]} \{f(x)\}, & \text{assim como} \\ \max_{x \in [x_{i-1}, x_i]} \{c \cdot f(x)\} &= c \cdot \min_{x \in [x_{i-1}, x_i]} \{f(x)\} \end{aligned}$$

Logo, a soma inferior de *Riemann* de f na partição $\mathcal{P}$ que denota-se por $I(f, \mathcal{P})$. E a soma superior de *Riemann* de f na partição $\mathcal{P}$ que denotará por $S(f, \mathcal{P})$, assim

$$I(cf, \mathcal{P}) = \begin{cases} c \cdot I(f, \mathcal{P}), & c \geq 0 \\ c \cdot S(f, \mathcal{P}), & c < 0 \end{cases}$$

e

$$S(cf, \mathcal{P}) = \begin{cases} c \cdot S(f, \mathcal{P}), & c \geq 0 \\ c \cdot I(f, \mathcal{P}), & c < 0 \end{cases}$$

assim para qualquer $c \in \mathbb{R}$ temos que

$$S(cf, \mathcal{P}) - I(cf, \mathcal{P}) = |c| \cdot [S(f, \mathcal{P}) - I(f, \mathcal{P})].$$

Como f é integrável em $[a, b]$, dado $\epsilon > 0$ existe uma partição $\mathcal{P}$, tal que

$$S(f, \mathcal{P}) - I(f, \mathcal{P}) < \frac{\epsilon}{1 + |c|}.$$

Então

$$S(cf, \mathcal{P}) - I(cf, \mathcal{P}) < |c| \cdot \frac{\epsilon}{1 + |c|} < \epsilon$$

provando assim que $c \cdot f$ é integrável em $[a, b]$. Aplicando o limite em que a partição $\mathcal{P}$ produzirá infinitos subintervalos, tanto a soma superior quanto a soma inferior de f tendem à integral, portanto se $c \geq 0$

$$\int_a^b c \cdot f(x)dx = \lim_{n \rightarrow \infty} S(c \cdot f, \mathcal{P}) = \lim_{n \rightarrow \infty} c \cdot S(f, \mathcal{P}) = c \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} S(f, \mathcal{P}) = c \cdot \int_a^b f(x)dx$$

e se $c < 0$

$$\int_a^b c \cdot f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} I(c \cdot f, \mathcal{P}) = \lim_{n \rightarrow \infty} c \cdot S(f, \mathcal{P}) = c \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} S(f, \mathcal{P}) = c \cdot \int_a^b f(x) dx$$

Assim concluí-se que $\int_a^b c \cdot f(x) dx = c \cdot \int_a^b f(x) dx$.

- (iv) Seja $\mathcal{P} = \{a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b\}$ uma partição do intervalo $[a, b]$ que divide em n subintervalo e cada subintervalo $[x_{i-1}, x_i]$ com $i = 1, 2, \dots, n$. Como f e g são integráveis em $[a, b]$, assim em cada subintervalo as funções são limitadas em cada subintervalos, tem-se

$$\begin{aligned} \min_{x \in [x_{i-1}, x_i]} \{f(x)\} &\leq f(x) \leq \max_{x \in [x_{i-1}, x_i]} \{f(x)\} \\ \min_{x \in [x_{i-1}, x_i]} \{g(x)\} &\leq g(x) \leq \max_{x \in [x_{i-1}, x_i]} \{g(x)\} \end{aligned}$$

somando essas desigualdades, tem-se

$$\min_{x \in [x_{i-1}, x_i]} \{f(x)\} + \min_{x \in [x_{i-1}, x_i]} \{g(x)\} \leq f(x) + g(x) \leq \max_{x \in [x_{i-1}, x_i]} \{f(x)\} + \max_{x \in [x_{i-1}, x_i]} \{g(x)\}$$

Logo a soma $f(x) + g(x)$ é limitada e ainda tem-se

$$\min_{x \in [x_{i-1}, x_i]} \{f(x) + g(x)\} \geq \min_{x \in [x_{i-1}, x_i]} \{f(x)\} + \min_{x \in [x_{i-1}, x_i]} \{g(x)\}$$

e também que

$$\max_{x \in [x_{i-1}, x_i]} \{f(x) + g(x)\} \leq \max_{x \in [x_{i-1}, x_i]} \{f(x)\} + \max_{x \in [x_{i-1}, x_i]} \{g(x)\}$$

assim quando multiplicado por Δx , temos

$$\begin{aligned} I(f + g, \mathcal{P}) &\geq I(f, \mathcal{P}) + I(g, \mathcal{P}) \\ S(f + g, \mathcal{P}) &\leq S(f, \mathcal{P}) + S(g, \mathcal{P}). \end{aligned}$$

Assim a diferença entre as soma de *Riemann*

$$S(f + g, \mathcal{P}) - I(f + g, \mathcal{P}) \leq S(f, \mathcal{P}) - I(f, \mathcal{P}) + S(g, \mathcal{P}) - I(g, \mathcal{P}).$$

Como f e g são integráveis em $[a, b]$, para todo $\epsilon > 0$ existe uma partição tal que

$$S(f, \mathcal{P}) - I(f, \mathcal{P}) < \frac{\epsilon}{2} \quad \text{e} \quad S(g, \mathcal{P}) - I(g, \mathcal{P}) < \frac{\epsilon}{2}$$

portanto,

$$S(f + g, \mathcal{P}) - I(f + g, \mathcal{P}) \leq \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$$

provando assim que $f + g$ é integrável.

Partindo da desigualdade, já que tanto para a soma superiores quanto as inferiores tendem a integral já que provamos que $f + g$ é integrável tome aqui a desigualdade das somas inferiores

$$I(f + g, \mathcal{P}) \geq I(f, \mathcal{P}) + I(g, \mathcal{P})$$

aplicando o limite quando o número de subintervalos tendem ao infinito tem-se

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} I(f + g, \mathcal{P}) &= \lim_{n \rightarrow \infty} I(f, \mathcal{P}) + \lim_{n \rightarrow \infty} I(g, \mathcal{P}) \\ \int_a^b [f(x) + g(x)] dx &= \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx \end{aligned} \quad (5)$$

Tomando a mesma partição $\mathcal{P}$, refazendo os mesmos passos da prova para a soma de duas funções, apenas tomando $-g(x)$ ao invés de $g(x)$ o que também conclui-se que $-g$ é integrável em $[a, b]$ já que da propriedade anterior sabe-se $\int_a^b c f(x) dx = c \cdot \int_a^b f(x) dx$, para todo $c \in \mathbb{R}$, quando $c = -1$. Assim f e $-g$ é limitada em cada subintervalo dessa forma

$$\begin{aligned} \min_{x \in [x_{i-1}, x_i]} \{f(x)\} &\leq f(x) \leq \max_{x \in [x_{i-1}, x_i]} \{f(x)\} \\ \min_{x \in [x_{i-1}, x_i]} \{-g(x)\} &\leq -g(x) \leq \max_{x \in [x_{i-1}, x_i]} \{-g(x)\}. \end{aligned}$$

Logo a soma $f(x) + [-g(x)] = f(x) - g(x)$ é limitada

$$\begin{aligned} \min_{x \in [x_{i-1}, x_i]} \{f(x) - g(x)\} &\geq \min_{x \in [x_{i-1}, x_i]} \{f(x)\} + \min_{x \in [x_{i-1}, x_i]} \{-g(x)\} \\ \max_{x \in [x_{i-1}, x_i]} \{f(x) - g(x)\} &\leq \max_{x \in [x_{i-1}, x_i]} \{f(x)\} + \max_{x \in [x_{i-1}, x_i]} \{-g(x)\}, \end{aligned}$$

quando multiplicar todas as somas inferiores e superiores por Δx , tem-se

$$\begin{aligned} I(f - g, \mathcal{P}) &\geq I(f, \mathcal{P}) + I(-g, \mathcal{P}) \\ S(f - g, \mathcal{P}) &\leq S(f, \mathcal{P}) + S(-g, \mathcal{P}) \end{aligned}$$

assim a diferença

$$S(f - g, \mathcal{P}) - I(f - g, \mathcal{P}) \leq S(f, \mathcal{P}) - I(f, \mathcal{P}) + S(-g, \mathcal{P}) - I(-g, \mathcal{P}).$$

Como f e $-g$ são funções integráveis para todo $\epsilon > 0$ existe uma partição tal que

$$S(f, \mathcal{P}) - I(f, \mathcal{P}) < \frac{\epsilon}{2} \quad \text{e} \quad S(-g, \mathcal{P}) - I(-g, \mathcal{P}) < \frac{\epsilon}{2}$$

portanto,

$$S(f - g, \mathcal{P}) - I(f - g, \mathcal{P}) < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$$

provando assim que $f - g$ é integrável.

Partindo da desigualdade,

$$I(f - g, \mathcal{P}) \geq I(f, \mathcal{P}) + I(-g, \mathcal{P})$$

aplicando o limite quando o número de subintervalo de $\mathcal{P}$ tendem ao infinito, fica

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} I(f - g, \mathcal{P}) &= \lim_{n \rightarrow \infty} I(f, \mathcal{P}) + \lim_{n \rightarrow \infty} I(-g, \mathcal{P}) \\ \int_a^b [f(x) - g(x)] dx &= \int_a^b f(x) dx - \int_a^b g(x) dx \end{aligned} \quad (6)$$

note que $\lim_{n \rightarrow \infty} I(-g, \mathcal{P}) = -\int_a^b g(x) dx$, pela propriedade anterior que nos garante que $\int_a^b c \cdot f(x) dx = c \cdot \int_a^b f(x) dx$ bastando tomar $c = -1$.

Portanto das Equações (5) e (6), concluí-se

$$\int_a^b [f(x) \pm g(x)] dx = \int_a^b f(x) dx \pm \int_a^b g(x) dx.$$

- (v) Sejam $\mathcal{P}_1 = \{a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = x\}$ uma partição de $[a, c]$ e $\mathcal{P}_2 = \{c = x_n < x_{n+1} < x_{n+2} < \dots < x_{n+m-1} < x_{n+m} = b\}$ uma partição de $[c, b]$. Considere a partição $\mathcal{P} = \mathcal{P}_1 \cup \mathcal{P}_2$ do intervalo $[a, b]$ que possui $n + m$ subintervalos.

Sejam $M_i = \sup\{f(x)/x \in [x_{i-1}, x_i]\}$ é o valor máximo da função f no intervalo fechado $[x_{i-1}, x_i]$, que possui amplitude $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$, então a soma superior de *Riemann* associada a $\mathcal{P}$ é dada por

$$\begin{aligned} S(f, \mathcal{P}) &= \sum_{i=1}^{n+m} M_i \Delta x_i \\ &= \sum_{i=1}^n M_i \Delta x_i + \sum_{i=n}^m M_i \Delta x_i \\ &= S(f, \mathcal{P}_1) + S(f, \mathcal{P}_2) \end{aligned} \quad (7)$$

Da mesma forma sejam $m_i = \inf\{f(x)/x \in [x_{i-1}, x_i]\}$ é o valor mínimo da função f no intervalo fechado $[x_{i-1}, x_i]$, então a soma inferior de *Riemann* associada a $\mathcal{P}$ é dada por

$$\begin{aligned} I(f, \mathcal{P}) &= \sum_{i=1}^{n+m} m_i \Delta x_i \\ &= \sum_{i=1}^n m_i \Delta x_i + \sum_{i=n}^m m_i \Delta x_i \\ &= I(f, \mathcal{P}_1) + I(f, \mathcal{P}_2) \end{aligned} \quad (8)$$

Como f é integrável em $[a, c]$ e $[c, b]$ então para todo $\epsilon > 0$, existem partições $\mathcal{P}_1$ de $[a, c]$ e $\mathcal{P}_2$ de $[c, b]$ tais que

$$S(f, \mathcal{P}_1) - I(f, \mathcal{P}_1) < \frac{\epsilon}{2} \quad \text{e} \quad S(f, \mathcal{P}_2) - I(f, \mathcal{P}_2) < \frac{\epsilon}{2}$$

Logo, para a partição $\mathcal{P} = \mathcal{P}_1 \cup \mathcal{P}_2$ de $[a, b]$, decorre das Igualdades (7) e (8) tem-se

$$\begin{aligned} S(f, \mathcal{P}) - I(f, \mathcal{P}) &= S(f, \mathcal{P}_1) - I(f, \mathcal{P}_1) + S(f, \mathcal{P}_2) - I(f, \mathcal{P}_2) \\ &< \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon \end{aligned}$$

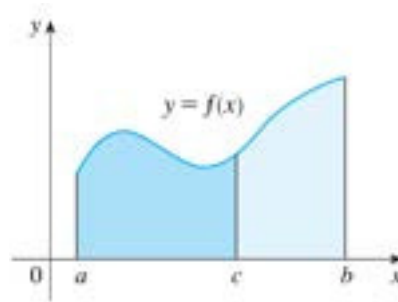
Portanto, f é integrável em $[a, b]$ com a partição $\mathcal{P} = \mathcal{P}_1 \cup \mathcal{P}_2$ pois a diferença entre a soma superiores e inferiores pode ser tomada arbitrariamente pequena.

Como o valor da integral definida de f em $[a, b]$ coincide com o valor comum dos limites das somas de *Riemann*, tem-se

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x)dx &= \lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{m \rightarrow \infty} S(f, \mathcal{P}) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} S(f, \mathcal{P}_1) + \lim_{m \rightarrow \infty} S(f, \mathcal{P}_2) \\ &= \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx \end{aligned}$$

para uma interpretação geométrica de como seria esta propriedade, ver a Figura 3.13

Figura 3.13 – Partição do intervalo $[a, b]$



Fonte: (Stewart, 2013, p.345)

Então,

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

- (vi) Como f é integrável em $[a, b]$, existe uma partição $\mathcal{P} = \{a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b\}$ de modo que os n subintervalos tenham amplitudes iguais $\Delta x = \frac{b-a}{n}$. Assim, a integral definida coincide com o valor comum das somas de *Riemann*, então

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x)dx &= \lim_{n \rightarrow \infty} S(f, \mathcal{P}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(x_i) \Delta x \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} [f(x_1) \Delta x + f(x_2) \Delta x + \dots + f(x_n) \Delta x] \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \underbrace{[c + c + \dots + c]}_{n \cdot c} \Delta x \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} c \cdot \cancel{n} \cdot \frac{b-a}{\cancel{n}} \\ &= c(b-a) \end{aligned}$$

Então,

$$\int_a^b c dx = c(b-a).$$



Perceba que as propriedades acima valem quando $a < b$, $a = b$ ou $a > b$. As propriedades posteriores, vamos comparar tamanho de funções e os de integrais, ou seja, são verdadeiras somente quando $a \leq b$.

Proposição 2. (*Propriedades Comparativas das Integrais Definidas*) Sejam $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, com f e g funções integráveis no intervalo fechado $[a, b]$, com $a \leq b$. Então, valem as seguintes propriedades:

$$(i) \text{ Para } a \leq x \leq b, \text{ se } f(x) \geq 0 \text{ então } \int_a^b f(x)dx \geq 0.$$

$$(ii) \text{ Para } a \leq x \leq b, \text{ se } f(x) \geq g(x) \text{ então } \int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b g(x)dx.$$

$$(iii) \text{ Para } a \leq x \leq b, \text{ se } \lambda \leq f(x) \leq \gamma \text{ então } \lambda(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq \gamma(b-a).$$

3.3.3 Teorema Fundamental do Cálculo

A denominação desta seção refere-se a parte cerebral do cálculo, onde o **Teorema Fundamental do Cálculo (TFC)** que produz uma ligação entre os dois ramos: o cálculo integral e o diferencial. E relacionar esses dois ramos permite calcular integrais por meio de primitivas, ou seja, funções a quais quando deriva-se obtém a função que queria integrar, o que facilita os cálculos ao invés de usar limites das somas de *Riemann*.

Antes de apresentar e demonstrar a parte cerne do cálculo apresenta-se o teorema do valor médio para integrais definidas, que servirá de suporte para a demonstração do TFC.

Teorema 2. (*Teorema Valor Médio para Integrais Definidas*) Seja $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua em $[a, b]$. Então existe $c \in [a, b]$ tal que

$$f(c) = \left(\frac{1}{b-a} \right) \cdot \int_a^b f(x)dx.$$

Seja $f(x)$ uma função integrável em um conjunto finito I , então a integral de um número qualquer $a \in I$ até outro número qualquer $x \in I$, define-se uma nova função em que o valor em x é dado por

$$F(x) = \int_a^x f(x)dx$$

note que x é limite superior de integração. Mas F é como qualquer outra função real de variável real. Para cada x dado existe um valor numérico para $F(x)$, que neste caso será a integral de f de a até x .

Assim com essa nova forma de definir funções, o teorema a seguir fornece ampliações e conceitos que fundamenta esse novo caminho para determinar funções.

Teorema 3. (*Teorema Fundamental do Cálculo, parte 1*) *Seja f uma função contínua em $[a, b]$, então F uma função definida pela integral $F(x) = \int_a^x f(i)di$ para todo $x \in [a, b]$ e derivável em (a, b) . E sua derivada é $f(x)$, tem-se*

$$F'(x) = \frac{d}{dx} \left[\int_a^x f(i)di \right] = f(x).$$

Demonstração: Pela Definição 1, tem-se

$$F'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \cdot \left[\int_a^{x+h} f(i)di - \int_a^x f(i)di \right]$$

Agora, pela Proposição 1 da partição do intervalo de integral, tem-se

$$\int_a^{x+h} f(i)di = \int_a^x f(i)di + \int_x^{x+h} f(i)di$$

Daí,

$$\begin{aligned} F'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \cdot \left[\int_a^{x+h} f(i)di - \int_a^x f(i)di \right] \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \cdot \left[\cancel{\int_a^x f(i)di} + \int_x^{x+h} f(i)di - \cancel{\int_a^x f(i)di} \right] \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \cdot \int_x^{x+h} f(i)di \end{aligned}$$

Pelo Teorema 2, a expressão de $F'(x)$ é um dos valores assumidos por f no intervalo entre x e $x+h$, já que decorrente do teorema existe $c \in [x, x+h]$, tal que

$$f(c) = \frac{1}{x+h-x} \int_x^{x+h} f(i)di = \frac{1}{h} \cdot \int_x^{x+h} f(i)di$$

Assim quando $h \rightarrow 0$ então $x+h \approx x$, forçando c se aproximar de x pois $c \in [x, x+h]$. E pela continuidade de f tem-se que $f(c) \approx f(x)$, e portanto

$$\lim_{h \rightarrow 0} f(c) = f(x).$$

Então,

$$\begin{aligned} F'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \cdot \int_x^{x+h} f(i)di \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} f(c) \\ &= f(x). \end{aligned}$$

Portanto, $F'(x) = f(x)$.



Parte-se agora para a segunda parte do Teorema Fundamental do Cálculo, que permitirá calcular as integrais sem a necessidade do cálculo dos limites das somas de *Riemann*. Ao invés disso, determina e calcula uma primitiva nos limites superior e inferior de integração.

Teorema 4. (*Teorema Fundamental do Cálculo, parte 2*) Seja f uma função contínua em qualquer ponto de $[a, b]$, e se F é qualquer primitiva de f em $[a, b]$, então

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$$

Demonstração: Pelo Teorema 3, existe uma $A(x)$, talque

$$A(x) = \int_a^x f(i)di \quad (9)$$

Assim, se F é qualquer primitiva de f , então $A(x) = F(x) + c$, de fato como F e A são primitivas de f , tem-se $A'(x) = f(x)$ e $F'(x) = f(x)$ em todo intervalo $[a, b]$. Agora tome $H(x) = A(x) - F(x)$, e sua derivada ($H'(x)$) é dada por

$$H'(x) = A'(x) - F'(x) = f(x) - f(x) = 0$$

Como $H'(x) = 0$ para todo $x \in [a, b]$, $H(x)$ é uma constante em $[a, b]$, isto é, $A(x) - F(x) = c$. Uma vez que A e F são contínuas em $[a, b]$, e acabamos de ver que $A(x) = F(x) + c$, também se aplica quando $x = a$ ou $x = b$, considerando os limites laterais quando $(x \rightarrow a^+)$ ou $(x \rightarrow b^-)$.

Fazendo $x = a$ e $x = b$ em A na Equação (9), tem-se

$$A(a) = \int_a^a f(i)di = 0 \quad \text{e} \quad A(b) = \int_a^b f(i)di$$

agora calculando $F(b) - F(a)$, tem-se

$$\begin{aligned} F(b) - F(a) &= [A(b) - c] - [A(a) - c] \\ &= \underbrace{A(b)}_{\int_a^b f(i)di} - \underbrace{A(a)}_0 + c \\ &= \int_a^b f(i)di \end{aligned}$$

Então,

$$F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)dx.$$



Esse processo apresentado pelos dois últimos teoremas é mais fácil do que está calculando os limites das somas de *Riemann*. A notação usual para a diferença $F(b) - F(a)$ é

$$F(x)\Big|_a^b \quad \text{ou} \quad [F(x)]_a^b.$$

3.3.4 A Integral Indefinida

A parte 1 do Teorema Fundamental do Cálculo, o Teorema 3 garante a existência e calcula uma primitiva da função $f(x)$ se ela for contínua. Sabe-se que cada função contínua possui infinitas primitivas que diferem entre elas por uma constante, assim para qualquer primitiva F de f denota-se por

$$\int f(x)dx = F(x) + C$$

onde C é uma constante que pode assumir qualquer valor real, isto é, $C \in \mathbb{R}$.

Em consonância com a relação intrínseca dada pelo TFC entre primitivas e integrais, a notação $\int f(x)dx$ é usualmente denotada como a primitiva de f e a chama-se de **integral indefinida**. Logo,

$$\int f(x)dx = F(x) \quad \text{quer se dizer que} \quad F'(x) = f(x)$$

Técnicas de Integração

A partir de agora empenha-se no problema em que seja dada uma função contínua em um intervalo, encontrar alguma primitiva para esta função. Existem diversas maneiras que depende de cada função a qual queremos integrar, e a este processo denominado de *técnicas de integração*.

Aqui apresenta-se um quadro de algumas integrais imediatas e as regras de integrais indefinidas, por motivos de não se estender em mais demonstrações. E lembre aqui que todas as propriedades apresentadas das integrais definidas continuam a valer também para integrais indefinidas

Quadro 3.2 – Integrais Indefinidas

Regras	Imediatas
$\int cf(x)dx = c \int f(x)dx$	$\int x^j dx = \frac{x^{j+1}}{j+1} + C$
$\int [f(x) + g(x)]dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$	$\int \frac{1}{x} dx = \ln x + C$
$\int [f(x) - g(x)]dx = \int f(x)dx - \int g(x)dx$	$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln(a)} + C$
$\int Ddx = Dx + C$	$\int e^x dx = e^x + C$

Fonte: Próprio autor

Assim como em limites que faz uma mudança de variável, o cálculo de integrais pode ser simplificado com uma mudança de variável conveniente.

Teorema 5. (Regra da substituição) Se $v = g(x)$ for uma função derivável cuja a imagem é um intervalo I , então

$$\int f(g(x))g'(x)dx = \int f(v)dv$$

Demonstração: Pela regra da cadeia, $F(g(x))$ é uma primitiva de $f(g(x))g'(x)$ sempre que $F' = f$, tem-se

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}F(g(x)) &= F'(g(x)) \cdot g'(x) \\ &= f(g(x)) \cdot g'(x) \end{aligned}$$

Fazendo a substituição $v = g(x)$, tem-se

$$\begin{aligned} \int f(g(x))g'(x)dx &= \int \frac{d}{dx}F(g(x))dx \\ &= F(g(x)) + C, \quad \text{pelo TFC, parte 1} \\ &= F(v) + C \\ &= \int F'(v)dv, \quad \text{pelo TFC, parte 1} \\ &= \int f(v)dv \end{aligned}$$

Então, se $v = g(x)$ uma função derivável tem-se

$$\int f(g(x))g'(x)dx = \int f(v)dv.$$



Viu-se que f e g são funções diferenciáveis no intervalo I , então

$$[f(x) \cdot g(x)]' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$$

Integrando a equação fica

$$\begin{aligned} \int [f(x) \cdot g(x)]' &= \int [f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)], \quad \text{pelo TFC, e a Prop. 1} \\ H(x) &= \int f'(x) \cdot g(x) + \int f(x) \cdot g'(x) \end{aligned}$$

onde H é uma primitiva de $[f(x) \cdot g(x)]'$, e portanto arrumando esta equação tem-se

$$\int f'(x) \cdot g(x) = H(x) - \int f(x) \cdot g'(x) \quad (10)$$

Então, a Fórmula 10 é um método de integração denominado de *integração por partes*.

Além desses métodos/técnicas de integração aqui apresentados tem ainda o método por *frações parciais*, *integração por substituição trigonométrica*s, que aqui ficará apenas como comentário e que deve ser buscado nas referências disponibilizados pois não faz parte do escopo deste texto fazer e trazer todos os métodos do cálculo integral.

3.3.5 Aplicações de Integrais

Aqui será explorado algumas aplicações da integral definida, utilizando-as para calcular áreas entre curvas e volumes de sólidos. Se amparando no cálculo de integrais e na utilização do Teorema Fundamental do Cálculo.

Áreas entre curvas

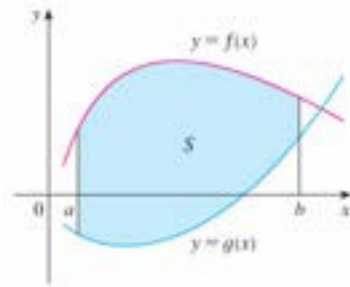
Considere uma região entre curvas, veja a Figura 3.14. Que se encontra exatamente entre as curvas $f(x)$ e $g(x)$ e entre as retas verticais $x = a$ e $x = b$, onde f e g são funções contínuas e $f(x) \geq g(x)$ para todo $x \in [a, b]$.

Dessa maneira de se pensar formaliza o conceito de áreas entre curvas

Definição 4. *Áreas entre curvas* A área da região limitadas pelas curvas $f(x)$ e $g(x)$, e pelas retas verticais $x = a$ e $x = b$, sendo que f e g são funções contínuas e $f(x) \geq g(x)$ para todo $x \in [a, b]$, temos

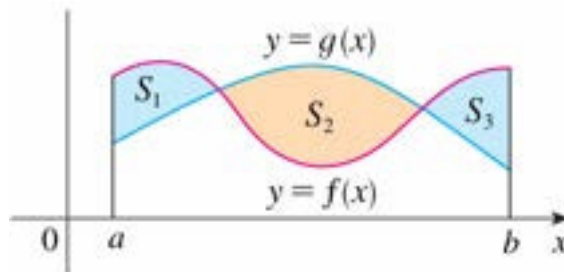
$$A = \int_a^b f(x)dx - \int_a^b g(x)dx$$

Observe que para o caso especial em que $g(x) = 0$, basta calcular a área abaixo de f e portanto volta a definição inicial de área.

Figura 3.14 – Área entre curvas

Fonte: (Stewart, 2013, p.382)

Já se as curvas $y = f(x)$ e $y = g(x)$ onde temos que $f(x) \geq g(x)$ para alguns valores de x assim como $g(x) \geq f(x)$ para alguns outros valores de x , como mostra a Figura 3.15

Figura 3.15 – Área entre curvas

Fonte: (Stewart, 2013, p.384)

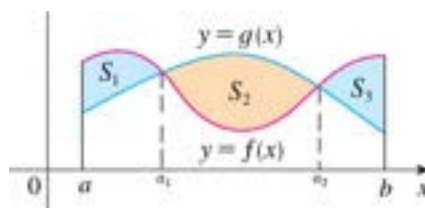
então dividindo a região S em várias regiões, que para este caso tem-se três regiões que consequentemente produzirá três áreas, isto é, A_1 , A_2 e A_3 associada respectivamente as regiões S_1 , S_2 e S_3 . E assim a área da região é $A = A_1 + A_2 + A_3$ que vai de a até b . Uma vez que,

$$|f(x) - g(x)| = \begin{cases} f(x) - g(x) & \text{onde } f(x) \geq g(x) \\ g(x) - f(x) & \text{onde } g(x) \geq f(x) \end{cases}$$

tem-se a seguinte expressão

$$A = \int_a^b |f(x) - g(x)| dx$$

Agora note que S_1 está compreendida entre $x = a$ e $x = a_1$, S_2 entre $x = a_1$ e $x = a_2$ e S_3 entre $x = a_2$ e $x = b$, veja a Figura 3.16

Figura 3.16 – Área entre curvas

Fonte: adaptada, (Stewart, 2013, p.384)

assim sua expressão é dada por

$$\begin{aligned} A &= A_1 + A_2 + A_3 \\ &= \int_a^{a_1} [f(x) - g(x)]dx + \int_{a_1}^{a_2} [g(x) - f(x)]dx + \int_{a_2}^b [f(x) - g(x)]dx. \end{aligned}$$

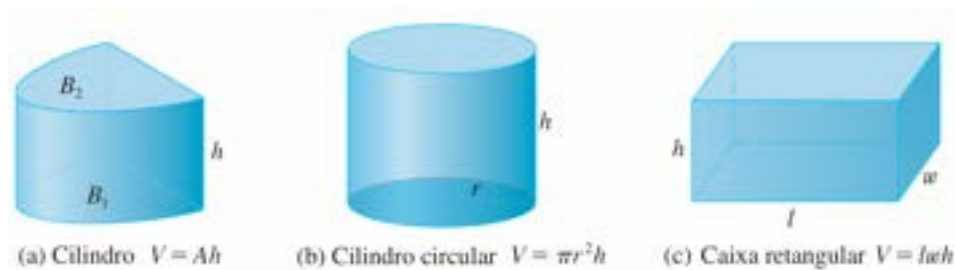
Aqui foi utilizado as propriedades da subdivisão do intervalo de integração.

Volumes

Na busca de calcular o volume de um sólido, depara-se com o mesmo problema encontrado no cálculo de área, tem-se uma ideia intuitiva do que significa o volume, Stewart (2013). Tome aqui um sólido simples que será iniciado com o cilindro, mas precisamente um *cilindro reto*. Veja a Figura 3.17 em que (a) é um cilindro delimitado pelas regiões planas, paralelas e congruentes sendo elas B_1 e B_2 , que são chamadas de base. O cilindro é formado por todos os segmentos de reta perpendiculares à base unindo B_1 a B_2 , suponha que a área da base é A e a distância de B_1 a B_2 , isto é, a altura do cilindro seja h , define-se que seu volume é dado por

$$V = A \cdot h.$$

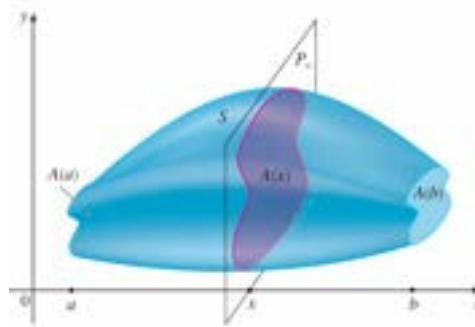
Figura 3.17 – Sólidos simples ideia intuitiva



Fonte: (Stewart, 2013, p.389)

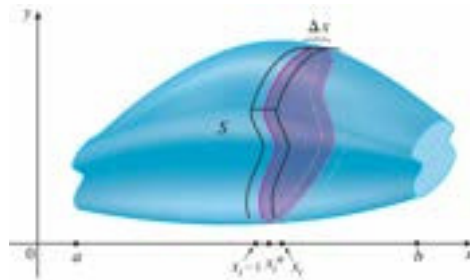
Em particular, como em (b) e (c), na Figura 3.17 tem-se respectivamente um cilindro circular em que sua base é um círculo de raio r e consequentemente o seu volume é $V = \pi \cdot r^2 \cdot h$, assim como se sua base fosse um retângulo de dimensões l (comprimento) e w (largura), então cilindro na verdade seria um paralelepípedo retangular que possui um volume dado por $V = l \cdot w \cdot h$.

Agora tome um sólido que não é cilindro, primeiro cortando/seccionando o sólido por um plano P_x perpendicular ao eixo x , como mostra a Figura 3.18, e que produzirá uma área $A(x)$, chamada de área da seção transversal.

Figura 3.18 – Sólido seccionado por um plano

Fonte: (Stewart, 2013, p.389)

E assim estima-se o seu volume produzindo cilindros extremamente finos, assim como no cálculo de áreas que faz-se aproximações sucessivas por retângulo aqui será feito por meio de cilindros. Então tomando uma partição $\mathcal{P}$ do intervalo $[a, b]$ de modo que as amplitudes de cada subintervalo sejam iguais a Δx , e que para cada ponto da partição, isto é, $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ seccione o sólido por um plano perpendicular ao eixo x que passe por $x_0, x_1, \dots, x_n$ ou seja, os planos são respectivamente $P_{x_0}, P_{x_1}, \dots, P_{x_n}$ que em cada plano seccionará uma região do sólido que produz uma área da seção que é associada a seu respectivo ponto, isto é, para P_{x_i} com $i = 1, 2, \dots, n$ tem sua área $A(x_i)$, como será tomada fatias muitos finas e se utilizando da Definição 3 entre o intervalo x_{i-1} e x_i tomando um x_i^* em que produzirá a área $A(x_i^*)$ e altura desse cilindro delimitado por $P_{x_{i-1}}$ e P_{x_i} é Δx , como mostra a Figura 3.19.

Figura 3.19 – Volume da secção cilíndrica

Fonte: (Stewart, 2013, p.390)

Daí o volume desse cilindro formado por essas duas seções é $V = A(x_i^*) \cdot \Delta x$ e uma boa aproximação para o volume do sólido é

$$V(S) \approx \sum_{i=1}^n A(x_i^*) \cdot \Delta x$$

e essa aproximação se torna mais eficaz quando faz $n \rightarrow \infty$ e aplicando o limite o que a conhece-se como o limite das somas de *Riemann*, e define-se que o volume do sólido é dado pela seguinte definição

Definição 5. (*Volumes por seções transversais*) O **volume** de um sólido de área de seção transversal integrável $A(x)$ de modo que o sólido está compreendido de a até b , é

$$V = \int_a^b A(x) dx.$$

Note que a área da seção transversal é produzida pelo ponto x_k com $k = 1, 2, \dots, n$, e o volume da seção é calculado pelo sólido produzido pelo subintervalo $[x_{K-1}, x_k]$.

O sólido obtido como a revolução de um região plana em torno de um eixo de rotação em seu plano é chamado de **sólido de revolução**, e para esse tipo de sólido tem o *método dos discos* para o cálculo do seu volumes assim como também para sólidos mais gerais possui o *método das cascas cilíndricas*. De onde ficará apenas como comentário acerca desses métodos enfatizando que podem ser encontrados nas referências.

4 PROPORCIONALIDADE

Uma noção difundida há milênios e a mais abrangente tendo suas raízes na cultura de todos os povos com seu uso universal, Lima et al. (2016b). A proporcionalidade tem seu uso na sociedade brasileira, onde é tratada no texto *Aritmética Progressiva* de Antonio Trajano com sua primeira edição em 1883.

Este capítulo objetiva trazer um apanhado à contextualização histórica de forma sucinta, o princípio à proporcionalidade e a demonstração do Teorema Fundamental da Proporcionalidade e como podemos aplicar ao cálculo de áreas e volumes, tendo sua base teórica em artigos/dissertações como (Amaral et al., 2014), (Pereira, 2017) e (Felipe et al., 2021). E também em livros textos como (Lima et al., 2016b), (Lima et al., 2016a), (Neto, 2013), (Dolce; Pompeo, 2013a), (Dolce; Pompeo, 2013b), (Iezzi; Hazzan; Degenszajn, 2013) e (Eves, 2011).

4.1 CONTEXTO HISTÓRICO

Há vestígios de uma teoria bastante antiga como se pode verificar em Eves (2011) que a proporção já era tratado desde os antigos egípcios por volta do século *XVII a.C.*

A proporcionalidade está imbuída com tarefas humanas, tendo o seu mais célebre e antigo exemplo que é o **Papiro de Rhind**, sendo um dos materiais mais conhecidos e antigos da matemática, Felipe et al. (2021).

1600 *a.C.* Essa é a data aproximada do papiro de Rhind (ou Ahmes) um texto matemático na forma de manual prático que contém 85 problemas copiados em escrita hierática pelo escriba Ahmes de um trabalho mais antigo. (Eves, 2011, p.69)

Neste papiro muito antigo que reúne 85 problemas de matemática nos quais estão envolvidos em diversas áreas entre elas como a geometria, economia básica, proporcionalidade, aritmética além de muitos outros temas que eram relevantes a sociedade egípcia da época, Felipe et al. (2021).

Este papiro que encontra-se quase completo no British Museum em Londres, foi descoberto pelo arqueólogo escocês *Alexander Henry Rhind* (1833 – 1863), em 1858 em uma de suas viagens ao Egito. E a parte central do mesmo encontra-se no Museu do Brooklyn, que cerca de quatro anos depois de Rhind, o arqueólogo americano *Edwin Smith* (1822 – 1902) comprou no Egito pensando em ser um papiro médico, mas quando doado

a Society History the New York em 1932 e analisado por especialistas descobriram sob uma camada fraudulenta a parte que faltava do papiro completando o trabalho de Ahmes.

A sociedade grega antiga priorizava o conhecimento, tendo sido apontada como o berço da civilização ocidental e comumente considerada o símbolo político e cultural do Ocidente, Felipe et al. (2021).

Dentre todos os conhecimentos gregos desenvolvidos naquela época destaca-se a matemática que foi a mais estudada tendo nomes com Euclides, Platão, Arquimede, Tales de Mileto, Pitágoras, Eudoxo entre tantos outros nomes que contribuíram no aprofundamento e na beleza austera da matemática.

Refere-se aqui ao objeto de estudo desse trabalho o ramo da matemática “Geometria” que para a Grécia Antiga, resolver problemas de matemática estava intimamente ligado a resolver problemas geometricamente que então no remetia a pensar em sólidos, figuras planas, segmentos como mostra o Livro de Euclides (2009) o que depende do conhecimento de proporções a qual podemos destacar no Livro V de Euclides (2009) e medidas, o que fez com que o conceito de proporcionalidade fosse também tratado de maneira geométrica, desde a sociedade grega antiga.

Falar de proporção claro que não se pode aqui deixar de mencionar a mais famosa, a *Proporção Áurea* ou *Número de Ouro* que é um número irracional (1,61803...) que atualmente é representado pela letra grega ϕ (lê-se: “fi”) a que se deve a homenagem ao famoso artista e escultor *Phídeas* que viveu por volta do século *Va.C* na Grécia Antiga. Essa proporção é também utilizada em Euclides (2009) como média e extrema razão, além de ser encontrado também na sequência de Fibonacci, onde dividindo um termo da sequência pelo seu anterior cada vez mais se aproxima do número de ouro, a qual ϕ é utilizado até hoje na arte que é tido como uma beleza divina e podem ser encontradas em obras como “Monalisa” e “Homem Vitruviano” de Leonardo da Vinci (1452 – 1519).

4.2 TEORIA DAS PROPORÇÕES

Segundo Lima et al. (2016b) a proporcionalidade é um conceito difundido universalmente desde os milênios. De onde nota-se que numa consulta a um compêndio antigo, mas muito bem conceituado trata-se de um texto com mais longa utilização no Brasil. Com sua primeira edição em 1883 com o célebre título *Aritmética Progressiva* do autor *Antonio Trajano* de onde verificou em circulação até a década de 60, assim de Trajano decorre a seguinte definição

Diz-se que duas grandezas são proporcionais quando elas se correspondem

de tal modo que, multiplicando-se uma quantidade de uma delas por um número, a quantidade correspondente da outra fica multiplicada ou dividida pelo mesmo número. No primeiro caso, a proporcionalidade se chama direta e, no segundo, inversa; as grandezas se dizem diretamente proporcionais ou inversamente proporcionais. (Lima et al., 2016b, p. 99)

Dessa forma substituindo as grandezas de Trajano como descrito em (Lima et al., 2016b, p. 99), tome suas medidas sendo números reais, assim poderá traduzir para linguagem atual, da seguinte maneira.

Uma **proporcionalidade** é uma função $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que para quaisquer números reais α, x tem-se $g(\alpha \cdot x) = \alpha \cdot g(x)$ (proporcionalidade direta) ou $g(\alpha \cdot x) = \frac{g(x)}{\alpha}$, se $\alpha \neq 0$ (proporcionalidade inversa).

Para esta nova versão, os números reais y e x são grandezas e a correspondência entre elas é a função $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $y = g(x)$.

Nota-se que decorrente da tradução à linguagem atual tem-se que para todo α, x obtemos $g(\alpha \cdot x) = \alpha \cdot g(x)$, tome agora que $a = g(1)$, daí podemos ter $g(\alpha) = g(\alpha \cdot 1) = \alpha \cdot g(1) = \alpha \cdot a$, para todo $\alpha \in \mathbb{R}$. Em uma notação mais usual, temos $g(x) = \alpha \cdot x$, para todo x real.

Da definição dada por Trajano, é equivalente a dizer que x e y são diretamente proporcionais ou que, y é diretamente proporcional a x quando existir a (sendo denotada de constante de proporcionalidade) em que $y = ax$ para todo x . Já para a proporcionalidade inversa, só faz sentido quando ambas forem não nulas, e com isso seu modelo matemático seria uma função $g : \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}^*$ (onde $\mathbb{R}^*$ é definido como o conjunto dos números reais exceto (0) zero), tal que $g(\alpha \cdot x) = \frac{g(x)}{\alpha}$ para $\alpha, x \in \mathbb{R}^*$ quaisquer, como definido que $a = g(1)$ tem-se $g(\alpha) = g(\alpha \cdot 1) = \frac{g(1)}{\alpha} = \frac{a}{\alpha}$ o que pode-se reescrever sem perda de generalidade que $g(x) = \frac{a}{x}$ já que $x \in \mathbb{R}^*$, como sendo a notação mais adequada.

Veja que mesmo depois de argumentar e traduzir a definição antiga à linguagem atual, ainda assim surge uma questão que é como ter a certeza que a correspondência $x \mapsto y$ é uma proporcionalidade, pela definição dada exige que se tenha $g(\alpha \cdot x) = \alpha \cdot g(x)$ para todo α, x real. Em particular, para todo α , é fácil verificar quando for inteiro. Mas e se α for racional? Ou então irracional? Felizmente basta verificar que $g(nx) = ng(x)$ para $x \in \mathbb{R}$ e $n \in \mathbb{Z}$, desde que se tenha g uma função sempre crescente ou decrescente para todo domínio de g , isto é, diz que g é monótona.

O teorema a seguir é o fundamento para determinar se duas grandezas são propor-

cionais.

Teorema 6. (*Teorema Fundamental da Proporcionalidade*) Seja $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função crescente. As seguintes afirmações são equivalentes:

- (1) $g(nx) = ng(x)$, para todo $n \in \mathbb{Z}$ e $x \in \mathbb{R}$.
- (2) Assumindo $a = g(1)$, tem-se $g(x) = ax$ para todo $x \in \mathbb{R}$.
- (3) $g(x+y) = g(x) + g(y)$ para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}$.

Demonstração: O roteiro dessa demonstração irá se utilizar o resultado da lógica de onde basta provar as seguintes implicações:

$$(1) \Rightarrow (2) \quad (i)$$

$$(2) \Rightarrow (3) \quad (ii)$$

$$(3) \Rightarrow (1) \quad (iii)$$

De (i) e (ii) por transitividade tem-se que $(1) \Rightarrow (3)$ e juntamente com (iii) utilizando mais uma vez a transitividade concluí-se que $(1) \Leftrightarrow (3)$. De modo análogo tem-se que de (iii) e (i) tem-se $(3) \Rightarrow (2)$ e juntamente com (ii) concluí-se $(2) \Leftrightarrow (3)$. Assim também decorre que de (ii) e (iii) tem-se que $(2) \Rightarrow (1)$ e juntamente com (i) concluí-se que $(1) \Leftrightarrow (2)$. Portanto, $(1) \Leftrightarrow (2) \Leftrightarrow (3)$, isto é, as afirmações (1), (2) e (3) são equivalentes. Restando provar apenas (i), (ii) e (iii).

Assim provando (i), isto é, pretende-se mostrar que para todo número real pode escrever como produto da constante de proporcionalidade que para este caso é $a = g(1)$ pelo número real. Para isso divide-se em três casos partindo da hipótese (1) e concluindo a tese (2), onde tomaremos $n \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{Q}$ e $n \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$:

- **Inteiro:** $n \in \mathbb{Z}$

Tem-se que de (1)

$$\begin{aligned} g(n) &= g(n \cdot 1), \text{ onde } n \in \mathbb{Z} \text{ e } 1 \in \mathbb{R} \text{ de (i)} \\ &= n \cdot g(1), \text{ já de (ii) tem que } g(1) = a \\ &= n \cdot a, \end{aligned}$$

ou seja para $n \in \mathbb{Z}$, $(1) \Rightarrow (2)$.

• **Racional:** $n \in \mathbb{Q}$

Tem que n sendo racional pode-se escrever como uma fração de dois inteiros desde o que o denominador seja diferente de zero, ou seja, $n = \frac{p}{q}$ com $p, q \in \mathbb{Z}$ e $q \neq 0$. Daí, partindo de (i) acarreta em que $g(n \cdot x) = n \cdot g(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$. De fato, $n = \frac{p}{q} \Rightarrow q \cdot n = p$ de onde $n \in \mathbb{Q}$ e $p, q \in \mathbb{Z}$, assim fazendo o processo inverso em (i) já que há uma igualdade fica:

$$\begin{aligned}
 q \cdot g(n) &= g(q \cdot n), \text{ já que } n \in \mathbb{Q} \Rightarrow n \in \mathbb{R} \text{ e } q \in \mathbb{Z} \text{ logo cumpre (i)} \\
 &= g\left(q \cdot \frac{p}{q}\right), \text{ mas } n = \frac{p}{q} \\
 &= g(p), \text{ pode-se escrever } p = p \cdot 1 \text{ onde } p \in \mathbb{Z} \text{ e } 1 \in \mathbb{R} \\
 &= g(p \cdot 1), \text{ como } p \in \mathbb{Z} \text{ e } 1 \in \mathbb{R} \text{ cumpre (i)} \\
 &= p \cdot g(1), \text{ daí de (ii) } g(1) = a \\
 &= p \cdot a
 \end{aligned}$$

o que acarreta da última igualdade que na divisão por q , tem-se

$$g(n) = a \cdot \frac{p}{q} = a \cdot n \quad \forall n \in \mathbb{Q}$$

Com essa conclusão, para todo $n \in \mathbb{Q}$ então $(1) \Rightarrow (2)$.

• **Irracional:** $n \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$

Antes de provar para este item prova-se um resultado facilmente em decorrências de provas anteriores. Sendo $a = g(1)$. E como $g(0) = g(0 \cdot 0) = 0 \cdot g(0) = 0$ e da monotocidade de g então como $1 > 0$ implica em $g(1) > g(0)$, assim $a > 0$, portanto a é positivo.

Agora vai ser mostrado que para todo $n \in \mathbb{R}$, vale $g(n) = an$. Suponha que existe algum $n \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$, isto é, n é um número irracional de modo que $g(n) \neq an$, dessa forma tem que

$$\forall n \begin{cases} g(n) > an & \text{(I)} \\ \text{ou} \\ g(n) < an & \text{(II)} \end{cases}$$

De (I), tem-se que a desigualdade pode ser reescrita já que $a > 0$, não inverte a desigualdade

$$\begin{aligned}
 \frac{g(n)}{a} &> n, \quad \text{mas pela densidade de } \mathbb{Q} \text{ em } \mathbb{R}, \text{ sempre existe } r \in \left[n, \frac{g(n)}{a}\right] \text{ t.q.} \\
 \frac{g(n)}{a} &> r > n, \text{ mas } a > 0 \text{ e } r \in \mathbb{Q} \\
 g(n) &> ar > an, \text{ mas } ar = g(r).
 \end{aligned}$$

Portanto $g(r) < g(n)$ o que é um absurdo pela monotocidade de g já que $r > n$.

De (II), tem-se que a desigualdade pode ser reescrita já que $a > 0$, não inverte a desigualdade

$$\begin{aligned}\frac{g(n)}{a} &< n \quad , \text{ mas pela densidade de } \mathbb{Q} \text{ em } \mathbb{R}, \text{ sempre existe } r_1 \in \left[\frac{g(n)}{a}, n \right] \text{ t.q.} \\ \frac{g(n)}{a} &< r_1 < n, \text{ mas } a > 0 \text{ e } r_1 \in \mathbb{Q} \\ g(n) &< ar_1 < an, \text{ mas } ar_1 = g(r_1).\end{aligned}$$

Portanto $g(r_1) > g(n)$ o que é um absurdo pela monotocidade de g já que $r_1 < n$.

Então contradiz a nossa hipótese e pela tricotomia só pode ter $g(n) = an$. Então, para todo $n \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$, tem-se (1) $\Rightarrow$ (2).

Nota-se que aqui que foi utilizado n como sendo a variável mas que sem perda de generalidade pode-se voltar a notação mais usual e teria que para todo $x \in \mathbb{R}$, tem-se $g(x) = ax$.

E com essas conclusões acima descritas, completa-se a demonstração de que (1) $\Rightarrow$ (2), em todos os possíveis casos.

A fim de demonstrar (2) $\Rightarrow$ (3), isto é, assumindo que $a = g(1)$ e que para todo $x \in \mathbb{R}$, tem-se $g(x) = ax$, provará que para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}$ tem-se $g(x+y) = g(x) + g(y)$, nota-se que $g(x) = ax$ e $g(y) = ay$, e ainda como os reais é fechado quanto a adição e multiplicação então $x+y \in \mathbb{R}$ e $(x+y) \cdot 1 \in \mathbb{R}$, portanto

$$\begin{aligned}g(x+y) &= g((x+y) \cdot 1), \text{ por (i) tem-se} \\ &= (x+y) \cdot g(1), \text{ mas por (ii) } a = g(1) \\ &= (x+y) \cdot a, \text{ pela distributividade e comutatividades dos reais} \\ &= ax + ay, \text{ mas daí } ax = g(x) \text{ e } ay = g(y) \text{ por (ii)} \\ &= g(x) + g(y)\end{aligned}$$

o que concluí-se a implicação de (2) $\Rightarrow$ (3).

A fim de demonstrar (3) $\Rightarrow$ (1), isto é, assumindo que para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}$ tem-se $g(x+y) = g(x) + g(y)$, de modo a concluir que ao somar n termos iguais a x o valor de g ficará multiplicada por n , ou seja, $g(nx) = ng(x)$, para isso tome a soma de n termos iguais a x , ou seja, $\underbrace{x+x+\dots+x}_{n \text{ termos}}$ e como os reais é fechado quanto a adição então

$n \cdot x = x + x + \dots + x \in \mathbb{R}$, daí

$$\begin{aligned}
 g(nx) &= g(x + x + \dots + x), \text{ fazendo } y = \underbrace{x + \dots + x}_{(n-1)} \\
 &= g(x + [x + \dots + x]), \text{ por (iii)} \\
 &= g(x) + g(x + \dots + x), \text{ repetindo o processo } (n-1) \text{ vezes tem} \\
 &= g(x) + g(x) + \dots + g(x), \text{ tem-se } n \text{ termos de } g(x) \text{ o que temo} \\
 &= n \cdot g(x), \quad \forall n \geq 0.
 \end{aligned}$$

Agora mostra-se que vale até mesmo quando $n < 0$.

Para isso é necessário, saber e já verificado que $0 = g(0)$, mas pode-se escrever $0 = x + (-x)$, então

$$0 = g(0) = g(x + (-x)) = g(x) + g(-x)$$

mas,

$$0 = g(x) + g(-x) \Rightarrow \begin{cases} g(x) = -g(-x) \\ \text{ou} \\ g(-x) = -g(x) \end{cases}$$

daí, aplicando para um múltiplo de x tem-se

$$\begin{aligned}
 g(-nx) &= -g(nx), \text{ de (i) tem-se} \\
 &= -ng(x)
 \end{aligned}$$

o que concluí-se a implicação (3) $\Rightarrow$ (1).

Então, as afirmativas (1), (2) e (3) são equivalente.

■

Deve-se notar que a função g do Teorema 6 foi uma função sempre crescente, mas queremos deixar claro aqui que também vale o resultado mesmo se g for um função sempre decrescente, ou seja, a função necessita ser monótona, apenas teríamos $a = g(1) < 0$ o que seria um resultado análogo.

Grandezas diretamente ou inversamente proporcional à várias outras

Para verificar esse fato, se compara várias grandezas ao mesmo tempo para define-se uma função $g : \mathbb{R}^\infty \rightarrow \mathbb{R}$ monótona (sempre crescente ou decrescente), tal que $(x_1, x_2, x_3, \dots) \mapsto y$ ou melhor

$$g(x_1, x_2, x_3, \dots) = y.$$

Então diz-se que y é diretamente proporcional a x_1 , x_2 ou a variável qualquer quando

$$\begin{aligned}g(k_1 \cdot x_1, x_2, x_3, \dots) &= k_1 \cdot g(x_1, x_2, x_3, \dots) = k_1 \cdot y \\g(x_1, k_2 \cdot x_2, x_3, \dots) &= k_2 \cdot g(x_1, x_2, x_3, \dots) = k_2 \cdot y\end{aligned}$$

note que comparando cada variável independentemente, ou seja, só pode ser dita diretamente proporcional quando ao multiplicar a variável por um número arbitrário e fixar as outras variáveis a função fica multiplicada por esse número.

De maneira análoga, diz-se que y é inversamente proporcional a x_1 , x_2 ou a uma variável qualquer quando

$$\begin{aligned}g(k_1 \cdot x_1, x_2, x_3, \dots) &= \frac{g(x_1, x_2, x_3, \dots)}{k_1} = \frac{y}{k_1} \\g(x_1, k_2 \cdot x_2, x_3, \dots) &= \frac{g(x_1, x_2, x_3, \dots)}{k_2} = \frac{y}{k_2}\end{aligned}$$

percebe-se que na inversamente proporcional quando multiplicar a variável por número arbitrário a função fica dividida por ele, como foi definido com Trajano.

Exemplo 2. *Uma empresa da construção civil com 6 pedreiros trabalhando 6h por dia, em uma construção produz uma parede com 1500m de comprimento por 1,8m de altura em 5 dias. Em quantos dias a empresa com apenas 3 pedreiros, trabalhando 10h por dia a empresa terá uma produção de 4500m de comprimento por 1,5m de altura?*

Solução: Veja que nesse problema terá várias grandezas (variáveis) às quais já irá renomear, onde pedreiro (p), horas por dia (t), comprimento da parede (c), altura da parede (h) e quantidade de dias (d). Perceba que deseja saber a quantidade de dias para uma determinada construção, e ainda note que trabalha-se com 5 variáveis portando tem uma função de quatro variáveis, podendo ser escrita como segue abaixo

$$d = g(p, t, c, h).$$

E agora análise cada variável e verifique se possui alguma proporcionalidade seja direta ou inversa e aplicando o Teorema 6. Assim supondo que qualquer pedreiro mantém a produção constante e que a parede é uniforme. Desse modo se aumentar p , tem que os dias diminui, ou seja, dobrando ou triplicando p a quantidade de dias cai pela metade ou terça parte, de forma análoga ao analisar os dias com as horas trabalhadas por dia acontece a mesma coisa, ou seja, d é inversamente proporcional a p e t . Agora se aumentar o comprimento da parede e mantendo as outras grandezas nota-se que o tempo em dias aumenta assim como de maneira análoga acontece com a altura da parede, logo conclui-se

que d é diretamente proporcional c e h . Portanto, ponto que $g(1, 1, 1, 1) = k$ com $k \in \mathbb{R}$, tem-se

$$\begin{aligned} d &= g(p, t, c, h), \text{ pode reescrever cada grandeza assim} \\ &= g(p \cdot 1, t \cdot 1, c \cdot 1, h \cdot 1), \text{ mas } d \text{ é i.p à } p \text{ e } t \\ &= \frac{1}{p} \cdot \frac{1}{t} \cdot g(1, 1, c \cdot 1, h \cdot 1), \text{ mas } d \text{ é d.p à } c \text{ e } h \\ &= \frac{1}{p} \cdot \frac{1}{t} \cdot c \cdot h \cdot g(1, 1, 1, 1), \text{ mas } g(1, 1, 1, 1) = k \\ &= \frac{c \cdot h}{p \cdot t} \cdot k. \end{aligned}$$

Assim da primeira parte temos que $p = 6$, $t = 6$, $c = 1500$, $h = 1,8$ e $d = 5$ queremos determinar $k = ?$, basta substituir na igualdade acima

$$5 = \frac{1500 \cdot 1,8}{6 \cdot 6} \cdot k \Rightarrow k = \frac{5 \cdot 6 \cdot 6}{1500 \cdot 1,8}.$$

E para a segunda parte tem que $c = 4500$, $h = 1,5$, $p = 3$, $t = 10$ e anteriormente encontrou que $k = \frac{5 \cdot 6 \cdot 6}{1500 \cdot 1,8}$, logo quer determinar $d = ?$, substituindo na igualdade tem-se

$$d = \frac{5 \cdot 6 \cdot 6}{1500 \cdot 1,8} \cdot \frac{4500 \cdot 1,5}{3 \cdot 10} \Rightarrow d = 15$$

Portanto, a empresa terminará a construção em 15 dias.

4.2.1 Áreas

O Teorema 6 em algumas situações podem ser aplicados a outras grandezas como a exemplo à áreas, que aqui define-se como uma função de duas variáveis que vai em um número real positivo e a essas variáveis chamará de dimensões e que cumpre as condições necessárias do Teorema 6, isto é, $A : \mathbb{R}_+^{*2} \rightarrow \mathbb{R}_+^*$ é a função área e que determina-se $A(1, 1) = 1 u.a$, de onde $u.a$ quer dizer *unidade de área*.

Daqui em diante usará a notação $A(1, 1) = 1 u.a$ para representar a área de um quadrado de lado 1 que é igual a $1 u.a$. E lembre aqui que na medição de áreas se possui uma unidade de comprimento para medir as dimensões, quando calculadas a área a unidade ficará ao quadrado, ou seja, se medir as dimensões com m ou cm , quando calculadas suas áreas fica m^2 ou cm^2 .

4.2.2 Volumes

Assim como para áreas o volume também pode ser uma das situações em que o Teorema 6 pode ser aplicados, o volume é “a quantidade de espaço”, aqui define-se que a função volume terá três variáveis e que resultará em um valor real positivo, ou

seja, $V : \mathbb{R}_+^{*3} \rightarrow \mathbb{R}_+^*$ é a função volume que satisfaz o Teorema 6 e que determina-se $V(1,1,1) = 1u.v$, de onde $u.v$ quer dizer *unidade de volume*.

Daqui em diante usará a notação $V(1,1,1) = 1u.v$ para representar volume de um cubo de aresta 1 que é igual a $1u.v$. Perceba que acontece parecidamente com área assim se essas dimensões tiver uma unidade de comprimento para medí-las, quando calculado o volume a unidade ficará ao cubo, ou seja, se medir as dimensões com m ou cm , quando calculadas seus volumes ficará m^3 ou cm^3 .

5 APLICAÇÕES

Este capítulo tem como objetivo cerne trazer os resultados de algumas áreas de figuras planas e um número reduzido de volumes dos sólidos geométricos. Aos quais buscará suas respectivas fórmulas por meio do *Método da Exaustão*, *Cálculo Integral* e do *Teorema Fundamental da Proporcionalidade (TFP)*, tendo sua base teórica em todos os artigos/dissertações e livros textos prévios mencionados em capítulos anteriores, trazendo aqui a evolução e comparação das ferramentas matemáticas.

ÁREAS

Em consonância com o Dolce e Pompeo (2013b), a área está associada a um números real positivo. Que em específico nesta seção calculará apenas áreas de figuras planas e convexa, a qual parte-se do pressuposto que o leitor esteja familiarizado com termos e características de polígonos.

A partir dessa parte será colocado em prática o *Método da Exaustão*, *Cálculo Integral* e o *Teorema Fundamental da Proporcionalidade* de onde será aplicado as três possibilidades para o cálculo de áreas.

Problema 1. *Demonstre que a área de um retângulo é o produto de sua base pela sua altura, pelos seguintes métodos:*

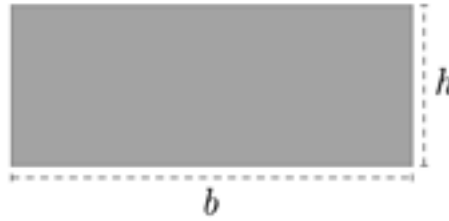
- a) *Método da Exaustão.*
- b) *Cálculo integral.*
- c) *Teorema Fundamental da Proporcionalidade.*

Solução: Como será uma resolução por três métodos diferentes cada um terá sua particularidade.

- a) *Método da Exaustão*

Para este, tome que a área do quadrado de lado 1, é $1u.a$ e verifique quantos quadradinhos cabem no interior do retângulo a qual defina que seus lados medem b (e que será chamada de base) e h (e que será chamada de altura), veja a Figura 5.1. E que será dividida em dois casos, em que b e h sejam comensuráveis e incomensuráveis.

Figura 5.1 – Retângulo de lados b e h



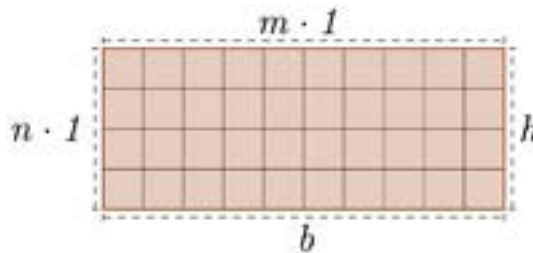
Fonte: Próprio autor

i) b e h são comensuráveis.

Sendo o quadrado unitário a unidade de medida diz-se que b e h são comensuráveis com 1 e que o lado do quadrado unitário cabe m vezes sobre b e n vezes sobre h , o que acarreta em que o retângulo possui m quadrado sobre b , isto é $m \cdot 1 = b$ e como em h cabem n quadrados, ou seja, $n \cdot 1 = h$, veja a Figura 5.2. Daí, tomando como base b e empilhando temos que formará h linhas com b quadrados, o que teremos $b \cdot h$ quadrados. E portanto,

$$A_R = b \cdot h, \quad \text{com } b, h \in \mathbb{Z}_+^*$$

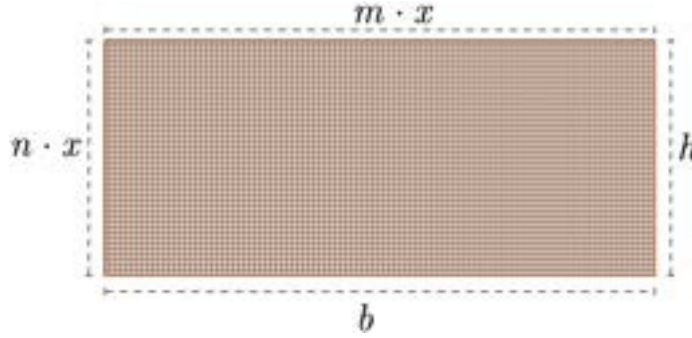
Figura 5.2 – Retângulo de lados $b, h \in \mathbb{Z}_+^*$



Fonte: Próprio autor

Agora seja tomado um retângulo em que seus lados medem b e h mas que não existem $m, n \in \mathbb{Z}_+^*$ tal que $m \cdot 1 = b$ e $n \cdot 1 = h$. Daí assim como foi feito no Capítulo 2 do *Método da Exaustão*, divide-se o quadrado unitário em quadrados de lado $x = \frac{1}{I}$, ou seja, dividindo o lado do quadrado unitário em I partes. E agora x cabe m vezes sobre b e n vezes sobre h , implicando em que o retângulo possui $m \cdot x$ quantidade de quadrado de lado x sobre o lado b do retângulo original. E $n \cdot x$ sobre o lado h , veja a Figura 5.3. Daí, tomando como base b que cabe $m \cdot x$ quadrados, $b = m \cdot x$ e empilhando linhas com b quadrados, forma $n \cdot x$ linhas com $m \cdot x$ quadrados o que terá $\underbrace{(m \cdot x)}_b \cdot \underbrace{(n \cdot x)}_h$ quadrados. E portanto,

$$A_R = b \cdot h, \quad \text{com } b, h \in \mathbb{Q}_+^*$$

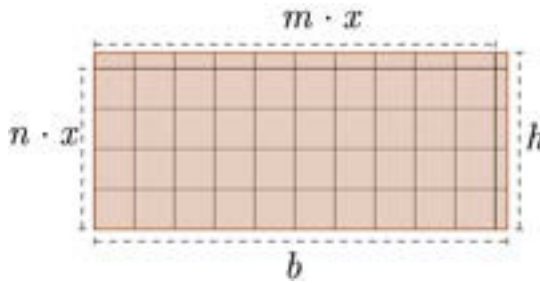
Figura 5.3 – Retângulo de lados $b, h \in \mathbb{Q}_+^*$ 

Fonte: Próprio autor

ii) b e h são incomensuráveis.

Com os lados do retângulo sendo b, h mas que dessa vez não existem $m, n \in \mathbb{Z}_+^*$ tal que dividindo o quadrado unitário em I partes, ou seja, o lado de cada quadradinho vale $x = \frac{1}{I}$, esse quadradinho não caberá um número inteiro de vezes sobre b e nem sobre h . Daí, tome m, n tal que $m \cdot x < b$ e $(m+1) \cdot x > b$ assim como $n \cdot x < h$ e $(n+1) \cdot x > h$, veja a Figura 5.4, logo em decorrência de casos anteriores sabe-se que $(m \cdot x) \cdot (n \cdot x)$ quadradinhos é menor que a área do retângulo (A_R).

$$(m \cdot x) \cdot (n \cdot x) < A_R \quad (\text{I})$$

Figura 5.4 – Retângulo de lados $b, h \in \mathbb{R}_+^* - \mathbb{Q}_+^*$ 

Fonte: Próprio autor

E note que se sobre b adicionar um quadradinho de lado x tem-se $b < (m+1) \cdot x$ assim como se adicionar mais um quadradinho sobre h temos $h < (n+1) \cdot x$, assim $[(m+1) \cdot x \cdot (n+1) \cdot x]$ quadradinho é maior que A_R :

$$A_R < (m+1) \cdot x \cdot (n+1) \cdot x \quad (\text{II})$$

Assim de (I) e (II) tem-se

$$\begin{aligned} (m \cdot x) \cdot (n \cdot x) &< A_R < (m+1) \cdot x \cdot (n+1) \cdot x \\ m \cdot n \cdot x^2 &< A_R < (m+1)(n+1)x^2 \end{aligned} \quad (11)$$

E note que $mx < b < (m+1)x$ e $nx < h < (n+1)x$ multiplicando membro a membro essas duas últimas desigualdades não altera a desigualdades já que

está trabalhando com medidas e que sempre são positivas.

$$\begin{aligned} m \cdot x \cdot n \cdot x &< b \cdot h < (m+1)x(n+1)x \\ mn x^2 &< b \cdot h < (m+1)(n+1)x^2 \end{aligned}$$

assim,

$$-(m+1)(n+1)x^2 < -b \cdot h < -mnx^2 \quad (12)$$

somando as desigualdades (11) e (12) membro tem-se

$$[mn - (m+1)(n+1)]x^2 < A_R - b \cdot h < [(m+1)(n+1) - mn]x^2$$

sabe-se que $x = \frac{1}{I}$ implica $x^2 = \frac{1}{I^2}$ além disso tem-se enquanto maior tomar I , isto é, $I \rightarrow \infty$ temos $\frac{1}{I^2} \rightarrow 0$. Então, para I , suficientemente grande, tem-se

$$0 < A_R - b \cdot h < 0$$

o que só pode ser que $A_R - b \cdot h = 0$, o que acarreta em

$$A_R = b \cdot h, \quad \text{com } b, h \in \mathbb{R}_+^* - \mathbb{Q}_+^*$$

Então para quaisquer lados de um retângulo sua área é dada pelo produto da sua base pela sua altura,

$$A_R = b \cdot h, \quad \text{com } b, h \in \mathbb{R}_+^*$$

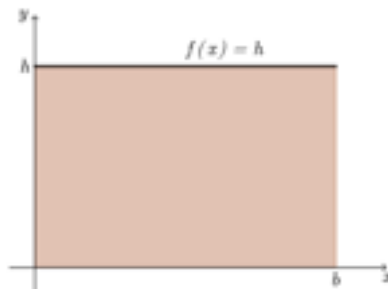
■

b) Cálculo integral

Primeiro defina uma função $f : [0, b] \rightarrow \mathbb{R}$, onde para todo $x \in [0, b]$, é dada pela seguinte lei de formação $f(x) = h$. Daí, tome um retângulo tal que um de seus lados esteja sobre f e sua altura seja a distância entre f e o eixo x , veja a Figura 5.5, assim seja que os seus vértices são $(0, 0)$, $(0, h)$, (b, h) e $(b, 0)$. De modo que $(0, h)$ e (b, h) são pontos de f logo para calcular a área basta integrar f de 0 até b , isto é,

$$A_R = \int_0^b f(x) dx = \int_0^b h dx = hx \Big|_0^b = h(b - 0) = hb$$

Figura 5.5 – Retângulo determinado por $f(x) = h$



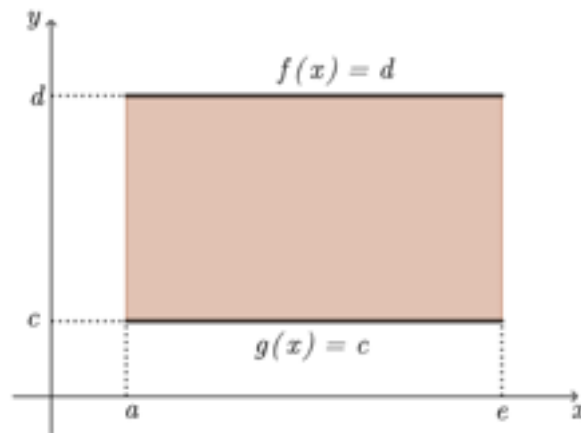
Fonte: Próprio autor

assim a área de um retângulo é o produto da sua base pela sua altura.

Agora se o retângulo não estiver na origem do plano e nenhum de seus lados sobre os eixos, mais sim sobre funções, veja a Figura 5.6. Daí tome duas funções $f, g : [a, e] \rightarrow \mathbb{R}$, onde $f(x) = d$ e $g(x) = c$, para todo $x \in [a, e]$. Daí tomando que os vértices do retângulo são (a, d) e (e, d) são pontos de f , assim como (a, c) e (e, c) são pontos de g , daí como o retângulo está compreendido entre duas funções e para todo $x \in [a, e]$ tem-se $f > g$, logo sua área é a integral da diferença de f e g de a até a e assim,

$$\begin{aligned}
 A_R &= \int_a^e [f(x) - g(x)] dx, && \text{propriedades de integral iv} \\
 &= \int_a^e f(x) dx - \int_a^e g(x) dx, && \text{TFC parte 1} \\
 &= dx \Big|_a^e - cx \Big|_a^e, && \text{TFC parte 2} \\
 &= d(e - a) - c(e - a) \\
 &= (d - c)(e - a)
 \end{aligned}$$

Figura 5.6 – Retângulo determinado por $f(x) - g(x)$



Fonte: Próprio autor

ou seja, o produto de seus lado agora basta tomar $d - c = h$ e $e - a = b$, daí

$$A_R = b \cdot h.$$

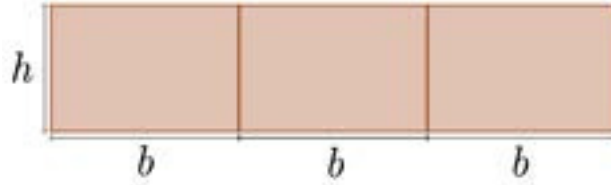
■

c) Teorema Fundamental da Proporcionalidade

Primeiro tome um retângulo cujo seus lados medem b e h , onde denota-se por base e altura respectivamente. E que para seus lados sejam reais positivos, daí o que acontece com área quando dobramos ou triplicamos sua base, veja a Figura 5.7, e notemos que sua área fica multiplicada por 2 quando dobra sua base e multiplicada

por 3 quando triplicamos sua base, assim se multiplicar sua base por um inteiro n sua área fica multiplicada por n , sempre mantendo sua altura.

Figura 5.7 – Retângulo dobrando ou triplicando b



Fonte: Próprio autor

De maneira análoga mantendo sua base e dobrar ou triplicar sua altura, e observemos o que acontece com a área, veja a Figura 5.8, e verificaremos que sua área fica multiplicada por 2 quando dobra sua altura e multiplicada por 3 quando triplica sua altura, assim se multiplicar sua altura por um inteiro n sua área fica multiplicada por n , sempre mantendo sua base.

Figura 5.8 – Retângulo dobrando ou triplicando h



Fonte: Próprio autor

E dessa forma viu que a área é sempre crescente que quando multiplica uma dimensão por n a área fica multiplicada por n , então pelo Teorema Fundamental da Proporcionalidade (TFP) pode-se definir uma função $A : \mathbb{R}_+^{*2} \rightarrow \mathbb{R}_+^*$ a função área e que $A(1,1) = 1u.a$, assim $A_R(b,h)$ é a área do retângulo de base b e altura h , que é dado:

$$\begin{aligned}
 A_R(b,h) &= A(b,h), && \text{como cumpre o TFP pode-se reescrever} \\
 &= A(b \cdot 1, h \cdot 1), && \text{de (1) do TFP aplicado em } b, \text{ tem-se} \\
 &= b \cdot A(1, h \cdot 1), && \text{de (1) do TFP aplicado em } h, \text{ tem-se} \\
 &= b \cdot h \cdot A(1,1), && \text{mas } A(1,1) = 1u.a, \text{ logo} \\
 &= b \cdot h \cdot 1 \\
 &= b \cdot h
 \end{aligned}$$

Então a área do retângulo é o produto de sua base pela sua altura, isto é,

$$A_R(b, h) = b \cdot h \text{ u.a.}, \quad \text{com } b, h \in \mathbb{R}_+^*.$$

■

Dessa forma, concluí-se que pelos três métodos acima citados para quaisquer lados de um retângulo, sua área é dada pelo produto de sua base pela sua altura.

Problema 2. *Mostre que área do quadrado é o seu lado elevado ao expoente dois, pelos seguintes métodos:*

- a) *Método da Exaustão.*
- b) *Cálculo integral.*
- c) *Teorema Fundamental da Proporcionalidade.*

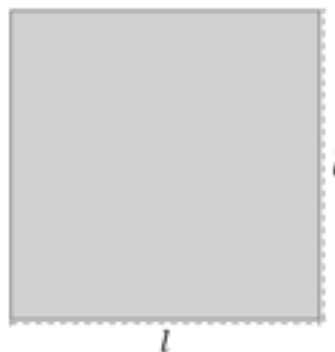
Solução: Nota-se que o quadrado é um caso particular do retângulo, basta tomar os lados do retângulo iguais.

- a) *Método da Exaustão*

Como o quadrado é um caso particular do retângulo, será realizado de maneira sucinta, já que basta tomar $b = h = l$ no Problema 1 (área do retângulo), assim o quadrado será da seguinte maneira, veja a Figura 5.9. E que assim como no caso do retângulo repetindo os mesmo passos encontra-se que, a área do quadrado A_Q é:

$$A_Q = l^2, \quad \text{com } l \in \mathbb{R}_+^*.$$

Figura 5.9 – Quadrado de lado l



Fonte: Próprio autor



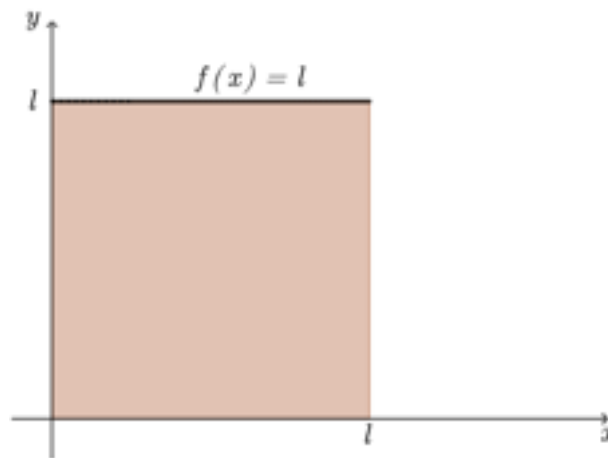
b) *Cálculo integral*

Aqui basta tomar a função do Problema 1, como sendo uma função $f : [0, l] \rightarrow \infty$, dada pela regra $f(x) = l$, veja a Figura 5.10. Dessa forma basta integrar de 0 até l , tomando $b = l$, fica

$$A_Q = \int_0^l f(x) dx = \int_0^l l dx = lx \Big|_0^l = l(l - 0) = l \cdot l = l^2$$

assim, a área de um quadrado é seu lado ao quadrado.

Figura 5.10 – Quadrado de lado l



Fonte: Próprio autor

Se nenhum lado do quadrado estiver sobre os eixos basta tomar $d - c = l = e - a$, redefinindo as funções f, g para que aconteça a igualdade, acarreta em

$$A_Q = l^2, \quad \text{com } l \in \mathbb{R}_+^*.$$



c) *Teorema Fundamental da Proporcionalidade*

Assim como todo quadrado é um retângulo, torna-se o quadrado um caso particular do retângulo em que $b = h = l$, assim têm-se que ocorre a proporcionalidade da mesma maneira e que a área do quadrado de lado l ($A_Q(l, l)$) é

$$\begin{aligned} A_Q(l, l) &= A(l, l), && \text{como cumpre o TFP pode-se reescrever} \\ &= A(l \cdot 1, l \cdot 1), && \text{de (1) do TFP aplicado em } l, \text{ tem-se} \\ &= l \cdot A(1, l \cdot 1), && \text{de (1) do TFP aplicado em } l, \text{ tem-se} \\ &= l \cdot l \cdot A(1, 1), && \text{mas } A(1, 1) = 1 \text{ u.a, logo} \\ &= l \cdot l \cdot 1 \\ &= l \cdot l \\ &= l^2 \end{aligned}$$

Logo, $A_Q(l, l) = l^2 u.a$ com $l \in \mathbb{R}$.

■

Então, de maneira análoga ao do retângulo concluí-se pelos três métodos que a área do quadrado é o seu lado elevado ao expoente dois.

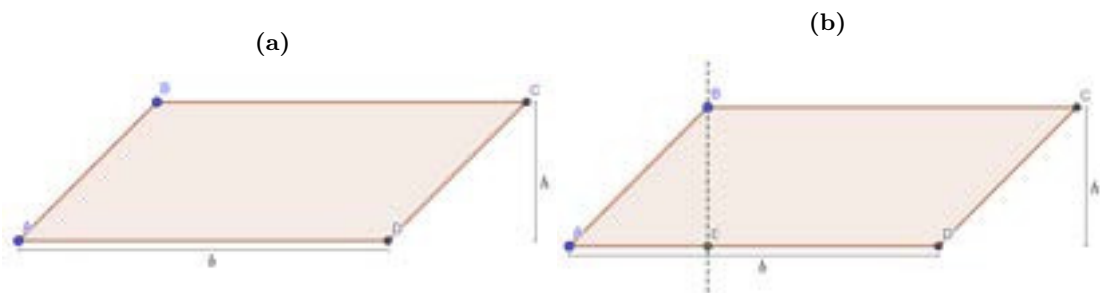
Problema 3. *Expresse que a área do paralelogramo é dado pelo produto de sua base pela sua altura, pelos seguintes métodos:*

- a) *Método da Exaustão.*
- b) *Cálculo integral.*
- c) *Teorema Fundamental da Proporcionalidade.*

Solução: Um paralelogramo é uma figura plana que possui dois pares de lados paralelos e que os lados opostos além de serem paralelos são congruentes.

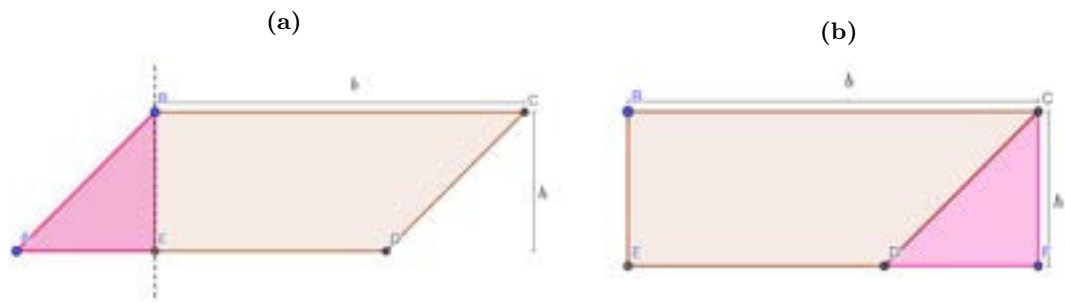
Seja $ABCD$ um paralelogramo de base b e altura h , como mostra a Figura 5.11a, em que $\overline{AD} // \overline{BC}$ e $\overline{AB} // \overline{DC}$ e ainda que $\overline{AD} \equiv \overline{BC}$ e $\overline{AB} \equiv \overline{DC}$. Traçando uma perpendicular a $\overline{AD}$, passando por B e que encontra E sobre $\overline{AD}$, como mostra a Figura 5.11b.

Figura 5.11 – Paralelogramo de base (b) e altura (h)



Fonte: Próprio autor

Daí, têm-se que AEB é um triângulo assim como mostra na Figura 5.12a. Desse modo, recortando e transladando de modo de que $\overline{AB}$ sobreponha $\overline{DC}$ como na Figura 5.12b e dessa translação tem-se o ponto F tal que $\overline{BE} \equiv \overline{CF}$ e que $EBCF$ é um retângulo.

Figura 5.12 – Paralelogramo e reorganização de figuras

Fonte: Próprio autor

Sendo assim, este retângulo tem a mesma base b e altura h do paralelogramo, ver a Figura 5.13.

Figura 5.13 – Paralelogramo como um retângulo

Fonte: Próprio autor

Como o paralelogramo é equidecomponível com o retângulo de mesma base e altura então suas áreas são iguais.

a) Método da Exaustão

Sabendo que a área do paralelogramo (A_P) de base b e altura h é igual a área do retângulo de mesmas dimensões, de maneira análoga ao Problema 1, tem-se

$$A_P = b \cdot h, \quad \text{com } b, h \in \mathbb{R}_+^*.$$

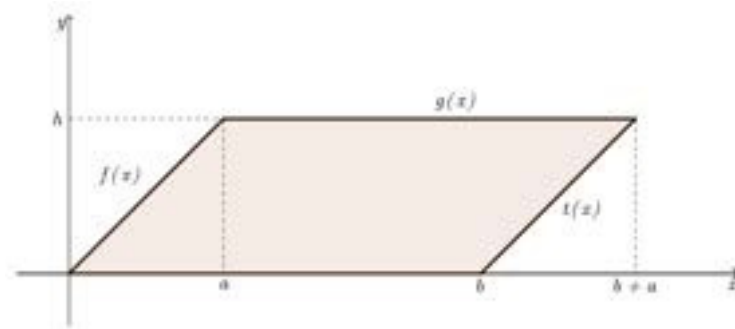
■

b) Cálculo integral

Para a realização da figura plana denominada de paralelogramo será realizada a partir da utilização de funções, ver a Figura 5.14. Neste caso tem-se três funções (f, g, t) tais que $f : [0, a] \rightarrow \mathbb{R}$, $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ e $t : [b, b+a] \rightarrow \mathbb{R}$ que são dadas pelas seguintes leis de formação:

$$f(x) = \frac{h}{a} \cdot x, \quad g(x) = h, \quad \text{e} \quad t(x) = \frac{h}{a} \cdot (x - b).$$

Figura 5.14 – Paralelogramo pelas funções f, g e h



Fonte: Próprio autor

Assim a área do paralelogramo (A_P) é dado pelas integrais

$$\begin{aligned}
 A_P &= \int_0^a f(x) dx + \int_a^b g(x) dx + \int_b^{b+a} [g(x) - t(x)] dx, \text{ pela prop. integrais } iv \\
 &= \int_0^a f(x) dx + \int_a^b g(x) dx + \int_b^{b+a} g(x) dx - \int_b^{b+a} t(x) dx, \text{ pela prop. integrais } v \\
 &= \int_0^a f(x) dx + \int_a^{b+a} g(x) dx - \int_b^{b+a} t(x) dx, \text{ substituindo pela suas regras tem-se} \\
 &= \int_0^a \frac{h}{a} \cdot x dx + \int_a^{b+a} h dx - \int_b^{b+a} \frac{h}{a} \cdot (x - b) dx, \text{ resolvendo} \\
 &= \frac{h}{a} \cdot \frac{x^2}{2} \Big|_0^a + hx \Big|_a^{b+a} - \frac{h}{a} \cdot \left(\frac{x^2}{2} - bx \right) \Big|_b^{b+a}, \text{ pelo TFC parte 2} \\
 &= \frac{h}{a} \cdot \left(\frac{a^2}{2} - \frac{0^2}{2} \right) + h(b+a-a) - \frac{h}{a} \cdot \left(\frac{(b+a)^2}{2} - b(b+a) - \underbrace{\left(\frac{b^2}{2} - b \cdot b \right)}_{-\frac{b^2}{2}} \right) \\
 &= \frac{h}{a} \cdot \frac{a^2}{2} + h \cdot b - \frac{h}{a} \cdot \left(\underbrace{\frac{(b+a)^2}{2} - b(b+a)}_{\frac{(b+a) \cdot (a-b)}{2}} - \left(-\frac{b^2}{2} \right) \right) \\
 &= \frac{h \cdot a^2}{2a} + bh - \frac{h}{a} \cdot \left(\frac{(b+a) \cdot (a-b)}{2} + \frac{b^2}{2} \right) \\
 &= \frac{h \cdot a^2}{2a} + bh - \frac{h}{a} \cdot \left(\frac{(a^2 - b^2)}{2} + \frac{b^2}{2} \right) \\
 &= \frac{h \cdot a^2}{2a} + bh - \frac{h}{a} \cdot \left(\frac{a^2 - \cancel{b^2} + \cancel{b^2}}{2} \right) \\
 &= \frac{\cancel{h \cdot a^2}}{2a} + bh - \frac{\cancel{h \cdot a^2}}{2a} \\
 &= bh
 \end{aligned}$$

Então, $A_P = bh$, para todo $b, h \in \mathbb{R}$.

Observação: Nota-se que o paralelogramo tem a mesma área do retângulo de mesmas dimensões e então caso o paralelogramo não esteja com os lados sobre o eixo podemos fazer de maneira análoga ao Problema 1.

■

c) *Teorema Fundamental da Proporcionalidade*

Observa-se que o paralelogramo de base b e altura h tem a mesma área de um retângulo com as mesmas dimensões, e que ambos cumpre o TFP, basta ir colocando os paralelogramos justapostos um ao lado do outro que assim como o retângulo ocorre em que a dimensão está multiplicada por $n \in \mathbb{N}$ a sua área fica multiplicada por n , assim

$$A_P(b, h) = A_R(b, h) = bh, \quad \text{com } b, h \in \mathbb{R}_+^*$$

■

Dessa maneira, a área do paralelogramo é o produto de sua base pela sua altura.

Problema 4. *Demonstre que a área do triângulo de base (b) e altura (h) é o produto da metade de sua altura pela sua base, pelos seguintes métodos:*

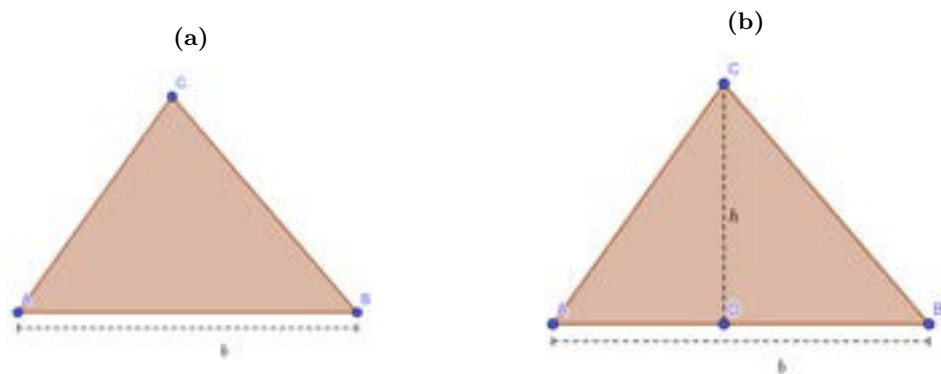
a) *Método da Exaustão.*

b) *Cálculo integral.*

c) *Teorema Fundamental da Proporcionalidade.*

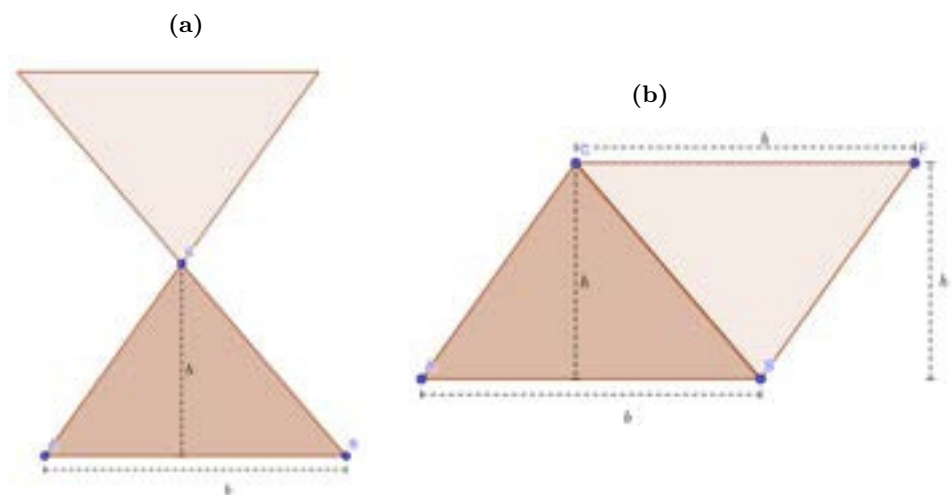
Solução: Um triângulo é uma figura plana que possui três lados dos quais escolhe-se um para a base e traça-se a altura relativa a esse lado, que é uma perpendicular a base e liga ao vértice oposto da base.

Seja ABC um triângulo e tome como base $\overline{AB} = b$, ver a Figura 5.15a, e traçando a altura relativa a $\overline{AB}$, que é a perpendicular a $\overline{AB}$ que passa por C de onde encontra o ponto D sobre $\overline{AB}$ e que $\overline{CD} = h$, ver a Figura 5.15b.

Figura 5.15 – Triângulo de base b e altura h 

Fonte: Próprio autor

Agora duplique o triângulo e rotacione 180° pelo vértice C , ver a Figura 5.16a, em seguida translade o triângulo rotacionado de modo que o vértice sobre C sobreponha o vértice B , de maneira que será criado um ponto F , ver a Figura 5.16b. E note que $\overline{CF} \equiv \overline{AB}$ e $\overline{BF} \equiv \overline{AC}$ assim como $\overline{AC} \parallel \overline{BF}$ e $\overline{CF} \parallel \overline{AB}$.

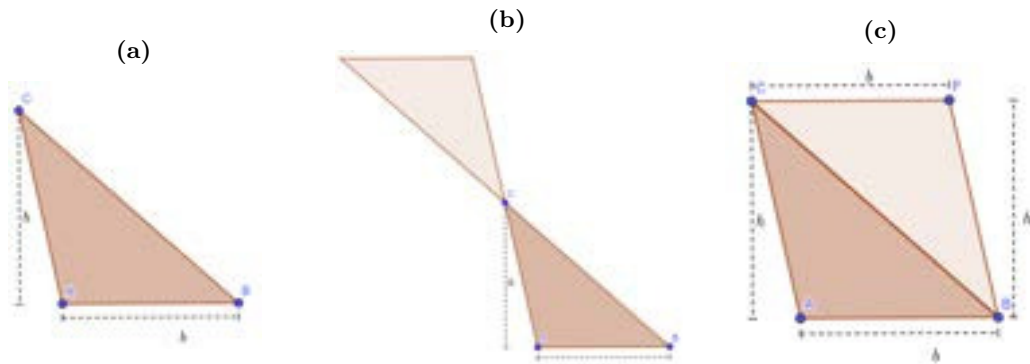
Figura 5.16 – Triângulo como quadrilátero

Fonte: Próprio autor

Assim $ACFB$ é um paralelogramo de base b e altura h e que sua área é o dobro da área do triângulo ABC .

Note que acontece da mesma forma quando a altura não está dentro do triângulo, veja a Figura 5.17

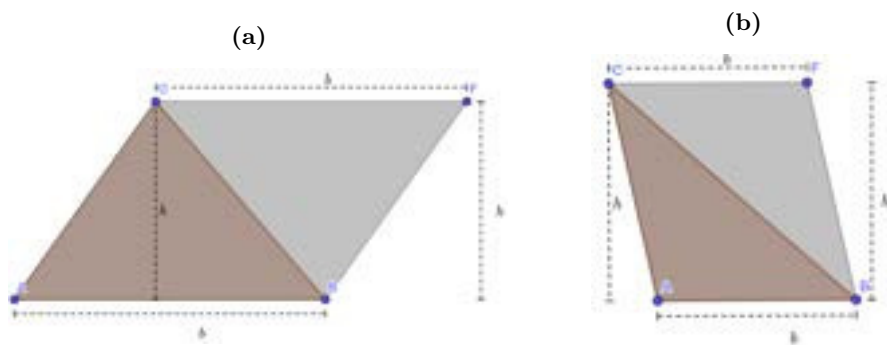
Figura 5.17 – Triângulo quando D não está sobre $\overline{AD}$



Fonte: Próprio autor

Observe que se caso D estiver a direita de $\overline{AB}$ ocorre da mesma forma. E dessa maneira nos dois casos possíveis para a altura de um triângulo sua área é a metade da área do paralelogramo, em que ambos possuem a mesmas dimensões, ver a Figura 5.18.

Figura 5.18 – Triângulo como um paralelogramo



Fonte: Próprio autor

a) Método da Exaustão

Observa-se que a área do triângulo (A_T) é a metade da área do paralelogramo de mesmas dimensões, sejam elas base b e altura h . Assim como provado no Problema 3 que a área do paralelogramo é $A_P = bh$, temos

$$A_T = \frac{A_P}{2} = \frac{bh}{2} = \frac{h}{2} \cdot b, \quad b, h \in \mathbb{R}_+^*$$

bastando repetir os mesmo passos do Problema 3.

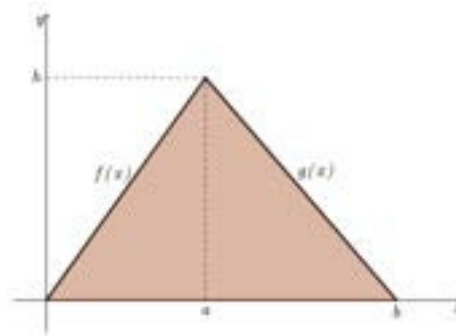
■

b) Cálculo integral

Para um triângulo será usado funções, ver a Figura 5.19. Assim, sendo realizado inicialmente o caso em que a altura está contida no triângulo. Neste caso têm-se duas funções (f, g) tais que $f : [0, a] \rightarrow \mathbb{R}$ e $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ e são dadas pelas regras:

$$f(x) = \frac{h}{a} \cdot x \quad e \quad g(x) = \frac{h}{b-a} \cdot (b-x).$$

Figura 5.19 – Triângulo determinado por f, g



Fonte: Próprio autor

assim, a área do triângulo (A_T) é dado pela integral

$$\begin{aligned}
 A_T &= \int_0^a f(x) dx + \int_a^b g(x) dx, \text{ substituindo as regras} \\
 &= \int_0^a \frac{h}{a} \cdot x dx + \int_a^b \frac{h}{b-a} \cdot (b-x) dx, \text{ resolvendo} \\
 &= \frac{h}{a} \cdot \frac{x^2}{2} \Big|_0^a + \frac{h}{b-a} \cdot \left(bx - \frac{x^2}{2} \right) \Big|_a^b, \text{ pelo TFC parte 2} \\
 &= \frac{h}{a} \cdot \left(\frac{a^2}{2} - \cancel{\frac{0^2}{2}} \right) + \frac{h}{b-a} \cdot \left(\underbrace{b \cdot b - \frac{b^2}{2}}_{-\frac{b^2}{2}} - \left(b \cdot a - \frac{a^2}{2} \right) \right) \\
 &= \frac{h}{a} \cdot \frac{a^2}{2} + \frac{h}{b-a} \cdot \left(-\frac{b^2}{2} - \left(\frac{2b \cdot a - a^2}{2} \right) \right) \\
 &= \frac{ha^2}{2a} + \frac{h}{b-a} \cdot \left(\frac{b^2}{2} - \frac{2b \cdot a - a^2}{2} \right) \\
 &= \frac{ha^2}{2a} + \frac{h}{b-a} \cdot \left(\frac{b^2 - 2b \cdot a + a^2}{2} \right)^{(b-a)^2} \\
 &= \frac{ha^2}{2a} + \frac{h}{\cancel{b-a}} \cdot \left(\frac{(b-a)^2}{2} \right) \\
 &= \frac{ha^2}{2a} + h \cdot \left(\frac{(b-a)}{2} \right) \cdot \frac{a}{a} \\
 &= \frac{ha^2}{2a} + \frac{hba - ha^2}{2a} \\
 &= \frac{\cancel{ha^2} + hba - \cancel{ha^2}}{2a} \\
 &= \frac{bha}{2a} \\
 &= \frac{bh}{2}
 \end{aligned}$$

Então, quando a altura está contida no triângulo

$$A_T = \frac{h}{2} \cdot b, \quad \text{com} \quad b, h \in \mathbb{R}_+^*.$$

Observação: Quando a altura está fora do triângulo decorre de maneira análoga ao anterior.

■

c) *Teorema Fundamental da Proporcionalidade*

Nota-se que a área do triângulo (A_T) é a metade da área do paralelogramo de mesmas dimensões, sejam elas base b e altura h . Assim, como o paralelogramo o triângulo cumpre o TFP e assim

$$A_T(b, h) = \frac{A_P(b, h)}{2} = \frac{bh}{2} = \frac{h}{2} \cdot b, \quad b, h \in \mathbb{R}_+^*.$$

■

Dessa maneira, concluí-se pelos três métodos acima citados que a área do triângulo é o produto da metade de sua altura pela sua base.

Problema 5. *Mostre que a área de um trapézio A_{TP} qualquer de base maior (B) e base menor (b) com altura (h) é $\frac{(B+b) \cdot h}{2}$, pelos seguintes métodos:*

a) *Método da Exaustão.*

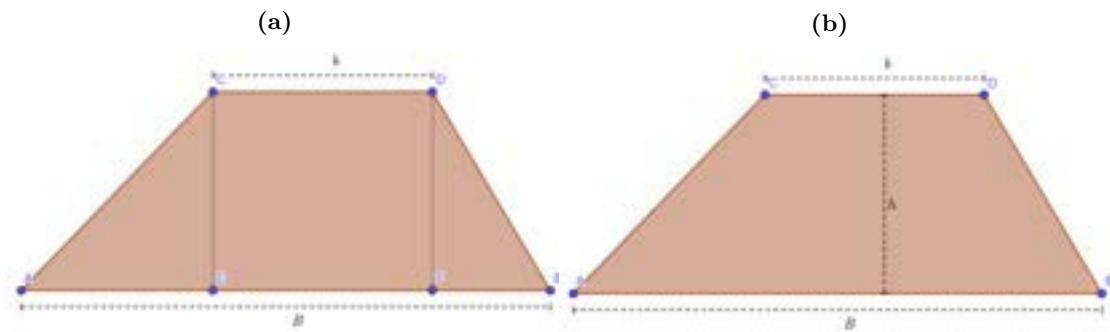
b) *Cálculo integral.*

c) *Teorema Fundamental da Proporcionalidade.*

Solução: Um trapézio é uma figura plana convexa que possui um par de lados paralelos, assim, sendo denominado por B a base maior, b a base menor e h sendo a altura.

Seja $ABCD$ um trapézio tal que $\overline{AB} // \overline{CD}$ e que $\overline{AB} = B$ e $\overline{CD} = b$, de C e D trace uma perpendicular a $\overline{AB}$ de modo que também é perpendicular a $\overline{CD}$ já que $\overline{AB} // \overline{CD}$ e que a perpendicular que passa C encontra E sobre $\overline{AB}$ de mesmo modo temos F e assim como $\overline{AB} // \overline{CD}$ tem-se que $\overline{CE} = h = \overline{DF}$, ver a Figura 5.20a.

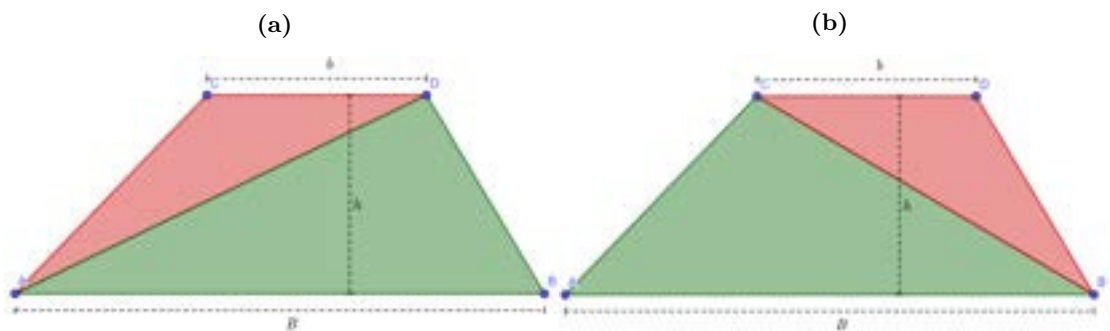
Figura 5.20 – Trapézio



Fonte: Próprio autor

Assim $ABCD$ é um trapézio de bases (B, b) e altura (h) , ver a Figura 5.20b. Agora trace as diagonais que é um segmento que liga dois vértices não adjacentes, isto é, estará ligando $\overline{AD}$ e $\overline{CB}$.

Figura 5.21 – Trapézio com suas diagonais



Fonte: Próprio autor

E que da diagonal $\overline{AD}$ temos os triângulos ADB e de base (B) e ADC de base (b) com ambos de altura (h) , ver a Figura 5.21a. De maneira análoga se tomar a diagonal $\overline{BC}$ têm-se os triângulos ACB e de base (B) e BCD de base (b) com ambos de altura (h) , ver a Figura 5.21b. E ainda que os triângulos ACB e ADB tem áreas iguais assim como os triângulos BCD e ADC já que esses pares de triângulos possuem dimensões iguais. Logo, a área trapézio é a soma da área dos dois triângulos que são formados por uma das diagonais.

Observe que acontece da mesma forma para quaisquer posição de E, F , que são apresentados os possíveis casos abaixo:

- 1) $A < E < F < B$ caso que foi construído acima.
- 2) $A < E < B < F$ ou $E < A < F < B$.
- 3) $A < B < E < F$ ou $E < F < A < B$.
- 4) $A < E < B$ e $F = B$.

- 5) $A < F < B$ e $E = A$.
- 6) $A < B < F$ e $E = B$ ou $E < A < B$ e $F = A$.

E assim para a área do trapézio basta traçar uma diagonal e calcular a área dos dois triângulos.

a) *Método da Exaustão*

Agora será observado que o trapézio é equidecomponíveis com dois triângulos de bases (B) e (b) e ambos os triângulos tem altura (h) , pelo Problema 4 o triângulo tem área igual ao produto da metade de sua altura pela sua base. Assim a área do trapézio A_{TP} é igual a área triângulo de base B e altura h , que é $A_{T_1} = \frac{h}{2} \cdot B$ somado com a área do triângulo de base b e altura h , que é $A_{T_2} = \frac{h}{2} \cdot b$, dessa forma

$$A_{TP} = A_{T_1} + A_{T_2} = \frac{h}{2} \cdot B + \frac{h}{2} \cdot b = \frac{h}{2} \cdot (B + b)$$

Então,

$$A_{TP} = \frac{(B+b)h}{2}, \quad \text{com } B, b \text{ e } h \in \mathbb{R}_+^*.$$

■

b) *Cálculo integral*

Para este método vamos toma-se que sua base maior está sobre o eixo x e que as extremidades de sua base maior tem coordenadas $(0,0)$ e $(0,B)$. Seja $a, c \in \mathbb{R}$, com $a < c$ e $c - a = b$. Aqui será tomado os seis casos anteriores, a qual será demonstrado apenas o primeiro, como se segue:

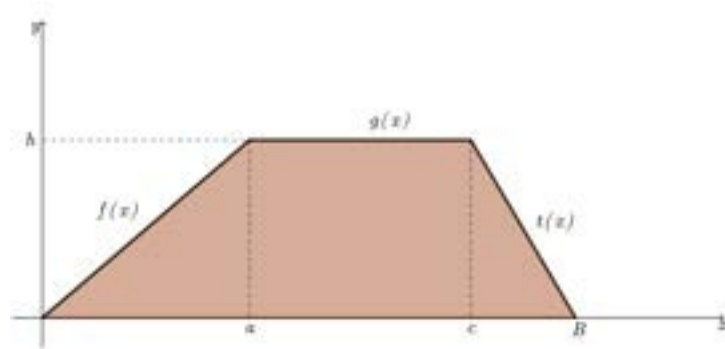
• CASO (1): $a < c < B$.

Sendo $a < c < B$, então usa-se as funções para definir o trapézio, ver a Figura 5.22.

Daí, $f : [0, a] \rightarrow \mathbb{R}$, $g : [a, c] \rightarrow \mathbb{R}$ e $t : [c, B] \rightarrow \mathbb{R}$ tais que são dadas pelas regras

$$f(x) = \frac{h}{a} \cdot x, \quad g(x) = h, \quad t(x) = \frac{h}{c-B} \cdot (x-B)$$

Figura 5.22 – CASO (1) Trapézio pelas funções f, g, t



Fonte: Próprio autor

Assim a área do trapézio (A_{TP}) é dado pelas integrais

$$\begin{aligned}
 A_{TP} &= \int_0^a f(x) dx + \int_a^c g(x) dx + \int_c^B t(x) dx \\
 &= \int_0^a \frac{h}{a} \cdot x dx + \int_a^c h dx + \int_c^B \frac{h}{c-B} \cdot (x-B) dx \\
 &= \frac{h}{a} \cdot \frac{x^2}{2} \Big|_0^a + hx \Big|_a^c + \frac{h}{c-B} \cdot \left(\frac{x^2}{2} - Bx \right) \Big|_c^B \\
 &= \frac{h}{a} \cdot \left(\frac{a^2}{2} - \cancel{0^2} \right) + h(c-a) + \frac{h}{c-B} \cdot \left(\underbrace{\frac{B^2}{2} - B \cdot B}_{-\frac{B^2}{2}} - \left(\underbrace{\frac{c^2}{2} - 2B \cdot c}_{\frac{c^2-2Bc}{2}} \right) \right) \\
 &= \frac{h}{a} \cdot \frac{a^2}{2} + h(c-a) + \frac{h}{(c-B)} \cdot \left(-\frac{B^2}{2} - \left(\frac{c^2-2Bc}{2} \right) \right) \\
 &= \frac{ha^2}{2a} + h(c-a) + \frac{h}{(c-B)} \cdot \left(-\frac{B^2}{2} - \frac{c^2-2Bc}{2} \right) \\
 &= \frac{ha}{2} + h(c-a) + \frac{h}{(c-B)} \cdot \left(\frac{-B^2 - c^2 + 2Bc}{2} \right)^{-(c-B)^2} \\
 &= \frac{ha}{2} + h(c-a) + \frac{h}{\cancel{(c-B)}} \cdot \left(\frac{-(c-B)^2}{2} \right) \\
 &= \frac{ha}{2} + h(c-a) + \frac{-h(c-B)}{2} \\
 &= \frac{ha}{2} + h(c-a) \cdot \frac{2}{2} + \frac{h(B-c)}{2} \\
 &= \frac{ha + 2h(c-a) + h(B-c)}{2} \\
 &= \frac{\cancel{ha} + 2hc - \cancel{2ha} + hB - \cancel{hc}}{2} \\
 &= \frac{hc - ha + hB}{2}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{h(\overbrace{c \rightarrow a}^b) + B}{2} \\
&= \frac{h(B+b)}{2}
\end{aligned}$$

■

c) *Teorema Fundamental da Proporcionalidade*

Notou-se que a área do trapézio (A_{Tp}) de base maior (B) e base menor (b) com altura h é igual a soma das áreas dos triângulos de altura (h) e bases (B) e (b), e assim como o triângulo o trapézio também cumpre o TFP, logo

$$\begin{aligned}
A_{Tp}(B+b, h) &= A(B+b, h), \text{ de (3) do TFP} \\
&= A(B, h) + A(b, h), \text{ que são as áreas dos triângulos} \\
&= A_T(B, h) + A_T(b, h), \text{ pelo Problema 4} \\
&= \frac{h}{2} \cdot B + \frac{h}{2} \cdot b \\
&= \frac{h}{2} \cdot (B+b) \\
&= \frac{(B+b)h}{2}
\end{aligned}$$

Então, a área do trapézio é dada

$$A_{Tp}(B+b, h) = \frac{(B+b)h}{2}, \quad \text{com } B, b \text{ e } h \in \mathbb{R}_+^*.$$

■

Dessa maneira, concluí-se pelos três métodos que a área do trapézio é igual ao produto da metade de sua altura pela soma do seu lado maior com o seu lado menor.

Problema 6. *Expresse que área de um losango é a metade do produto de suas diagonais, pelos seguintes métodos:*

a) *Método da Exaustão.*

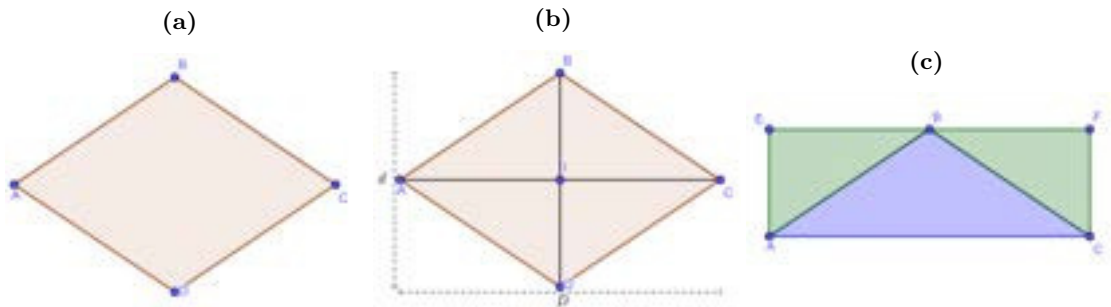
b) *Cálculo integral.*

c) *Teorema Fundamental da Proporcionalidade.*

Solução: Um losango é uma figura plana que tem dois pares de lados paralelos (lados opostos são paralelos) e que todos lados são congruentes, com uma condição especial as diagonais se bisetam e cruzam em ângulo reto e que divide as diagonais ao meio.

Seja $ABCD$ um losango com $\overline{AB} \equiv \overline{BC} \equiv \overline{CD} \equiv \overline{DA}$ e $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$ assim como $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$, ver Figura 5.23a. Agora trace as diagonais que se cruzam e bisetam em I , ver a Figura 5.23b, e que $\overline{AC} = D$ e $\overline{BD} = d$ como elas se bisetam no ponto médio de ambas em I , então $\overline{AI} \equiv \overline{IC} = \frac{D}{2}$ assim como $\overline{BI} \equiv \overline{ID} = \frac{d}{2}$. Agora tome dois triângulos AID e DIC e translade de modo que $\overline{AD}$ sobreponha $\overline{BC}$ e $\overline{DC}$ sobreponha $\overline{AB}$ criando os pontos E e F , respectivamente. Assim, os triângulos $AEB \equiv CFB$ e que $\overline{EA} \equiv \overline{BI} \equiv \overline{ID} = \frac{d}{2}$ e que $\overline{EF} \equiv \overline{AC} = D$. Construído, assim, um retângulo de lados D e $\frac{d}{2}$, ver a Figura 5.23c.

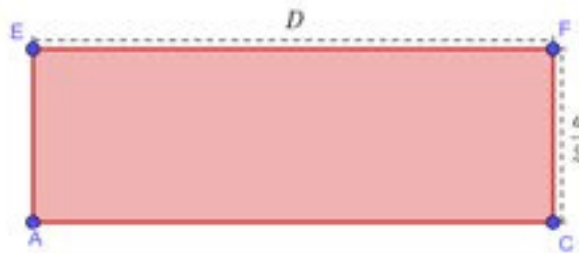
Figura 5.23 – Losango



Fonte: Próprio autor

De fato temos que $EFCB$ é um retângulo de lados $D = \overline{EF} \equiv \overline{AB}$ e $\frac{d}{2} = \overline{EA} \equiv \overline{FC}$, ver a Figura 5.24.

Figura 5.24 – Losango como um retângulo



Fonte: Próprio autor

Assim, a área de um losango de diagonais D e d tem área igual a de um retângulo de lados D e $\frac{d}{2}$.

a) Método da Exaustão

Observa-se que o losango é equidecomponível um retângulo, assim basta repetir os passos do Problema 1 para que se prove por este método. Assim, um losango de

diagonais D e d tem área igual um retângulo de lados D e $\frac{d}{2}$, isto é, $A_R = D \cdot \frac{d}{2}$. Logo, a área do losango (A_L) é dada

$$A_L = A_R = D \cdot \frac{d}{2}$$

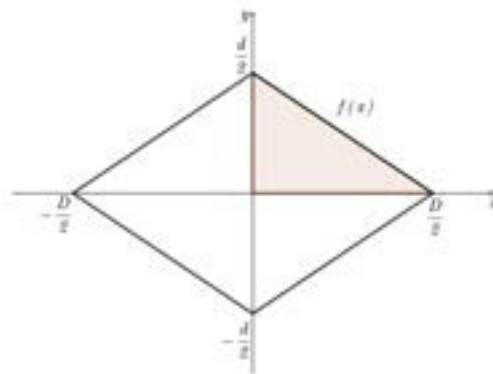
Assim, a área do losango é $A_L = \frac{D \cdot d}{2}$, para todo D e $d \in \mathbb{R}_+^*$.

■

b) Cálculo integral

Sem perda de generalidade, supondo que a interseção das diagonais de um losango esteja na origem do plano cartesiano, ver a Figura 5.25. Note que as diagonais se cruzam na metade, isto é, o losango é simétrico quanto aos eixos e como cada lado do losango é igual basta calcular apenas a área de um triângulo que equivale a um quarto da área do losango.

Figura 5.25 – Losango pela função f



Fonte: Próprio autor

Assim, definindo uma função que esta no primeiro quadrante e que coincide com o lado do losango, isto é, $f : \left[0, \frac{D}{2}\right] \rightarrow \mathbb{R}$ e que é dada pela seguinte regra

$$f(x) = \frac{d}{D} \cdot \left(\frac{D}{2} - x\right)$$

e ao calcular a integral de f de 0 até $\frac{D}{2}$ obtêm-se a área abaixo de f e acima de $y = 0$ como visto no Capítulo (3) do *Cálculo Diferencial e Integral*. E a esta integral calculada equivale a um quarto da área total do losango (A_L), então sua área é dada

pela integral

$$\begin{aligned}
 A_L &= 4 \cdot \int_0^{\frac{D}{2}} f(x) dx, \text{ substituindo a regra} \\
 &= 4 \cdot \int_0^{\frac{D}{2}} \frac{d}{D} \cdot \left(\frac{D}{2} - x \right) dx \\
 &= 4 \cdot \frac{d}{D} \cdot \left(\frac{D}{2} \cdot x - \frac{x^2}{2} \right) \Big|_0^{\frac{D}{2}}, \text{ aplicando o TFC parte 2} \\
 &= 4 \cdot \frac{d}{D} \cdot \left(\frac{D}{2} \cdot \frac{D}{2} - \frac{\left(\frac{D}{2}\right)^2}{2} - \left(\cancel{\frac{D}{2}} \cdot \overset{0}{\cancel{0}} - \cancel{\frac{0^2}{2}} \right) \right) \\
 &= 4 \cdot \frac{d}{D} \cdot \left(\underbrace{\frac{D^2}{4} - \frac{D^2}{8}}_{\frac{D^2}{8}} \right) \\
 &= 4 \cdot \frac{d}{D} \cdot \frac{D^2}{8}, \text{ simplificando} \\
 &= \frac{D \cdot d}{2}
 \end{aligned}$$

■

c) Teorema Fundamental da Proporcionalidade

Notou-se que um losango é equidecomponível com um retângulo assim basta repetir os passos do Problema 1 para este método. Assim, um losango de diagonais D e d tem a mesma área de um retângulo de dimensões D e $\frac{d}{2}$, isto é, $A_R\left(D, \frac{d}{2}\right) = D \cdot \frac{d}{2}$, e a área do losango $A_L(D, d)$ é dada

$$A_L(D, d) = A_R\left(D, \frac{d}{2}\right) = D \cdot \frac{d}{2} = \frac{D \cdot d}{2},$$

para todo D e $d \in \mathbb{R}_+^*$.

■

Dessa maneira, conclui-se pelos três métodos que a área do losango é a metade do produto de suas diagonais.

VOLUMES

De acordo com Dolce e Pompeo (2013a), um sólido S tem seu volume associado a um número real positivo de modo que:

- (i) sólido congruentes tem volumes iguais.
- (ii) se um sólido S é a união de dois sólidos que não tem pontos internos comuns, então o volume de S é a soma dos volumes de S_1 e S_2 .

Aqui iremos tratar de volumes de sólidos simples no caso de prismas e será necessário que o leitor esteja familiarizado com termos e caracterizações da geometria espacial como exemplos são planos (paralelos, perpendiculares), sólidos.

Agora partiremos para colocar em prática o *Método da Exaustão*, *Cálculo Integral* e *Teorema Fundamental da Proporcionalidade* que assim como na parte de áreas, será apresentado pelos três métodos para o cálculo de volumes.

Problema 7. *Demonstre que o volume de um paralelepípedo retângulo (V_{P_R}) é o produto da área da base (A_b) pela sua altura (H), pelos seguintes métodos:*

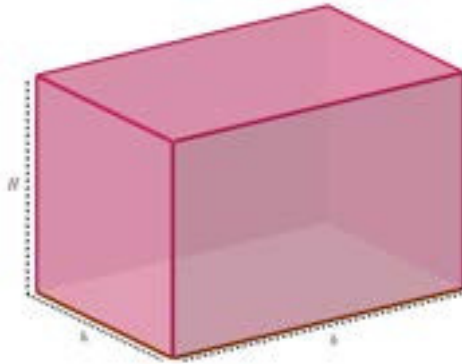
- a) *Método da Exaustão.*
- b) *Cálculo integral.*
- c) *Teorema Fundamental da Proporcionalidade.*

Solução: Um paralelepípedo é um sólido formado por 6 faces em que são todas paralelogramos. Em especial podemos tomar as faces sendo retângulos que por definição de paralelogramo todo retângulo é um paralelogramo.

- a) *Método da Exaustão*

Partindo da ideia de que o volume de um cubo de arestas 1, é $1u.v$. Verificando quantos cubinhos cabem no interior do paralelepípedo retângulo (P_R) a qual suas arestas medem b e h (lados da face a qual define-se como a base de P_R) e H (lado das faces laterais) a qual será denominado de altura de P_R , veja a Figura 5.26. Que assim como na área do retângulo, aqui também terá os casos em que b, h e H sejam comensuráveis e incommensuráveis.

Figura 5.26 – Paralelepípedo retângulo

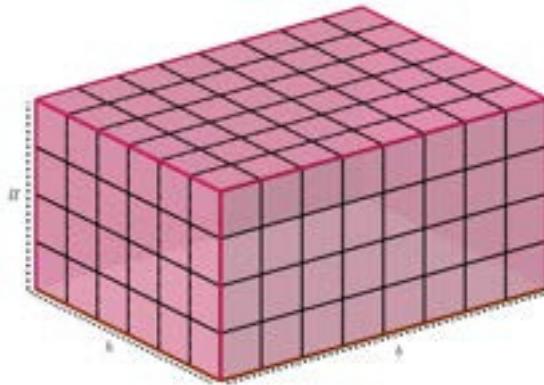


Fonte: Próprio autor

i) b, h e H são comensuráveis.

Sendo o cubo unitário a unidade de medida é dito que b, h e H são comensuráveis com 1 e que a aresta do cubo unitário cabe m vezes sobre b , n vezes sobre h e N vezes sobre H , o que acarreta em que a base do P_R possui m cubos sobre b , isto é $m \cdot 1 = b$ e como em h cabem n cubos, ou seja, $n \cdot 1 = h$, logo sua base fica completa com $m \cdot n = b \cdot h$ cubos, e como em H cabem N cubos vamos empilhar N bases com bh cubos, ou seja, o P_R fica completamente cheio com $m \cdot n \cdot N = b \cdot h \cdot H$ cubos, veja a Figura 5.2.

Figura 5.27 – Paralelepípedo retângulo com $b, h, H \in \mathbb{Z}_+^*$



Fonte: Próprio autor

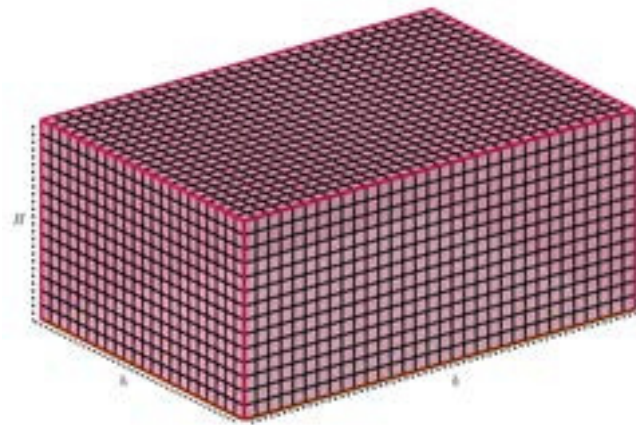
Mas note que a base é um retângulo de lados b e h , a qual pelo Problema 1 a área desse retângulo é $A_b = b \cdot h$. Assim, o volume do paralelepípedo retângulo é $V_{P_R} = b \cdot h \cdot H$, e assim podemos reescrever que

$$V_{P_R} = A_b \cdot H, \text{ com } b, h \text{ e } H \in \mathbb{Z}_+^*$$

Agora seja tomado um P_R em que suas dimensões medem b, h e h mas que não existem $m, n, N \in \mathbb{Z}_+^*$ tal que seja comensurável com o cubo de arestas 1. Daí assim como foi realizado no Capítulo 2 do *Método da Exaustão*, dividindo o cubo unitário em cubinhos de arestas $x = \frac{1}{I}$, ou seja, dividindo o lado do quadrado unitário em I partes. E agora x cabe m vezes sobre b , n vezes sobre

h e N vezes sobre H , o que acarreta em $m \cdot x = b$, isto é, m cubinhos de arestas x sobre b , $n \cdot x = h$, ou seja, n cubinhos sobre h e $N \cdot x = H$, N cubinhos sobre H . Assim, a base do paralelepípedo retângulo que é um retângulo de lados b e h e fica completa com $m \cdot n$ cubinhos que é igual a bh que por sua vez é área do retângulo que possui esses lados basta ver o Problema 1. E como sobre H cabe N cubinhos será empilhado N bases com bh cubinhos, veja a Figura 5.28. Logo, o paralelepípedo retângulo fica completamente cheio com $m \cdot n \cdot N = b \cdot h \cdot H$, cubinhos mas $A_b = b \cdot h$

Figura 5.28 – Paralelepípedo retângulo com $b, h, H \in \mathbb{Q}_+^*$



Fonte: Próprio autor

Então, o volume do paralelepípedo retângulo é

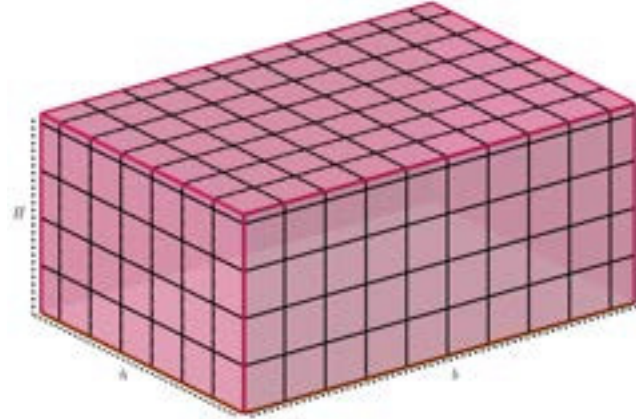
$$V_{P_R} = A_b \cdot H, \text{ com } b, h \text{ e } H \in \mathbb{Q}_+^*$$

ii) b, h e H são **incomensuráveis**.

Sendo o paralelepípedo retângulo de dimensões b, h e H , tais que não existam m, n e $N \in \mathbb{Z}_+^*$ tal que dividindo o cubo unitário em I partes, ou seja, a aresta de cada cubinho vale $x = \frac{1}{I}$, e esse cubinho não caberá um número inteiro de vezes sobre b , nem sobre h e nem sobre H . Daí, tome m, n e N tal que $m \cdot x < b$ e $(m + 1) \cdot x > b$ assim como $n \cdot x < h$ e $(n + 1) \cdot x > h$ e consequentemente $N \cdot x < H$ e $(N + 1) \cdot x > H$, veja a Figura 5.29, logo em decorrência dos casos anteriores sabe-se que $(m \cdot x) \cdot (n \cdot x) \cdot (N \cdot x)$ cubinhos é menor que o volume do paralelepípedo retângulo (V_{P_R}).

$$(m \cdot x) \cdot (n \cdot x) \cdot (N \cdot x) < V_{P_R} \quad (\text{I})$$

Figura 5.29 – Paralelepípedo retângulo com b, h e $H \in \mathbb{R}_+^* - \mathbb{Q}_+^*$



Fonte: Próprio autor

E note que se sobre b adicionar um cubinho de arestas x tem-se $b < (m+1) \cdot x$ assim como se adicionar mais um cubinho sobre h temos $h < (n+1) \cdot x$ e de mesmo modo tem-se que para H . Logo, $H < (N+1) \cdot x$, assim $[(m+1) \cdot x \cdot (n+1) \cdot x \cdot (N+1) \cdot x]$ cubinhos é maior que V_{P_R} :

$$V_{P_R} < (m+1) \cdot x \cdot (n+1) \cdot x \cdot (N+1) \cdot x \quad (\text{II})$$

Assim de (I) e (II) tem-se

$$\begin{aligned} (m \cdot x) \cdot (n \cdot x) \cdot (N \cdot x) &< V_{P_R} < (m+1) \cdot x \cdot (n+1) \cdot x \cdot (N+1) \cdot x \\ m \cdot n \cdot N \cdot x^3 &< V_{P_R} < (m+1)(n+1)(N+1)x^2 \end{aligned} \quad (13)$$

E perceba que $mx < b < (m+1)x$, $nx < h < (n+1)x$ e $Nx < H < (N+1)x$ multiplicando membro a membro essas três últimas desigualdades não altera a desigualdades já que está sendo trabalhado com medidas e que sempre são positivas.

$$\begin{aligned} m \cdot x \cdot n \cdot x \cdot N \cdot x &< b \cdot h \cdot H < (m+1)x(n+1)x(N+1)x \\ mnHx^3 &< b \cdot h < (m+1)(n+1)(N+1)x^3 \end{aligned}$$

assim,

$$-(m+1)(n+1)(N+1)x^3 < -b \cdot h \cdot H < -mnNx^3 \quad (14)$$

somando as desigualdades (13) e (14) membro a membro tem-se

$$[mnN - (m+1)(n+1)(N+1)]x^3 < V_{P_R} - b \cdot h \cdot H < [(m+1)(n+1)(N+1) - mnN]x^3$$

sabe-se que $x = \frac{1}{I}$ implica $x^3 = \frac{1}{I^3}$ além disso tem-se enquanto maior tomar I , isto é, $I \rightarrow \infty$ tem-se $\frac{1}{I^3} \rightarrow 0$. Então, para I , suficientemente grande, obtêm

$$0 < V_{P_R} - b \cdot h \cdot H < 0$$

o que só pode ocorrer $V_{P_R} - b \cdot h \cdot H = 0$ e que sabemos que $bh = A_b$ já que a base do paralelepípedo retângulo é um retângulo de lados b, h . E assim

$$V_{P_R} = A_b \cdot H, \quad \text{com } b, h \text{ e } H \in \mathbb{R}_+^* - \mathbb{Q}_+^*$$

Então, para quaisquer arestas de um paralelepípedo retângulo, têm-se

$$V_{P_R} = A_b \cdot H, \quad \text{com } b, h \text{ e } H \in \mathbb{R}_+^*$$

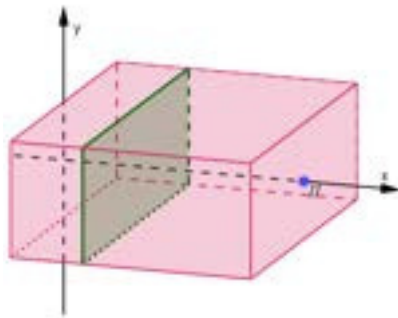
■

b) Cálculo integral

Colocando a origem O no ponto de encontro das diagonais do retângulo da base do paralelepípedo retângulo em que suas dimensões da base são b e h , e o eixo ao longo da reta formada pelo encontro das diagonais de suas duas bases, veja a Figura 5.30a. Qualquer plano Q_x que passe por H_1 e é perpendicular ao eixo x intercepta a paralelepípedo retângulo em um retângulo de lados de comprimentos b e h , ver a Figura 5.30b. E como para qualquer H_1 em que $0 \leq H_1 \leq H$ formará uma secção de área igual $A_S = bh$, o que é a área da face da base do paralelepípedo $A_b = bh$

Figura 5.30 – Paralelepípedo retângulo como função da área da secção

(a)



(b)



Fonte: Próprio autor

Assim o volume do P_R é dado pela integral

$$V_{P_R} = \int_0^H A_S dx = \int_0^H bh dx = bhx \Big|_0^H = bh(H - 0) = bhH = A_b \cdot H.$$

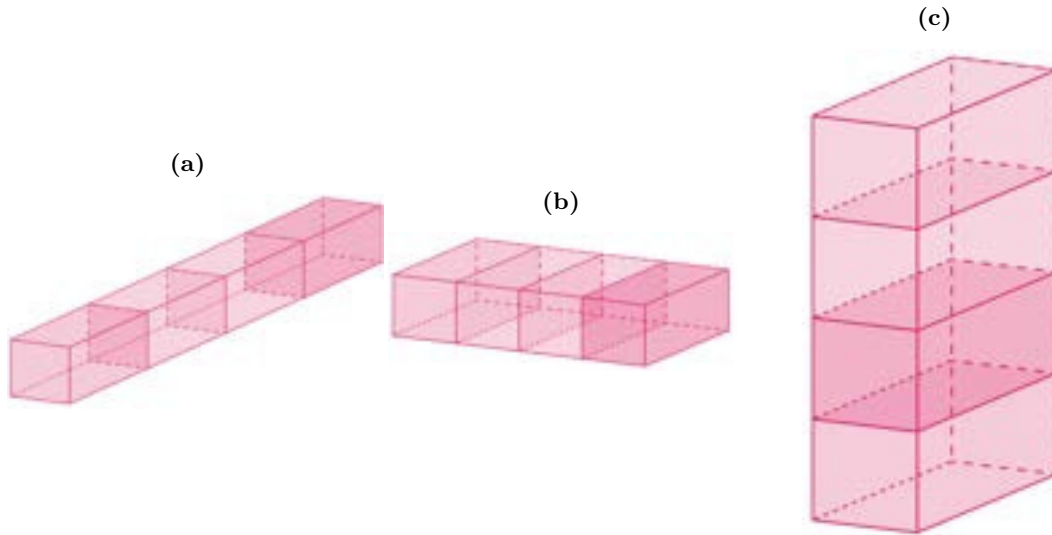
■

c) Teorema Fundamental da Proporcionalidade

Tomando um paralelepípedo retângulo de dimensões b, h e H , de onde será tomando por base de P_R o retângulo de lados b e h e a altura de P_R seja H . Para quaisquer valores de b, h, H e diremos que o P_R tem um volume V_{P_R} , daí veja o que acontece

quando multiplica b por algum $n \in \mathbb{N}$, veja a Figura 5.31a. De mesmo modo percebemos que se multiplicar n por h , veja a Figura 5.31b ou então multiplicando n por H , veja a Figura 5.31c. O volume de P_R fica multiplicado por n .

Figura 5.31 – Paralelepípedo retângulo e suas proporcionalidades



Fonte: Próprio autor

E dessa forma percebe-se que volume é sempre crescente e quando multiplica uma de suas dimensões por n o volume fica multiplicada por n , então pelo Teorema Fundamental da Proporcionalidade (TFP) pode-se definir uma função $V : \mathbb{R}_+^{*3} \rightarrow \mathbb{R}_+^*$ a função volume e que $V(1,1,1) = 1u.v$, assim $V_{P_R}(b,h,H)$ é o volume do paralelepípedo retângulo é:

$$\begin{aligned}
 V_{P_R}(b,h,H) &= V(b,h,H), && \text{como cumpre o TFP pode-se reescrever} \\
 &= V(b \cdot 1, h \cdot 1, H \cdot 1), && \text{de (1) do TFP aplicado em } b, \text{ tem-se} \\
 &= b \cdot V(1, h \cdot 1, H \cdot 1), && \text{de (1) do TFP aplicado em } h, \text{ tem-se} \\
 &= b \cdot h \cdot V(1, 1, H \cdot 1), && \text{de (1) do TFP aplicado em } H, \text{ tem-se} \\
 &= b \cdot h \cdot H \cdot V(1, 1, 1), && \text{mas } V(1, 1, 1) = 1u.v, \text{ logo} \\
 &= b \cdot h \cdot H \cdot 1 \\
 &= b \cdot h \cdot H
 \end{aligned}$$

Então, o volume do paralelepípedo retângulo é o produto da área de sua base ($A_b = bh$) pela sua altura (H), isto é,

$$V_{P_R}(b,h,H) = A_b \cdot H u.v, \quad \text{com } b, h \text{ e } H \in \mathbb{R}_+^*.$$

■

Dessa forma, concluí-se que pelos três métodos acima citados para quaisquer dimensões do paralelepípedo retângulo, o volume é o produto da área de sua base pela sua altura.

Problema 8. *Mostre que o volume do cubo é sua aresta elevada a terceira potência, pelos seguintes métodos:*

- a) *Método da Exaustão.*
- b) *Cálculo integral.*
- c) *Proporcionalidade.*

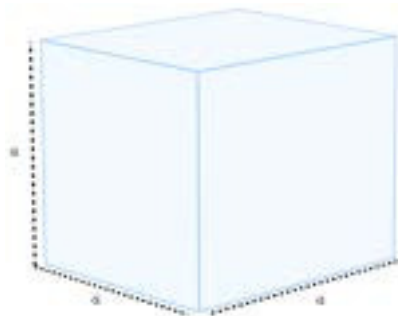
Solução: Um cubo é um sólido geométrico que é um caso particular do paralelepípedo retângulo, bastando tomar suas dimensões iguais, isto é, suas arestas são todas iguais que consequentemente temos todas as faces quadradas.

- a) *Método da Exaustão*

Como o cubo (C_B) é um caso particular do paralelepípedo retângulo, realizando de forma sucinta já que basta tomar $b = h = H$ no Problema 7 (Volume do Paralelepípedo Retângulo) e tomar que as dimensões são todas iguais a um a , assim o cubo será da seguinte maneira, ver a Figura 5.32. E que assim como no do paralelepípedo retângulo repetindo os mesmos passos têm-se que o volume do cubo (V_{C_B}) é

$$V_{C_B} = a^3, \quad \text{com } a \in \mathbb{R}_+^*.$$

Figura 5.32 – Cubo



Fonte: Próprio autor

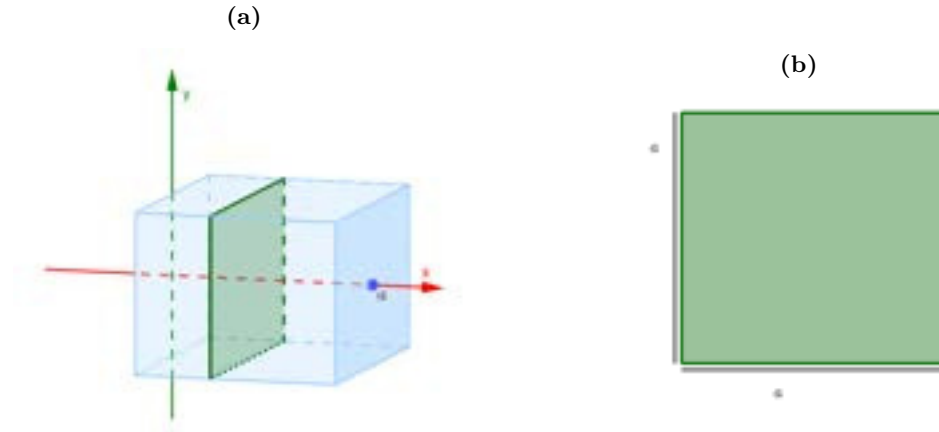
■

- b) *Cálculo integral*

Aqui basta tomar as dimensões do Problema 7 todas iguais, ou seja, tome a aresta do cubo (C_B) como sendo a , logo $b = h = H = a$. Assim o cubo como gráfico ou melhor nos eixos refazendo os passos do Paralelepípedo Retângulo, ver a Figura 5.33a e a secção que será formada pela intersecção de um plano perpendicular ao eixo x que

secciona o cubo em uma área, ver a Figura 5.33b em que sua área é $A_S = a^2$, o que é a área da face da base do e, portanto, também a área da base $A_b = a^2$.

Figura 5.33 – Cubo como função da área da secção



Fonte: Próprio autor

Assim o volume do cubo (V_{C_B}) é dado pela integral

$$V_{C_B} = \int_0^a A_S dx = \int_0^a a^2 dx = a^2 \cdot x \Big|_0^a = a^2(a - 0) = a^2 \cdot a = a^3.$$

■

c) Proporcionalidade

Assim como cubo é um paralelepípedo retângulo, torna-se um caso particular do paralelepípedo retângulo em que $b = h = H = a$, daí tem que ocorre a proporcionalidade da mesma maneira e que o volume do cubo (V_{C_B}) de aresta a ($V_{C_B}(a, a, a)$) é

$$\begin{aligned} V_{C_B}(a, a, a) &= V(a, a, a), & \text{como cumpre o TFP pode-se reescrever} \\ &= V(a \cdot 1, a \cdot 1, a \cdot 1), & \text{de (1) do TFP aplicado em } a, \text{ tem-se} \\ &= a \cdot V(1, a \cdot 1, a \cdot 1), & \text{de (1) do TFP aplicado em } a, \text{ tem-se} \\ &= a \cdot a \cdot V(1, 1, a \cdot 1), & \text{de (1) do TFP aplicado em } a, \text{ tem-se} \\ &= a \cdot a \cdot a \cdot V(1, 1, 1), & \text{mas } V(1, 1, 1) = 1 u.v, \text{ logo} \\ &= a \cdot a \cdot a \cdot 1 \\ &= a \cdot a \cdot a \end{aligned}$$

Logo, $V_{C_B}(a, a, a) = a^3 u.v$ para todo $a \in \mathbb{R}_+^*$

■

Então, de maneira análoga ao do paralelepípedo retângulo concluí-se pelos três métodos que o volume do cubo é sua aresta elevada ao expoente três.

6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Aos primórdios deste trabalho de pesquisa, constatou-se que o cálculo de áreas de figuras planas e volumes de sólidos geométricos são apresentados como uma expressão dogmática, que conduziu a escolha de três maneiras para se calcular estes objetos matemáticos já que havia uma defasagem no cálculo de áreas de figuras planas convexas e volumes de sólidos geométricos abordados pelo Método da Exaustão, Cálculo Integral e o Teorema Fundamental da Proporcionalidade.

Diante disso, a pesquisa teve como objetivo geral mostrar o avanço da matemática, apresentando o cálculo de áreas e volumes de três maneiras diferentes, por meio do Método da Exaustão, Cálculo Diferencial e Integral e do Teorema Fundamental da Proporcionalidade. Não foram feitas todas as demonstrações para o cálculo de áreas e volumes de sólidos geométricos porque constatou-se a necessidade da utilização do Princípio de Cavalieri o que não é objeto de estudo deste trabalho.

Dessa forma, teve como primeiro objetivo específico apresentar o método da exaustão no cálculo de áreas e volumes ao qual foi atendido completamente já que foi apresentado seu contexto histórico, sua teoria e como seria aplicado ao cálculo de áreas e volumes por meio de uma comparação a uma unidade unitária estabelecida tanto para áreas quanto para volumes.

Analogamente, o segundo objetivo específico foi completamente cumprido já que foi apresentado seu contexto histórico com os nomes mais relevantes e um breve resumo no cálculo diferencial. Além de apresentar as definições e proposições mais importantes com algumas de suas demonstrações, e também provar o Teorema Fundamental do Cálculo, isto em integrais e buscou mostrar como se calcula áreas e volumes.

No terceiro objetivo específico, buscou-se demonstrar o Teorema Fundamental da Proporcionalidade e sua aplicação no cálculo de áreas e volumes que foi atendido devido sua explanação desde o surgimento da teoria das proporções sua parte central e a demonstração, e por fim como deve-se aplicar ao cálculo de áreas e volumes.

O quarto objetivo específico, teve como propósito demonstrar a fórmula de algumas áreas de figuras planas e sólidos geométricos pelo Método da Exaustão, Cálculo Diferencial e Integral e o Teorema Fundamental da Proporcionalidade. Obtendo-se êxito já que foi realizado para as figuras planas retângulo, quadrado, trapézio e losango assim como também para os sólidos geométricos paralelepípedo retângulo e cubo.

Diante do pressuposto da pesquisa, a hipótese foi apresentada com clareza e precisão ao apresentar as fórmulas de áreas e volumes por meio de três métodos que foram confirmadas pelas demonstrações realizadas para o cálculo das áreas de figuras planas e volumes de alguns sólidos geométricos.

Observou-se que parte do problema de conhecer o surgimento e como funcionam tais expressões para as áreas e volumes. De fato, foi sanada essa lacuna já que todos os problemas resolvidos são para dimensões reais.

A pesquisa foi desenvolvida em buscas feitas em livros, dissertações e artigos. Também foi utilizado o software *Geogebra* para esboçar algumas imagens.

Diante da metodologia proposta constatou-se que há uma defasagem na literatura no que diz respeito ao cálculo de áreas e volumes pelo método do Teorema Fundamental da Proporcionalidade, o que dificultou a escrita do trabalho.

Então, diante das limitações expostas para a realização do presente trabalho notou-se que este tem sido um dos poucos da literatura que abordou detalhadamente a utilização destes três métodos simultaneamente para o cálculo de áreas e volumes.

Por fim, recomenda-se que para trabalhos futuros o Princípio de Cavalieri possa ser acrescentado facilitando o cálculo de volume dos sólidos geométricos tais como o prisma qualquer, pirâmide, cone, cilindro e esfera.

REFERÊNCIAS

- AMARAL, Antonio Cardoso do et al. Grandezas proporcionais: Um estudo aprofundado para uma melhor compreensão da fórmula $f(x) = ax$ como modelo matemático para problemas de proporcionalidade direta. **Universidade Federal do Piauí**, 2014.
- ASSIS, André Koch Torres. **Arquimedes, o centro de gravidade ea lei da alavanca**. [S.l.]: Apeiron Montreal, 2008.
- COURANT, Richard; MCSHANE, Edward James. **Differential and Integral Calculus**. 1. ed. [S.l.]: Interscience Publishers, 1934. Volume 1.
- DOLCE, Osvaldo; POMPEO, José Nicolau. **Fundamentos da Matemática Elementar: Geometria Espacial**: posição e métrica. 7. ed. São Paulo: Atual, 2013. v. 10.
- DOLCE, Osvaldo; POMPEO, José Nicolau. **Fundamentos da Matemática Elementar: Geometria Plana**. 9. ed. São Paulo: Atual, 2013. v. 9.
- EUCLIDES. **Os Elementos**. São Paulo: Editora Unesp, 2009. Os Elementos. Tradução e introdução de Irineu Bicudo.
- EVES, Howard. **Introdução à história da matemática**. 5. ed. Campinas - São Paulo: Editora Unicamp, 2011. An Introduction of the History of Mathematics: Introdução à história da matemática. Traduzido por Hygino H. Domingues.
- FELIPE, Rhaony Alvarenga et al. Um estudo sobre proporcionalidade. Universidade Federal do Triângulo Mineiro, 2021.
- GUIDORIZZI, Hamilton Luiz. **Um Curso de Cálculo**. 5. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2013. v. 1. ISBN 978-85-216-2244-4.
- IEZZI, Gelson; HAZZAN, Samuel; DEGENSZAJN, David Mauro. **Fundamentos da Matemática Elementar: Matemática Comercial, Matemática Financeira, Estatística Descritiva**. 9. ed. São Paulo: Atual, 2013. v. 11.
- LEIBNIZ, Gottfried Wilhelm. Projeto a respeito de uma nova enciclopédia que deve ser redigida pelo método da descoberta. **Scientiae Studia**, SciELO Brasil, v. 5, p. 95–107, 2007.
- LIMA, Elon Lages. **Curso de Análise**. 14. ed. Rio de Janeiro: Associação Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada, 2017. v. 1.
- LIMA, Elon Lages de et al. **A Matemática do Ensino Médio**. 7. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2016. v. 2.
- LIMA, Elon Lages de et al. **A Matemática do Ensino Médio**. 11. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2016. v. 1.
- LIMA, Francisco do Nascimento et al. Estudo sobre o cálculo de áreas e volumes utilizando o método de exaustão e o princípio de cavalieri. Universidade Federal da Paraíba, 2013.

MARQUES, João Lucas. **Geometria Euclidiana Plana**. 11. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2012.

NETO, Aref Antar et al. **Introdução à Análise Matemática**. 1. ed. São Paulo: Moderna, 1985.

NETO, Antonio Caminha Muniz. **Tópicos de Matemática Elementar**. Rio de Janeiro: SBM, 2013.

NEWTON, Sir Isaac. **Principia: princípios matemáticos de filosofia natural**. 2. ed. [S.l.]: Editora da Universidade de São Paulo, 2016.

NUNES, Euderley de Castro. A esfera de riemann: projeção estereográfica e aplicações, uma abordagem para o ensino médio. Universidade Federal do Amazonas, 2015.

PEREIRA, Antônio Luiz. **Proporcionalidade e matemática financeira: uma abordagem tendo como princípios motivação e contextualização**. Tese (Doutorado) — Instituto de Matemática e Estatística, 2017.

SILVA, João Dantas Almeida et al. Sobre o método da exaustão de eudoxo e o cálculo de áreas de regiões planas. **Universidade Estadual de Feira de Santana**, 2019.

SILVA, Rosivaldo Pereira da et al. Arquimedes e o método. **Universidade Federal de Alagoas**, 2014.

STEWART, James. **Cálculo, volume 1 - tradução da 7a edição norte-americana**. 7. ed. [S.l.]: Cengage Learning, 2013. v. 1. ISBN 978-85-221-1461-0.

THOMAS, George B.; WEIR, Mauice D.; HASS, Joel. **Cálculo - tradução da 12a edição norte-americana**. [S.l.]: Pearson, 2012.

VACCARI, Aline; PACHECO, Edilson Roberto. O método de exaustão em textos de história da matemática. **Encontro Regional dos Estudantes de Matemática do Sul. Anais...** Curitiba-PR, p. 383–386, 2011.

	INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA DA PARAÍBA
	Campus Cajazeiras - Código INEP: 25008978
	Rua José Antônio da Silva, 300, Jardim Oásis, CEP 58.900-000, Cajazeiras (PB)
	CNPJ: 10.783.898/0005-07 - Telefone: (83) 3532-4100

Documento Digitalizado Ostensivo (Público)

Trabalho de Conclusão de Curso

Assunto:	Trabalho de Conclusão de Curso
Assinado por:	Mateus Rocha
Tipo do Documento:	Tese
Situação:	Finalizado
Nível de Acesso:	Ostensivo (Público)
Tipo do Conferência:	Cópia Simples

Documento assinado eletronicamente por:

- Mateus Rocha de Sousa, DISCENTE (202412210004) DE ESPECIALIZAÇÃO EM MATEMÁTICA - CAJAZEIRAS, em 26/11/2025 12:08:17.

Este documento foi armazenado no SUAP em 26/11/2025. Para comprovar sua integridade, faça a leitura do QRCode ao lado ou acesse <https://suap.ifpb.edu.br/verificar-documento-externo/> e forneça os dados abaixo:

Código Verificador: 1680744
Código de Autenticação: dcef465284

