INSTITUTO FEDERAL DA PARAÍBA
CAMPUS CAJAZEIRAS
CURSO DE ESPECIALIZAÇÃO EM MATEMÁTICA

EWERTHON MARQUES DE ARAÚJO

PROPRIEDADES DO TRIÂNGULO DE PASCAL E DAS PROGRESSÕES ARITMÉTICAS DE ORDEM SUPERIOR: UMA ABORDAGEM VOLTADA PARA O ENSINO MÉDIO

CAJAZEIRAS-PB
2025

EWERTHON MARQUES DE ARAÚJO

PROPRIEDADES DO TRIÂNGULO DE PASCAL E DAS PROGRESSÕES ARITMÉTICAS DE ORDEM SUPERIOR: UMA ABORDAGEM VOLTADA PARA O ENSINO MÉDIO

Monografia apresentada junto ao **Curso de Especialização em Matemática** do **Instituto Federal da Paraíba**, como requisito à obtenção do título de **Especialista em Matemática**.

Orientador(a):

Prof. Me. Leonardo Ferreira Soares.

Coorientador(a):

Prof. Me. Emanuel Abdalla Pinheiro.

Cajazeiras-PB

2025

EWERTHON MARQUES DE ARAÚJO

PROPRIEDADES DO TRIÂNGULO DE PASCAL E DAS PROGRESSÕES ARITMÉTICAS DE ORDEM SUPERIOR: UMA ABORDAGEM VOLTADA PARA O ENSINO MÉDIO

Monografia apresentada ao programa de **Curso de Especialização em Matemática** do **Instituto Federal da Paraíba**, como requisito à obtenção do título de **Especialista em Matemática**.

Data de aprovação: 14/11/2025

Banca Examinadora:

Documento assinado digitalmente
LEONARDO FERREIRA SOARES
Data: 17/11/2025 12:12:46-0300
Verifique em https://validar.iti.gov.br

Prof. Me. Leonardo Ferreira Soares
Instituto Federal da Paraíba - IFPB

Documento assinado digitalmente
EMANUEL ABDALLA PINHEIRO
Data: 16/11/2025 17:34:12-0300
Verifique em https://validar.iti.gov.br

Prof. Me. Emanuel Abdalla Pinheiro
Instituto Federal da Paraíba - IFPB

Documento assinado digitalmente
LEILYANNE SILVA DE MORAIS
Data: 18/11/2025 08:31:46-0300
Verifique em https://validar.iti.gov.br

Prof(a). Ma. Leilyanne Silva de Morais
Instituto Federal da Paraíba - IFPB

Documento assinado digitalmente
DIEGO DIAS FELIX
Data: 17/11/2025 19:55:04-0300
Verifique em https://validar.iti.gov.br

Prof. Dr. Diego Dias Felix
Secretaria Municipal de Educação de Santa Terezinha - PB (SMESTPB)

IFPB / Campus Cajazeiras
Coordenação de Biblioteca
Biblioteca Prof. Ribamar da Silva
Catalogação na fonte: Cícero Luciano Félix CRB-15/750

A663p Araújo, Ewerthon Marques de.

Propriedades do triângulo de pascal e das Progressões aritméticas de ordem superior : uma abordagem voltada para o ensino médio / Ewerthon Marques de Araújo.– 2025.

63f. : il.

Trabalho de Conclusão de Curso (Especialização em Matemática) - Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia da Paraíba, Cajazeiras, 2025.

Orientador(a): Prof. Me. Leonardo Ferreira Soares.
Coorientador(a): Prof. Me. Emanuel Abdalla Pinheiro.

1. Análise combinatória. 2. Triângulo de Pascal. 3. Progressão aritmética. 4. Matemática – Ensino médio. I. Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia da Paraíba. II. Título.

IFPB/CZ CDU: 519.1(043.2)

Dedico este trabalho a Deus que é o dono de todo conhecimento e sabedoria e à minha família que sempre me ensinou a importância de estudar para mudar de vida.

AGRADECIMENTOS

A Deus, por me proporcionar condições para realizar esse trabalho.

A meu pai Júnior, minha mãe Flávia e meu irmão Herbert por sempre me apoiar e incentivar.

A meu amigo Mateus Rocha por me ajudar sempre quando precisei.

Aos meus amigos por entenderem a minha ausência em alguns momentos.

A meu orientador Leonardo pela paciência e apoio que me deu para escrever esse trabalho da melhor forma possível.

"Ainda que eu andasse pelo vale da sombra da morte, não temeria mal algum, porque tu estás comigo; a tua vara e o teu cajado me consolam."

Salmos 23:4, Bíblia Sagrada

RESUMO

Este trabalho tem como objetivo apresentar duas maneiras distintas de resolver alguns problemas envolvendo somatório de expressões com certa complexidade, apresentaremos dois métodos eficientes para resolver essa classe de problemas, sejam elas utilizando as propriedades do Triângulo de Pascal e as Progressões Aritméticas de Ordem Superior. Inicia-se o trabalho falando um pouco sobre análise combinatória e alguns métodos de contagem em seguida, sobre o Triângulo de Pascal apresentando e demonstrando algumas de suas propriedades, dando continuidade acerca de progressão aritmética com aquela ideia apresentada no Ensino Médio, com isso, criando um caminho para introduzir a noção de Progressão Aritmética de Ordem Superior, demonstrando assim, alguns resultados e propriedades, por fim, resolvemos alguns problemas de aplicações através da propriedade do Triângulo de Pascal e por Progressão Aritmética de Ordem Superior, mostrando que esses temas estão relacionados.

Palavras-chave: Análise combinatória; Triângulo de Pascal; Progressão Aritmética de Ordem Superior.

ABSTRACT

This work has the objective of presenting two distinct ways to solve some problems involving the summation of expressions with a certain complexity. We will present two efficient methods to solve this class of problems, either by using the properties of Pascal's Triangle or by using Arithmetic Progressions of Higher Order. The work begins by discussing a bit about combinatorial analysis and some counting methods, followed by Pascal's Triangle, presenting and demonstrating some of its properties. It continues with arithmetic progression based on the idea presented in High School, thereby creating a pathway to introduce the notion of Arithmetic Progression of Higher Order, demonstrating some results and properties. Finally, we solve some application problems through the property of Pascal's Triangle and by Higher Order Arithmetic Progression, showing that these themes are related.

Keywords: Combinatorial analysis; Pascal's triangle; higher-order arithmetic progression.

LISTA DE FIGURAS

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

Muitas vezes o ensino da matemática é feito de maneira tradicional, onde o centro é o professor e os alunos apenas concordam com o que é dito por ele. Porém, é necessário abrir às portas da investigação e explorar a origem e a base teórica dos conteúdos apresentados, possibilitando, assim, o desenvolvimento de mentes mais críticas e despertando a curiosidade por parte dos alunos.

A motivação central dessa monografia é apresentar uma classe de problemas envolvendo somatórios de expressões não triviais no qual usaremos as propriedades do Triângulo de Pascal e Progressões Aritméticas de Ordem Superior para resolução desses problemas e trazendo essa teoria de uma forma didática a qual não é apresentada na maioria dos livros do Ensino Médio, essa temática chama atenção pelo fato de ser pouco abordada nos livros didáticos do Ensino Médio e de ser de fundamental importância para resolver problemas envolvendo somatórios.

Quanto à organização, no segundo capítulo (2), após a introdução, é apresentado um pouco da história da Análise Combinatória e sua importância dentro da Matemática, bem como alguns métodos de contagem.

Posteriormente, no terceiro capítulo, é apresentado o Triângulo de Pascal, algumas de suas propriedades e respectivas demonstrações. No quarto capítulo, é feita uma abordagem de Progressão Aritmética (P.A.) com aquela noção vista no Ensino Médio, apresentando a fórmula do termo geral e a soma dos termos, cada um com sua demonstração. No quinto capítulo, são abordadas as Progressões Aritméticas de Ordem Superior, demonstrando seus resultados. No sexto capítulo, temos às aplicações de dois métodos que serão apresentados no decorrer do trabalho. Por fim, no sétimo capítulo, estão as considerações finais, com o objetivo de reforçar os objetivos da pesquisa.

1.1 OBJETIVO GERAL

- Demonstrar e aplicar as propriedades do Triângulo de Pascal e das Progressões Aritméticas de Ordem Superior na resolução de problemas envolvendo somatórios finitos.

1.2 OBJETIVOS ESPECÍFICOS

- Compreender as propriedades do Triângulo de Pascal e das Progressões Aritméticas de Ordem Superior;
- Demonstrar as propriedades do Triângulo de Pascal e da Progressão Aritmética de Ordem Superior;
- Aplicar as propriedades do Triângulo de Pascal e das Progressões Aritméticas de Ordem Superior;
- Apresentar duas maneiras de resolver problemas envolvendo somatórios finitos utilizando as técnicas abordadas.

1.3 METODOLOGIA

Este trabalho é caracterizado como uma pesquisa de natureza básica, pois visa contribuir com o conhecimento científico baseando-se na literatura de obras já publicadas, por isso é bibliográfico. Exploratória em relação aos seus objetivos pelo fato de valer-se de uma investigação que possibilita uma maior familiarização com o assunto aqui apresentado e de abordagem qualitativa.

A maior parte das referências bibliográficas que utilizamos neste trabalho foram encontrados nos raros livros de Ensino Médio ou superior e em dissertações de mestrado.

2 ANÁLISE COMBINATÓRIA

Nem sempre a análise combinatória fez parte dos estudos matemáticos, tal estudo começou a tomar forma durante o final do século XVII e em poucos anos surgiram três livros: *Traité du triangle arithmétique* (foi escrito em 1654 e publicado em 1665) de Pascal, *Dissertatio de arte combinatória* (1666) de Leibniz e *Ars magna sciendi sive combinatoria* (1669) de Athanasius Kircher e também tivemos trabahados relacionados a essa área de Wallis (1673), Frénicle de Bessy (1693), Jakob Bernoulli (1713) e de Moivre (1718). Através da curiosidade de calcular as possibilidades em jogos de azar, foram demonstrados cientificamente grandes resultados que hoje nos permitem contar de quantas maneiras podemos tomar uma certa decisão, como por exemplo, escolher elementos de um determinado conjunto e agrupa-lós tendo em vista condições e regras. Após vários estudos e demonstrações, a Análise Combinatória foi definida como o ramo da Matemática que desenvolve e estuda métodos de contagem e agrupamentos de elementos de um conjunto finito.

A seguir veremos alguns resultados importantes que poderemos utilizar no decorrer deste trabalho. A temática discutida neste capítulo bem como os resultados apresentados foram baseados no livro (Morgado et al., 1991).

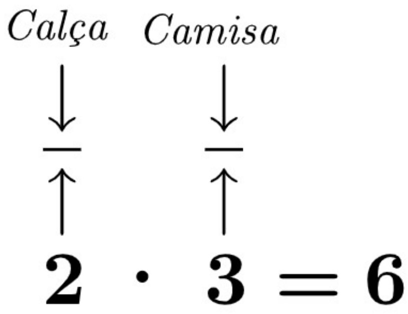
2.1 PRINCÍPIO FUNDAMENTAL DA CONTAGEM (PFC)

O princípio fundamental da contagem ou princípio multiplicativo, determina de quantas maneiras podemos tomar n decissões sucessivamente independentes. Seja m_1 a quantidade de maneiras de tomar uma decisão D_1, m_2 a quantidade de maneiras de tomar uma decisão D_2, m_3 a quantidade de maneiras de tomar uma decisão D_3 e assim sucessivamente m_n a quantidade de maneiras de tomar uma decisão D_n, logo, a quantidade de maneiras de tomar as decisões D_1, D_2, D_3, ..., D_n juntas é $m_1 \cdot m_2 \cdot m_3 \cdot \ldots \cdot m_n$. .

Exemplo 1 Rafael foi convidado para uma festa e está em dúvida sobre como vai se vestir, ele dispõe de duas calças, uma vermelha e uma marrom, e três camisas, uma verde, uma preta e uma azul. De quantas maneiras Rafael pode se vestir para essa festa com uma calça e uma camisa?

Solução: Escolhendo a primeira decisão como a calça e a segunda como a camisa, temos os seguintes resultados: (calça marrom, camisa verde), (calça marrom, camisa preta), (calça marrom, camisa azul), (calça vermelha, camisa verde), (calça vermelha, camisa preta) e (calça vermelha, camisa azul). Note que temos 6 pares, logo ele possui 6 maneiras de se vestir para ir a festa. Através do Principio Fundamental da Contagem podemos determinar mais rápido o resultado.

Figura 2.1 – PFC



Fonte: Próprio autor (2025)

Nesse exemplo temos poucas possibilidades, é fácil listar todas elas mas nem sempre será fácil dessa maneira, de modo geral é mais conveniente aplicar diretamente o Princípio Fundamental da Contagem.

Definição: O Fatorial de um número natural n é dado pela multiplicação de n por todos os seus antecessores até chegar em 1 e denotamos por $n!$, ou seja:

$$n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 1.$$

Definição: O fatorial de zero é igual a um. Ou seja, $0! = 1$.

Exemplo 2 Calcule o valor de $10!$.

Solução: Pela definição de fatorial $10! = 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 3628800$.

2.2 PERMUTAÇÃO SIMPLES

Definição: A permutação simples são todos os agrupamentos ordenados que podemos fazer com n elementos distintos de um conjunto.

Exemplo 3 De quantas maneiras podemos ordenar n pessoas em uma fila?

Solução: A escolha da pessoa que ocupará o primeiro lugar pode ser feito de n maneiras; a escolha da pessoa que ocupará o segundo lugar pode ser feita de $n-1$ maneiras; a escolha da pessoa que ocupará o terceiro lugar pode ser feita de $n-2$ maneiras e assim por diante. A escolha da pessoa que ocupará o último lugar pode ser feita apenas de 1 maneira. .

$$\begin{array}{ccccc} \textit{Pessoa 1} & \textit{Pessoa 2} & \textit{Pessoa 3} & & \textit{Pessoa } n \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & & \downarrow \\ \underline{\quad} & \underline{\qquad} & \underline{\qquad} & \dots & \underline{\quad} \\ \uparrow & \uparrow & \uparrow & & \uparrow \\ n & (n-1) & (n-2) & & 1 \end{array}$$

Logo, pelo principio fundamental da contagem, o número de maneiras que podemos formar uma fila com essas pessoas será:

$$n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 1$$

Portanto, o número de permutações simples de n elementos distintos é $n!$ e denotaremos por $P_n = n!$.

Portanto, o número de permutações simples de n elementos distintos é $n!$ e denotaremos por $P_n = n!$.

Exemplo 4 Quantos são os anagramas da palavra “ESTUDO”?

Solução: Anagramas são as permutações que fazemos com as letras da palavra “ESTUDO”. Como temos 6 letras distintas, a quantidade de permutações dessa palavra será $P_6 = 6!$ e $6! = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 720$. Logo, essa palavra tem 720 anagramas.

2.3 COMBINAÇÃO SIMPLES

De quantas maneiras podemos escolher k elementos distintos entre n elementos distintos dados? Podemos também pensar da seguinte forma, quantos subconjuntos com k elementos podemos formar com o conjunto $\{b_1, b_2, b_3, \ldots, b_n\}$?

Cada subconjunto formado com k elementos recebe o nome de combinação simples de classe k dos n elementos $b_1, b_2, b_3, \ldots, b_n$. Então, por exemplo, as combinações simples de classe 2 dos elementos b_1, b_2, b_3, b_4 são

$\{b_1, b_2\}, \{b_1, b_3\}, \{b_1, b_4\}, \{b_2, b_3\}, \{b_2, b_4\}$ *e* $\{b_3, b_4\}$.

Representamos o número de combinações simples de classe k de n elementos por C_n^k. Então, $C_4^2 = 6$.

Pensando de outra maneira: A escolha do primeiro elemento da combinação pode ser feita de 4 maneiras e a do segundo de 3 maneiras, pelo principio multiplicativo poderíamos pensar que a resposta seria $4 \cdot 3 = 12$. Porém, pensando numa combinação, podemos perceber que os conjuntos $\{b_1, b_2\}, \{b_2, b_1\}$ são idênticos, pois possuem os mesmos elementos, e no resultado que encontramos anteriormente contamos como se fossem diferentes. Note que, em cada combinação, os elementos podem ser escritos em $P_2 = 2! = 2$ ordens, cada combinação foi contada 2 vezes. Portanto, a resposta é $\dfrac{12}{2} = 6$.

No caso geral, temos

$$C_n^k = \frac{n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)}{k!}, \ com \ 0 \leq k \leq n.$$

Multiplicando o numerador e o denominador da expressão acima por $(n-k)!$, temos

$$\frac{n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)}{k!} \cdot \frac{(n-k)!}{(n-k)!} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1) \cdot (n-k)!}{k! \cdot (n-k)!}.$$

Note que $n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1) \cdot (n-k)! = n!$, substituindo

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}, \ com \ 0 \leq k \leq n.$$

Lemos combinação de n elementos tomados k a k. Podemos utilizar três notações para representar essa fórmula, são elas: $\dbinom{n}{k}$, $C_{n,k}$ e C_n^k. Neste trabalho, iremos adotar a notação $\dbinom{n}{k}$.

Exemplo 5 Quantas comissões de 4 pessoas podem ser formadas com 6 homens e 5 mulheres, com exatamente 2 mulheres?

Solução: O grupo é formado por 4 pessoas, com exatamente 2 mulheres e consequentemente 2 homens. Note que o problema se resume em tomar duas decisões, escolher 2 mulheres entre as 5 e escolher 2 homens entre os 6. Temos $\dbinom{5}{2}$ maneiras de escolher as mulheres e $\dbinom{6}{2}$ maneiras de escolher os homens. Pelo Principio Fundamental da Contagem, temos:

$$\binom{5}{2} \cdot \binom{6}{2} = \frac{5!}{2!(5-2)!} \cdot \frac{6!}{2!(6-2)!} = \frac{5 \cdot 4 \cdot \cancel{3!}}{2! \cdot \cancel{3!}} \cdot \frac{6 \cdot 5 \cdot \cancel{4!}}{2! \cdot \cancel{4!}} = 150$$

Portanto, podem ser formadas 150 comissões com exatamente duas mulheres.

A análise combinatória é um ramo da matemática muito abrangente, temas como permutações circulares, permutações com elementos repetidos, permutações caóticas, os Lemas de Kaplansky e o Princípio de Dirichlet não serão discutidos nesse trabalho.

3 TRIÂNGULO DE PASCAL

A temática e os resultados apresentados nesse capítulo foram baseados no trabalho de (Laborão, 2016). Vamos observar a representação do Triângulo de Pascal abaixo e demonstrar suas propriedades.

Figura 3.1 – Triângulo de Pascal

$$
\begin{array}{lllllll}
1 & & & & & & \\
1 & 1 & & & & & \\
1 & 2 & 1 & & & & \\
1 & 3 & 3 & 1 & & & \\
1 & 4 & 6 & 4 & 1 & & \\
1 & 5 & 10 & 10 & 5 & 1 & \\
1 & 6 & 15 & 20 & 15 & 6 & 1 \\
 & & & \cdots & & &
\end{array}
$$

Fonte: (Gouveia, 2025)

Cada número do triângulo de Pascal é representado por uma combinação, de acordo com a figura abaixo.

Figura 3.2 – Triângulo de Pascal

$$
\begin{array}{ll}
\textit{linha } 0 & \binom{0}{0} \\
\textit{linha } 1 & \binom{1}{0}\binom{1}{1} \\
\textit{linha } 2 & \binom{2}{0}\binom{2}{1}\binom{2}{2} \\
\textit{linha } 3 & \binom{3}{0}\binom{3}{1}\binom{3}{2}\binom{3}{3} \\
\textit{linha } 4 & \binom{4}{0}\binom{4}{1}\binom{4}{2}\binom{4}{3}\binom{4}{4} \\
\vdots & \\
\textit{linha } n & \binom{n}{0}\binom{n}{1}\binom{n}{2}\binom{n}{3}\binom{n}{4}\cdots\binom{n}{n}
\end{array}
$$

Fonte: (Gouveia, 2025)

De modo que, n representa o número da linha e k representa o número da coluna. Começaremos a contagem a partir do zero e $n \geq k$.

O primeiro número de cada linha será dado por $\binom{n}{0}$ e o último $\binom{n}{n}$. Lembre de que $\binom{n}{0} = \frac{n!}{0!(n-0)!} = \frac{n!}{0! \cdot n!}$, como $0! = 1$, logo $\frac{n!}{1 \cdot n!} = \frac{n!}{n!} = 1$. De maneira análoga, $\binom{n}{n} = \frac{n!}{n!(n-n)!} = \frac{n!}{n! \cdot 0!} = \frac{n!}{n!} = 1$. Portanto, $\binom{n}{0} = 1$ e $\binom{n}{n} = 1$, isso nos diz que o primeiro número de cada linha e o último são iguais a 1.

Cada linha do Triângulo de Pascal possui uma certa quantidade de termos, a linha 0 possui 1 elemento, a linha 1 possui 2 elementos, a linha 2 possui 3 elementos e assim por diante. De modo que a linha n possui $n+1$ elementos.

O Triângulo de Pascal possui uma relação com o Binômio de Newton. O Binômio de Newton é uma fórmula que permite expandir expressões da forma $(x+a)^n$. Ele generaliza os produtos notáveis para expoentes elevados utilizando coeficientes binominais. O desenvolvimento do Binômio resulta em $n+1$ termos, onde a potência de x descrece de n a 0 e a de a cresce de 0 a n.

Desenvolvendo alguns produtos notáveis:

$(x+a)^0 = 1$

$(x+a)^1 = 1 \cdot x + 1 \cdot a$

$(x+a)^2 = 1 \cdot x^2 + 2 \cdot x \cdot a + 1 \cdot a^2$

$(x+a)^3 = 1 \cdot x^3 + 3 \cdot x^2 \cdot a + 3 \cdot x \cdot a^2 + 1 \cdot a^3$

$(x+a)^4 = 1 \cdot x^4 + 4 \cdot x^3 \cdot a + 6 \cdot x^2 \cdot a^2 + 4 \cdot x \cdot a^3 + 1 \cdot a^4$

Note que em cada desenvolvimento, os coeficientes correspondem aos números da linha do Triângulo de Pascal, como em $(x+a)^3$ que os coeficientes correspondem aos números da linha 3 do Triângulo de Pascal. Logo, os coeficientes do desenvolvimento de $(x+a)^n$ correspondem aos números da linha n, dessa maneira:

$$(x+a)^n = \binom{n}{0} \cdot x^n \cdot a^0 + \binom{n}{1} \cdot x^{n-1} \cdot a^1 + \binom{n}{2} \cdot x^{n-2} \cdot a^2 + \ldots + \binom{n}{n} \cdot x^0 \cdot a^n$$

O equivalente a:

$$(x+a)^n = \sum_{i=1}^{n} \binom{n}{i} x^{n-i} a^i$$

3.1 RELAÇÃO DE STIFEL

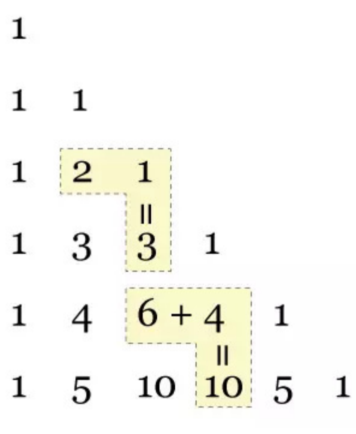
Figura 3.3 – Michael Stifel

Fonte: (Matemática, 2025a)

Michael Stifel foi um matemático alemão, nasceu em 1486 e morreu em 1567. Ele fez pesquisas na aritmética e álgebra, inventou os logaritmos independentemente de Napier, usando aproximações totalmente diferentes das que foram por ele utilizadas. Sua obra mais conhecida é *Arithmetica integra*, publicada em 1544. Na primeira parte desta obra, Stifel salienta as vantagens de se fazer a associação entre uma progressão aritmética e uma progressão geométrica, um século antes da invenção dos logaritmos. Apresentou também os coeficientes do desenvolvimento binomial até a ordem dezessete. Stifel já utilizava os sinais e representava as incógnitas muitas vezes por letras. Em 1535 mudou-se para uma paroquia em Holzdorf, e permaneceu lá por 12 anos. Em 1547 Stifel foi para a Prússia. Enquanto esteve lá, lecionou matemática e teologia na universidade de Königsberg, voltando três anos mais tarde pra a Saxônia. Em 1559 Stifel conseguiu um cargo na universidade de Jena, onde lecionou aritmética e geometria, embora sua pesquisa fosse sobre aritmética e álgebra.

O triângulo de Pascal é construído através da relação de Stifel, onde a soma de dois termos vizinhos é igual ao número que está abaixo do número da direita.

Figura 3.4 – Relação de Stifel



Fonte: (Caiusca, 2025)

Proposição: De modo geral, pela relação de Stifel temos que $\binom{n}{k}+\binom{n}{k+1}=\binom{n+1}{k+1}$.

Demonstração: Desenvolvendo a soma $\binom{n}{k}+\binom{n}{k+1}$, obtemos:

$$\begin{aligned}\binom{n}{k}+\binom{n}{k+1} &= \frac{n!}{k!(n-k)!}+\frac{n!}{(k+1)![n-(k+1)]!}\\ &= \frac{n!}{k!(n-k)!}+\frac{n!}{(k+1)!(n-k-1)!}\\ &= \underbrace{\frac{n!}{k!(n-k)(n-k-1)!}}_{I}+\underbrace{\frac{n!}{(k+1)!(n-k-1)!}}_{II}.\end{aligned}$$

Multiplicando a fração (I) por $\frac{(k+1)}{(k+1)}$ a fração (II) por $\frac{(n-k)}{(n-k)}$, chegamos a:

$$\binom{n}{k}+\binom{n}{k+1}=\frac{n!(k+1)}{(k+1)k!(n-k)(n-k-1)!}+\frac{n!(n-k)}{(k+1)!(n-k)(n-k-1)!}$$

Note que $(n-k)(n-k-1)!=(n-k)!$ e $(k+1)k!=(k+1)!$, fazendo a substituição adequada podemos somar as frações e obtemos:

$$\begin{aligned}\binom{n}{k}+\binom{n}{k+1}=\frac{n!(k+1)+n!(n-k)}{(k+1)!(n-k)!} &= \frac{n!(k+1+n-k)}{(k+1)!(n-k)!}\\ &= \frac{(n+1)n!}{(k+1)!(n-k)!}\\ &= \frac{(n+1)!}{(k+1)!(n-k)!}\\ &= \binom{n+1}{k+1}\end{aligned}$$

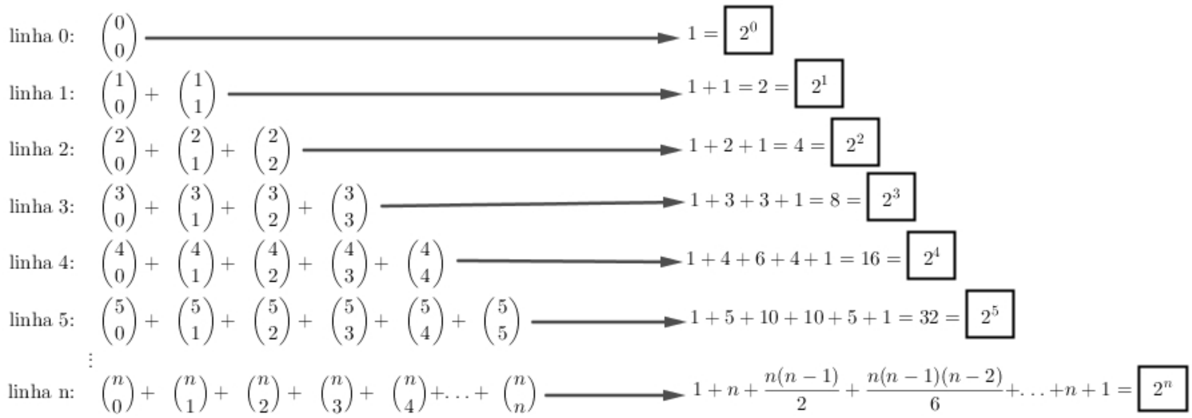
■

3.2 TEOREMA DAS LINHAS

Teorema 1. *A soma S_n dos elementos da n-ésima linha do Triângulo de Pascal é dada por 2^n, onde n é o número da linha, ou seja:*

$$S_n = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \binom{n}{3} + \ldots + \binom{n}{n} = 2^n.$$

Figura 3.5 – Teorema das linhas



Fonte: Próprio autor (2025)

Demonstração: Iremos demonstrar essa propriedade por indução. Primeiro vamos usar o passo base mostrar que a propriedade é válida para o menor n, nesse caso $n = 0$.

Para $n = 0$, $\binom{0}{0} = 2^0$ e $\binom{0}{0} = \dfrac{0!}{0!(0-0)!} = \dfrac{0!}{0!} = 1$ e $2^0 = 1$. Logo, é válido para $n = 0$.

Suponhamos que seja válido para um $n = k$ com $k \in \mathbb{N}$, então:

$$\underbrace{\binom{k}{0} + \binom{k}{1} + \binom{k}{2} + \binom{k}{3} + \ldots + \binom{k}{k} = 2^k}_{hipótese}.$$

Essa será a nossa hipótese de indução e queremos mostrar que é válido para $n = k+1$, ou seja:

$$\underbrace{\binom{k+1}{0} + \binom{k+1}{1} + \binom{k+1}{2} + \binom{k+1}{3} + \ldots + \binom{k+1}{k} + \binom{k+1}{k+1}}_{III} = 2^{k+1}$$

Pela relação de Stifel, temos:

$$
\begin{aligned}
\binom{k+1}{1} &= \binom{k}{0}+\binom{k}{1}\\
\binom{k+1}{2} &= \binom{k}{1}+\binom{k}{2}\\
\binom{k+1}{3} &= \binom{k}{2}+\binom{k}{3}\\
&\vdots\\
\binom{k+1}{k} &= \binom{k}{k-1}+\binom{k}{k}
\end{aligned}
$$

Às seguintes igualdades são verdadeiras, basta desenvolver as expressões para verificar, $\binom{k+1}{0}=\binom{k}{0}$ e $\binom{k+1}{k+1}=\binom{k}{k}$.

Organizando a expressão (III), temos:

$$\binom{k}{0}+\left[\binom{k}{0}+\binom{k}{1}\right]+\left[\binom{k}{1}+\binom{k}{2}\right]+\left[\binom{k}{2}+\binom{k}{3}\right]+\ldots+\left[\binom{k}{k-1}+\binom{k}{k}\right]+\binom{k}{k}.$$

Note que cada uma dessas parcelas acima aparecem duas vezes, de modo que a expressão (III) será:

$$=2\cdot\binom{k}{0}+2\cdot\binom{k}{1}+2\cdot\binom{k}{2}+2\cdot\binom{k}{3}+\ldots+2\cdot\binom{k}{k-1}+2\cdot\binom{k}{k}$$

$$=2\cdot\left[\binom{k}{0}+\binom{k}{1}+\binom{k}{2}+\binom{k}{3}+\ldots+\binom{k}{k-1}+\binom{k}{k}\right]$$

Por hipótese:

$$\binom{k}{0}+\binom{k}{1}+\binom{k}{2}+\binom{k}{3}+\ldots+\binom{k}{k-1}+\binom{k}{k}=2^k$$

Logo,

$$\binom{k+1}{0}+\binom{k+1}{1}+\binom{k+1}{2}+\binom{k+1}{3}+\ldots+\binom{k+1}{k}+\binom{k+1}{k+1}=2\cdot 2^k=2^{k+1}$$

Portanto, é válido para $n=k+1$, com $k\in\mathbb{N}$.

$\blacksquare$

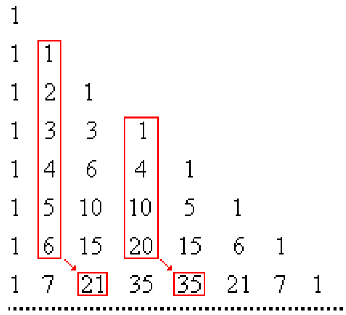
3.3 TEOREMA DAS COLUNAS

Teorema 2. *A soma dos números de uma mesma coluna, do primeiro até o n-ésimo número dessa coluna será imediatamente igual ao número da próxima linha e próxima coluna.*

De maneira geral:

$$\binom{n}{n}+\binom{n+1}{n}+\binom{n+2}{n}+\ldots+\binom{n+k}{n}=\binom{n+k+1}{n+1}$$

Figura 3.6 – Teorema das colunas



1							
1	1						
1	2	1					
1	3	3	1				
1	4	6	4	1			
1	5	10	10	5	1		
1	6	15	20	15	6	1	
1	7	21	35	35	21	7	1

Fonte: (Matemática, 2025b)

Demonstração: Iremos aplicar a relação de Stifel aos elementos da coluna $n+1$, a partir da primeira linha desta coluna.

$$\cancel{\binom{n+1}{n+1}}=\binom{n}{n}$$

$$\cancel{\binom{n+2}{n+1}}=\binom{n+1}{n}+\cancel{\binom{n+1}{n+1}}$$

$$\cancel{\binom{n+3}{n+1}}=\binom{n+2}{n}+\cancel{\binom{n+2}{n+1}}$$

$$\vdots$$

$$\cancel{\binom{n+k-1}{n+1}}=\binom{n+k-2}{n}+\cancel{\binom{n+k-2}{n+1}}$$

$$\cancel{\binom{n+k}{n+1}} = \binom{n+k-1}{n} + \cancel{\binom{n+k-1}{n+1}}$$

$$\binom{n+k+1}{n+1} = \binom{n+k}{n} + \cancel{\binom{n+k}{n+1}}$$

Somando todas as igualdades e cancelando os termos iguais, teremos:

$$\binom{n}{n} + \binom{n+1}{n} + \binom{n+2}{n} + \ldots + \binom{n+k}{n} = \binom{n+k+1}{n+1}$$

■

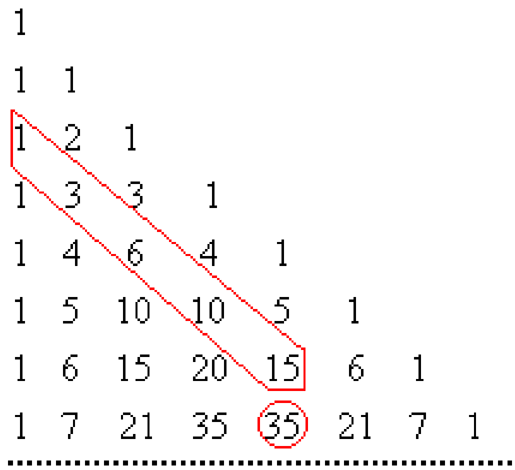
3.4 TEOREMA DA DIAGONAL

Teorema 3. *A soma dos números que estão na mesma diagonal, da primeira coluna até o n-ésimo número dessa diagonal, é igual ao número imediatamente abaixo do último termo somado.*

De maneira geral:

$$\binom{n}{0} + \binom{n+1}{1} + \binom{n+2}{2} + \binom{n+3}{3} + \ldots + \binom{n+k}{k} = \binom{n+k+1}{k}.$$

Figura 3.7 – Teorema da diagonal



Fonte: (Matemática, 2025b)

Demonstração: Iremos demonstrar esse teorema por meio de indução finita e da relação de Stifel. Começando pelo passo base, para $k=0$ temos:

$$\binom{n}{0}=\binom{n+1}{0}.$$

Note que $\binom{n}{0}=1$ e $\binom{n+1}{0}=\dfrac{(n+1)!}{0!(n+1)!}=1$. Então, a igualdade é verdadeira.

Agora, suponhamos que seja válido para um $k\in\mathbb{N}$, assim:

$$\underbrace{\binom{n}{0}+\binom{n+1}{1}+\binom{n+2}{2}+\binom{n+3}{3}+\ldots+\binom{n+k}{k}=\binom{n+k+1}{k}}_{hip\acute{o}tese}.$$

Essa será a nossa hipótese de indução. Queremos mostrar que é válido para $k+1$, ou seja:

$$\binom{n}{0}+\binom{n+1}{1}+\binom{n+2}{2}+\binom{n+3}{3}+\ldots+\binom{n+k}{k}+\binom{n+k+1}{k+1}=\binom{n+k+2}{k+1}$$

Por hipótese $\binom{n}{0}+\binom{n+1}{1}+\binom{n+2}{2}+\binom{n+3}{3}+\ldots+\binom{n+k}{k}=\binom{n+k+1}{k}$ é válido.

Somando $\binom{n+k+1}{k+1}$ em ambos os lados da igualdade acima, obtemos:

$$\binom{n}{0}+\binom{n+1}{1}+\binom{n+2}{2}+\binom{n+3}{3}+\ldots+\binom{n+k}{k}+\binom{n+k+1}{k+1}=\binom{n+k+1}{k}+\binom{n+k+1}{k+1}$$

Aplicando a relação de Stifel no lado direito da igualdade, temos:

$$\binom{n+k+1}{k}+\binom{n+k+1}{k+1}=\binom{n+k+2}{k+1}$$

De modo que:

$$\binom{n}{0}+\binom{n+1}{1}+\binom{n+2}{2}+\binom{n+3}{3}+\ldots+\binom{n+k}{k}+\binom{n+k+1}{k+1}=\binom{n+k+2}{k+1}.$$

■

Exemplo 6 O Valor da soma $\binom{5}{2} + \binom{5}{3} + \binom{6}{4} + \binom{7}{5}$ é :

Solução: Como a soma se trata de combinações, isso nos lembra o triângulo de Pascal e suas propriedades, note que podemos aplicar a relação de Stifel nas duas primeiras parcelas

$$\binom{5}{2} + \binom{5}{3} = \binom{6}{3}.$$

Ficaremos com:

$$\binom{6}{3} + \binom{6}{4} + \binom{7}{5}.$$

Aplicando novamente a relação de Stifel

$$\binom{6}{3} + \binom{6}{4} = \binom{7}{4}.$$

Aplicando mais uma vez a relação de Stifel chegamos no resultado final

$$\binom{7}{4} + \binom{7}{5} = \binom{8}{5}.$$

Logo $\binom{5}{2} + \binom{5}{3} + \binom{6}{4} + \binom{7}{5} = \binom{8}{5}$.

Exemplo 7 A soma de todos os elementos de uma certa linha do triângulo de Pascal é igual a 1024. Qual é o terceiro elemento dessa linha?

Solução: Já provamos que a soma dos elementos de uma linha n do triângulo de Pascal é dado por 2^n. Como a soma é igual a 1024, então:

$$2^n = 1024 \Rightarrow 2^n = 2^{10} \Rightarrow n = 10.$$

Então a linha que estamos interessados é a 10, o terceiro elemento será $\binom{10}{2}$. Lembrando de que contamos a partir do 0, $\binom{10}{0}$ é o primeiro elemento e $\binom{10}{1}$ o segundo.

$$\binom{10}{2} = \frac{10!}{2!(10-2)!} = \frac{10!}{2! \cdot 8!} = \frac{10 \cdot 9 \cdot \cancel{8!}}{2! \cdot \cancel{8!}} = \frac{10 \cdot 9}{2} = 45$$

Portanto, 45 é o terceiro elemento dessa linha.

Exemplo 8 Determine o valor da soma $\binom{5}{5}+\binom{6}{5}+\binom{7}{5}+...+\binom{11}{5}$.

Solução: A soma que estamos interessados em calcular envolve combinação, o que nos lembra do triângulo de Pascal, interpretando dessa maneira, note que a coluna está fixa e às linhas estão variando, de 5 ate 11. Pelo teorema das colunas, temos que:

$$\binom{5}{5}+\binom{6}{5}+\binom{7}{5}+...+\binom{11}{5}=\binom{11+1}{5+1}=\binom{12}{6}$$

Agora, basta calcular o valor de $\binom{12}{6}$:

$$\binom{12}{6}=\frac{12!}{6!(12-6)!}=\frac{12!}{6!\cdot 6!}=\frac{12\cdot 11\cdot 10\cdot 9\cdot 8\cdot 7\cdot\cancel{6!}}{6!\cdot\cancel{6!}}=\frac{12\cdot 11\cdot 10\cdot 9\cdot 8\cdot 7}{6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}=\frac{\cancel{120}\cdot 11\cdot 9\cdot 8\cdot 7}{6\cdot\cancel{120}}$$

Simplificando a expressão acima, temos:

$$\binom{12}{6}=\frac{11\cdot 9\cdot 8\cdot 7}{6}=\frac{5544}{6}=924$$

.

O valor da soma será 924.

Exemplo 9 Um professor de matemática escreveu no quadro a seguinte soma

$$\binom{4}{0}+\binom{5}{1}+\binom{6}{2}+\binom{7}{3}+\binom{8}{4}$$

e perguntou para a turma qual é o valor dela. Qual deve ser a resposta correta da turma?

Solução: Relacionando essa soma com os termos do triângulo de Pascal é possível notar que as linhas e as colunas são números consecutivos, então estamos somando elementos na diagonal. De acordo com o teorema da diagonal:

$$\binom{4}{0}+\binom{5}{1}+\binom{6}{2}+\binom{7}{3}+\binom{8}{4}=\binom{8+1}{4}=\binom{9}{4}$$

Basta calcular o valor de $\binom{9}{4}$.

$$\binom{9}{4} = \frac{9!}{4!(9-4)!} = \frac{9!}{4!\cdot 5!} = \frac{9\cdot 8\cdot 7\cdot 6\cancel{\cdot 5!}}{4!\cancel{\cdot 5!}} = \frac{9\cdot 8\cdot 7\cdot 6}{4\cdot 3\cdot 2\cdot 1},$$

simplificando obtemos:

$$\binom{9}{4} = 9\cdot 2\cdot 7 \Rightarrow \binom{9}{4} = 126$$

A resposta da turma dever ser 126.

4 PROGRESSÃO ARITMÉTICA (P.A.)

O tema e os resultados apresentados nesse capítulo foram baseados no livro (Iezzi; Hazzan, 2013).

Definição: Progressão Aritmética (P.A.) é uma sequência numérica onde a diferença entre termos consecutivos é constante.

$$\begin{cases} a_1 = a \\ a_n = a_{n-1} + r, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq 2 \end{cases}.$$

Definiremos a_1 como o primeiro termo dessa sequência, a constante é chamada de razão e denotamos por r, a e r são números reais dados. Sendo assim, em uma progressão aritmética, cada termo a partir do segundo, é o anterior somado a essa constante r dada. Vejamos alguns exemplos de progressões aritméticas:

$P_1 = (2, 4, 6, 8, 10, \ldots)$, $a_1 = 2$ e $r = 2$.

$P_2 = (0, -3, -6, -9, -12, \ldots)$, $a_1 = 0$ e $r = -3$.

$P_3 = (5, 5, 5, 5, 5, \ldots)$, $a_1 = 5$ e $r = 0$.

4.1 CLASSIFICAÇÃO

As progressões aritméticas podem ser classificadas em três tipos: crescentes, constantes ou decrescentes.

Crescentes: Quando cada termo é maior que o anterior, ou seja, quando $r > 0$, pois:

$$a_n > a_{n-1} \Leftrightarrow a_n - a_{n-1} > 0 \Leftrightarrow r > 0.$$

Exemplo: P_1

Constantes: Quando cada termo é igual ao anterior, ou seja, quando $r = 0$, pois:

$$a_n = a_{n-1} \Leftrightarrow a_n - a_{n-1} = 0 \Leftrightarrow r = 0.$$

Exemplo: P_3

Decrescentes: Quando cada termo é menor que o anterior, ou seja, quando $r < 0$, pois:

$$a_n < a_{n-1} \Leftrightarrow a_n - a_{n-1} < 0 \Leftrightarrow r < 0.$$

Exemplo: P_2

Exemplo 10 Determine c de modo que $\left(c^2, (c+1)^2, (c+5)^2\right)$ seja uma P.A.

Solução: Para ser uma P.A é necessário que $(c+1)^2 - c^2 = (c+5)^2 - (c-1)^2$, temos $(c+1)^2 = c^2 + 2c + 1$ e $(c+5)^2 = c^2 + 10c + 25$, substituindo ficaremos com:

$$\cancel{c^2} + 2c + 1 - \cancel{c^2} = \cancel{c^2} + 10c + 25 - \cancel{c^2} - 2c - 1$$

$$2c + 1 = 8c + 24 \Rightarrow 2c - 8c = 24 - 1 \Rightarrow -6c = 23 \Rightarrow c = -\frac{23}{6}.$$

Portanto, $c = -\dfrac{23}{6}$.

4.2 FÓRMULA DO TERMO GERAL

Usando a definição de P.A. e admitindo o primeiro termo (a_1), a razão (r) e o índice (n) de um termo desejado, temos:

$$\begin{cases} a_2 &= a_1 + r \\ a_3 &= a_2 + r \\ a_4 &= a_3 + r \\ &\vdots \\ a_n &= a_{n-1} + r \end{cases}$$

Somando membro a membro todas essas igualdades, temos:

$$a_2 + a_3 + a_4 + \ldots + a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_{n-1} + \underbrace{(r + r + r + \ldots + r)}_{n-1 \quad \text{vezes}}$$

Cancelando os termos iguais.

$$\cancel{a_2} + \cancel{a_3} + \cancel{a_4} + \ldots + a_n = a_1 + \cancel{a_2} + \cancel{a_3} + \ldots + \cancel{a_{n-1}} + (n-1) \cdot r \Rightarrow a_n = a_1 + (n-1) \cdot r$$

Dessa maneira, deduzimos que a fórmula do termo geral de uma P.A. é a_1 e a razão será r, o n-ésimo termo é:

$$a_n = a_1 + (n-1)\cdot r.$$

Iremos demonstrar através da indução finita que essa fórmula é válida para $n \in \mathbb{N}^*$.

Para $n = 1$, temos:

$$a_1 = a_1 + (1-1)\cdot r \Rightarrow a_1 = a_1 + 0\cdot r \Rightarrow a_1 = a_1.$$

É verdade para $n = 1$.

Suponhamos que seja válido para $n = k$ e será nossa hipótese de indução:

$$a_k = a_1 + (k-1)\cdot r$$

Queremos provar que é válido para $n = k+1$:

$$a_{k+1} = a_k + r \Rightarrow a_{k+1} = [a_1 + (k-1)\cdot r] + r \Rightarrow a_{k+1} = a_1 + k\cdot r - r + r \Rightarrow a_{k+1} = a_1 + k\cdot r$$

Como $a_{k+1} = a_1 + k\cdot r$, é válido para $n = k+1$.

Portanto, $a_n = a_1 + (n-1)\cdot r, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

Exemplo 11 Determine a_{10} e a_{25} da P.A. $(4,7,10,13,\ldots)$.

Solução: Note que $a_1 = 4$ e que $r = 3$, vamos aplicar a fórmula do termo geral de uma P.A:

$$a_n = a_1 + (n-1)\cdot r \Rightarrow a_n = 4 + (n-1)\cdot 3 \Rightarrow a_n = 3n+1.$$

Dessa maneira, obtemos:

$a_{10} = 3\cdot 10 + 1 \Rightarrow a_{10} = 31$ e $a_{25} = 3\cdot 25 + 1 \Rightarrow a_{25} = 76$.

Exemplo 12 Quantos números ímpares há entre 14 e 192?

Solução: Entre os números 14 e 192 é necessário notar que o primeiro número ímpar é 15 e o último é 191, formando a P.A. $(15,17,19,21,\ldots,191)$, em que $a_1 = 15$ e $r = 2$.vPela fórmula do termo geral temos que:

$$a_n = 15 + (n-1)\cdot 2 \Rightarrow a_n = 2n+13.$$

Substituindo $a_n = 191$, obtemos:

$$191 = 2n + 13 \Rightarrow 2n = 191 - 13 \Rightarrow 2n = 178 \Rightarrow n = \frac{178}{2} = 89.$$

Encontramos $n = 89$, logo existem 89 números ímpares entre 14 e 192.

Iremos deduzir uma fórmula para calcular a soma dos n termos de uma P.A., que denotaremos por S_n.

Teorema 4. *A soma S_n dos n primeiros números inteiros positivos é dada por:*

$$S_n = \frac{n \cdot (n+1)}{2}$$

.

Demonstração: Vamos demonstrar o Teorema 4 por indução finita.

Para $n = 1$ temos que $1 = \dfrac{1 \cdot (1+1)}{2} \Rightarrow 1 = \dfrac{2}{2} \Rightarrow 1 = 1$. É válido para $n = 1$.

Suponhamos que seja válido para $n = k$:

$$1 + 2 + 3 + 4 + \ldots + k = \frac{k \cdot (k+1)}{2}.$$

Provaremos que é válido para $n = k + 1$:

$$\underbrace{1 + 2 + 3 + 4 + \ldots + k}_{\text{hipótese}} + (k+1) = \frac{k \cdot (k+1)}{2} + (k+1) =$$

$$= \frac{k \cdot (k+1) + 2 \cdot (k+1)}{2} = \frac{(k+1) \cdot (k+2)}{2} = \frac{(k+1) \cdot [(k+1)+1]}{2}$$

Mostrando que é válido para $n = k + 1$. Portanto $1 + 2 + 3 + 4 + \ldots + n = \dfrac{n \cdot (n+1)}{2}, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

$\blacksquare$

Teorema 5. *Em toda P.A. a soma S_n dos n primeiros termos em função da razão, primeiro termo e da quantidade de termos n é dada por:*

$$S_n = na_1 + \frac{n \cdot (n-1)}{2} \cdot r$$

Demonstração: Em uma P.A. temos às seguintes igualdades:

$$\begin{cases} a_1 & = a_1 \\ a_2 & = a_1 + r \\ a_3 & = a_1 + 2r \\ & \vdots \\ a_n & = a_1 + (n-1) \cdot r \end{cases}$$

Somando todas essas igualdades acima:

$$a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n = \underbrace{(a_1 + a_1 + a_1 + \ldots + a_1)}_{n \quad \text{parcelas}} + [r + 2r + \ldots + (n-1) \cdot r] =$$

$$= na_1 + [1 + 2 + 3 + \ldots + (n-1)] \cdot r.$$

Pelo teorema 4: $1 + 2 + 3 + \ldots + (n-1) = \dfrac{(n-1) \cdot n}{2}$, substituindo na igualdade anterior temos:

$$\underbrace{a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n}_{S_n} = na_1 + \frac{n \cdot (n-1)}{2} \cdot r$$

Portanto, $S_n = na_1 + \dfrac{n \cdot (n-1)}{2} \cdot r$

■

Teorema 6. *Em qualquer P.A. a soma S_n dos n primeiros termos em função do primeiro termo, n-ésimo termo e do número de termos é dada por:*

$$S_n = \frac{n \cdot (a_1 + a_n)}{2}$$

Demonstração: Do teorema (2) temos:

$$S_n = na_1 + \frac{(n-1) \cdot n}{2} \cdot r = \frac{2na_1 + n \cdot (n-1) \cdot r}{2} = \frac{n \cdot [2a_1 + (n-1) \cdot r]}{2} = \frac{n \cdot [a_1 + a_1 + (n-1) \cdot r]}{2}$$

Lembre de que $a_n = a_1 + (n-1) \cdot r$, substituindo na igualdade acima:

$$S_n = \frac{n \cdot (a_1 + a_n)}{2}$$

■

Exemplo 13 Encontre o valor de x na equação

$$1+\frac{1}{1+2}+\frac{1}{1+2+3}+\ldots+\frac{1}{1+2+3+\ldots+x}=\frac{2021}{1011}$$

Solução: Observando o denominador dessas frações podemos notar uma soma de termos de uma progressão aritmética, escrevendo de modo geral temos:

$$\frac{1}{\frac{(1+1)\cdot 1}{2}}+\frac{1}{\frac{2\cdot(1+2)}{2}}+\frac{1}{\frac{3\cdot(1+3)}{2}}+\ldots+\frac{1}{\frac{x\cdot(x+1)}{2}}=\frac{2021}{1011}$$

$$\frac{2}{1\cdot 2}+\frac{2}{2\cdot 3}+\frac{2}{3\cdot 4}+\ldots+\frac{2}{x\cdot(x+1)}=\frac{2021}{1011}$$

Colocando o 2 em evidência,

$$2\cdot\left[\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\ldots+\frac{1}{x\cdot(x+1)}\right]=\frac{2021}{1011}$$

Dentro do colchetes temos uma soma telescóspica, mulltiplicando ambos os lados da igualdade acima por $\frac{1}{2}$ obtemos:

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\ldots+\frac{1}{x\cdot(x+1)}=\frac{2021}{2022}$$

Podemos transformar a soma das frações da seguinte maneira:

$$\left(1-\cancel{\frac{1}{2}}\right)+\left(\cancel{\frac{1}{2}}-\cancel{\frac{1}{3}}\right)+\left(\cancel{\frac{1}{3}}-\cancel{\frac{1}{4}}\right)+\ldots\left(\cancel{\frac{1}{x}}-\frac{1}{x+1}\right)=\frac{2021}{2022}$$

Ao cancelar os termos simétricos ficamos apenas com a igualdade $1-\frac{1}{x+1}=\frac{2021}{2022}$, de maneira que:

$$1-\frac{1}{x+1}=\frac{2021}{2022}\Rightarrow\frac{x+1}{x+1}-\frac{1}{x+1}=\frac{2021}{2022}\Rightarrow\frac{x}{x+1}=\frac{2021}{2022}\Rightarrow x=2021$$

5 PROGRESSÃO ARITMÉTICA DE ORDEM SUPERIOR

No Ensino Médio, nos deparamos com o estudo de Progressões Aritméticas que são sequências onde a variação de um número para o outro é sempre constante, também podemos chama-lá de Progressão Aritmética de Primeira Ordem. Agora, iremos introduzir a noção de Progressão Aritmética de Ordem Superior.

Os resultados apresentados nesse capítulo foram baseados nos trabalhos de (Nobre; Rocha, 2018) e (FILHO, 2020).

5.1 OPERADOR DIFERENÇA

Definição: Dada uma sequência a_n com $n \in \mathbb{N}$, definimos o operador diferença $(\Delta^1 a_n)_{n\in\mathbb{N}} = (a_{n+1} - a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, de modo que é formada uma nova sequência. Por $(\Delta^1 a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ser uma sequência, podemos obter mais uma vez o operador diferença e com isso teremos $(\Delta^1[\Delta^1 a_n])_{n\in\mathbb{N}} = (\Delta^2 a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, de maneira recursiva, $(\Delta^j a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, para $j \geq 3$.

Definição: Uma sequência $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ será uma progressão aritmética de ordem j se quando aplicarmos o operador diferença j vezes chegarmos a uma sequência constante.

Dessa maneira, uma sequência $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ será uma PA de primeira ordem se o operador diferença $(\Delta^1 a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ for uma P.A constante; será uma P.A de segunda ordem se o operador diferença $(\Delta^2 a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ for uma P.A constante; será uma P.A de terceira ordem se o operador diferença $(\Delta^3 a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ for uma P.A constante e assim sucessivamente.

Exemplo 14 Determine a ordem de cada progressão aritmética,

a) $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} = (3, 7, 13, 21, 31, \ldots)$, onde $a_1 = 3$ e $a_{n+1} = a_n + 2n + 2$, para $n \geq 1$

b) $(b_n)_{n\in\mathbb{N}} = (2, 8, 20, 40, 70, \ldots)$, onde $b_1 = 2$ e $b_{n+1} = b_n + n^2 + 3n + 2$, para $n \geq 1$

c) $(c_n)_{n\in\mathbb{N}} = (-1, 0, 16, 97, 353, \ldots)$, onde $c_1 = -1$ e $c_{n+1} = c_n + n^4$, para $n \geq 1$

alternativas adaptadas de (Nobre; Rocha, 2018, p. 37).

Solução:

a) Dada a sequência $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} = (3, 7, 13, 21, 31, \ldots)$, iremos aplicar o operador diferença até encontrarmos uma P.A. constante, dessa forma temos que $\Delta^1 a_n = a_{n+1} - a_n = 2n + 2$,

$\Delta^2 a_n = \Delta^1 a_{n+1} - \Delta^1 a_n = 2\cdot(n+1)+2-2n-2 = \cancel{2n}+\cancel{2}+2-\cancel{2n}-\cancel{2} = 2$. Dessa maneira, $\Delta^2 a_n = 2$, $(\Delta^1 a_n)_{n\in\mathbb{N}} = (4,6,8,10,\ldots)$ e $(\Delta^2 a_n)_{n\in\mathbb{N}} = (2,2,2,2,\ldots)$. Portanto é uma P.A. de segunda ordem. De maneira análoga faremos na letra (b) e (c).

b) $(b_n)_{n\in\mathbb{N}} = (2,8,20,40,70,\ldots)$, aplicando o operador diferença, temos:

$$\Delta^1 b_n = b_{n+1} - b_n = n^2+3n+2 \Rightarrow \Delta^1 b_n = n^2+3n+2$$

$$\Delta^2 b_n = \Delta^1 b_{n+1} - \Delta^1 b_n = (n+1)^2+3\cdot(n+1)+2-n^2-3n-2 \Rightarrow$$

$$\Delta^2 b_n = \cancel{n^2}+2n+1+\cancel{3n}+3+\cancel{2}-\cancel{n^2}-\cancel{3n}-\cancel{2} = 2n+4$$

$$\Delta^3 b_n = \Delta^2 b_{n+1} - \Delta^2 b_n = 2\cdot(n+1)+4-2n-4 = \cancel{2n}+2+\cancel{4}-\cancel{2n}-\cancel{4} = 2$$

Como $\Delta^3 b_n = 2$, significa que é uma P.A de terceira ordem e:

$(\Delta^1 b_n)_{n\in\mathbb{N}} = (6,12,20,30,42,\ldots)$

$(\Delta^2 b_n)_{n\in\mathbb{N}} = (6,8,10,12,14,\ldots)$

$(\Delta^3 b_n)_{n\in\mathbb{N}} = (2,2,2,2,2,\ldots)$.

c) $(c_n)_{n\in\mathbb{N}} = (-1,0,16,97,353,\ldots)$, aplicando o operador diferença, temos:

$$\Delta^1 c_n = c_{n+1} - c_n = n^4 \Rightarrow \Delta^1 c_n = n^4$$

$$\Delta^2 c_n = \Delta^1 c_{n+1} - \Delta^1 c_n = (n+1)^4 - n^4 = \cancel{n^4}+4n^3+6n^2+4n+1-\cancel{n^4} \Rightarrow$$

$$\Delta^2 c_n = 4n^3+6n^2+4n+1$$

$$\Delta^3 c_n = \Delta^2 c_{n+1} - \Delta^2 c_n = 4\cdot(n+1)^3+6\cdot(n+1)^2+4\cdot(n+1)+1-4n^3-6n^2-4n-1$$

Desenvolvendo $\Delta^3 c_n$ temos:

$$\Delta^3 c_n = 4\cdot(n^3+3n^2+3n+1)+6\cdot(n^2+2n+1)+4\cdot(n+1)+1-4n^3-6n^2-4n-1$$

$$\Delta^3 c_n = \cancel{4n^3}+12n^2+12n+4+\cancel{6n^2}+12n+6+\cancel{4n}+4+\cancel{1}-\cancel{4n^3}-\cancel{6n^2}-\cancel{4n}-\cancel{1}$$

$$\Delta^3 c_n = 12n^2+24n+14$$

$$\Delta^4 c_n = \Delta^3 c_{n+1} - \Delta^3 c_n = 12\cdot(n+1)^2+24\cdot(n+1)+14-12n^2-24n-14$$

$$\Delta^4 c_n = 12\cdot(n^2+2n+1)+24\cdot(n+1)+14-12n^2-24n-14$$

$\Delta^4 c_n = \cancel{12n^2} + 24n + 12 + \cancel{24n} + 24 + \cancel{14} - \cancel{12n^2} - \cancel{24n} - \cancel{14}$

$\Delta^4 c_n = 24n + 36$

$\Delta^5 c_n = \Delta^4 c_{n+1} - \Delta^4 c_n = 24 \cdot (n+1) + 36 - 24n - 36 = \cancel{24n} + 24 + \cancel{36} - \cancel{24n} - \cancel{36} \Rightarrow$

$\Delta^5 c_n = 24.$

Como $\Delta^5 c_n = 24$, a sequência será uma P.A de quinta ordem e:

$(\Delta^1 c_n)_{n\in\mathbb{N}} = (1, 16, 81, 256, \ldots)$

$(\Delta^2 c_n)_{n\in\mathbb{N}} = (15, 65, 175, 369, \ldots)$

$(\Delta^3 c_n)_{n\in\mathbb{N}} = (50, 110, 194, 302, \ldots)$

$(\Delta^4 c_n)_{n\in\mathbb{N}} = (60, 84, 108, 132, \ldots)$

$(\Delta^5 c_n)_{n\in\mathbb{N}} = (24, 24, 24, 24, \ldots).$

5.2 POLINÔMIO DE GRAU J

Proposição: Se $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma progressão aritmética de ordem j, então seu termo geral a_n é um polinômio de grau j.

Demonstração: De modo geral, um polinômio qualquer pode ser escrito da seguinte maneira:

$$P(n) = \alpha_0 n^j + \alpha_1 n^{j-1} + \alpha_2 n^{j-2} + \ldots + \alpha_{j-1} n^1 + \alpha_j$$

Onde o monômio $\alpha_0 n^j$ representa a ordem do polinômio. Iremos aplicar o operador diferença considerando o monômio de ordem j e iremos encontrar um monômio de ordem $(j-1)$ somado a outros de ordem mais baixa, podendo aplicar mais uma vez o operador diferença no segundo polinômio considerando o monômio de ordem $(j-1)$ e assim sucessivamente. Então seja o polinômio de ordem j , $P(n) = \alpha n^j$, aplicando o operador diferença temos:

$$\Delta^1[P(n)] = P(n+1) - P(n) \Rightarrow \alpha \cdot (n+1)^j - \alpha n^j$$

Desenvolvendo $\alpha \cdot (n+1)^j$ temos:

$$\alpha \cdot (n+1)^j = \alpha \left[\binom{j}{j} n^j + \binom{j}{j-1} n^{j-1} + \binom{j}{j-2} n^{j-2} + \ldots + \binom{j}{1} n^1 + \binom{j}{0} n^0 \right]$$

Como

$$\binom{j}{j} = \binom{j}{0} = 1$$

E, $n^0 = 1, se\ n \neq 0$. Ficando com

$$P(n+1) = \alpha b^j + \alpha \left[\binom{j}{j-1} n^{j-1} + \binom{j}{j-2} n^{j-2} + \ldots + \binom{j}{1} n^1 + 1 \right].$$

Voltando para $\Delta^1[P(n)]$.

$$\Delta^1[P(n)] = \cancel{\alpha b^j} + \alpha \left[\binom{j}{j-1} n^{j-1} + \binom{j}{j-2} n^{j-2} + \ldots + \binom{j}{1} n^1 + 1 \right] - \cancel{\alpha b^j}.$$

De como que ficamos com:

$$\Delta^1[P(n)] = \alpha \left[\binom{j}{j-1} n^{j-1} + \binom{j}{j-2} n^{j-2} + \ldots + \binom{j}{1} n^1 + 1 \right].$$

Dessa forma, podemos ver que ao aplicar o operador diferença em qualquer polinômio de ordem j, a ordem desse polinômio é diminuida em uma unidade, ou seja, sua ordem passa a ser $(j-1)$. Ao aplicar o operador diferença j vezes nesse polinômio, reduzindo sua ordem de maneira sucessiva iremos chegar a um resultado constante, implicando que o polinômio de ordem j pode representar uma progressão aritmética de ordem j.

Exemplo 15 Determine o polinômio que representa o termo geral a_n de uma progressão aritmética de segunda ordem com $a_1 = 5$, $a_2 = 14$ e $a_3 = 27$.

Solução: Como a sequência é uma progressão aritmética é de segunda ordem, existe um polinômio de grau 2 que representa o termo geral, ou seja, $P(n) = a_n = an^2 + bn + c$. Sabendo os três primeiros termos dessa sequência podemos criar o seguinte sistema de equações:

$$\begin{cases} a+b+c &= 5\ (I) \\ 4a+2b+c &= 14\ (II) \\ 9a+3b+c &= 27\ (III) \end{cases}$$

Resolvendo o sistema acima pelo método do escalonamento, iremos obter os valores de a,b e c. Fazendo $(II)-(I)$ temos:

$$(II)-(I) = 4a+2b+\cancel{c}-a-b-\cancel{c} = 14-5 \Rightarrow 3a+b = 9.$$

Fazendo $(III)-(I)$,

$$(III)-(I) = 9a+3b+\cancel{c}-a-b-\cancel{c} = 27-5 \Rightarrow 8a+2b = 22$$

Temos um novo sistema:

$$\begin{cases} 3a+b &= 9\ (IV) \\ 8a+2b &= 22\ (V) \end{cases}$$

Fazendo $-2\cdot(IV)+(V)$ temos:

$$-2\cdot(IV)+(V) = -2\cdot(3a+b)+8a+2b = -2\cdot 9+22 \Rightarrow -6a-\cancel{2b}+8a+\cancel{2b} = -18+22 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2a = 4 \Rightarrow a = 2$$

Substituindo $a = 2$ na equação (IV) encontramos o valor de b,

$$3a+b = 9 \Rightarrow 3\cdot 2+b = 9 \Rightarrow 6+b = 9 \Rightarrow b = 3.$$

Substituindo os valores de a e b na equação (I) encontramos o valor de c,

$$a+b+c = 5 \Rightarrow 2+3+c = 5 \Rightarrow 5+c = 5 \Rightarrow c = 0.$$

Portanto, $a_n = 2n^2+3n$.

Exemplo 16 Mostre que o polinômio $P(n) = n^3-2n^2+3n+1$ representa uma progressão aritmética de ordem 3.

Solução: Queremos mostrar que o polinômio $P(n)$ representa uma progressão aritmética de ordem 3, então iremos aplicar o operador diferença 3 vezes para chegar em valor constante.

$$[\Delta^1 P(n)] = P(n+1)-P(n) \Rightarrow (n+1)^3-2\cdot(n+1)^2+3\cdot(n+1)+1-n^3+2n-3n-1$$

$$[\Delta^1 P(n)] = \cancel{n^3}+3n^2+\cancel{3n}+1-\cancel{2n^2}-4n-2+3n+3+\cancel{1}-\cancel{n^3}+\cancel{2n^2}-\cancel{3n}-\cancel{1}$$

$$[\Delta^1 P(n)] = 3n^2-n+2$$

Aplicando o operador diferença pela segunda vez:

$$[\Delta^2 P(n)] = [\Delta^1 P(n+1)]-[\Delta^1 P(n)] \Rightarrow 3\cdot(n+1)^2-(n+1)+2-3n^2+n-2$$

$$[\Delta^2 P(n)] = \cancel{3n^2}+6n+3-\cancel{n}-1+\cancel{2}-\cancel{3n^2}+\cancel{n}-\cancel{2}$$

$$[\Delta^2 P(n)] = 6n+2$$

Pela terceira vez:

$$[\Delta^3 P(n)] = [\Delta^2 P(n+1)]-[\Delta^2 P(n)] \Rightarrow 6\cdot(n+1)+2-6n-2$$

$$[\Delta^3 P(n)] = \cancel{6n}+6+\cancel{2}-\cancel{6n}-\cancel{2}$$

$$[\Delta^3 P(n)] = 6$$

Como $[\Delta^3 P(n)] = 6$ é constante, então o polinômio $P(n) = n^3-2n^2+3n+1$ representa uma progressão aritmética de ordem 3.

5.3 FÓRMULA DO TERMO GERAL

Vamos enunciar uma fórmula para o termo geral de uma progressão aritmética escrevendo com coeficientes binominais. Sabemos que o termo geral a_n de uma progressão aritmética de primeira ordem é escrito como $a_n = a_1 + (n-1)\cdot r$, escrevendo de outra maneira temos:

$$a_n = a_1 + (n-1)\cdot r \Rightarrow a_n = a_1 \cdot \binom{n-1}{0} + r \cdot \binom{n-1}{1}$$

Seja $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} = (a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n)$ uma progressão aritmética de segunda ordem, sabemos que $\Delta^1 a_n$ será uma progressão aritmética de primeira ordem, então podemos ter as seguintes igualdades:

$$\begin{cases} a_2 - a_1 & = b_1 \\ a_3 - a_2 & = b_2 \\ a_4 - a_3 & = b_3 \\ & \vdots \\ a_n - a_{n-1} & = b_{n-1} \end{cases}$$

Somando as igualdades acima, temos:

$$(\cancel{a_2} - a_1) + (\cancel{a_3} - \cancel{a_2}) + (\cancel{a_4} - \cancel{a_3}) + \ldots + (a_n + \cancel{a_{n-1}}) = \underbrace{b_1 + b_2 + b_3 + \ldots + b_{n-1}}_{S_{n-1}}$$

Note que $b_1 + b_2 + b_3 + \ldots + b_{n-1}$ é a soma dos termos de uma progressão aritmética de primeira ordem, logo podemos calcular através de S_{n-1} e:

$$a_n - a_1 = S_{n-1} \Rightarrow a_n = a_1 + S_{n-1}$$

Desenvolvendo S_{n-1} temos:

$$S_{n-1} = \frac{(b_1 + b_{n-1})\cdot(n-1)}{2}, \text{ e } b_{n-1} = b_1 + (n-2)\cdot r \Rightarrow b_{n-1} = b_1 + nr - 2r$$

$$S_{n-1} = \frac{(b_1 + b_1 + nr - 2r)\cdot(n-1)}{2} = \frac{(2b_1 + nr - 2r)\cdot(n-1)}{2} = \frac{(2b_1 n + n^2 r - 2nr - 2b_1 - nr + 2r)}{2}$$

Organizando os termos semelhantes:

$S_{n-1} = \dfrac{(n-1)\cdot \cancel{2}b_1}{\cancel{2}} + \dfrac{(n^2 - 3n + 2)\cdot r}{2}$, escrevendo o polinômio $n^2 - 3n + 2$ na forma fatorada encontramos $n^2 - 3n + 2 = (n-1)(n-2)$.

$S_{n-1} = (n-1)b_1 + \dfrac{(n-1)(n-2)r}{2}$, note que $(n-1) = \dbinom{n-1}{1}$ e $\dfrac{(n-1)(n-2)}{2} = \dbinom{n-1}{2}$.

Substituindo em a_n:

$$a_n = a_1 \cdot \binom{n-1}{0} + b_1 \cdot \binom{n-1}{1} + r \cdot \binom{n-1}{2}.$$

De modo que $\Delta^1 a_n = (b_1, \ldots, b_n, \ldots)$ e $\Delta^2 a_n = (r, \ldots, r, \ldots)$ são operadores diferenças associados a a_n.

Seguindo essa ideia, se a_n for uma progressão aritmética de ordem 3 e sejam:

$\Delta^1 a_n = (b_1, \ldots, b_n, \ldots)$

$\Delta^2 a_n = (c_1, \ldots, c_n, \ldots)$

$\Delta^3 a_n = (r, \ldots, r, \ldots)$

operadores diferenças associados a sequência a_n, então:

$$a_n = a_1 \cdot \binom{n-1}{0} + b_1 \cdot \binom{n-1}{1} + c_1 \cdot \binom{n-1}{2} + r \cdot \binom{n-1}{3}.$$

Se a_n for uma progressão aritmética de ordem 4 e sejam:

$\Delta^1 a_n = (b_1, \ldots, b_n, \ldots)$

$\Delta^2 a_n = (c_1, \ldots, c_n, \ldots)$

$\Delta^3 a_n = (d_1, \ldots, d_n, \ldots)$

$\Delta^4 a_n = (r, \ldots, r \ldots)$

operadores diferenças associados a sequência a_n, então:

$$a_n = a_1 \cdot \binom{n-1}{0} + b_1 \cdot \binom{n-1}{1} + c_1 \cdot \binom{n-1}{2} + d_1 \cdot \binom{n-1}{3} + r \cdot \binom{n-1}{4}.$$

De modo geral, seja a_n uma progressão aritmética de ordem j e sejam:

$\Delta^1 a_n = (\Delta^1 a_1, \ldots, \Delta^1 a_n, \ldots)$

$\Delta^2 a_n = (\Delta^2 a_1, \ldots, \Delta^2 a_n, \ldots)$

$\vdots$

$\Delta^{j-1} a_n = (\Delta^{j-1} a_1, \ldots, \Delta^{j-1} a_n, \ldots)$

$\Delta^j = (r, \ldots, r, \ldots)$

operadores diferenças relacionados a sequência a_n, então:

$$a_n = a_1 \cdot \binom{n-1}{0} + \Delta^1 a_1 \cdot \binom{n-1}{1} + \Delta^2 a_1 \cdot \binom{n-1}{2} + \ldots + \Delta^{j-1} a_1 \cdot \binom{n-1}{j-1} + r \cdot \binom{n-1}{j}.$$

Usaremos às mesmas sequências do exemplo 14 para determinar o termo geral de cada uma.

Exemplo 17 Determine o termo geral de cada progressão aritmética.

a) $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} = (3, 7, 13, 21, 31, \ldots)$, onde $a_1 = 3$ e $a_{n+1} = a_n + 2n + 2$, para $n \geq 1$

b) $(b_n)_{n \in \mathbb{N}} = (2, 8, 20, 40, 70, \ldots)$, onde $b_1 = 2$ e $b_{n+1} = b_n + n^2 + 3n + 2$, para $n \geq 1$

c) $(c_n)_{n \in \mathbb{N}} = (-1, 0, 16, 97, 353, \ldots)$, onde $c_1 = -1$ e $c_{n+1} = c_n + n^4$, para $n \geq 1$

Solução:

a) Como calculado anteriormente:

$(\Delta^1 a_n)_{n \in \mathbb{N}} = (4, 6, 8, 10, \ldots)$

$(\Delta^2 a_n)_{n \in \mathbb{N}} = (2, 2, 2, 2, \ldots)$.

Então, pela fórmula do termo geral temos:

$$a_n = 3 \cdot \binom{n-1}{0} + 4 \cdot \binom{n-1}{1} + 2 \cdot \binom{n-1}{2}.$$

Desenvolvendo cada binômio,

$$\binom{n-1}{0} = 1$$

$$\binom{n-1}{1} = n - 1$$

$$\binom{n-1}{2} = \frac{(n-1)!}{2! \cdot (n-3)!} = \frac{(n-1)(n-2)\cancel{(n-3)!}}{2 \cdot \cancel{(n-3)!}} = \frac{(n-1)(n-2)}{2}.$$

Portanto:

$a_n = 3 + 4 \cdot (n-1) + \cancel{2} \cdot \dfrac{(n-1)(n-2)}{\cancel{2}}$

$a_n = 3 + 4n - 4 + n^2 - 3n + 2 \Rightarrow a_n = n^2 + n + 1.$

b) Da sequência b_n temos:

$(\Delta^1 b_n)_{n \in \mathbb{N}} = (6, 12, 20, 30, \ldots)$

$(\Delta^2 b_n)_{n \in \mathbb{N}} = (6, 8, 10, 12, \ldots)$

$(\Delta^3 b_n)_{n \in \mathbb{N}} = (2, 2, 2, 2, \ldots).$

Aplicando na fórmula do termo geral:

$$b_n = 2 \cdot \binom{n-1}{0} + 6 \cdot \binom{n-1}{1} + 6 \cdot \binom{n-1}{2} + 2 \cdot \binom{n-1}{3}.$$

Calculando $\dbinom{n-1}{3}$:

$$\binom{n-1}{3} = \frac{(n-1)!}{3! \cdot (n-4)!} = \frac{(n-1)(n-2)(n-3)\cancel{(n-4)!}}{6 \cdot \cancel{(n-4)!}} = \frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{6}.$$

Substituindo na fórmula do termo geral:

$b_n = 2 + 6 \cdot (n-1) + \cancel{6} \cdot \dfrac{(n-1)(n-2)}{\cancel{2}} + \cancel{2} \cdot \dfrac{(n-1)(n-2)(n-3)}{\cancel{6}}$

$b_n = 2 + 6 \cdot (n-1) + 3 \cdot (n^2 - 3n + 2) + \dfrac{(n^2 - 3n + 2)(n-3)}{3}$

$b_n = 2 + 6n - \cancel{6} + 3n^2 - 9n + \cancel{6} + \dfrac{n^3 - 6n^2 + 11n - 6}{3}$

$b_n = 3n^2 - 3n + 2 + \dfrac{n^3 - 6n^2 + 11n - 6}{3}$

$b_n = \dfrac{9n^2 - 9n + 6}{3} + \dfrac{n^3 - 6n^2 + 11n - 6}{3}$

$b_n = \dfrac{n^3 + 3n^2 + 2n}{3}.$

c) Da sequência c_n temos:

$(\Delta^1 c_n)_{n\in\mathbb{N}} = (1, 16, 81, 256, \ldots)$

$(\Delta^2 c_n)_{n\in\mathbb{N}} = (15, 65, 175, 369, \ldots)$

$(\Delta^3 c_n)_{n\in\mathbb{N}} = (50, 110, 194, 302, \ldots)$

$(\Delta^4 c_n)_{n\in\mathbb{N}} = (60, 84, 108, 132, \ldots)$

$(\Delta^5 c_n)_{n\in\mathbb{N}} = (24, 24, 24, 24, \ldots)$.

Aplicando na fórmula do termo geral:

$$c_n = (-1)\cdot\binom{n-1}{0} + 1\cdot\binom{n-1}{1} + 15\cdot\binom{n-1}{2} + 50\cdot\binom{n-1}{3} + 60\cdot\binom{n-1}{4} + 24\cdot\binom{n-1}{5}.$$

Calculando $\binom{n-1}{4}$:

$$\binom{n-1}{4} = \frac{(n-1)!}{4!\cdot(n-5)!} = \frac{(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{24}$$

$$\binom{n-1}{4} = \frac{(n^3-6n^2+11n-6)(n-4)}{24}$$

$$\binom{n-1}{4} = \frac{n^4-10n^3+36n^2-50n+24}{24}.$$

Calculando $\binom{n-1}{5}$:

$$\binom{n-1}{5} = \frac{(n-1)!}{5!\cdot(n-6)!} = \frac{(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)}{120}$$

$$\binom{n-1}{5} = \frac{(n^4-10n^3+36n^2-50n+24)(n-5)}{120}$$

$$\binom{n-1}{5} = \frac{n^5-15n^4+86n^3-230n^2+274n-120}{120}.$$

Após desenvolver todos os calculos encontramos que:

$$c_n = \frac{6n^5-15n^4+10n^3-n-30}{30}.$$

Proposição: Se $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma progressão aritmética de ordem j, então a sequência das somas parciais de $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, denotada por $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$, onde $S_n = a_1+a_2+a_3+\ldots+a_n$, é uma progressão aritmética de ordem $j+1$.

Demonstração: Seja $(a_n) = (a_1,a_2,a_3,\ldots,a_n,\ldots)$ Uma progressão aritmética de ordem j e considerando

$$(S_n)_{n\in\mathbb{N}} = (a_1, a_1+a_2, a_1+a_2+a_3, a_1+a_2+a_3+a_4,\ldots).$$

Note que $(\Delta^1 S_n)_{n\in\mathbb{N}} = (a_2,a_3,a_4,\ldots)$. Dessa forma, $(\Delta^1 S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma progressão aritmética de ordem j,logo, $(S_n)_{\in\mathbb{N}}$ será uma progressão aritmética de ordem $j+1$.

Exemplo 18 Seja $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} = (-2,11,40,91,\ldots)$, onde $a_1=-2$ e $a_{n+1} = a_n+3n^2+7n+3$, para $n\geq 1$ e considere $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ a soma dos termos de $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

a) Mostre que $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma progressão aritmética de ordem 3.

b) Mostre que $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma progressão aritmética de ordem 4.

c) Calcule a soma dos 50 primeiros termos de $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Solução:

a) Para mostrar que $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma progressão aritmética de ordem 3 basta usar a definição de operador diferença, logo:

$$\Delta^1 a_n = a_{n+1}-a_n = 3n^2+7n+3$$

$$\Delta^2 a_n = \Delta^1 a_{n+1} - \Delta^1 a_n = 3\cdot(n+1)^2+7\cdot(n+1)+3-3n^2-7n-3$$

$$\Delta^2 a_n = \cancel{3n^2}+6n+3+\cancel{7n}+7+\cancel{3}-\cancel{3n^2}-\cancel{7n}-\cancel{3} \Rightarrow \Delta^2 a_n = 6n+10$$

$$\Delta^3 a_n = \Delta^2 a_{n+1} - \Delta^2 a_n = 6\cdot(n+1)+10-6n-10 = \cancel{6n}+6+\cancel{10}-\cancel{6n}-\cancel{10} \Rightarrow$$

$$\Delta^3 a_n = 6$$

b) Vimos que S_n representa uma progressão aritmética, então vamos aplicar a definição de operador diferença. Temos que:

$$\Delta^1 S_n = S_{n+1}-S_n = a_{n+1} = a_n+3n^2+7n+3$$

$$\Delta^2 S_n = \Delta^1 S_{n+1} - \Delta^1 S_n = a_{n+1}+3\cdot(n+1)^2+7\cdot(n+1)+3-a_n-3n^2-7n-3$$

$\Delta^2 S_n = a_{n+1} - a_n + 3 \cdot (n+1)^2 + 7 \cdot (n+1) + 3 - 3n^2 - 7n - 3$

$\Delta^2 S_n = \cancel{3n^2} + \cancel{7n} + \cancel{3} + 3 \cdot (n+1)^2 + 7 \cdot (n+1) + 3 - \cancel{3n^2} - \cancel{7n} - \cancel{3}$

$\Delta^2 S_n = 3n^2 + 13n + 13$

$\Delta^3 S_n = \Delta^2 S_{n+1} - \Delta^2 S_n = 3 \cdot (n+1)^2 + 13 \cdot (n+1) + 13 - 3n^2 - 13n - 13$

$\Delta^3 S_n = \cancel{3n^2} + 6n + 3 + \cancel{13n} + 13 + \cancel{13} - \cancel{3n^2} - \cancel{13n} - \cancel{13} \Rightarrow \Delta^3 S_n = 6n + 16$

$\Delta^4 S_n = \Delta^3 S_{n+1} - \Delta^3 S_n = 6 \cdot (n+1) + 16 - 6n - 16 = \cancel{6n} + 6 + \cancel{16} - \cancel{6n} - \cancel{16} \Rightarrow$

$\Delta^4 S_n = 6$

o que mostra que S_n é uma progressão aritmética de ordem 4.

c) Queremos calcular a soma dos 10 primeiros termos de $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$, iremos utilizar a fórmula do termo geral. Temos que:

$\Delta^1 S_n = (11, 40, 91, 170, 283, \ldots)$

$\Delta^2 S_n = (29, 51, 79, 113, 153, \ldots)$

$\Delta^3 S_n = (22, 28, 34, 40, 46, \ldots)$

$\Delta^4 S_n = (6, 6, 6, 6, \ldots)$.

Substituindo na fórmula:

$$S_n = (-2) \cdot \binom{n-1}{0} + 11 \cdot \binom{n-1}{1} + 29 \cdot \binom{n-1}{2} + 22 \cdot \binom{n-1}{3} + 6 \cdot \binom{n-1}{4}$$

$$S_n = (-2) \cdot \frac{(n-1)!}{0!(n-1)!} + 11 \cdot \frac{(n-1)!}{1!(n-2)!} + 29 \cdot \frac{(n-1)!}{2!(n-3)!} + 22 \cdot \frac{(n-1)!}{3!(n-4)!} + 6 \cdot \frac{(n-1)!}{4!(n-5)!}$$

$$S_n = \frac{3n^4 + 14n^3 + 15n^2 - 56n}{12}.$$

Como queremos a soma dos 50 primeiros termos de $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$, para $n = 50$ em S_n temos:

$$S_{50} = \frac{3 \cdot 50^4 + 14 \cdot 50^3 + 15 \cdot 50^2 - 56 \cdot 50}{12} = 1711225.$$

6 APLICAÇÕES

Nos livros didáticos do Ensino Médio encontramos pouco sobre as propriedades do triângulo de Pascal, muitas vezes esse tema é deixado em segundo plano e nem é abordado pelo professor assim como progressões aritméticas de ordem superior, apenas são abordadas as progressões de primeira ordem. Neste capítulo iremos resolver problemas através da aplicação das propriedades do Triângulo de Pascal e das Progressões Aritméticas de Ordem Superior.

Problema 1. Calcule o valor da soma $S = 1\cdot 3+2\cdot 4+3\cdot 5+4\cdot 6+\ldots+100\cdot 102$:

a) Pelas propriedades do triângulo de Pascal.

b) Por P.A. de ordem superior.

Solução:

a) Vamos escrever a soma S de maneira geral e utilizar a notação do somatório:

$$S = 1\cdot 3+2\cdot 4+3\cdot 5+4\cdot 6+\ldots+100\cdot 102 = \sum_{i=1}^{100} i(i+2)$$

$$S = \sum_{i=1}^{n} i(i+2) = \sum_{i=1}^{n} i^2+2i = \sum_{i=1}^{n}(i^2+i)+\sum_{i=1}^{n} i = \sum_{i=1}^{n} i(i+1)+\sum_{i=1}^{n} i$$

agora iremos fazer algumas manipulações para transformar um produto de parcelas consecutivas no fatorial de um número com o objetivo de transformar numa combinação simples e poderemos usar a propriedade das colunas do triângulo de Pascal. De maneira análoga, faremos na resolução dos demais problemas.

Multiplicando a expressão $(i+1)i$ por $\dfrac{2!\cdot(i-1)!}{2!\cdot(i-1)!}$ obtemos $\dfrac{2!(i+1)i(i-1)!}{2!(i-1)!}$ e i por $\dfrac{(i-1)!}{(i-1)!}$ obtemos $\dfrac{i(i-1)!}{1!(i-1)!}$. Com isso temos que:

$$\frac{2!(i+1)i(i-1)!}{2!(i-1)!} = 2\cdot\frac{(i+1)!}{2!(i-1)!} \text{ e } \frac{i(i-1)!}{1!(i-1)!} = \frac{i!}{1!(i-1)!}$$

Voltando para S:

$$S = \sum_{i=1}^{n} 2\cdot\frac{(i+1)!}{2!(i-1)!}+\sum_{i=1}^{n}\frac{i!}{1!(i-1)!} = 2\cdot\sum_{i=1}^{n}\frac{(i+1)!}{2!(i-1)!}+\sum_{i=1}^{n}\frac{i!}{1!(i-1)!}$$

Note que :

$$\frac{(i+1)!}{2!(i-1)!} = \binom{i+1}{2} \text{ e } \frac{i!}{1!(i-1)!} = \binom{i}{1}$$

$$S = 2 \cdot \sum_{i=1}^{n} \binom{i+1}{2} + \sum_{i=1}^{n} \binom{i}{1}$$

Abrindo o somatório até n:

$$S = 2 \cdot \underbrace{\left[\binom{2}{2} + \binom{3}{2} + \binom{4}{2} + \ldots + \binom{n+1}{2}\right]}_{\text{propriedade das colunas}} + \underbrace{\left[\binom{1}{1} + \binom{2}{1} + \binom{3}{1} + \ldots + \binom{n}{1}\right]}_{\text{propriedade das colunas}}$$

$$S = 2 \cdot \binom{n+2}{3} + \binom{n+1}{2} = 2 \cdot \frac{(n+2)!}{3!(n-1)!} + \frac{(n+1)!}{2!(n-1)!}$$

$$S = 2 \cdot \frac{(n+2)(n+1)n\cancel{(n-1)!}}{6\cancel{(n-1)!}} + \frac{(n+1)n\cancel{(n-1)!}}{2\cancel{(n-1)!}} = \frac{2(n+2)(n+1)n}{6} + \frac{3n(n+1)}{6}$$

$$S = n(n+1)\left[\frac{2n+4+3}{6}\right] \Rightarrow S = \frac{n(n+1)(2n+7)}{6}$$

Agora basta fazer $n = 100$ e econtraremos o valor da soma.

$$S = \frac{100 \cdot 101 \cdot 207}{6} = 348450$$

b) Escrevendo S como uma sequência:

$$a_n = (3, 8, 15, 24, 35, 48, 63, 80, \ldots)$$

$$\Delta^1 a_n = (5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, \ldots)$$

$$\Delta^2 a_n = (2, 2, 2, 2, 2, \ldots) \Rightarrow \text{P.A de ordem 2.}$$

$$S_n = (3, 11, 26, 50, 85, 133, 196, 276, ...)$$

$$\Delta^1 S_n = (8, 15, 24, 35, 48, 63, 80, \ldots)$$

$$\Delta^2 S_n = (7, 9, 11, 13, 15, 17, \ldots)$$

$$\Delta^3 S_n = (2, 2, 2, 2, 2, \ldots) \Rightarrow \text{P.A de ordem 3.}$$

Pela fórmula da soma dos termos de uma P.A de ordem 3, temos:

$$S_n = 3 \cdot \binom{n-1}{0} + 8 \cdot \binom{n-1}{1} + 7 \cdot \binom{n-1}{2} + 2 \cdot \binom{n-1}{3}$$

$$S_n = 3 + 8 \cdot (n-1) + 7 \cdot \frac{(n-1)(n-2)}{2} + 2 \cdot \frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{6}$$

$$S_n = 8n - 5 + \frac{7 \cdot (n^2 - 3n + 2)}{2} + \frac{2 \cdot (n^3 - 6n^2 + 11n - 6)}{6}$$

$$S = \frac{48n - 30 + 21n^2 - 63n + 42 + 2n^3 - 12n^2 + 22n - 12}{6}$$

$$S = \frac{2n^3 + 9n^2 + 7n}{6} = \frac{n(2n^2 + 9n + 7)}{6}$$

Escrevendo o polinômio $2n^2 + 9n + 7$ na forma fatorada obtemos:

$$2n^2 + 9n + 7 = 2(n + \frac{7}{2})(n+1) = (2n+7)(n+1)$$

Portanto, $S_n = \dfrac{n(n+1)(2n+7)}{6}$ e $S_{100} = 348450$

Problema 2. Calcule o valor de $S_n = 1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + \ldots + n^3$:

a) Pelas propriedades do triângulo de Pascal.

b) Por P.A. de ordem superior.

Solução:

a) Utilizando a notação do somatório $S_n = \sum_{i=1}^{n} i^3$, vamos trasnformar i^3 num produto de parcelas consecutivas através da comparação de polinômios, isso nos ajudará a calcular o somatório $S_n = 1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + \ldots + n^3$, assim,

$$i^3 = Ai(i+1)(i+2) + Bi(i+1) + Ci + D = Ai^3 + 3Ai^2 + 2Ai + Bi^2 + Bi + Ci + D$$

$$i^3 = Ai^3 + (3A+B)i^2 + (2A+B+C)i + D$$

Com isso, montamos o seguinte sistema:

$$\begin{cases} A & = 1 \ (I) \\ 3A + B & = 0 \ (II) \\ 2A + B + C & = 0 \ (III) \\ D & = 0 \ (IV) \end{cases}$$

Como $A=1$ e $3+B=0$ então $B=-3$

Substituindo em (III):

$2.\cdot 1-3+C=0 \Rightarrow C=1$

Então $A=1$, $B=-3$, $C=1$ e $D=0$

Assim, $i^3=i(i+1)(i+2)-3i(i+1)+i$

$$\sum_{i=1}^{n} i^3=\sum_{i=1}^{n} i(i+1)(i+2)-3i(i+1)+i=\sum_{i=1}^{n} i(i+1)(i+2)-3\cdot\sum_{i=1}^{n} i(i+1)+\sum_{i=1}^{n} i$$

$$\sum_{i=1}^{n} i^3=6\cdot\sum_{i=1}^{n}\frac{(i+2)(i+1)i(i-1)!}{3!(i-1)!}-6\cdot\sum_{i=1}^{n}\frac{(i+1)i(i-1)!}{2!(i-1)!}+\sum_{i=1}^{n}\frac{i(i-1)!}{1!(i-1)!}$$

$$\sum_{i=1}^{n} i^3=6\cdot\sum_{i=1}^{n}\frac{(i+2)!}{3!(i-1)!}-6\cdot\sum_{i=1}^{n}\frac{(i+1)!}{2!(i-1)!}+\sum_{i=1}^{n}\frac{i!}{1!(i-1)!}$$

$$\sum_{i=1}^{n} i^3=6\cdot\sum_{i=1}^{n}\binom{i+2}{3}-6\cdot\sum_{i=1}^{n}\binom{i+1}{2}+\sum_{i=1}^{n}\binom{i}{1}$$

$$\sum_{i=1}^{n} i^3=6\cdot\underbrace{\left[\binom{3}{3}+\binom{4}{3}+\ldots+\binom{n+2}{3}\right]}_{\text{propriedade das colunas}}-6\cdot\underbrace{\left[\binom{2}{2}+\binom{3}{2}+\ldots+\binom{n+1}{2}\right]}_{\text{propriedade das colunas}}+\underbrace{\left[\binom{1}{1}+\binom{2}{1}+\ldots+\binom{n}{1}\right]}_{\text{propriedade das colunas}}$$

$$\sum_{i=1}^{n} i^3=6\cdot\binom{n+3}{4}-6\cdot\binom{n+2}{3}+\binom{n+1}{2}$$

$$\sum_{i=1}^{n} i^3=\cancel{6}\cdot\frac{(n+3)!}{\cancel{4}!(n-1)!}-\cancel{6}\cdot\frac{(n+2)!}{\cancel{3}!(n-1)!}+\frac{(n+1)!}{2!n-1)!}$$

$$\sum_{i=1}^{n} i^3=\frac{(n+3)(n+2)(n+1)n}{4}-(n+2)(n+1)n+\frac{(n+1)n}{2}$$

$$\sum_{i=1}^{n} i^3=(n+1)n\cdot\left[\frac{(n+3)(n+2)-4\cdot(n+2)+2}{4}\right]=(n+1)n\cdot\left[\frac{(n+2)(n+3-4)+2}{4}\right]$$

$$\sum_{i=1}^{n} i^3=(n+1)n\cdot\left[\frac{(n+2)(n-1)+2}{4}\right]=(n+1)n\cdot\left[\frac{n^2+n-\cancel{2}+\cancel{2}}{4}\right]$$

$$\sum_{i=1}^{n} i^3=\frac{(n+1)n(n+1)n}{4}=\frac{(n+1)^2\cdot n^2}{4}=\frac{[(n+1)n]^2}{4}=\frac{(n^2+n)^2}{4}=\frac{n^4+2n^3+n^2}{4}$$

Portanto,

$$S_n = \frac{n^4 + 2n^3 + n^2}{4}$$

b) Escrevendo S como uma sequência:

$b_n = (1, 8, 27, 64, 125, 216, 343, 512, \ldots)$

$\Delta^1 b_n = (7, 19, 37, 61, 91, 127, 169, \ldots)$

$\Delta^2 b_n = (12, 18, 24, 30, 36, 42, \ldots)$

$\Delta^3 b_n = (6, 6, 6, 6, 6, \ldots) \Rightarrow$ P.A de ordem 3.

$S_n = (1, 9, 36, 100, 225, 441, 784, 1296, \ldots)$

$\Delta^1 S_n = (8, 27, 64, 125, 216, 343, 512, \ldots)$

$\Delta^2 S_n = (19, 37, 61, 91, 127, 169, \ldots)$

$\Delta^3 S_n = (18, 24, 30, 36, 42, \ldots)$

$\Delta^4 S_n = (6, 6, 6, 6, \ldots) \Rightarrow$ P.A de ordem 4.

Pela fórmula dos termos de uma P.A de ordem superior, temos:

$$S_n = 1 \cdot \binom{n-1}{0} + 8 \cdot \binom{n-1}{1} + 19 \cdot \binom{n-1}{2} + 18 \cdot \binom{n-1}{3} + 6 \cdot \binom{n-1}{4}$$

$$S_n = \frac{(n-1)!}{0!(n-1)!} + 8 \cdot \frac{(n-1)!}{1!(n-2)!} + 19 \cdot \frac{(n-1)!}{2!(n-3)!} + 18 \cdot \frac{(n-1)!}{3!(n-4)!} + 6 \cdot \frac{(n-1)!}{4!(n-5)!}$$

$$= 8n - 7 + \frac{19 \cdot (n-1)(n-2)}{2} + \frac{18 \cdot (n-1)(n-2)(n-3)}{6} + \frac{(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{4}$$

$$= 8n - 7 + (n-1)(n-2) \cdot \left[\frac{19}{2} + \frac{(n-3) \cdot 18}{6}\right] + \frac{(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{4}$$

$$= 8n - 7 + (n-1)(n-2) \cdot \left[\frac{57 + 18n - 54}{6}\right] + \frac{(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{4}$$

$$= 8n - 7 + (n-1)(n-2) \cdot \left[\frac{18n + 3}{6}\right] + \frac{(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{4}$$

$$= 8n - 7 + (n-1)(n-2) \cdot \left[\frac{18n + 3}{6} + \frac{(n-3)(n-4)}{4}\right]$$

$$= 8n-7+(n-1)(n-2)\cdot\left[\frac{36n+6}{12}+\frac{3n^2-21n+36}{12}\right]$$

$$= 8n-7+(n-1)(n-2)\cdot\left[\frac{3n^2+15n+42}{12}\right] = 8n-7+(n-1)(n-2)\cdot\left[\frac{n^2+5n+14}{4}\right]$$

$$= \frac{32n-28}{4}+\frac{(n^2-3n+2)(n^2+5n+14)}{4}$$

$$= \frac{32n-28+n^4+5n^3+14n^2-3n^3-15n^2-42n+2n^2+10n+28}{4} = \frac{n^4+2n^3+n^2}{4}$$

Problema 3. Deduza uma fórmula para a expressão $S_n = \sum_{i=1}^{n}(2i-1)(3i+1)$ e calcule o valor da soma dos 50 primeiros termos.

a) Pelas propriedades do triângulo de Pascal.

b) Por P.A. de ordem superior.

Solução:

a) Vamos desenvolver a expressão $(2i-1)(3i+1)$, temos $(2i-1)(3i+1) = 6i^2-i-1$.

Vamos transformar a expressão $6i^2-i-1$ num produto de parcelas consecutivas através da comparação de polinômios para facilitar o calculo do somatório.

$6i^2-i-1 = Ai(i+1)+Bi+C = Ai^2+Ai+Bi+C = Ai^2+(A+B)i+C$

Com isso, montamos o seguinte sistema:

$$\begin{cases} A & = 6 \ (I) \\ A+B & = -1 \ (II) \\ C & = -1 \ (III) \end{cases}$$

Substituindo (I) em (II) temos:

$6+B = -1 \Rightarrow B = -7$

Com isso, encontramos que $A = 6, B = -7, C = -1$ e $6i^2-i-1 = 6i(i+1)-7i-1$

Voltando para o somatório,

$$\sum_{i=1}^{n} 6i^2-i-1=\sum_{i=1}^{n} 6i(i+1)-7i-1=6\cdot\sum_{i=1}^{n} i(i+1)-7\cdot\sum_{i=1}^{n} i-\sum_{i=1}^{n} 1$$

$$=6\cdot\sum_{i=1}^{n}\frac{2!i(i+1)(i-1)!}{2!(i-1)!}-7\cdot\sum_{i=1}^{n}\frac{i(i-1)!}{1!(i-1)!}-\sum_{i=1}^{n} 1=12\cdot\sum_{i=1}^{n}\binom{i+1}{2}-7\cdot\sum_{i=1}^{n}\binom{i}{1}-n$$

Abrindo o somatório temos:

$$=12\cdot\underbrace{\left[\binom{2}{2}+\binom{3}{2}+\ldots+\binom{n+1}{2}\right]}_{\text{propriedade das colunas}}-7\cdot\underbrace{\left[\binom{1}{1}+\binom{2}{1}+\ldots+\binom{n}{1}\right]}_{\text{propriedade das colunas}}-n$$

$$\sum_{i=1}^{n}(2i-1)(3i+1)=12\cdot\binom{n+2}{3}-7\cdot\binom{n+1}{2}-n=\cancel{12}\cdot\frac{(n+2)!}{\cancel{3!}(n-1)!}-7\cdot\frac{(n+1)!}{2!(n-1)!}-n$$

$$\sum_{i=1}^{n}(2i-1)(3i+1)=2\cdot(n+2)(n+1)n-\frac{7\cdot(n+1)n}{2}-n$$

$$\sum_{i=1}^{n}(2i-1)(3i+1)=n(n+1)\cdot\left[2(n+2)-\frac{7}{2}\right]-n=n(n+1)\cdot\left[\frac{4n+1}{2}\right]-n$$

$$\sum_{i=1}^{n}(2i-1)(3i+1)=\frac{(n^2+n)(4n+1)}{2}-\frac{2n}{2}=\frac{4n^3+n^2+4n^2+n-2n}{2}=\frac{4n^3+5n^2-n}{2}$$

Portanto $\sum_{i=1}^{n}(2i-1)(3i+1)=\frac{4n^3+5n^2-n}{2}$, como queremos calcular a soma dos 50 primeiros termos, basta fazer $n=50$ na fórmula encontrada.

$$S_{50}=\frac{4\cdot 50^3+5\cdot 50^2-50}{2}=\frac{512450}{2}=256225.$$

b) Desenvolvendo o somatório encontramos:

$$S=1\cdot 4+3\cdot 7+5\cdot 10+7\cdot 13+9\cdot 16+11\cdot 19+13\cdot 22+15\cdot 25+\ldots$$

$$S=4+21+50+91+144+209+286+375+\ldots$$

Pensando como os termos de uma sequência:

$$c_n=(4,21,50,91,144,209,286,375,\ldots)$$

$$\Delta^1 c_n=(17,29,41,53,65,77,89\ldots)$$

$$\Delta^2 c_n=(12,12,12,12,12,\ldots)\Rightarrow \text{P.A de ordem 2.}$$

$$S_n=(4,25,75,166,310,519,805,1180,\ldots)$$

$\Delta^1 S_n = (21, 50, 91, 144, 209, 286, 375, \ldots)$

$\Delta^2 S_n = (29, 41, 53, 65, 77, 89, \ldots)$

$\Delta^3 S_n = (12, 12, 12, 12, 12, \ldots) \Rightarrow$ P.A de ordem 3.

Pela fórmula da soma dos termos de uma P.A de ordem superior temos:

$$S_n = 4 \cdot \binom{n-1}{0} + 21 \cdot \binom{n-1}{1} + 29 \cdot \binom{n-1}{2} + 12 \cdot \binom{n-1}{3}$$

$$S_n = 4 \cdot \frac{(n-1)!}{0!(n-1)!} + 21 \cdot \frac{(n-1)!}{1!(n-2)!} + 29 \cdot \frac{(n-1)!}{2!(n-3)!} + \cancel{12} \cdot \frac{(n-1)!}{\cancel{3}!(n-4)!}$$

$$S_n = 4 + 21 \cdot (n-1) + \frac{29 \cdot (n-1)(n-2)}{2} + \frac{4 \cdot (n-1)(n-2)(n-3)}{2}$$

$$S_n = 21n - 17 + \frac{(n^2 - 3n + 2) \cdot 29}{2} + \frac{(n^3 - 6n^2 + 11n - 6) \cdot 4}{2}$$

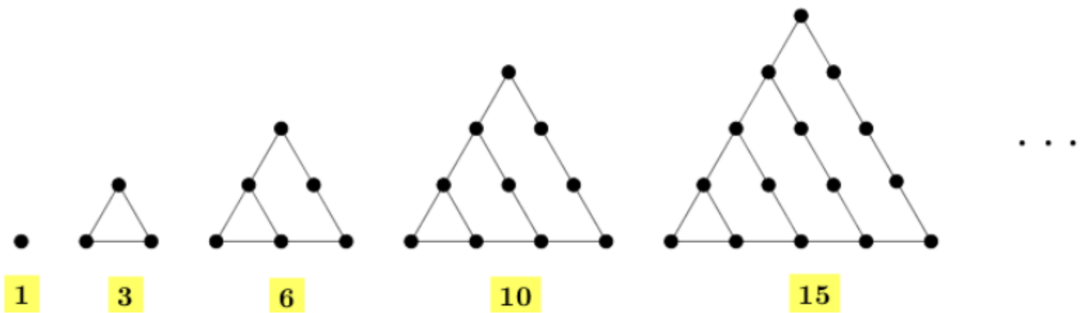
$$S_n = \frac{42n - 34}{2} + \frac{29n^2 - 87n + 58}{2} + \frac{4n^3 - 24n^2 + 44n - 24}{2}$$

$$S_n = \frac{4n^3 + 29n^2 - 24n^2 + 42n + 44n - 87n + 58 - 34 - 24}{2} \Rightarrow S_n = \frac{4n^3 + 5n^2 - n}{2}.$$

Dessa forma encontramos a mesma fórmula que anteriormente e $S_{50} = 256225$.

Problema 4. Os números $(1, 3, 6, 10, 15, \ldots)$ são chamados de números triangulares, nomenclatura esta justificada pela sequência de triângulos.

Figura 6.1 – Números Triângulares



Fonte: (OBMEP,)

Com base nisso:

a) Use P.A. de ordem superior para encontrar o n-ésimo número triangular.

b) Encontre uma fórmula para a soma dos n primeiros números triangulares usando P.A.

de ordem superior.

c) Calcule a soma dos 100 primeiros números triangulares usando as propriedades do triângulo de Pascal.

Solução:

a) Considerando a sequência desses números triangulares, temos:

$$t_n = (1,3,6,10,15,\ldots)$$

$$\Delta^1 t_n = (2,3,4,5,\ldots)$$

$$\Delta^2 t_n = (1,1,1,\ldots) \Rightarrow \text{P.A de ordem 2.}$$

Utilizando a fórmula do termo geral de uma P.A de ordem superior temos:

$$t_n = 1 \cdot \binom{n-1}{0} + 2 \cdot \binom{n-1}{1} + 1 \cdot \binom{n-1}{2} = 1 + 2 \cdot (n-1) + 1 \cdot \frac{(n-1)\cdot(n-2)}{2}$$

$$t_n = 1 + 2n - 2 + \frac{n^2-3n+2}{2} = 2n - 1 + \frac{n^2-3n+2}{2} = \frac{4n-2}{2} + \frac{n^2-3n+2}{2}$$

$$t_n = \frac{n^2+4n-3n+\cancel{2}-\cancel{2}}{2} = \frac{n^2+n}{2} \Rightarrow t_n = \frac{n^2+n}{2}$$

b) Considerando S_n a sequência da soma dos termos de t_n temos:

$$S_n = (1,4,10,20,35,56,84,120,\ldots)$$

$$\Delta^1 S_n = (3,6,10,15,21,28,36,\ldots)$$

$$\Delta^2 S_n = (3,4,5,6,,\ldots)$$

$$\Delta^3 S_n = (1,1,1,\ldots) \Rightarrow \text{P.A de ordem 3.}$$

Usando a fórmula da soma dos termos de uma P.A de ordem superior temos:

$$S_n = 1 \cdot \binom{n-1}{0} + 3 \cdot \binom{n-1}{1} + 3 \cdot \binom{n-1}{2} + 1 \cdot \binom{n-1}{3}$$

$$S_n = 1 + 3 \cdot (n-1) + 3 \cdot \frac{(n-1)(n-2)}{2} + \frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{6}$$

$$S_n = 3n - 2 + \frac{3\cdot(n^2-3n+2)}{2} + \frac{n^3-6n^2+11n-6}{6}$$

$$S_n = \frac{18n-12}{6} + \frac{9\cdot(n^2-3n+2)}{6} + \frac{n^3-6n^2+11n-6}{6}$$

$$S_n = \frac{n^3+9n^2-6n^2+18n+11n-27n-12-6+18}{6} = \frac{n^3+3n^2+2n}{6} = \frac{n\cdot(n^2+3n+2)}{6}$$

$$S_n = \frac{n\cdot(n+1)\cdot(n+2)}{6}$$

c) Olhando para S_n:

$$S_n = 1+3+6+10+15+21+28+36+45+55+\ldots+\frac{n\cdot(n+1)}{2} = \sum_{i=1}^{n}\frac{i\cdot(i+1)}{2}$$

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{i\cdot(i+1)}{2} = \sum_{i=1}^{n}\frac{(i+1)i(i-1)!}{2!(i-1)!} = \sum_{i=1}^{n}\frac{(i+1)!}{2!(i-1)!} = \sum_{i=1}^{n}\binom{i+1}{2}$$

Abrindo o somatório, temos:

$$\sum_{i=1}^{n}\binom{i+1}{2} = \underbrace{\binom{2}{2}+\binom{3}{2}+\binom{4}{2}+\ldots\binom{n+1}{2}}_{\text{propriedade das colunas}} = \binom{n+2}{3}$$

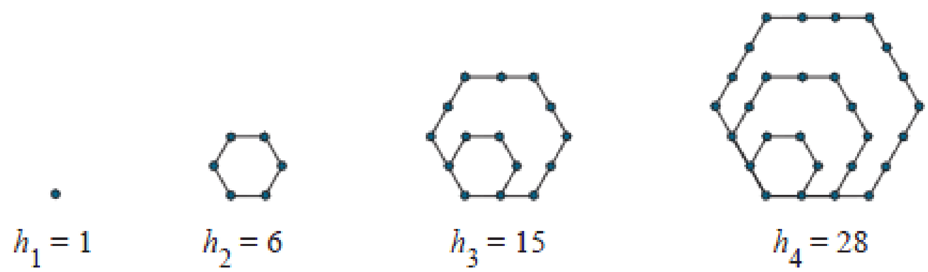
$$S_n = \binom{n+2}{3} = \frac{(n+2)!}{3!(n-1)!} = \frac{(n+2)(n+1)n\cancel{(n-1)!}}{6\cancel{(n-1)!}} = \frac{(n+2)(n+1)n}{6}$$

Agora basta calcular S_{100}:

$$S_{100} = \frac{102\cdot 101\cdot 100}{6} = \frac{1030200}{6} = 171700.$$

Problema 5. $h_n = (1,6,15,28,45,66,\ldots)$ é conhecida como a sequência dos números hexagonais. Com base nisso, responda:

Figura 6.2 – Números hexagonais



Fonte: (Gabrielli; Moteiro,)

a) Use P.A. de ordem superior para encontrar o n-ésimo número hexagonal.

b) Encontre uma fórmula para a soma dos n primeiros números hexagonais usando P.A. de ordem superior.

c) Calcule a soma dos 120 primeiros números hexagonais usando as propriedades do triângulo de Pascal.

Solução:

a) Considerando a sequência h_n temos:

$$h_n = (1, 6, 15, 28, 45, 66, \ldots)$$

$$\Delta^1 h_n = (5, 9, 13, 17, 21, \ldots)$$

$$\Delta^2 h_n = (4, 4, 4, 4, \ldots) \Rightarrow \text{P.A de ordem 2.}$$

Pela fórmula do termo geral de uma P.A. de ordem superior:

$$h_n = 1 \cdot \binom{n-1}{0} + 5 \cdot \binom{n-1}{1} + 4 \cdot \binom{n-1}{2} = 1 + 5 \cdot (n-1) + \cancel{4} \cdot \frac{(n-1)\cdot(n-2)}{\cancel{2}}$$

$$h_n = 1 + 5n - 5 + 2 \cdot (n^2 - 3n + 2) = 5n - \cancel{4} + 2n^2 - 6n + \cancel{4} = 2n^2 - n \Rightarrow h_n = 2n^2 - n.$$

b) Seja S_n a sequência da soma dos termos de h_n temos:

$$S_n = (1, 7, 22, 50, 95, 161, 252, \ldots)$$

$$\Delta^1 S_n = (6, 15, 28, 45, 66, 91, \ldots)$$

$$\Delta^2 S_n = (9, 13, 17, 21, 25, \ldots)$$

$$\Delta^3 S_n = (4, 4, 4, 4, \ldots) \Rightarrow \text{P.A de ordem 3.}$$

Utilizando a fórmula do termo geral de uma P.A de ordem superior temos:

$$S_n = 1 \cdot \binom{n-1}{0} + 6 \cdot \binom{n-1}{1} + 9 \cdot \binom{n-1}{2} + 4 \cdot \binom{n-1}{3}$$

$$S_n = 1 + 6 \cdot (n-1) + 9 \cdot \frac{(n-1)\cdot(n-2)}{2} + 4 \cdot \frac{(n-1)\cdot(n-2)\cdot(n-3)}{6}$$

$$S_n = 6n - 5 + \frac{9 \cdot (n^2 - 3n + 2)}{2} + \frac{4 \cdot (n^3 - 6n^2 + 11n - 6)}{6}$$

$$S_n = \frac{36n - 30}{6} + \frac{27 \cdot (n^2 - 3n + 2)}{6} + \frac{4 \cdot (n^3 - 6n^2 + 11n - 6)}{6}$$

$$S_n = \frac{36n - 30 + 27n^2 - 81n + 54 + 4n^3 - 24n^2 + 44n - 24}{6}$$

$$S_n = \frac{4n^3+27n^2-24n^2+44n+36n-81n+54-24-30}{6} \Rightarrow S_n = \frac{4n^3+3n^2-n}{6}$$

c) Agora queremos encontrar S_n através das propriedades do triângulo de Pascal, iremos utilizar a notação do somatório e fazer algumas manipulações para chegar no resultado desejado.

$$S_n = 1+6+15+28+45+66+91+\ldots+(2n^2-n) = \sum_{i=1}^{n} 2i^2 - i$$

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} 2i^2 - i = 2\cdot\sum_{i=1}^{n} i^2 - \sum_{i=1}^{n} i$$

Vamos tranformar o polinômio i^2 num produto de parcelas consecutivas através da comparação de polinômios, para facilitar os calculos no somatório.

$$i^2 = Ai(i+1)+Bi+C = Ai^2+Ai+Bi+C = Ai^2+(A+B)i+C$$

Com isso montamos o seguinte sistema:

$$\begin{cases} A & = 1 \ (I) \\ A+B & = 0 \ (II) \\ C & = 0 \ (III) \end{cases}$$

Substituindo (I) em (II), temos:

$$1+B = 0 \Rightarrow B = -1$$

Encontramos $A = 1$, $B = -1$ e $C = 0$

$$i^2 = i(i+1)-i$$

$$\sum_{i=1}^{n} i^2 = \sum_{i=1}^{n} i(i+1)-i = \sum_{i=1}^{n} i(i+1) - \sum_{i=1}^{n} i$$

Voltando para S_n:

$$S_n = 2\cdot\sum_{i=1}^{n} i(i+1) - 2\cdot\sum_{i=1}^{n} i - \sum_{i=1}^{n} i = 2\cdot\sum_{i=1}^{n} i(i+1) - 3\cdot\sum_{i=1}^{n} i$$

$$S_n = 2\cdot\sum_{i=1}^{n} \frac{2!(i+1)i(i-1)!}{2!(i-1)!} - 3\cdot\sum_{i=1}^{n} \frac{i(i-1)!}{1!(i-1)!} = 4\cdot\sum_{i=1}^{n} \binom{i+1}{2} - 3\cdot\sum_{i=1}^{n} \binom{i}{1}$$

Abrindo os somatórios, temos:

$$S_n = 4 \cdot \underbrace{\left[\binom{2}{2} + \binom{3}{2} + \ldots + \binom{n+1}{2}\right]}_{\text{propriedade das colunas}} - 3 \cdot \underbrace{\left[\binom{1}{1} + \binom{2}{1} + \ldots + \binom{n}{1}\right]}_{\text{propriedade das colunas}}$$

Utilizando a propriedade das colunas do triângulo de Pascal, temos:

$$S_n = 4 \cdot \binom{n+2}{3} - 3 \cdot \binom{n+1}{2} = 4 \cdot \frac{(n+2)!}{3!(n-1)!} - 3 \cdot \frac{(n+1)!}{2!(n-1)!}$$

$$S_n = 4 \cdot \frac{(n+2)(n+1)n}{6} - 3 \cdot \frac{(n+1)n}{2} = \frac{4 \cdot (n^3 + 3n^2 + 2n)}{6} - \frac{9 \cdot (n^2 + n)}{6}$$

$$S_n = \frac{4n^3 + 12n^2 + 8n - 9n^2 - 9n}{6} = \frac{4n^3 + 3n^2 - n}{6}$$

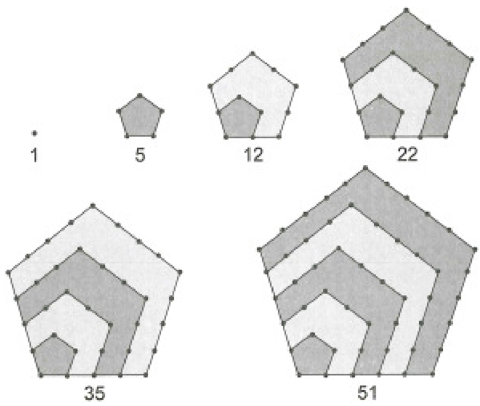
Queremos calcular a soma dos 120 primeiros números hexagonais, então:

$$S_{120} = \frac{4. \cdot 120^3 + 3 \cdot 120^2 - 120}{6} = \frac{6955080}{6} = 1159180$$

O próximo problema é do ENEM 2023, é a questão de número 152 da prova amarela que foi aplicada no segundo dia do exame.

Problema 6. Os números figurados pentagonais provavelmente foram introduzidos pelos pitagóricos por volta do século V a.C. As figuras ilustram como obter os seis primeiros deles, sendo os demais obtidos seguindo o mesmo padrão geométrico.

Figura 6.3 – Números Pentagonais



Fonte: ENEM 2023

O oitavo número pentagonal é:

a)59 b)83 c)86 d)89 e)92

Solução: Vamos considerar os números pentagonais como uma sequência e denotando por $P_n = (1, 5, 12, 22, 35, 51, \ldots)$. Aplicando o operador diferença em P_n temos:

$$\Delta^1 P_n = (4, 7, 10, 13, 16, \ldots)$$

$$\Delta^2 P_n = (3, 3, 3, 3, \ldots) \Rightarrow \text{P.A. de ordem 2.}$$

Pela fórmula do termo geral de uma P.A. de ordem superior:

$$P_n = 1 \cdot \binom{n-1}{0} + 4 \cdot \binom{n-1}{1} + 3 \cdot \binom{n-1}{2}$$

$$P_n = 1 + 4 \cdot (n-1) + 3 \cdot \frac{(n-1) \cdot (n-2)}{2}$$

$$P_n = 1 + 4n - 4 + 3 \cdot \frac{(n^2 - 3n + 2)}{2}$$

$$P_n = 4n - 3 + \frac{3n^2 - 9n + 6}{2}$$

$$P_n = \frac{8n - 6 + 3n^2 - 9n + 6}{2} = \frac{3n^2 - n}{2}$$

Portanto, $P_n = \dfrac{3n^2 - n}{2}$ é o n-ésimo número pentagonal. Para encontrar o oitavo basta calcular $n = 8$:

$$P_8 = \frac{3 \cdot 8^2 - 8}{2} = \frac{192 - 8}{2} = \frac{184}{2} = 92.$$

Com isso, o oitavo número pentagonal é 92 e a alternativa correta é a letra (e).

Isso mostra a importância de trabalhar as propriedades do Triângulo de Pascal e das Progressões Aritméticas de Ordem superior no Ensino Médio, levando em consideração que pode estar presente no ENEM e também pode ajudar a contemplar a seguinte habilidade que está presente na Base Nacional Comum Curricular(BNCC), EM13MAT507: Identificar e associar progressões aritméticas (PA) a funções afins de domínios discretos, para análise de propriedades, dedução de algumas fórmulas e resolução de problemas.

7 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Neste trabalho foram apresentadas duas maneiras distintas de resolver problemas envolvendo somatórios finitos de expressões com certa complexidade utilizando as propriedades do Triângulo de Pascal e a teoria de Progressões Aritméticas de Ordem Superior, mostrando como elas estão relacionadas na resolução de problemas matemáticos de características teóricas e contextualizadas e apresentando como podem ser aplicadas em problemas diferentes dos livros didáticos do Ensino Médio, os quais costumam resolver problemas clássicos e básicos, enfatizando também as definições, propriedades e observações que fundamentam tais aplicações.

No início da pesquisa, as primeiras impressões eram de que tais propriedades não serviam para a aplicação em problemas do Ensino Médio. No entanto, com os resultados encontrados na literatura, novas perspectivas de aprendizagem foram formadas e foi possível compreender melhor a sua importância na aplicação em alguns problemas.

Vale destacar que não foram demonstradas todas as propriedades dos assuntos abordados e sim o que é importante para contemplar o objetivo geral desse trabalho, cujo objetivo é a resolução de problemas envolvendo somatórios finitos utilizando os conteúdos de PA de Ordem Superior e as propriedades do Triângulo de Pascal, podendo ser resolvidos pelos dois métodos.

Neste trabalho, os principais aspectos do Triângulo de Pascal, como propriedades da soma dos elementos da linha, das colunas e das diagonais além da relação de Stifel foram apresentadas. Sobretudo, abordamos o assunto de Progressões Aritméticas de Ordem Superior onde foi demonstrada a fórmula do termo geral e da soma dos seus elementos. Estas propriedades são importantes e muitas vezes ignoradas na maior parte dos livros didáticos do Ensino Médio.

É importante ressaltar também que, por mais que seja uma pesquisa de natureza básica, espera-se que os leitores desta monografia façam uma ressignificação do conceito do Triângulo de Pascal e PA de Ordem Superior, desassociando-os da ideia de não serem conteúdos importantes para serem trabalhados no Ensino Médio, o que não se configura na prática pois tais problemas envolvendo os assuntos abordados neste trabalho são cobrados em vestibulares e olimpíadas de matemática.

Por fim, ficam algumas sugestões de temas futuros a serem desenvolvidos motivados por este trabalho tais como: Estudo de sequências e séries analisando critérios de convergência e perspectivas pedagógicas do ensino de sequências no ensino básico.

REFERÊNCIAS

CAIUSCA, Alana. **Triângulo de Pascal**. 2025. Disponível em: <https://www.educamaisbrasil.com.br/enem/matematica/triangulo-de-pascal>https://www.educamaisbrasil.com.br/enem/matematica/triangulo-de-pascal. Acesso em: 20 jun. 2025.

FILHO, Sadoc Fonseca ROCHA. Progressão aritmética de ordem superior; outro olhar, outra abordagem. **Universidade Federal do Maranhão**, 2020.

GABRIELLI, André Marchesini; MOTEIRO, Martha Salemo. **Atividades com Números Polígonais e Sequências**. Disponível em: <https://rpm.org.br/cdrpm/68/2-.html>https://rpm.org.br/cdrpm/68/2.html. Acesso em: 25 jun. 2025.

GOUVEIA, Rosimar. **Triângulo de Pascal**. 2025. Disponível em: <https://www-.todamateria.com.br/triangulo-de-pascal/>https://www.todamateria.com.br/triangulo-de-pascal/. Acesso em: 12 jan. 2025.

IEZZI, Gelson; HAZZAN, Samuel. **Fundamentos da Matemática Elementar**: sequência, matrizes, determinantes e sistemas. 8. ed. São Paulo: Atual, 2013. v. 4.

LABORÃO, Guilherme Guimarães. O triângulo de pascal. **Universidade Federal de Minas Gerais**, 2016.

MATEMÁTICA, Só. **Michael Stifel**. 2025. Disponível em: <https://www.somatematica-.com.br/biograf/stifel.php>https://www.somatematica.com.br/biograf/stifel.php. Acesso em: 15 jun. 2025.

MATEMÁTICA, Só. **Propriedades do Triângulo de Pascal**. 2025. Disponível em: <https://www.somatematica.com.br/emedio/binomio/binomio3-.php>https://www.somatematica.com.br/emedio/binomio/binomio3.php. Acesso em: 21 jun. 2025.

MORGADO, AC de O et al. **Análise combinatória e probabilidade**. Rio de Janeiro: SBM, 1991.

NOBRE, JFF; ROCHA, RA. Progressões aritméticas de ordem superior. **Professor de Matemática Online**, v. 1, n. 5, 2018.

OBMEP, Equipe COM. **Números Triangulares**. Disponível em: <clubes.obmep.org.br-/blog/sala-de-leitura-numeros-triangulares/>. Acesso em: 25 jun. 2025.

INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA DA PARAÍBA
Campus Cajazeiras - Código INEP: 25008978
Rua José Antônio da Silva, 300, Jardim Oásis, CEP 58.900-000, Cajazeiras (PB)
CNPJ: 10.783.898/0005-07 - Telefone: (83) 3532-4100

Documento Digitalizado Ostensivo (Público)

TCC

Assunto:	TCC
Assinado por:	Ewerthon Marques
Tipo do Documento:	Anexo
Situação:	Finalizado
Nível de Acesso:	Ostensivo (Público)
Tipo do Conferência:	Cópia Simples