



INSTITUTO FEDERAL
Paraíba
Campus Campina Grande

INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA DA PARAÍBA
CURSO DE ESPECIALIZAÇÃO EM ENSINO DE MATEMÁTICA

LARISSA ALVES DOS SANTOS

UMA ANÁLISE COMPARATIVA DE LIVROS DIDÁTICOS À LUZ DE OS
ELEMENTOS DE EUCLIDES

CAMPINA GRANDE - PB

2025

LARISSA ALVES DOS SANTOS

**UMA ANÁLISE COMPARATIVA DE LIVROS DIDÁTICOS À LUZ DE OS
ELEMENTOS DE EUCLIDES**

Monografia apresentada ao Curso de Especialização em Ensino de Matemática do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia da Paraíba (IFPB), como requisito parcial para obtenção do título de Especialista em Matemática.

Orientador: Prof. Me. Cicero da Silva Pereira

Catlogação na fonte:

Ficha catalográfica elaborada por Gustavo César Nogueira da Costa - CRB 15/479

S237a Santos, Larissa Alves dos

Uma análise comparativa de livros didáticos à luz de Os Elementos de Euclides / Larissa Alves dos Santos. - Campina Grande, 2025.

55 f. : il.

Trabalho de Conclusão de Curso (Curso de Especialização em ensino de Matemática.) - Instituto Federal da Paraíba, 2025.

Orientador: Prof. Me. Cícero da Silva Pereira.

1. Matemática. 2. Ensino de matemática. 3. Geometria Euclidiana. 4. Educação básica - livro didático I. Pereira, Cícero da. II. Título.

CDU 51:37

LARISSA ALVES DOS SANTOS

**UMA ANÁLISE COMPARATIVA DE LIVROS DIDÁTICOS À LUZ DE OS
ELEMENTOS DE EUCLIDES**

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado no Curso de Especialização em Ensino de Matemática do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia da Paraíba (IFPB) – Campus Campina Grande, como requisito parcial para obtenção do título de Especialista em Ensino de Matemática.

Orientador: Prof. Me. Cicero da Silva Pereira

Aprovado em: 30/10/2025

BANCA EXAMINADORA



Documento assinado digitalmente

CICERO DA SILVA PEREIRA

Data: 03/11/2025 11:13:05-0300

Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

Prof. Me. Cicero da Silva Pereira
Orientador - Instituto Federal da Paraíba (IFPB)



Documento assinado digitalmente

ERIKA CARLA ALVES CANUTO DA COSTA

Data: 04/11/2025 18:54:59-0300

Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

Profª. Ma. Érika Carla Alves Canuto da Costa
Avaliadora - Instituto Federal da Paraíba (IFPB)



Documento assinado digitalmente

RONNYLSON CESAR DE OLIVEIRA FONSECA

Data: 04/11/2025 21:38:06-0300

Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

Prof. Me. Ronnylson César de Oliveira Fonseca
Avaliador - Instituto Federal da Paraíba (IFPB)

AGRADECIMENTOS

Agradeço, primeiramente, a Deus e à Virgem Maria pelo dom da vida, pela força e pela sabedoria concedidas em cada etapa dessa caminhada.

Ao meu orientador, Prof. Me. Cicero da Silva Pereira, expresso minha sincera gratidão pela dedicação, paciência e pelas orientações sempre sábias e enriquecedoras.

Aos membros da banca examinadora, Prof^ª. Ma. Érika Carla Alves Canuto da Costa e Prof. Me. Ronnylson César de Oliveira Fonceca agradeço pela disponibilidade em aceitar o convite e pelas contribuições valiosas que enriqueceram este trabalho.

Aos meus pais, Pedro José dos Santos e Vitória de Souto Alves, agradeço pelo amor incondicional, pela educação e pelo apoio constante em toda a minha trajetória acadêmica.

Ao meu irmão, Luciano Alves dos Santos, por todo o incentivo, companheirismo e apoio que sempre me dedicou.

Ao meu namorado, Daniel Felipe, pela motivação, compreensão e presença constante em cada desafio.

A todos os professores do ensino básico e superior, bem como aos que fizeram parte da minha formação no IFPB, agradeço pelo compromisso, empenho e pela sabedoria transmitida, que tanto contribuíram para o meu crescimento acadêmico e pessoal.

Ao grupo de pesquisa Leitura e Escrita em Educação Matemática (LEEMAT), em especial ao professor Dr. José Joelson e aos demais integrantes, minha gratidão pelas trocas, aprendizados e pela contribuição essencial no meu percurso de formação.

Aos colegas da Universidade Estadual da Paraíba, pelas conversas, trocas de experiências e aprendizados que enriqueceram minha caminhada acadêmica.

Aos meus amigos Iara Luiza e Carlos Daniel, pela amizade verdadeira, pelo incentivo e pelo exemplo de profissionalismo docente.

Aos companheiros de viagem, que tornaram as longas horas de percurso mais leves, alegres e cheias de boas lembranças.

Aos motoristas Robson Douglas, Jandilson Batista e Wilton Carolino, pela responsabilidade, competência e cuidado em cada viagem.

E, por fim, aos meus colegas de curso, com quem compartilhei desafios, conquistas, aprendizados e momentos que tornaram as aulas mais dinâmicas, divertidas e inesquecíveis.

As leis da natureza são apenas os pensamentos matemáticos de Deus.
Euclides de Alexandria

RESUMO

A presente pesquisa apresenta uma análise de livros didáticos desenvolvida com o propósito de observar a relação entre o ensino de Matemática e o ensino de Geometria proposto para os alunos dos anos finais do Ensino Fundamental. O objetivo consiste em analisar livros didáticos de Matemática a partir da apresentação, do tratamento e do uso epistemológico da construção matemática 11 do Livro I de *Os Elementos*, investigando como o pensamento geométrico dedutivo da antiguidade é transposto e reinterpretado no contexto moderno. O desenvolvimento da análise partiu do interesse em compreender como o ensino de Geometria vem sendo trabalhado, tomando como referência as proposições e construções matemáticas expostas na obra de Euclides. Para isso, foram selecionados dois livros didáticos da rede pública de ensino. No decorrer da pesquisa, serão apresentados o contexto histórico, o desenvolvimento dos livros didáticos e o conteúdo da obra *Os Elementos*, destacando os principais aspectos abordados nos 13 volumes e, em especial, na construção matemática utilizada como base deste estudo. Como fundamento da análise, o estudo das proposições elaboradas por Euclides será a principal fonte de pesquisa. A partir dessas concepções, busca-se avaliar os contextos e teorias presentes nos livros didáticos destinados ao 8º ano do Ensino Fundamental. Diante disso, pretende-se observar de que forma a Geometria da construção matemática 11 do Livro I de *Os Elementos* é apresentada, tratada e reinterpretada nas obras didáticas contemporâneas. Essa análise possibilita compreender as necessidades e o aprimoramento do conhecimento matemático com base na formação dos alunos. Desse modo, é possível perceber a importância do livro didático como instrumento de orientação e fonte de saber, tanto para professores quanto para estudantes.

Palavras-chave: Ensino Fundamental; Geometria; Livros Didáticos; Os Elementos; Euclides de Alexandria.

ABSTRACT

The present research presents an analysis of textbooks developed with the purpose of observing the relationship between the teaching of Mathematics and the teaching of Geometry proposed for students in the final years of Elementary School. The objective is to analyze Mathematics textbooks based on the presentation, treatment, and epistemological use of the mathematical construction 11 from Book I of *The Elements*, investigating how the deductive geometric thinking of Antiquity is transposed and reinterpreted in the modern context. The development of this analysis stemmed from the interest in understanding how Geometry teaching has been approached, taking as a reference the propositions and mathematical constructions presented in Euclid's work. For this purpose, two textbooks from the public education network were selected. Throughout the research, the historical context, the development of textbooks, and the content of *The Elements* will be presented, highlighting the main aspects addressed in its 13 volumes, with special emphasis on the mathematical construction used as the basis for this study. As the foundation of the analysis, the study of the propositions elaborated by Euclid will serve as the main source of research. From these conceptions, the study seeks to evaluate the contexts and theories present in the textbooks intended for the 8th grade of Elementary School. Therefore, the aim is to observe how the Geometry of mathematical construction 11 from Book I of *The Elements* is presented, treated, and reinterpreted in contemporary Mathematics textbooks. This analysis makes it possible to understand the needs and enhancement of mathematical knowledge based on students' educational development. In this way, it is possible to recognize the importance of the textbook as both a guiding tool and a source of knowledge for teachers and students alike.

Keywords: Elementary Education; Geometry; Textbooks; The Elements; Euclid of Alexandria.

LISTA DE IMAGENS

Imagem 1: Construção Matemática 11

Imagem 2: Conceito da construção

Imagem 3: Capa do livro 1 (coleção 1)

Imagem 4: Capa do livro 2 (coleção 1)

Imagem 5: Estudos de casos de congruência

Imagem 6: Conceito de mediatriz

Imagem 7: Propriedades dos triângulos isósceles

Imagem 8: Continuação da propriedade dos triângulos isósceles

Imagem 9: Origens da Geometria

Imagem 10: Medida de área do paralelogramo e do triângulo

Imagem 11: Continuação do estudo de área do triângulo

Imagem 12: Área do hexágono com medidas triangulares

Imagem 13: Área de uma região limitada de um paralelogramo e de um triângulo

Imagem 14: Exercícios com perpendicularidade e área dos triângulos

Imagem 15: Exercícios propostos

Imagem 16: Contexto histórico

Imagem 17: Caso de congruência em triângulos

Imagem 18: Geometria dedutiva

Imagem 19: Altura de um triângulo

Imagem 20: Exercícios com altura de triângulos

Imagem 21: Exercício retas paralelas e perpendiculares

LISTA DE TABELAS

Tabela 01: Apresentações dos livros *Os Elementos*

Tabela 02: Apresentação do livro 1 de *Os Elementos*

Tabela 03: Estudo do livro Matemática e Realidade

Tabela 04: Estudo do livro Teláris Essencial

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

a.C. – Antes de Cristo

BNCC – Base Nacional Comum Curricular

CAPES – Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior

CCJ – Centro de Ciências Jurídicas

CONEDU – Congresso Nacional de Educação

COVID – 19 – Coronavírus

ECI Iolanda Tereza Chaves Lima – Escola Cidadã Integral Iolanda Tereza Chaves Lima

EEEFM Iolanda Tereza Chaves Lima – Escola Estadual de Ensino Fundamental e Médio Iolanda Tereza Chaves Lima

EMEF Padre Simão Fileto – Escola Municipal de Ensino Fundamental Padre Simão Fileto

EPBEM – Encontro Paraibano de Educação Matemática

IFPB – Instituto Federal de Educação da Paraíba

MEC – Ministério da Educação

MMM – Movimento da Matemática Moderna

OBMEP – Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas

PCN – Parâmetros curriculares nacionais

PRÓ-ENEM – Curso Comunitário Preparatório para o Enem.

SISU – Sistema de seleção unificada

TCC – Trabalho de Conclusão de Curso

UEPB – Universidade Estadual da Paraíba

UFCG – Universidade Federal de Campina Grande

SUMÁRIO

1. INTRODUÇÃO.....	12
1.1. QUESTÃO NORTEADORA.....	16
1.2. OBJETIVOS.....	16
2. OS ELEMENTOS DE EUCLIDES: O LIVRO QUE CONTINUA A INFLUENCIAR O ESTUDO DA MATEMÁTICA.....	17
2.1. APRESENTAÇÃO DO LIVRO I – OS ELEMENTOS	20
2.2. A CONSTRUÇÃO MATEMÁTICA 11 – LIVRO I	22
3. O LIVRO DIDÁTICO DE MATEMÁTICA: UMA INTERPRETAÇÃO DA SUA CONSTRUÇÃO	24
3.1. OS LIVROS DIDÁTICOS NO BRASIL	25
3.2 O LIVRO DIDÁTICO NAS ESCOLAS	26
3.3 A GEOMETRIA NO LIVRO DIDÁTICO DE MATEMÁTICA.....	28
4. A GEOMETRIA DA CONSTRUÇÃO MATEMÁTICA 11 DE OS ELEMENTOS E A GEOMETRIA DO LIVRO DIDÁTICO DE MATEMÁTICA: APROXIMAÇÕES E DISTANCIAMENTOS.	29
4.1. A APLICAÇÃO	29
4.2. ANÁLISE DOS DADOS	32
5. CONSIDERAÇÕES FINAIS	52
6. REFERÊNCIAS	55

1. INTRODUÇÃO

No decorrer de toda trajetória de minha vida, a Matemática sempre esteve presente, principalmente em relação à compra e venda de mercadorias. Essa relação com a Matemática foi desenvolvida a partir do ambiente de comércio que meus pais eram responsáveis onde junto com eles eu frequentava todos os dias, a partir disso surge a afinidade com temas da matemática no meu cotidiano. Outro elemento que também explica uma relação de harmonia com esse conhecimento se configura no bom desempenho e melhores notas em provas escolares e em provas específicas como a OBMEP (Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas), que em todos os anos do Ensino Fundamental vieram a classificação para a última fase.

Em todo o Ensino Fundamental a aproximação com a disciplina de Matemática sempre era mais significativa, o gosto pelas atividades e descobertas matemáticas cativaram ainda mais a afinidade, mesmo sem pensar em qual o projeto de vida acadêmica que iria tomar, professores motivavam e caracterizavam a matemática como uma opção ideal e nos anos finais do Ensino Fundamental II na EMEF Padre Simão Fileto, fui cativada ainda mais pela Matemática, principalmente por equações do segundo grau. Diante disso, o professor de Matemática, Eudes Henrique, observou meu conhecimento, minha dedicação com a disciplina e disse que eu teria um bom desempenho na área da Matemática.

No início do Ensino Médio na EEEFM Iolanda Tereza Chaves Lima, mudaram-se os professores, o modelo de escola, mas eu continuava com o carinho pela Matemática. Em meados do 1º ano do Ensino Médio a professora Danyally Alcantara desenvolveu um projeto de Matemática, onde nós alunos da turma apresentamos esse projeto para algumas escolas do nosso município. Logo após, a escola teve alterações e se tornou a ECI Iolanda Tereza Chaves Lima, que mudou algumas disciplinas, incluindo a de Projeto de Vida que nos motivava a seguir nossos sonhos e as aulas dessa disciplina tornava o desejo de ser professora ainda maior.

Aos poucos eu ia fortalecendo a minha relação com os outros alunos e percebendo que eles entendiam a forma que eu explicava e em períodos de provas nos sentávamos para estudar juntos, especificamente cada um dominava uma revisão com a área que tinha mais conhecimento, que no meu caso era a Matemática.

O tempo foi passando e, em 2019, chegou a minha vez de ingressar numa universidade. No primeiro semestre do SISU estava em dúvidas, não tinha aberto vaga para

Licenciatura em Matemática na UEPB e me restaram a UFCG e o IFPB. Para tentar passar, porém por questões de transporte optei por tentar uma vaga apenas na UFCG, não tinha chegado o momento da aprovação e eu não consegui ingressar naquele semestre. No semestre seguinte abriram vagas para a Licenciatura em Matemática na UEPB e eu consegui ingressar na chamada regular e com isso comecei minha formação acadêmica. O primeiro semestre do curso foi muito proveitoso e cheio de novas experiências, tudo era novo, mas aquele conhecimento adquirido, as belezas nas demonstrações, abrilhantavam os olhos. Já o segundo semestre houve o início da quarentena¹ da COVID – 19 impossibilitando as nossas aulas presenciais, passaram-se os dias e surgiram as aulas remotas, que por sinal eram cheias de desafios para nós alunos e também para os professores, as quedas de internet, falta de energia e diversos outros problemas onde os professores adaptavam formas de ensinar e nos alunos buscávamos compreender os conteúdos ensinados.

No início do ano 2022, eu estava cursando o 6º período e tive a oportunidade de atuar na área através do PRÓ-ENEM da UEPB, programa que buscava incluir os estudantes das graduações em suas determinadas áreas para atuar como monitores, essas aulas aconteciam para alunos do 3º ano do Ensino Médio ou vestibulandos, com a finalidade de melhor prepará-los para a prova do ENEM. Nas aulas eram planejados assuntos com ênfase no ENEM e resolução de questões das provas. Ainda com a pandemia iniciamos o programa com aulas remotas e com uma baixa dos casos voltamos às aulas presenciais no CCJ da UEPB, em Campina Grande. Após essa experiência também tive a oportunidade de ingressar na Residência Pedagógica, que é um programa da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - CAPES, que tem por finalidade fomentar projetos institucionais de residência pedagógica implementados por Instituições de Ensino Superior, contribuindo para o aperfeiçoamento da formação inicial do professor em formação, que atuará como professor em conjunto ao seu preceptor² de uma determinada escola que o projeto acontece.

Além da atuação nesses programas, também participei de eventos de Matemática, onde a partir desses eventos e contribuições dos professores, construí envolvimento e afinidades com as áreas de Educação Matemática e História da Matemática. Durante a graduação produzi artigos e publiquei em diversos eventos como o EPBEM e CONEDU. Diante disso, o gosto por escrever e produzir materiais foi se tornando sempre presente e cada evento é mais conhecimentos e contribuições adquiridas. Finalizando o curso em 2023,

¹ A quarentena restringe o trânsito de pessoas no âmbito social, fazendo o isolamento que é a separação dos indivíduos doentes, já contaminados por determinada enfermidade.

² é um professor da escola de educação básica que acompanha e orienta os estudantes-residentes durante o período de estágio prático no programa.

trabalhei no meu TCC a temática História da geometria na antiguidade: análise de um livro didático dos anos finais do Ensino Fundamental, e saliento que desde toda essa trajetória da graduação a História da Matemática e a geometria sempre se fizeram presente e tornando frequente e aumentando interesse de produzir mais pesquisas na área.

Na sequência ingressei no mestrado acadêmico do programa de pós-graduação da UEPB e também na especialização em Ensino de Matemática, ambas no ano de 2024, seguindo essa mesma linha de pesquisa e sempre buscando compreender e aprimorar o entendimento sobre a temática. Partindo daí, a temática de pesquisa do mestrado está sendo modificada, contudo ainda pertence a linha de pesquisa estudada. Já para a especialização a ideia de continuar trabalhando sobre História da Matemática persistiu, e no segundo módulo diante da disciplina de tópicos de geometria, que por sua vez aprofundou e aprimorou ainda mais o gosto pela temática, onde o trabalho final dessa disciplina é um recorte do que vamos apresentar no decorrer desta monografia.

Para entender melhor, na disciplina foi proposto que através de um teorema do livro *Os Elementos* fizessemos a análise de livros didáticos, partindo de estudo e compreendendo a sua importância, nossa ideia era buscar identificar a geometria no livro de Euclides de forma qualitativa, sendo influenciada com um teor de análise documental através dos livros didáticos de matemática.

A obra *Os Elementos* exerceu influência não apenas em sua época, mas também ao longo de vários séculos, consolidando-se como um dos principais textos de ensino de Matemática na Grécia, em Roma e em diversas regiões do mundo. A clareza e a lógica apresentadas por Euclides estabeleceram as bases para o que hoje consideramos a Matemática moderna, sendo fundamentais para o desenvolvimento da Geometria como disciplina.

Nesse contexto, busca-se compreender como os conceitos geométricos eram apresentados na antiguidade e de que forma são expostos atualmente nos livros didáticos de Matemática. Evidencia-se, assim, a importância de estudar a geometria e suas origens, uma vez que o entendimento de seu desenvolvimento histórico está diretamente relacionado à compreensão da evolução do conhecimento matemático e de sua aplicação na vida cotidiana, especialmente no conceito de agrimensura. A geometria não se limita a uma disciplina teórica: suas raízes estão entrelaçadas às necessidades práticas das civilizações antigas, como medir terras e construir estruturas, refletindo o esforço humano em compreender e organizar o espaço ao seu redor onde essa ideia será evidenciada diante dos pensamentos matemáticos ao longo do texto.

Ao explorar a evolução da geometria, é possível perceber que seu desenvolvimento foi impulsionado por diversos fatores. Essa perspectiva permite conectar os conceitos matemáticos a contextos reais, tornando o aprendizado mais significativo e motivador para os estudantes.

Esta pesquisa constitui o Trabalho de Conclusão da Especialização em Matemática e foi organizada em seis capítulos. No primeiro, apresenta-se a introdução, a questão norteadora e os objetivos. O segundo capítulo aborda a temática *Os Elementos* de Euclides, suas definições e os contextos matemáticos da antiguidade, destacando as divisões dos treze volumes e o livro I, com ênfase na construção matemática analisada, que servirá como núcleo central deste estudo. O terceiro capítulo trata do livro didático de Matemática, seu surgimento no Brasil, seu papel nas escolas e os fragmentos geométricos presentes nesses materiais de apoio. O quarto capítulo apresenta as aproximações e os distanciamentos observados na pesquisa, analisando os livros didáticos selecionados e destacando os elementos que se assemelham à construção matemática estudada. Por fim, os capítulos quinto e sexto trazem, respectivamente, as considerações finais e as referências.

A escolha desta temática, centrada na geometria, resultou de pesquisas e estudos anteriores, bem como da afinidade pessoal com o ensino e a investigação em Matemática. É importante destacar que, ao longo da formação nesta pós-graduação, a disciplina de Tópicos de geometria foi um dos principais fatores motivadores para a realização deste trabalho, impulsionando o início da escrita desta monografia.

Dessa forma, a motivação para a pesquisa surgiu da relação entre geometria, livros didáticos e a Matemática na antiguidade. A partir dessa conexão, busca-se evidenciar o diálogo entre a Matemática antiga e a moderna, tomando como fontes de análise a construção matemática 11 do Livro I de *Os Elementos* e dois livros didáticos do 8º ano do Ensino Fundamental, Matemática e Realidade e Teláris Essencial. A escolha desses materiais foi de caráter pessoal, primeiramente selecionou-se a construção matemática e, em seguida, buscamos os livros que mais abordam a temática estudada.

Observa-se que a Matemática nos livros didáticos é apresentada como um conhecimento sistematizado, que combina explicações teóricas, exemplos resolvidos, atividades práticas e problemas contextualizados, adequando-se ao nível de ensino e conduzindo o aluno do concreto ao abstrato. Assim, ao longo desta pesquisa, serão observadas as relações entre essas abordagens e a forma como o conteúdo matemático da construção analisada se manifesta nos livros didáticos contemporâneos.

Com base nisso, ressalta-se que compreender a importância da Geometria e de suas origens permite não apenas apreciar a evolução do conhecimento matemático, mas também reconhecer seu papel essencial na formação de habilidades críticas e em sua aplicação prática no cotidiano. Essa temática, portanto, merece ser explorada e valorizada, especialmente diante da escassez de pesquisas recentes sobre o assunto, o que torna este estudo relevante e acessível ao público interessado na área.

Desse modo, busca-se analisar os materiais de apoio utilizados pelos alunos, considerando a Matemática apresentada em *Os Elementos* e observando como o conteúdo da construção matemática escolhida é desenvolvido no Ensino Fundamental II. Além disso, pretende-se examinar a forma de escrita presente nesses materiais e sua influência no processo de aprendizagem.

1.1. QUESTÃO NORTEADORA

Como a geometria da construção matemática 11 do Livro I de *Os Elementos*, de Euclides, é apresentada, tratada e reinterpretada nos livros didáticos de Matemática contemporâneos?

1.2. OBJETIVOS

Objetivo Geral:

- Analisar livros didáticos de matemática, a partir da apresentação, do tratamento e do uso epistemológico da construção matemática 11 do Livro I de *Os Elementos*, investigando como o pensamento geométrico dedutivo da antiguidade é transposto e reinterpretado no contexto moderno.

Objetivos Específicos:

1. Examinar a organização dos temas, a progressão lógica e a clareza na apresentação dos conceitos matemáticos, através de suas aplicações teóricas e práticas.
2. Compreender como as metodologias de ensino foram propostas, incluindo o uso de exemplos, exercícios práticos e atividades interativas.
3. Analisar a estrutura da abordagem de geometria nos livros analisados neste trabalho à luz de teorias Matemáticas propostas por Euclides no livro *Os Elementos*.

2. OS ELEMENTOS DE EUCLIDES: O LIVRO QUE CONTINUA A INFLUENCIAR O ESTUDO DA MATEMÁTICA

Como fonte principal a agrimensura e a necessidade de estocagem, surgiram as primeiras noções de contagem, bem como o interesse financeiro, parecem ter sido o estopim para o estudo das figuras geométricas e suas propriedades. Além disso, noções como medidas de terras são uma parte indispensável para o que hoje chamamos de geometria. “A palavra ‘geometria’ pode ser traduzida, portanto, como ‘medida da terra’. Vem daí a ideia de que seu surgimento está ligado à agrimensura” (ROQUE, 2002, p.93).

A geometria surgiu em várias culturas antigas. Por volta do século II a.C, que foi posta por Euclides, mas o estudo perdurou por séculos levando nomes de outros matemáticos pesquisadores que buscavam compreender e dialogar temas já expostos ou não por Euclides. Onde a proposta do seu livro era introduzir um sistema axiomático e dedutivo, que parte de conceitos e proposições sem demonstrações e diante disso, seus escritos estão sendo argumentos mais concisos e lógicos.

Os estudos de Matemática feitos em Alexandria caracterizavam-se por dois fatores importantes: “O primeiro deles era a preocupação em recuperar tradições de investigação desenvolvida e assim dar sequência; o segundo fator era a aproximação entre a investigação matemática e a sua aplicabilidade prática.” (Gamas, 2013, p. 48). Nos primórdios o conhecimento da geometria estava dividido entre opiniões e suas próprias histórias e mitos. Para os egípcios, a matemática era concebida a partir de suas aplicações práticas, ou seja, relações cotidianas que envolviam atos da vivência pessoal daqueles povos.

Segundo Boyer (1974) “o desenvolvimento da geometria pode muito bem ter sido estimulado pela necessidade prática de construção e de demarcação de terras, ou pelo sentimento estético por design e ordem.” Talvez por isso grande parte dos matemáticos alexandrinos são ao mesmo tempo, geógrafos, especialistas em mecânica ou astrônomos. Importantes matemáticos passaram por Alexandria e fizeram importantes contribuições para a matemática e as ciências.

Segundo Ferreira (2016) Euclides foi considerado um dos grandes pioneiros de Alexandria, o que se sabe é que possivelmente frequentou a Biblioteca durante o reinado de Ptolomeu I em aproximadamente 330 a.C. Como relata a história foi convidado por Demétrio de Faleros, para criar uma escola Matemática e formar discípulos. Euclides escreveu várias obras, Dados, Fenómenos, Porismos, Óptica, Elementos (organizados em 13 volumes), sendo

está última sua principal obra que o tornará o matemático mais conhecido desde a antiguidade.

Que representam os Elementos euclidianos na História da Matemática? Uma das mais notáveis obras, que concilia a compilação dos conhecimentos matemáticos mais relevantes de uma tradição herdada da Grécia Clássica e registrada, na sequência da prática de compilação de Elementos, iniciada pelo menos dois séculos antes, associada a novos estudos e às aquisições decorrentes das investigações matemáticas de Euclides. Na verdade, Desde a Antiguidade só a Bíblia e, talvez, Homero, conheceu maior difusão que os Elementos de Euclides, suporte de ensino de Matemática por mais de dois milénios (Gamas, 2013 p.48).

No entanto, o livro *Os Elementos* de Euclides, trás para a matemática vastas e significativas razões, podemos salientar que ele desenvolveu e sistematizou a geometria, apresentando conceitos básicos como pontos, linhas, ângulos e figuras. Introduziu método axiomático e uma estrutura lógica para os teoremas e demonstrações. Sua abordagem rigorosa estabeleceu uma base para a geometria que perdura até hoje, contribuindo para o desenvolvimento da construção de saberes matemáticos mais aprimorados, tendo como base definições, proposições e demonstrações.

Observe na tabela 01 abaixo como são divididos os 13 volumes dos livros tendo como referência, temas centrais, conteúdos principais e a quantidade de proposições e construções matemáticas.

Tabela 01: Apresentações dos livros *Os Elementos*

Apresentação dos livros <i>Os Elementos</i>			
Livros	Temas centrais	Conteúdos trabalhados	Quantidade de proposições/construções matemáticas
Volume 1	Introdução a geometria plana	Triângulos, paralelas e paralelogramas e o Teorema de Pitágoras	48
Volume 2	Geometria Algébrica	Transformação de figuras e formas geométricas e resolução de equações algébricas de segundo grau	14
Volume 3	Geometria dos círculos	Círculos	37

Volume 4	Construções geométricas circulares	Polígonos regulares inscritos ou circunscritos no círculo	16
Volume 5	Teoria das proporções	Exposição da teoria das proporções de Eudoxo de Cnidos	25
Volume 6	Semelhanças e propriedades de figuras planas	Teoria das proporções de Eudoxo à geometria plana	33
Volume 7	Aritmética teoria dos números	Algoritmo euclidiano	39
Volume 8	Progressões geométricas e números proporcionais	Aritmética com números racionais	27
Volume 9	Teoria dos números	Aritmética com números racionais	36
Volume 10	Números irracionais e segmentos incomensuráveis	Grandezas comensuráveis e incomensuráveis	115
Volume 11	Geometria espacial	Geometria espacial	39
Volume 12	Teoria das proporções (geometria espacial)	Geometria espacial	18
Volume 13	Propriedades e construções de sólidos geométricos	Sólidos regulares inscritos ou circunscritos na esfera	18

Fonte: autoria própria

Os conceitos apresentados por Euclides não são apenas aplicáveis à matemática e geometria, a obra também aborda elementos da teoria dos números, contribuindo para o desenvolvimento posterior de áreas como a álgebra, além de diversas noções sobre o conhecimento da física. Esses estudos e temáticas mesmo que sofrendo alterações são essenciais para o que é explícito nos conceitos matemáticos estudados, dessa forma em nossa pesquisa escolhemos o livro/volume 1 que apresenta o conceito de introdução a geometria plana, no que se refere aos triângulos, paralelas e paralelogramos, além do Teorema de Pitágoras, esse livro contempla 48 proposições e em nossa pesquisa escolhemos a construção matemática de número 11 para ser nossa forte norteadora.

2.1. APRESENTAÇÃO DO LIVRO I – OS ELEMENTOS

O primeiro livro de *Os Elementos* é dividido em 23 definições e 48 teoremas. Todas as demonstrações seguem um padrão de harmonia para melhor entendimento e compreensão do conteúdo matemático. Destacamos nossa pesquisa voltada ao livro 1 a fim de estimular e observar o uso de fontes primárias. Diante de tantas mudanças recorrentes ao aprimoramento do estudo matemático buscamos apresentar como o livro 1 de *Os Elementos* era dividido e quais conteúdos ele apresenta nesse material.

Diante disso a tabela 02 abaixo apresenta os conteúdos apresentado no livro 1 e 1 desses elementos o qual será trabalhado no decorrer desse material, a escolha da construção matemática está nessa divisão como construção geométrica com noções de perpendicularidade.

Tabela 02: Apresentação do livro 1 de *Os Elementos*

Apresentação do livro 1 de <i>Os Elementos</i> (Euclides, 2009)		
Quantidade de construções ou teoremas com a temática	Conteúdo matemático apresentado	Temática trabalhada
1	Construção de triângulos equiláteros	Geometria Plana
1	Transporte de segmentos	Construções Geométricas
1	Transporte de segmentos em uma direção específica	Construções Geométricas
1	Primeiro caso de igualdade de triângulos	Geometria Plana
2	Teorema do triângulo isósceles	Geometria Plana
1	Unicidade na construção de um triângulo	Conteúdo programado
1	Terceiro caso de igualdade de triângulos	Geometria Plana

1	Bissecção de um ângulo	Construções Geométricas
1	Bissecção de um segmento	Construções Geométricas
2	Construção de ângulos retos (perpendiculares)	Construções Geométricas
1	Uma reta incidente sobre outra forma ângulos iguais a dois retos	Relações e Propriedades de Retas
1	Duas retas que, com uma mesma reta dada, determinam dois ângulos iguais a dois retos, estão sobre a mesma linha reta	Relações e Propriedades de Retas
1	Ângulos opostos pelo vértice são iguais	Relações e Propriedades de Retas
2	Teorema do ângulo externo	Geometria Plana
1	Em todo triângulo, o lado maior se opõe ao ângulo maior	Geometria Plana
1	Em todo triângulo, o ângulo maior é oposto ao lado maior	Geometria Plana
2	Desigualdade triangular	Geometria Plana
1	Construção de um triângulo qualquer	Geometria Plana
3	Transporte de ângulos	Construções Geométricas
1	Segundo caso de igualdade de triângulos	Geometria Plana
2	Existência de paralelas	Relações e Propriedades de Retas
2	Propriedades das paralelas	Relações e Propriedades de Retas
3	Traçado de paralelas	Construções Geométricas

1	Em um paralelogramo, os lados e ângulos opostos são iguais, e o diâmetro divide o paralelogramo em partes iguais	Geometria Plana
2	Paralelogramos que estão sobre a mesma base e entre as mesmas paralelas são iguais entre si	Geometria Plana
4	Triângulos que estão sobre a mesma base e entre as mesmas paralelas são iguais entre si	Relações e Propriedades de Retas
5	Se um paralelogramo e um triângulo estão sobre a mesma base e entre as mesmas paralelas, o paralelogramo é o dobro do triângulo	Geometria Plana
3	Construção de quadrado	Geometria Plana Teorema de Pitágoras

Fonte: autoria própria

2.2. A CONSTRUÇÃO MATEMÁTICA 11 – LIVRO I

O objeto analisado trata-se de livros didáticos dos anos finais do Ensino Fundamental, nesse contexto buscamos explorar a temática através da produção de uma análise dos livros didáticos, caracterizado pela construção matemática do livro I nomeado por (11) que diz: “Traçar uma linha reta em ângulos retos com a reta dada a partir do ponto sobre ela”. Diante deste ponto vamos destacar e analisar os fragmentos que estão apresentados nos livros didáticos. Com base neste postulado por Euclides estudado analisamos a presença deste contextos e teorias que estão expostas nos livros didáticos.

Observe o que foi dado na construção:

Imagem 1: Construção Matemática 11

11.

Traçar uma linha reta em ângulos retos com a reta dada a partir do ponto dado sobre ela.

Fonte: (Euclides, (2009).)

O enunciado desse conceito é uma construção geométrica relacionado com a construção de uma perpendicular a uma reta a partir de um ponto dado sobre ela. Como

complemento para o entendimento desse conceito vamos utilizar passos para demonstrar a construção matemática escolhida.

Vamos observar a construção do raciocínio:

Dada a reta $\overline{AB}$ e o ponto C sobre essa reta, o objetivo inicial é traçar uma linha reta que seja perpendicular a $\overline{AB}$ a partir do ponto C .

Escolha de D sobre o segmento $\overline{AC}$: O ponto D é escolhido ao acaso sobre o segmento $\overline{AC}$, o que sugere que qualquer ponto D pode ser selecionado entre A e C .

Definir E tal que $\overline{CE} = \overline{CD}$: O ponto E é determinado de modo que a distância $\overline{CE}$ seja igual à distância $\overline{CD}$; ou seja, E é o ponto simétrico de D em relação a C .

Construção do triângulo equilátero FDE : Sobre o segmento $\overline{DE}$, um triângulo equilátero é construído com os vértices D , F e E . Isso significa que os três lados $\overline{DF}$, $\overline{FE}$ e $\overline{DE}$ são todos congruentes.

Ligação do ponto F ao ponto C : A linha reta $\overline{FC}$ é traçada, ligando o ponto F ao ponto C .

Provando pela perpendicularidade, temos:

Como $\overline{DC} = \overline{CE}$ e $\overline{CF}$ é uma linha comum, temos que $\overline{DC} = \overline{EC}$ e $\overline{CF} = \overline{CF}$ são congruentes.

As bases $\overline{DF}$ e $\overline{FE}$ do triângulo equilátero são iguais.

Isso implica que os triângulos DCF e ECF são congruentes, pois possuem os três lados correspondentes iguais.

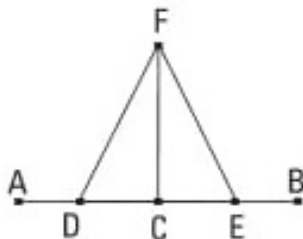
Como os triângulos são congruentes, os ângulos DCF e ECF são iguais.

Os ângulos $\overline{DFC}$ e ECF são adjacentes, o que implica que cada um deles é reto, já que a soma de ângulos adjacentes numa linha reta é 180° , e, portanto, cada um deve ser 90° .

Portanto, a linha $\overline{FC}$ é, de fato, perpendicular à reta $\overline{AB}$ a partir do ponto C .

Acompanhe a imagem que traz o que é posto na demonstração:

Imagem 2: Conceito da construção



Fonte: (Euclides, (2009).)

Como referência, podemos evidenciar que essa construção instrui a ideia de escolher um ponto específico sobre uma reta já existente e, a partir desse ponto, desenhar uma nova linha reta que forme um ângulo reto de 90° com a reta original.

Diante dessa construção, podemos relacionar como essa operação é fundamental em Geometria, especialmente em construções geométricas, no cálculo de áreas, perímetros e volumes de figuras geométricas. Além dessa relação, podemos destacar a ideia de perpendicularidade, que é essencial para a Geometria euclidiana e constitui parte importante das construções geométricas mencionadas.

Dessa forma, o raciocínio dedutivo nos apresenta construções simples, por meio das quais é possível chegar a resultados lógicos e seguros. O estudo do método dedutivo de Euclides é considerado um modelo para a Matemática ocidental e, com base nesse contexto, ressaltamos a relevância da nossa pesquisa.

3. O LIVRO DIDÁTICO DE MATEMÁTICA: UMA INTERPRETAÇÃO DA SUA CONSTRUÇÃO

Para abordarmos as conexões entre livros didáticos e geometria, vamos adentrar na perspectiva histórica do surgimento dos materiais de apoio utilizados na antiguidade. Levando em consideração que a maioria dos estudos da época eram escolas elementares, universidades e escolas militares, onde buscava compreender diversos conceitos já abordados nas enciclopédias disponíveis naquele período de tempo. A maioria destes materiais eram produzidos para serem utilizados nos diversos níveis de estudos, contudo alguns tinham quantidades negativas e eram classificados para as escolas elementares e escolas militares, denominados livros textos “public mondain” definido como público mundano (Schubring, 2003).

Um livro que é visto como essa definição foi *L'arithmétique des géomètres*, do padre Deidier, publicado aproximadamente em 1740, para esse autor a geometria era configurada como parte superior da matemática (Schubring, 2003). Mesmo com algumas ideias ainda que não bem definidas, surgiram outros livros textos que formam variações desse livro, com modificações caracterizadas por melhorias na estrutura e na metodologia apresentada, onde seu desenvolvimento Schubring (2003), acreditava que esses livros textos servia como uma abordagem genética e valorizava o seu papel como um ponto inicial para uma valorização do ensino de matemática e dos materiais de apoio futuros.

3.1. OS LIVROS DIDÁTICOS NO BRASIL

A educação moderna tem seu início marcada pelos povos jesuítas no Brasil, onde nas escolas eram ensinados a “ler e escrever”. Levando em consideração o desenvolvimento da educação para toda a classe de pessoas, sendo caracterizado como um plano educacional de ordem. Na prática não existia essa ideia e o ensino rodeava classes privilegiadas e buscava preparar os filhos de colonizadores apenas para os trabalhos manuais (Aranha, 1989).

Ao observar relações de livros didáticos e povos brasileiros, destaca-se que os primeiros textos e/ou livros eram adaptações de materiais europeus, mas precisamente de Portugal. No entanto as políticas públicas e o poder político, caracterizaram como necessário as produções de livros textos próprios e de origens nacionais (Bittencourt, 2004).

Com o desenvolver desses livros textos surgiram editoras que colaboraram com o desenvolvimento da educação, fortalecendo vínculos com instituições e alinhando suas ideias com à políticas e noções pensadas pelas escolas.

A concepção do livro didático e sua destinação eram determinações quase exclusivas do poder político educacional, que procurava no grupo da elite intelectual, apoio para a produção desse tipo de literatura. Tivemos assim, na geração dos iniciadores da produção didática, figuras próximas ao governo, escritores de obras literárias, sobretudo os principais encarregados do “fazer científico” da época (Bittencourt, 2004, p.482).

Com base nisso surgiram a expansão do ensino brasileiro e a necessidade de criar maior quantidade de materiais de apoio, buscando diversificar os livros didáticos e colaborar com a educação das escolas elementares. No mesmo período de tempo os livros didáticos tornaram forte influência e serviam os materiais de apoio para os professores, colaborando como fonte de apoio e pesquisa (Bittencourt, 2004).

O livro didático traz, desde sua origem, sua ambiguidade no que se refere ao seu público. O professor é figura central, mas existe o aluno. O livro didático não pode separá-los. A partir da segunda metade do século XIX passou a se tornar mais claro que o livro didático não era um material de uso exclusivo do professor, que transcrevia ou ditava partes do livro nas aulas, mas que ele precisava ir diretamente para as mãos do aluno (Bittencourt, 2004, p. 483).

Nesse sentido o aluno passa também a ser um centro na sala de aula e conduz juntamente com o professor o processo de ensino e aprendizagem, valorizando uma educação mais eficaz.

3.2 O LIVRO DIDÁTICO NAS ESCOLAS

Os livros didáticos utilizados nas escolas públicas brasileiras são selecionados por meio do Programa Nacional do Livro e do Material Didático (PNLD), que organiza, avalia e distribui esses materiais para todo o país. O processo começa com a inscrição das obras pelas editoras, que submetem suas coleções para análise. Em seguida, uma equipe de especialistas realiza uma avaliação técnica e pedagógica, verificando se os livros estão de acordo com a Base Nacional Comum Curricular (BNCC), se apresentam conteúdos corretos e se estão alinhados aos direitos humanos.

Após a aprovação dos materiais de apoio, eles participam do processo de inclusão no Guia do Livro Didático, documento que traz resenhas e análises das obras e serve de referência para que as escolas façam sua escolha. A seleção é realizada de forma coletiva pelos professores, garantindo que o material esteja alinhado à realidade da comunidade escolar. Após a escolha, o governo federal compra e distribui os livros para as escolas, assegurando que os alunos tenham acesso gratuito a materiais de qualidade.

O MEC expressa que os livros didáticos são obras inscritas pelos detentores de direitos autorais, conforme critérios estabelecidos em edital, e avaliadas por especialistas das diferentes áreas do conhecimento. Se aprovadas, compõem o Guia Digital do PNLD, que orienta o corpo docente e o corpo diretivo da escola na escolha das coleções para cada etapa de ensino. A forma de escolha é coletiva pelos professores, garantindo que o material de apoio esteja alinhado à realidade dos alunos. Após a escolha, o governo federal compra e distribui os livros para as escolas, assegurando que os alunos tenham acesso gratuito a materiais de qualidade.

Podemos destacar que o PNLD faz parte de uma política pública do governo federal, responsável por garantir que as escolas públicas de educação básica recebam materiais didáticos de qualidade, de forma gratuita e regular. Mais precisamente, o programa organiza todo o processo de avaliação, escolha, compra e distribuição dos livros e outros materiais, que, após a avaliação, são enviados para o processo de seleção dos materiais de apoio nas escolas.

Ao pensar no livro didático, surge a ideia de apoio, material escolar, caderno de questões e outras características que remetem ao uso desse material, ambos antes de serem observados e explorados de maneira consciente. Salientamos que o livro didático surgiu desde a antiguidade, partindo de ideias das instituições particulares da época. Contudo, ao longo de sua existência, foi se tornando acessível para todo o público educacional como forma de nortear e servir de apoio para alunos e professores, sendo de total responsabilidade do governo disponibilizar os livros didáticos para as redes públicas de ensino.

Além da responsabilidade em disponibilizar os materiais de apoio, salientamos os conteúdos propostos nesses materiais também são fontes principais no processo de ensino. D'Ambrósio (1996) afirma que a História da Matemática é fundamental para o estabelecimento da Matemática como um elemento cultural, inverso ao modo mecanicista de considerá-la como algo exato, acabado e alheio às alterações humanas. Assim como os demais contextos e propriamente o estudo de geometria.

A BNCC aborda que:

para a aprendizagem de certo conceito ou procedimento, é fundamental haver um contexto significativo para os alunos, não necessariamente do cotidiano, mas também de outras áreas do conhecimento e da própria história da Matemática. No entanto, é necessário que eles desenvolvam a capacidade de abstrair o contexto, apreendendo relações e significados, para aplicá-los em outros contextos (Brasil, 2018).

Como complemento D'Ambrósio (1999), acredita que:

As práticas educativas se fundem na cultura, em estilos de aprendizagem e nas tradições, e a história compreende o registro desses fundamentos, portanto, é praticamente impossível discutir educação sem recorrer a esses registros e a interpretação dos mesmos, isso é igualmente verdade ao se fazer o ensino das várias disciplinas. Em especial da matemática, cujas raízes se confundem com a história da humanidade. Acredito que um dos maiores erros que se pratica em educação, em particular na educação matemática, é desvincular a matemática das outras atividades humanas (D'Ambrósio, 1999).

Sendo assim, destacamos a prática educativa e a postura dos professores como fundamental, uma vez que é necessário buscar metodologias para possibilitar que os

estudantes compreendam bem a temática e desenvolvam diferentes habilidades. Para isso, o livro didático é um forte aliado para os meios educacionais, enfatizando os seus benefícios para os estudantes e professores, destacamos que a boa escolha do material influencia no processo de aprendizagem para o estudante.

Segundo o PCN:

O livro didático é um material de forte influência na prática de ensino brasileira. É preciso que os professores estejam atentos à qualidade, à coerência e a eventuais restrições que apresentem em relação aos objetivos educacionais propostos. Além disso, é importante considerar que o livro didático não deve ser o único material a ser utilizado, pois a variedade de fontes de informação é que contribuirá para o aluno ter uma visão ampla do conhecimento (Brasil, 2018).

Para isso, a escolha do livro didático é importante diante da necessidade estudantil, visto que o livro será utilizado por alguns anos. Como também a responsabilidade do professor, pois na maioria dos casos a escolha do livro didático é feita em conjunto, e o professor recebe esse material como fonte de apoio e tem a missão de norteá-lo de forma que conduza a aprendizagens dos alunos, onde buscar complementos para aprimorar diante da realidade facilita o processo de ensino e a condução da aprendizagem.

3.3 A GEOMETRIA NO LIVRO DIDÁTICO DE MATEMÁTICA

É mais que conveniente fazer-se um estudo a respeito da abordagem de geometria em livros didáticos, justificando o porquê consideramos pertinente se fazer um estudo a respeito da abordagem de geometria no livro didático, de forma que complementa o que é posto em nossa pesquisa. Levando em consideração a importância do livro didático, destacamos que os conteúdos e formas de ensino nos livros apresentados são importantes para a construção do desenvolvimento da aprendizagem dos alunos.

O compilado de todos os conteúdos propostos contribuem para a busca de uma melhor qualidade de ensino, podemos evidenciar que:

“Entre esses aspectos, destacamos, uma valorização do ensino da Geometria, que é apresentada em todas as séries da coleção, com propostas diferenciadas, contrariando o consenso de que uma das razões do abandono do ensino de Geometria seja o Movimento da Matemática Moderna (MMM)” (Silva e Oliveira, 2006, p. 4159).

Esse fragmento de estudo revela que o ensino de geometria pode ter sido abandonado durante o MMM, no entanto sua abordagem esteve presente em livros didáticos produzidos até hoje. Mesmo com difícil acesso aos materiais, destacamos que em todos os livros

didáticos têm influência na construção do saber geométrico, contudo em alguns materiais de apoio são apresentados de forma breve, sem muita contextualização, causando um motivo para o abandono do ensino de geometria, mas salientamos o papel do professor de forma essencial na construção da aprendizagem.

O ensino de geometria nos livros didáticos ainda é marcado por uma abordagem tradicional, com algumas definições, propriedades e exercícios de aplicação direta que facilitam apenas para a resolução e dificultam a aprendizagem dos alunos. Muitas vezes, os conteúdos aparecem de forma fragmentada e pouco conectados ao cotidiano, o que limita o desenvolvimento do raciocínio geométrico e da investigação pelos alunos. Apesar disso, nas coleções mais recentes aprovadas pelo PNLD, já se percebe um esforço em tornar a geometria mais próxima da realidade dos estudantes, com atividades contextualizadas, uso de recursos digitais e propostas que estimulam a resolução de problemas e o pensamento crítico. No decorrer da nossa pesquisa vamos observar as aproximações e os distanciamentos causados pelo estudo de geometria e livros didáticos, levando em considerações construções matemáticas da antiguidade.

4. A GEOMETRIA DA CONSTRUÇÃO MATEMÁTICA 11 DE OS ELEMENTOS E A GEOMETRIA DO LIVRO DIDÁTICO DE MATEMÁTICA: APROXIMAÇÕES E DISTANCIAMENTOS.

Neste capítulo, vamos relembrar o que foi abordado na definição da construção matemática e destacar as aproximações e distanciamentos diante da análise assim produzida. Nesse contexto, apresentaremos os livros didáticos utilizados e os trechos em que encontramos fragmentos da matemática antiga posta por Euclides.

No decorrer da pesquisa, e mais propriamente nesta seção, nomeamos os recortes dos livros didáticos como imagem, deixando o conceito de figura para tratar de objetos que se norteiam por meio de figuras geométricas nos contextos matemáticos.

4.1. A APLICAÇÃO

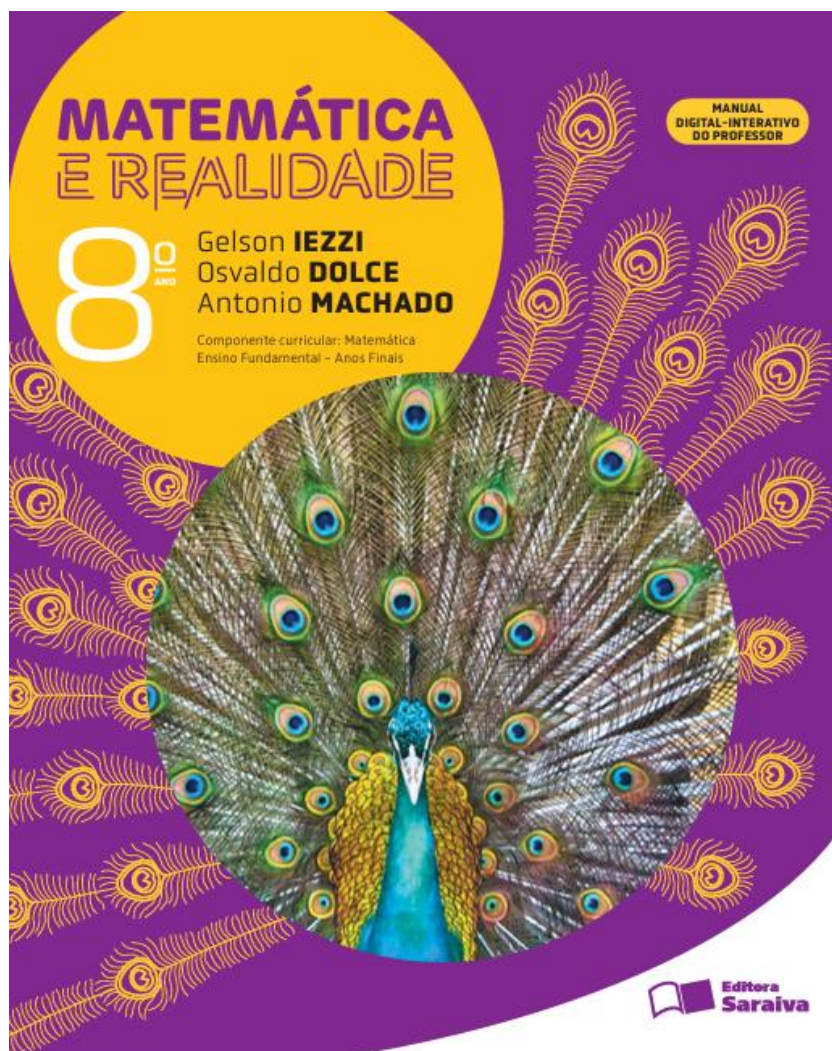
A princípio buscamos produzir uma análise dos livros didáticos, relembramos que a construção (11) será utilizada e diz que: “Traçar uma linha reta em ângulos retos com a reta dada a partir do ponto sobre ela”. Nesse ponto vamos destacar quais serão os livros didáticos a serem analisados e os pontos onde encontramos os pontos que norteiam a nossa análise.

Para isso vamos destacar cada livro analisado e apresentá-los.

Livro 1- Matemática e Realidade da editora Saraiva para os alunos do 8º ano do Ensino Fundamental e o Livro 2- Teláris Essencial editora Ática também para os alunos do 8º ano do Ensino Fundamental.

Observe abaixo as capas desses materiais:

Imagem 3: Capa do livro 1 (coleção 1)



Fonte: (Iezzi, 2022, capa)

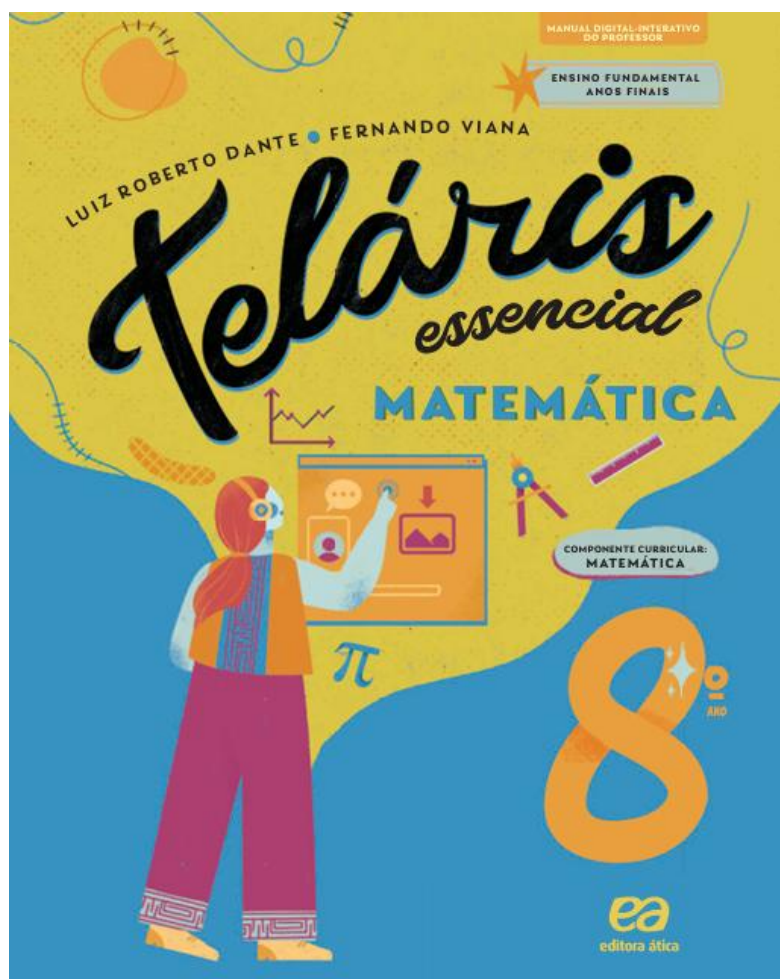
A imagem 3 acima mostra a capa do livro didático nomeado por Matemática e Realidade voltado para alunos do 8º ano do Ensino Fundamental, de Gelson Iezzi, Osvaldo Dolce e Antonio Machado, apresenta uma composição visual colorida e harmoniosa que une elementos gráficos e fotográficos. Destaca-se a imagem de um pavão com sua cauda aberta, exibindo penas em tons de verde, azul e dourado, que simboliza a simetria e repetição de padrões, características fortemente ligadas à matemática. Esse elemento central é

complementado por um fundo roxo, ornamentado com ilustrações estilizadas das penas do pavão, reforçando a ideia de proporção.

Na parte superior esquerda, em um círculo amarelo, estão dispostas as informações sobre a série, indicando que se trata de um material destinado ao 8º ano do Ensino Fundamental – Anos Finais. O título do livro aparece em destaque com a palavra “Matemática” em rosa e “Realidade” em lilás, sugerindo a relação entre o conhecimento matemático e o cotidiano. Logo abaixo, os nomes dos autores aparecem com cores diferenciadas, dando ênfase a harmonização da capa. No canto superior direito, há um selo amarelo informando que o manual é digital sendo disponibilizado também de forma impressa, voltado para professores e alunos. Já no canto inferior direito está o logotipo da Editora Saraiva, na qual é a editora responsável pela produção desse material.

Podemos destacar que a capa, portanto, transmite a ideia de que a matemática não é apenas uma disciplina abstrata, mas algo presente na natureza, nas formas e nos padrões que compõem a Matemática e realidade.

Imagem 4: Capa do livro 2 (coleção 1)



Fonte: (Dante, 2022, capa)

Já a imagem 4 apresenta a capa do livro 2, nomeado Teláris Essencial, voltado para o ensino de Matemática também para o 8º ano do Ensino Fundamental apresenta uma composição moderna e colorida, com elementos que remetem ao universo da matemática e da tecnologia. No centro da capa, observa-se uma ilustração de uma personagem de costas, com cabelos longos e roupas em tons de vermelho e azul. Essa ilustração interage com uma tela digital laranja, que exibe ícones de imagem e gráficos, representando o uso de recursos tecnológicos no aprendizado. Ao redor da tela aparecem símbolos matemáticos, como o número π , um compasso, gráficos e formas geométricas, sugerindo a diversidade de conteúdos abordados no decorrer do material.

As cores predominantes na capa são azul e amarelo, já o título Teláris essencial está escrito em destaque no topo, nas cores preta e dourada e abaixo, a palavra Matemática aparece em azul, reforçando a disciplina do material. Observa-se um número grande “8º”, em laranja, indicando o ano escolar ao qual o livro se destina. Abaixo, encontra-se o logotipo da Editora Ática em amarelo, que foi a editora responsável pelo material.

É visto que, os fragmentos voltados aos conceitos tradicionais da disciplina e as ferramentas digitais, colaboram com a exploração criativa dos conhecimentos tecnológicos e matemáticos transmitindo uma ideia da matemática atual.

A nossa análise consiste em verificar como está proposto e relacionado a parte de geometria e sua ligação com a construção matemática estudada. Para o desenvolvimento desta pesquisa buscamos observar os fragmentos que contém o contexto estudado ou se aproxima da temática. Portanto, é com esta junção de estudos que iremos explicitar toda a análise dos livros didáticos no próximo tópico desta pesquisa.

4.2. ANÁLISE DOS DADOS

Nesta seção de análise dos dados vamos relembrar a construção matemática 11 - “Traçar uma linha reta em ângulos retos com a reta dada a partir do ponto sobre ela” e com base nela observar os conteúdos de geometria moderna ligados aos livros didáticos apresentados.

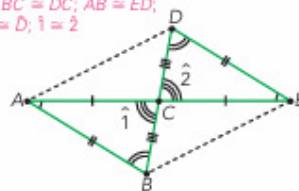
Observe abaixo as imagens que apresentam os fragmentos para a análise partido do livro 1- Matemática e Realidade para os alunos do 8º ano do Ensino Fundamental.

Imagem 5: Estudos de casos de congruência

Faça as atividades no caderno.

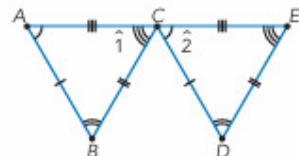
3. Os triângulos ABC e EDC da figura a seguir são congruentes. No caderno, responda: Quais são os elementos de medidas respectivamente iguais?

$$\overline{AC} = \overline{EC}; \overline{BC} = \overline{DC}; \overline{AB} = \overline{ED}; \\ \hat{A} = \hat{E}; \hat{B} = \hat{D}; \hat{1} = \hat{2}$$



Banco de Imagem/Arquivo da editora

4. Os triângulos ABC e CDE da figura são congruentes. No caderno, responda: Quais são os elementos de medidas respectivamente iguais?



Banco de Imagem/Arquivo da editora

$$\overline{AC} = \overline{CE}; \overline{BC} = \overline{DE}; \overline{AB} = \overline{CD}; \\ \hat{B} = \hat{D}; \hat{A} = \hat{E}; \hat{1} = \hat{2}$$



Videoaula

Casos de congruência

O conceito de congruência de triângulos estabelece que 2 triângulos são congruentes quando:

- cada lado de um dos triângulos é congruente ao seu correspondente (ou homólogo) no outro;
- cada ângulo de um triângulo é congruente ao seu correspondente (ou homólogo) no outro.

Portanto, devem ocorrer 6 congruências:

- 3 congruências entre os lados correspondentes;
- 3 congruências entre os ângulos correspondentes.

Para concluir que 2 triângulos são congruentes, empregando o conceito de congruência, devemos constatar 6 congruências (3 congruências entre lados e 3 entre ângulos). Mas é possível reduzir esse trabalho devido aos **casos de congruência**.

Os casos de congruência são 4 propriedades que permitem concluir que 2 triângulos são congruentes a partir de apenas 3 determinadas congruências (entre lados ou entre ângulos).

Caso LAL (Lado – Ângulo – Lado)

Nos Experimentos 3 e 4, anteriores, o lado de medida 2 cm e o lado de medida 3 cm formavam ângulos internos de mesma medida no triângulo de mesma numeração. Esses 2 triângulos com a mesma numeração são congruentes, pois:

Se 2 triângulos têm 2 lados e o ângulo compreendido entre eles respectivamente congruentes, então os triângulos são congruentes.



Na imagem 5 acima o livro apresenta o tópico voltado aos casos de congruência de triângulos e nela também observamos a atividade 6 apresenta uma figura triangular cortada

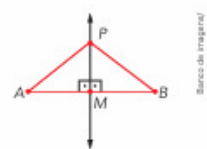
por uma reta formando ângulos retos e ajudando na identificação de alguns retas congruentes nas figuras, apresentando a perpendicularidade e a congruência (temas em destaque na construção escolhida) de forma breve podendo contribuir com a resolução do exercício. Podemos dizer que a temática da construção matemática não está sendo explorada de forma direta, pois no decorrer da explicação do conteúdo nada é acrescentado sobre, logo o exercício está presente, traz ideias da construção, mesmo podendo ser resolvido sem auxílio da temática analisada.

Imagem 6: Conceito de mediatriz

Os pontos da mediatriz de um segmento de reta têm uma propriedade notável: eles distam igualmente das extremidades do segmento. Note:

Tomando um ponto qualquer P na mediatriz e ligando P com as extremidades A e B do segmento de reta, são formados dois triângulos, APM e BPM , congruentes pelo caso LAL, uma vez que:

$$\overline{AM} \cong \overline{MB}, \hat{AMP} \cong \hat{BMP} \text{ e } PM \text{ é lado comum, então } \overline{PA} \cong \overline{PB}.$$



A mediatriz de um segmento de reta é o lugar geométrico dos pontos do plano que distam igualmente das extremidades do segmento de reta. Nenhum ponto fora da mediatriz tem essa propriedade.

Em Geometria, o termo **lugar geométrico** é atribuído a uma figura geométrica cujos pontos, e apenas eles, têm essa propriedade notável.

Construindo uma mediatriz

Participe

Faça as atividades no caderno.

No caderno, trace uma reta r . Marque os pontos R , S e T , nessa ordem. M é o ponto médio de $\overline{RS}$, e N é o ponto médio de $\overline{ST}$. O segmento de reta $\overline{RS}$ mede 4 cm, e $\overline{SN}$ mede 3 cm. Verifique quanto mede:

- $\overline{RT}$ 10 cm
- $\overline{MN}$ 5 cm
- $\overline{MT}$ 8 cm

As construções encontram-se na seção Resoluções deste Manual.

Atividades

Faça as atividades no caderno.

- Sobre uma reta r , marque os pontos A , B e C , nessa ordem, tais que $AB = 6$ cm e $BC = 10$ cm. Depois, responda:

As construções encontram-se na seção Resoluções deste Manual.

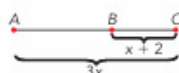
- Quanto mede o segmento de reta $\overline{AC}$? 16 cm
- Se M é o ponto médio de $\overline{AB}$ e N é o ponto médio de $\overline{BC}$, quanto mede $\overline{MN}$? 8 cm

- Considere $AB = 20$ cm e determine x em cada item:

- $AP = (x + 6)$ cm $x = 7$

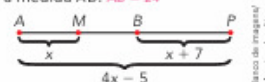


- $AC = 3x$ cm $x = 11$



Lembre-se de que AB representa "a medida do segmento de reta $\overline{AB}$ ".

- Se M o ponto médio de $\overline{AB}$, determine no caderno a medida AB . $AB = 24$



- Nesta atividade, você vai precisar de régua e compasso.

As construções encontram-se na seção Resoluções deste Manual.

- No caderno, construa um segmento de reta $\overline{PQ}$ com 5,4 cm de medida.
- Seguindo os passos indicados no tópico "Ponto médio de um segmento de reta", obtenha a mediatriz de $\overline{PQ}$.
- Chame de M a intersecção da mediatriz com $\overline{PQ}$. Qual é a medida de $\overline{PM}$? 2,7 cm

- No caderno, utilizando régua e compasso, desenhe um triângulo retângulo isósceles ABC . Depois, utilizando régua e compasso, faça o seguinte:

- construa a mediatriz de $\overline{AB}$ e a chame de r ;
- construa a mediatriz de $\overline{BC}$ e a chame de s ;
- chame de P a intersecção de r com s ;
- compare as medidas de distância PA , PB e PC .

As construções encontram-se na seção Resoluções deste Manual.

Nas imagem acima 6 observamos nela a relação do conteúdo com o conceito de perpendicularidade e congruência de forma de consite em outras palavras no decorrer da explicação como por exemplo tratar a perpendicularidade do triângulo como a mediatriz da figura e destaca a congruência dos lados como parte comum no triângulo. Podemos destacar que mesmo com alguns conceitos semelhantes o uso de outras palavras, destacando que nem sempre são os mesmo que usados no escritos mais antigos.

Imagem 7: Propriedades dos triângulos isósceles

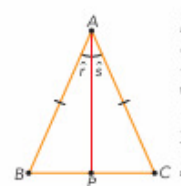
Propriedades dos triângulos isósceles

Em um triângulo isósceles de base $\overline{BC}$, traçamos a bissetriz do ângulo $\hat{A}$ (ângulo do vértice) e chamamos de P o ponto em que ela encontra a base $\overline{BC}$. Depois, decompos o triângulo ABC em dois outros: o triângulo ABP e o triângulo ACP .

- Como:
- $\overline{AB} \cong \overline{AC}$ (porque $\triangle ABC$ é isósceles de base $\overline{BC}$);
 - $\hat{r} \cong \hat{s}$ (porque $\overline{AP}$ é bissetriz de $\hat{A}$);
 - $\overline{AP}$ é lado comum aos dois triângulos;

os triângulos ABP e ACP são congruentes pelo caso LAL.

Da congruência $\triangle ABP \cong \triangle ACP$, podemos concluir que $\hat{B} \cong \hat{C}$.



Em qualquer triângulo isósceles,
os ângulos da base são congruentes.

A primeira demonstração dessa propriedade é atribuída a Tales de Mileto (ver seção *Na História*, no final deste capítulo).

Da congruência $\triangle ABP \cong \triangle ACP$, também podemos concluir que $\overline{BP} \cong \overline{PC}$, ou seja, P é ponto médio do lado $\overline{BC}$ e, em consequência, $\overline{AP}$ é o segmento de reta com extremidade em um vértice do triângulo e no ponto médio do lado oposto a esse vértice. O segmento de reta $\overline{AP}$ é chamado de **mediana**.

Em qualquer triângulo isósceles, a bissetriz do ângulo do vértice
é também mediana relativa à base.

Finalmente, da congruência $\triangle ABP \cong \triangle ACP$, podemos concluir que $\hat{BPA} \cong \hat{CPA}$. Como a soma das medidas desses dois ângulos é 180° (porque B, P e C estão alinhados), deduzimos que $\hat{BPA} \cong \hat{CPA}$ e que a medida desses ângulos é 90° . Dessa maneira, $\overline{AP}$ é perpendicular a $\overline{BC}$ e, em consequência, $\overline{AP}$ é uma altura.

Em qualquer triângulo isósceles, a bissetriz do ângulo do vértice
é também a altura relativa à base.

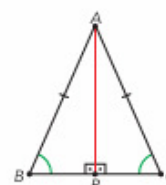
Em resumo, se o triângulo ABC é isósceles de base $\overline{BC}$ e P é o ponto médio da base, então:

- $\hat{B} \cong \hat{C}$;
- $\overline{AP}$ é mediana, altura e bissetriz desse triângulo.

Propriedade recíproca

Vamos agora pensar em um triângulo ABC que tenha dois ângulos congruentes ($\hat{B} \cong \hat{C}$).

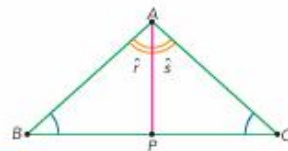
Tracemos a bissetriz $\overline{AP}$ do ângulo $\hat{A}$ para decompor o triângulo ABC em dois outros: $\triangle ABP$ e $\triangle ACP$.



Já nas imagens 7 e 8, observa-se as representações de figuras geométricas triangulares, nelas mostram retas perpendiculares que partem de um ponto da base do triângulo e formam ângulos de 90° graus, neles também observamos relações de perpendicularidade e congruência em relação à explicação dos conteúdos programados e dos exercícios apresentados no livro didático, buscando unir as noções matemáticas e a prática dos exercícios propostos.

Imagem 8: Continuação da propriedade dos triângulos isósceles

- Como:
- $\overline{AP}$ é lado comum aos dois triângulos;
 - $\hat{r} \cong \hat{s}$ (porque $\overline{AP}$ é bissetriz de $\hat{A}$);
 - $\hat{B} \cong \hat{C}$ (hipótese admitida);
- os triângulos ABP e ACP são congruentes pelo caso LAA.
- Da congruência $\triangle ABP \cong \triangle ACP$, podemos concluir que $\overline{AB} \cong \overline{AC}$, ou seja, o triângulo ABC é isósceles de base $\overline{BC}$.



Barco de Imagem/
Angelo da Silva



Guy Christy/Alamy/ATP



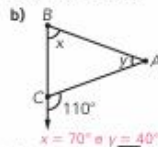
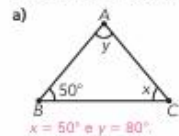
As estruturas desta ponte em Millau, na França, lembram triângulos isósceles. Fotografia de 2021.

Se um triângulo tem 2 ângulos congruentes, então ele é um triângulo isósceles.

Atividades

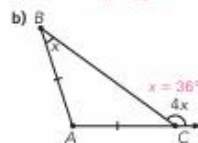
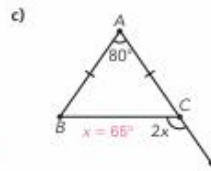
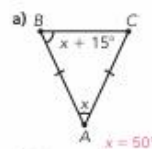
Faça as atividades no caderno.

13. Em cada caso a seguir, o triângulo ABC é isósceles, com $\overline{AB} \cong \overline{AC}$. Calcule x e y no caderno.



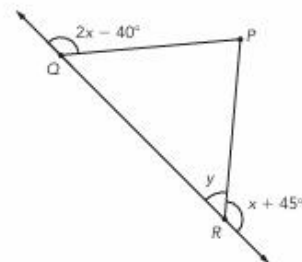
14. Um triângulo ABC é isósceles de base $\overline{AC}$. Sabendo que $\hat{A}$ mede $x + 30^\circ$ e $\hat{C}$ mede $2x - 20^\circ$, determine x . $x = 50^\circ$

15. O triângulo ABC é isósceles de base $\overline{BC}$. Determine o valor de x em cada caso.



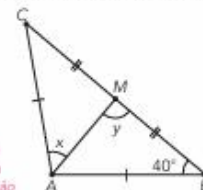
16. Em um triângulo isósceles, a medida dos ângulos externos adjacentes à base é 130° . Determine as medidas dos ângulos do triângulo. 50° , 60° e 80° .

17. O triângulo PQR é isósceles de base $\overline{QR}$. Verifique a figura e determine x e y . $x = 85^\circ$ e $y = 50^\circ$.



18. Em um triângulo isósceles CDE , $\overline{DE}$ é a base e $\overline{CS}$ é uma bissetriz. Sabendo que $\overline{DS}$ mede 5 cm, determine ES e a medida de $\angle CSD$. $ES = 5$ cm, $\angle CSD$ mede 90° .

19. Em um triângulo isósceles ABC , com $\overline{AB} \cong \overline{AC}$, $\overline{AM}$ é a mediana. Se $\hat{B}$ mede 40° , determine as medidas x e y , de $\angle MAC$ e de $\angle AMB$, respectivamente. $x = 50^\circ$; $y = 90^\circ$.



20. A resposta encontra-se na seção Resolução deste Manual.

20. Usando o caso ALA estudado no capítulo anterior, pode-se afirmar que as bissetrizes relativas aos vértices da base de um triângulo isósceles são congruentes? Responda no caderno, justificando por quê. ►

Imagem 9: Origens da Geometria

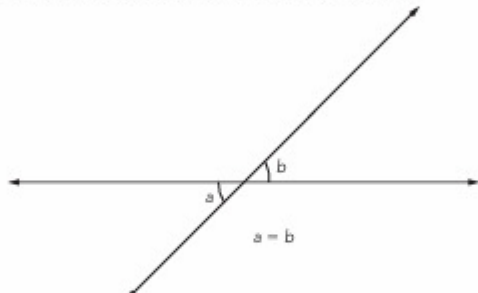


Origens da Geometria

O ser humano sempre esteve cercado por uma rica variedade de formas de figuras geométricas na natureza e, desde a Antiguidade, tem a capacidade inata de perceber essas configurações e compará-las quanto à forma e ao tamanho.

Muitos séculos se passaram até que a humanidade começasse a estabelecer procedimentos gerais considerando características comuns em situações geométricas particulares, usando provavelmente um método indutivo rudimentar (baseado na observação e na experimentação). Os egípcios, por exemplo, sabiam que a medida de área de um retângulo é igual ao produto da medida da base pela medida da altura. Por meio dessa propriedade, podiam calcular a medida de área de todos os terrenos retangulares, indistintamente.

Tales de Mileto (c. 585 a.C.) justificou alguns resultados já conhecidos na época, mas que, até então, não haviam sido demonstrados. São eles: ângulos opostos pelo vértice são congruentes (verifique a figura a seguir) e os ângulos da base de um triângulo isósceles são congruentes.



Pitágoras de Samos (c. 532 a.C.) e os seguidores das ideias dele, os chamados pitagóricos, tentaram organizar a teoria das retas paralelas por meio de um encadeamento de resultados, que eram provados a partir de alguns conceitos e pressupostos básicos, mediante raciocínios lógicos. Acredita-se que Pitágoras e os pitagóricos teriam inaugurado, assim, o chamado **método dedutivo**, que hoje fundamenta toda a Matemática. Posteriormente, alguns matemáticos escreveram obras que visavam apresentar toda a Geometria pelo método dedutivo. Dessas obras, a mais antiga ainda preservada chama-se *Os Elementos* e é composta de 13 volumes. Seu autor, o grego Euclides, viveu por volta do século IV a.C.

A mais antiga cópia conhecida de *Os Elementos* é um manuscrito do ano 880 d.C., que atualmente se encontra na biblioteca da Universidade de Oxford, na Inglaterra.

No caderno, responda: *As respostas encontram-se na seção Resoluções deste Manual.*

1. Em que, principalmente, as contribuições geométricas de Pitágoras e dos pitagóricos superou a de Tales?
2. Qual foi o grande avanço das contribuições geométricas de Euclides em relação às de Pitágoras e dos pitagóricos?
3. Como você explica o fato de a mais antiga cópia conhecida de *Os Elementos*, de Euclides, ser do ano 880 d.C. e esse autor ter vivido por volta do século IV a.C., ou seja, mais de um milênio antes?
4. Logo no início de *Os Elementos*, Euclides explicou o que eram **ponto**, **reta** e **plano**, entre outros conceitos. Entretanto, muitas de suas definições deixaram de ser adotadas. Por exemplo, esta que, segundo ele: "Ponto é aquilo que não tem partes". Hoje em dia, o enfoque inicial da Geometria é outro. Qual? Por quê?

Fonte: (Iezzi, 2022)

Na imagem 9 observamos que traz um pouco da história da matemática imbricada ao conteúdo já estudados pelos alunos, de forma que descreva as ideias históricas construídas pelos grandes matemáticos antigos. Vale ressaltar que esse fragmento do livro didático

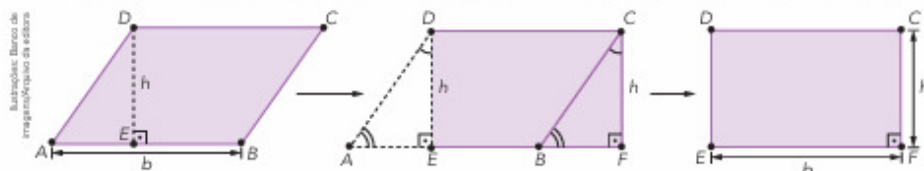
menção a grandes nomes importantes da história da geometria, como os egípcios, Tales de Mileto, Pitágoras de Samos e Euclides de Alexandria, ao mencionar o nome de Euclides evidencia a obra *Os Elementos*, já destacando a sua influência no ensino de geometria e a importância no decorrer da história da matemática.

Imagem 10: Medida de área do paralelogramo e do triângulo

Medida de área do paralelogramo

Representando por b a medida da base do paralelogramo e por h a medida de altura dele, já estudamos que sua medida de área é dada por $A_p = b \cdot h$.

Podemos aplicar nossos conhecimentos sobre congruência de triângulos para mostrar esse fato. Acompanhe.



Perceba que:

- $\overline{AD} \cong \overline{BC}$ lados opostos do paralelogramo;
- $\widehat{DAE} \cong \widehat{CBF}$ ângulos correspondentes considerando as retas paralelas $\overline{AD}$ e $\overline{BC}$ e a transversal $\overline{AB}$;
- $\widehat{AED} \cong \widehat{BFC}$ ângulos retos.

Logo, pelo critério LAA, os triângulos $\triangle AED$ e $\triangle BFC$ são congruentes.

Desse modo, podemos decompor o paralelogramo e recompô-lo em um retângulo. Logo, a medida de área do paralelogramo $ABCD$ é igual à medida de área do retângulo $EFCD$.

Portanto, a medida de área do paralelogramo é igual ao produto da medida da base pela medida da altura.

$$A = b \cdot h$$

Verifique este exemplo.

Vamos calcular a medida de área de um paralelogramo tal que $b = 8 \text{ cm}$ e $h = 4 \text{ cm}$:

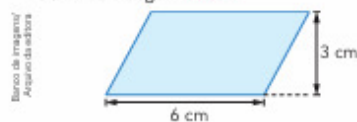
$$A = b \cdot h = 8 \text{ cm} \cdot 4 \text{ cm} = 32 \text{ cm}^2$$

Como as medidas da base e da altura estão em centímetros, a medida da área desse paralelogramo é 32 cm^2 .

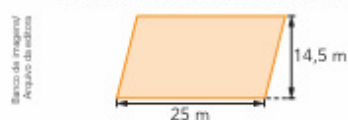
Atividades

Faça as atividades no caderno.

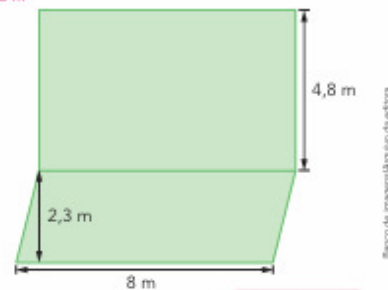
6. Calcule a medida de área do paralelogramo representado a seguir. 18 cm^2



7. Considere o terreno de uma casa, que tem o formato de um paralelogramo, representado a seguir. Determine a medida de área do terreno. $362,5 \text{ m}^2$



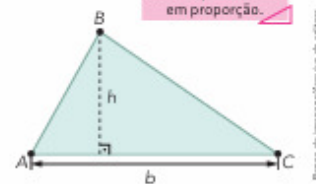
8. Determine a medida de área do jardim representado a seguir, cujo formato é composto da região limitada por um retângulo e um paralelogramo. $56,8 \text{ m}^2$



As imagens não estão representadas em proporção.

Medida de área do triângulo

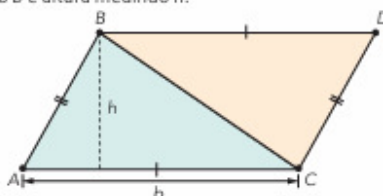
Em um triângulo, podemos considerar qualquer um dos 3 lados como base, cuja medida será representada por b . A medida da altura relativa à base escolhida será indicada por h ; ela corresponde à medida da distância de um dos vértices à reta definida pelo lado oposto a esse vértice.



Observamos que nas imagens 10 e 11 recortes do livro com figuras explicando o conceito de altura em relação aos paralelogramos e o estudo de áreas para os triângulos, levando em consideração que a altura é a reta paralela estudada na construção caracterizada por partir de um ponto na base da figura triangular, reta que é definida e utilizada para calcular a altura no cálculo da área do triângulo.

Imagem 11: Continuação do estudo de área do triângulo

Para entendermos como podemos calcular a medida de área de um triângulo, vamos considerar um paralelogramo $ABCD$ de base medindo b e altura medindo h .



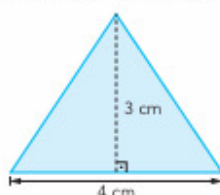
Observe que, traçando uma de suas diagonais, esse paralelogramo fica dividido em 2 triângulos congruentes ABC e CDB , pelo critério LLL. Como os triângulos possuem a mesma medida de área, podemos concluir que a medida de área de um triângulo corresponde à metade da medida de área de um paralelogramo de mesma medida da base e da altura:

$$A_{\triangle ABC} = \frac{A_{\square ABCD}}{2} = \frac{b \cdot h}{2} \Rightarrow \boxed{A = \frac{b \cdot h}{2}}$$

De maneira geral, a medida de área de um triângulo corresponde à metade do produto da medida da base pela medida da altura.

Análise este exemplo.

Vamos calcular a medida de área do triângulo representado a seguir:



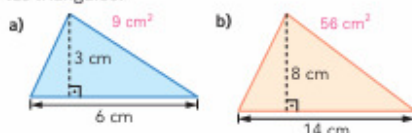
$$A = \frac{b \cdot h}{2} = \frac{4 \text{ cm} \cdot 3 \text{ cm}}{2} = 6 \text{ cm}^2$$

Como as medidas da base e da altura estão em centímetros, a medida de área é 6 cm^2 .

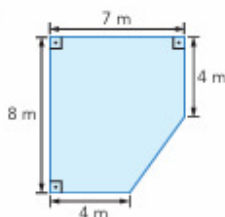
Atividades

Faça as atividades no caderno.

9. Calcule a medida de área de cada um dos seguintes triângulos.

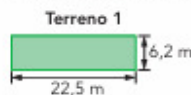


10. Calcule a medida de área do terreno cuja planta baixa está representada a seguir. 50 m^2



As imagens não estão representadas em proporção.

11. Carla deseja comprar um terreno na cidade de Teresina (PI) para construir uma casa. As opções oferecidas por uma imobiliária são as seguintes: uma retangular e uma triangular.



O terreno 2, pois a área dele mede $139,85 \text{ m}^2$, enquanto a área do terreno 1 mede $139,5 \text{ m}^2$.

Sabendo que Carla procura um terreno com a maior medida de área possível, qual é a melhor opção para ela?



12. No caderno, elabore um problema que envolva a medida de área de um triângulo cuja base mede 5 m e a altura mede 3 m.

Exemplo de resposta: Calcule a medida de área de um triângulo cuja base mede 5 m e a altura, 3 m. Resposta: $7,5 \text{ m}^2$.



Na imagem 12 abaixo pode se observar o uso da altura triangular para desenvolver o cálculo de área em figuras mais complexas, de forma que auxilia no desenvolvimento do saber, levando em consideração que a figura repartida, relaciona-se aos triângulos equiláteros e ao descobrir a área de um triângulo fica visível o desenvolver do cálculo da área do hexágono.

Imagem 12: Área do hexágono com medidas triangulares

Agora, podemos voltar ao problema sobre a área do jardim e respondê-lo.

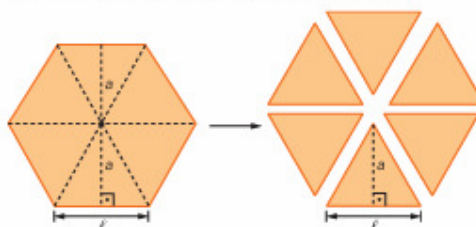


Ilustração: Banco de Imagens/Arquivo da editora

O jardim terá o formato de um hexágono regular com lado medindo 56 m. Assim, $\ell = 56$ m e $n = 6$. Logo, temos a medida p do semiperímetro:

$$2p = 56 \text{ m} \cdot 6 \Rightarrow p = 56 \text{ m} \cdot 3 \Rightarrow p = 168 \text{ m}$$

Como a medida de distância entre 2 lados paralelos é 2 vezes a medida a do apótema, temos:

$$2a = 97 \text{ m} \Rightarrow a = 48,5 \text{ m}$$

Então, a medida de área do hexágono regular é:

$$A = p \cdot a = 168 \text{ m} \cdot 48,5 \text{ m} = 8\,148 \text{ m}^2$$

A área do jardim na praça medirá 8 148 m².

Medida de área do círculo

Em um campo oficial de futebol, qual é a medida de área do círculo central? Vamos aprender a calcular a medida de área do círculo e, depois, poderemos responder a essa pergunta.



A RICARDO SUTURNIA

Estádio Beira-Rio em Porto Alegre (RS). Foto de 2018.

Nestas figuras, note 2 polígonos regulares inscritos (e as regiões limitadas por eles) em uma circunferência cujo raio mede r .

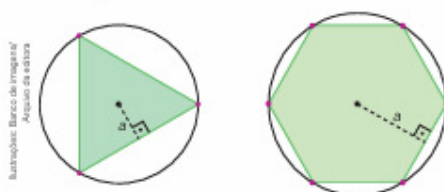


Ilustração: Banco de Imagens/ Arquivo da editora

Análise o que acontece quando aumentamos a quantidade de lados de polígonos inscritos:

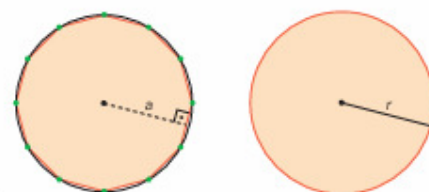


Ilustração: Banco de Imagens/ Arquivo da editora

Perceba que, conforme aumenta a quantidade de lados dos polígonos regulares inscritos,

- a forma dos polígonos regulares vai se aproximando da forma da circunferência;
- a medida de área dos polígonos regulares inscritos vai crescendo e se aproximando da medida de área do círculo;
- a medida de perímetro ($2p$) dos polígonos regulares inscritos vai se aproximando da medida de comprimento da circunferência ($2\pi r$), e a medida dos apótemas (a) vai se aproximando da medida do raio (r).



Nesse caso observamos a relação da construção matemática 11 com o livro didático Matemática e Realidade para melhor resumir trazemos uma tabela para esclarecer alguns conceitos e descobertas da nossa pesquisa.

Na tabela 03 abaixo destacamos as páginas dos livros como é o tema chave está presente no livro, de qual forma ele é apresentando, além de relações entre o conteúdo e a construção 11, observar como caracterizamos nossas ideias:

Tabela 03: Estudo do livro Matemática e Realidade

Estudo do livro Matemática e Realidade (Iezzi, 2022)			
Número da imagem	Conteúdo presente no livro didático	Forma apresentada no livro	Conteúdo relacionado a pesquisa
Imagem 5	Exercício sobre perpendicularidade Conteúdo casos de congruência	Exercícios propostos e conteúdo programado	Perpendicularidade e congruência
Imagem 6	Perpendicularidade através da bissetriz	Conteúdo programado	Perpendicularidade
Imagem 7	Propriedade do triângulo isósceles	Conteúdo programado	Perpendicularidade e ângulo reto
Imagem 8	Ângulos congruentes no triângulo isósceles	Conteúdo programado e exercícios propostos	Perpendicularidade
Imagem 9	Na história – origem da geometria	Conteúdo adicional sobre história da geometria	Influência de Euclides e dos matemáticos gregos
Imagem 10	Cálculo da área do paralelogramo Cálculo de área do triângulo	Conteúdo programado	Perpendicularidade e congruência
Imagem 11	Cálculo da área do paralelogramo	Conteúdo programado e	Perpendicularidade e congruência

	Cálculo de área do triângulo Exercícios sobre cálculos das áreas do paralelogramo e triângulo	exercícios propostos	
Imagem 12	Cálculo da área do hexágono com triângulos equiláteros	Conteúdo programado	Perpendicularidade e congruência

Fonte: autoria própria

Partindo para o outro livro didático vamos observar os fragmentos da análise para o livro 2 - Teláris Essencial, voltado para o ensino de Matemática nas turmas de 8º ano do Ensino Fundamental.

Imagem 13: Área de uma região limitada de um paralelogramo e de um triângulo

1 Retomando e aprofundando o cálculo de medida de área

Atividade 5

Para a atividade 5, sugira aos estudantes considerarem o cálculo de preço por metro quadrado para o problema a ser elaborado.

Um exemplo de problema que pode ser elaborado pelos estudantes é: "Cecília vai fazer a festa de aniversário da filha e, para a decoração, precisará cobrir uma parede com pano preto. A parede que ela vai cobrir tem medidas de comprimento de 3 m por 2 m, e o preço do metro quadrado do pano que ela vai comprar é R\$ 25,00. Quanto Cecília vai gastar na compra do pano?". A resposta para esse problema é: Cecília vai gastar R\$ 150,00, pois $3 \times 2 = 6$ e $6 \times 25 = 150$.

Atividade 6

Deixe que os estudantes explorem a figura até que consigam fazer a decomposição dela em uma região quadrada e em uma região retangular. Deixe claro que a medida de área total da região plana será o resultado da adição das áreas das regiões que a compõem (o quadrado e o retângulo).

Como o enunciado pede um valor aproximado da medida dessa área, sugira aos estudantes que considerem as medidas de comprimento dos lados como um número inteiro mais próximo do decimal dado, e só depois realizem os cálculos.

Deixe-os saber que esta é uma interessante estratégia de resolução de problemas para realizar contas com decimais, muito comum, por exemplo, na prática da pintura residencial.

Atividade 7

Esta atividade pode ser explorada também de maneira lúdica, por meio do manual de caixas de creme dental. Para essa exploração, pode-se convidar os estudantes a trabalhar em duplas. Peça a eles com antecedência que levem para a sala de aula uma caixa de creme dental. Sugira que eles desmontem as caixas e meçam os lados dos retângulos formados para calcular aproximadamente a medida de área da caixa planificada.

5 Utilize o contexto da atividade 4 como inspiração para elaborar, no caderno, um problema que possa ser resolvido por meio do cálculo da medida de área de uma região limitada por um quadrilátero. *Resposta pessoal.*

6 Considere a região plana formada por uma região quadrada e uma região retangular.

A medida de área dessa região plana está mais próxima de 1500 m^2 , 1600 m^2 ou 1700 m^2 ?
 1700 m^2 ($30 \times 30 + 40 \times 20 = 900 + 800 = 1700$)

7 Uma caixa de creme dental com o formato de um bloco retangular tem as seguintes medidas: 3 cm, 4 cm e 18 cm. Determine no caderno a medida de área da superfície da caixa.

276 cm^2 ($12 \times 4 = 48$; $3 \times 18 = 54$; $4 \times 18 = 72$; $2 \times 48 + 2 \times 54 + 2 \times 72 = 276$)

Área de uma região limitada por um paralelogramo

Vamos calcular a medida de área da região plana limitada pelo paralelogramo ABCD tomando como base AB, de medida de comprimento b, e a altura DE (perpendicular à base AB), de medida de comprimento h.

A medida de área da região ABCD é igual à medida de área da região retangular EFCD, obtida quando removemos a região triangular DAE para a posição CBF; pois não alteramos nem a medida de comprimento da base nem a medida de comprimento da altura.

Os triângulos DAE e CBF são congruentes.

Logo, a medida de área da região ABCD é calculada por:

$$A = b \cdot h \text{ (unidades de medida de área)}$$

Ou seja, a medida de área da região limitada por um paralelogramo é igual ao produto da medida de comprimento de uma das bases pela medida de comprimento da altura correspondente a essa base.

Área de uma região triangular

Dada a região triangular ABC, cuja medida de área queremos determinar, representamos retas paralelas aos lados AB e BC, determinando o ponto D e a região limitada pelo paralelogramo ABCD.

Sugestão de atividade

Após a leitura da teoria, se possível, promova a exploração da medida de área de uma região limitada por um paralelogramo, de maneira lúdica, a partir de uma atividade de recorte e colagem a ser realizada de acordo com os passos indicados a seguir. Os estudantes podem usar folhas coloridas ou páginas de revistas para o recorte da representação de uma região limitada por um paralelogramo e uma folha sulfite para a colagem.

- Peça aos estudantes que, a partir de técnicas de desenho geométrico, representem uma região plana limitada por um paralelogramo que tenha o ângulo agudo de medida de abertura de 45° ; se achar necessário, retome a construção da bissetriz do ângulo de medida de abertura de 90° e o transporte de ângulo. As medidas do comprimento da base e da altura podem ter quaisquer valores.
- Orientar os estudantes para que representem, dentro da região plana, o segmento de reta que indica a altura dessa figura; em seguida, que recortem o molde de região plana limitada pelo paralelogramo, dividindo-o na linha que tracaram para representar a altura.
- Peça que remontem a região plana limitada pelo paralelogramo como uma região plana retangular e cole essa figura em uma nova folha. Os estudantes devem perceber que não há diferença entre a medida de área da região plana limitada pelo paralelogramo e a da região plana retangular.

É de grande importância que os estudantes realizem explorações envolvendo a decomposição de regiões poligonais; sugerimos que, assim como no livro, a medida da área de uma região triangular seja determinada pela decomposição de uma região limitada por um quadrilátero qualquer pela diagonal dele. Inclusive, essa exploração pode ser feita com regiões limitadas por retângulos, paralelogramos, trapézios ou losangos.

Diversificar essa exploração pode favorecer a compreensão e faz-los perceber que não estamos tratando de um caso particular. Essa prática favorece o trabalho com o raciocínio lógico dedutivo, contribuindo para o desenvolvimento da competência geral 1 e da competência específica 2 de Matemática da BNCC.

Fonte: (Dante, 2022).

Na imagem 13 acima trás relação com o cálculo das áreas do paralelogramo e do triângulo com um norte baseado na perpendicular que parte de um ponto na base da figura. No contexto que relata o material do professor podemos observar como se destaca o material nessa visão ressaltando a importância do aprofundamento nos cálculos de área e sugestão de atividade, além de enfatizar a proporcionalidade ao utilizar triângulos para os diversos cálculos de área.

Já a imagem 14 aborda o mesmo contexto, contudo trás a matemática através dos cálculos e dos exercícios propostos, destacando a reta perpendicular como altura no cálculo de área dos triângulos e nos exercícios.

Imagem 14: : Exercícios com perpendicularidade e área dos triângulos

Consideremos a altura $\overline{AE}$ de medida de comprimento h desse paralelogramo.
 Já sabemos que, se o lado $\overline{BC}$ tem medida de comprimento b , então a medida de área da região limitada pelo paralelogramo é bh .
 Mas as regiões triangulares ABC e ADC são congruentes, logo possuem medidas de área iguais.
 Assim, temos:
 Medida de área da região $ABCD = 2 \cdot$ medida de área da região triangular ABC
 Ou:
 $bh = 2 \cdot$ medida de área da região triangular ABC
 Portanto, podemos indicar a medida de área da região triangular ABC por:

$$A = \frac{bh}{2} \text{ ou } A = \frac{1}{2}bh \text{ (unidades de medida de área)}$$

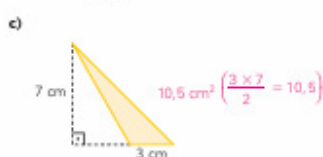
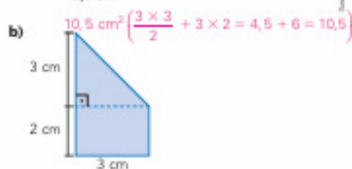
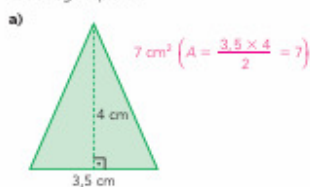
AS IMAGENS NÃO ESTÃO REPRESENTADAS EM PROPORÇÃO.
 NÃO ESCREVA NO LIVRO.

Atividades

8. O quadrado: (Quadrado: $5,5 \times 5,5 = 30,25$; retângulo: $6 \times 5 = 30$; paralelogramo: $7,4 \times 4 = 29,6$; $29,6 \text{ cm}^2 < 30 \text{ cm}^2 < 30,25 \text{ cm}^2$)

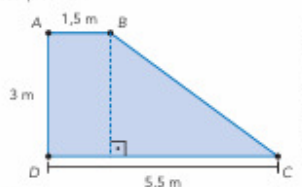
- 8 Qual das figuras determina a região plana com maior medida de área: um quadrado com lados de medida de comprimento de 5,5 cm, um retângulo com lados de medida de comprimento de 6 cm e de 5 cm, ou um paralelogramo com base de medida de comprimento de 7,4 cm e altura correspondente de medida de comprimento de 4 cm?

- 9 Determine no caderno a medida de área de cada região plana.

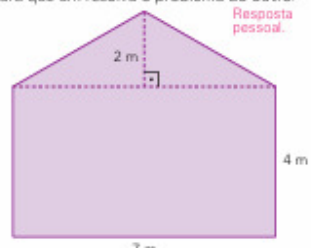


- 10 Qual é a medida de comprimento da altura de uma região triangular cuja base tem medida de comprimento de 8 cm e cuja medida de área é 14 cm^2 ? $3,5 \text{ cm} \left(\frac{8x}{2} = 14 \Rightarrow x = 3,5 \right)$

- 11 O centro esportivo da prefeitura de um município está planejando construir uma piscina com formato e medidas indicados na imagem a seguir. Qual será a medida de área da superfície dessa piscina?



- 12 Elabore, no caderno, um problema que possa ser resolvido por meio do cálculo da medida de área da figura representada a seguir. Em seguida, troque de caderno com um colega para que um resolva o problema do outro.



11. $10,5 \text{ m}^2 \left(1,5 \times 3 + \frac{4 \times 3}{2} = 4,5 + 6 = 10,5 \right)$

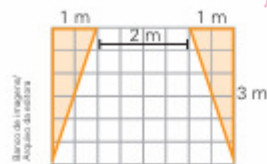
Imagem 15: Exercícios propostos

5. Alternativa b. $\left(\frac{3 \cdot 2,6}{2} = \frac{7,8}{2} = 3,9; 3,9 \cdot 4 = 15,6\right)$

< Testes oficiais >

AS IMAGENS NÃO ESTÃO REPRESENTADAS EM PROPORÇÃO. NÃO EScreva NO LIVRO.

- 1 (Saeb) O piso de entrada de um prédio está sendo reformado. Serão feitas duas jardineiras nas laterais, conforme indicado na figura, e o piso restante será revestido em cerâmica.

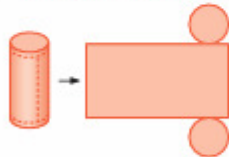


Qual é a área do piso que será revestido com cerâmica?

- a) 3 m^2 c) 9 m^2
b) 6 m^2 d) 12 m^2
- 2 (Saeb) Um copo cilíndrico, com 4 cm de raio e 12 cm de altura, está com água até a altura de 8 cm. Foram então colocadas em seu interior n bolas de gude, e o nível da água atingiu a boca do copo, sem derramamento.

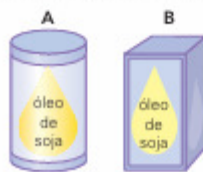
Qual é o volume, em cm^3 , de todas as n bolas de gude juntas?

- a) 32π c) 64π
b) 48π d) 96π
- 3 (Saresp) Cortando-se um cilindro na linha pontilhada da figura, obtém-se sua planificação. Veja: 465 cm^2 ($2 \times 3,1 \times 5^2 + 2 \times 3,1 \times 5 \times 10 = 155 + 310 = 465$)



Se o raio de cada base mede 5 cm e o cilindro tem 10 cm de altura, qual é a área total de sua superfície? (Use $\pi = 3,1$)

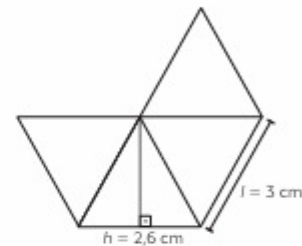
- 4 (Saresp) Observe as figuras abaixo, em que A é um cilindro e B, um prisma de base quadrada.



Sabendo-se que as duas embalagens têm a mesma altura e que o diâmetro da embalagem A e o lado da embalagem B são congruentes, podemos afirmar que o volume de A é:

- a) menor que o volume de B.
b) maior que o volume de B.
c) igual ao volume de B.
d) metade do volume de B.

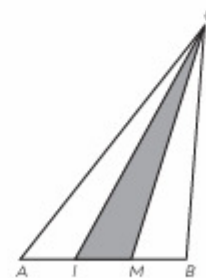
- 5 (Saresp) A figura a seguir é composta de triângulos equiláteros de lado $l = 3 \text{ cm}$.



Se adotarmos que estes triângulos têm altura aproximada de 2,6 cm, a área total da figura será de aproximadamente:

- a) $14,4 \text{ cm}^2$ c) $16,5 \text{ cm}^2$
b) $15,6 \text{ cm}^2$ d) $17,2 \text{ cm}^2$

- 6 (Saeb) No triângulo ABC abaixo, a base AB foi dividida em três partes iguais dando origem a novos triângulos, como mostra a figura.



Sabendo que a área do triângulo sombreado IMC é igual a 12 cm^2 , qual é a área do triângulo ABC?

- a) 12 cm^2 c) 30 cm^2
b) 18 cm^2 d) 36 cm^2

Fonte: (Dante, 2022).

Na imagem 15 acima destacamos os triângulos equiláteros apresentados no exercício 5, onde é dado valor da perpendicular traçada para identificar a área do triângulo e os dados complementam o conceito de congruência entre os triângulos.

Imagem 16: Contexto histórico

É comum que as construções tenham elementos que lembram triângulos e quadriláteros. Isso se deve, principalmente, à precisão das medidas de abertura dos ângulos e às propriedades dessas figuras geométricas que garantem funcionalidade, praticidade e segurança a essas estruturas.



Panteão de Roma, na Itália, construído por volta de 27 a.C. Foto de 2021.



Pirâmides de Gizé, no Egito, construídas há mais de 4 milênios. Foto de 2021.



Prédio do Museu de Arte de São Paulo Assis Chateaubriand (MASP), da arquiteta Lina Bo Bardi, inaugurado em 1968. Foto de 2021.

Ao longo dos anos escolares, você estudou os triângulos e os quadriláteros e, por meio de diferentes experimentações, como medições, dobraduras, recortes, constatou algumas propriedades dessas figuras geométricas.

Mas se quisermos **demonstrar**, ou seja, provar **logicamente** as propriedades que constatamos de modo experimental, devemos recorrer à **Geometria dedutiva**.

Neste capítulo, vamos estudar a Geometria dedutiva, demonstrando algumas propriedades dos triângulos e dos quadriláteros utilizando definições e outras propriedades aceitas como verdadeiras.

AS IMAGENS NÃO ESTÃO REPRESENTADAS EM PROPOSIÇÃO.

O matemático grego Euclides de Alexandria (c. 330 a.C.-260 a.C.) foi um dos primeiros a tratar a Geometria de maneira dedutiva e o primeiro a organizar e sistematizar logicamente todos os estudos de Geometria até então conhecidos, reunindo-os em uma obra de 13 volumes chamada *Os Elementos* (em grego: *Στοιχέια*).



Copyright: Perissinakis, Huber, Krieger, Getty Images



Para começar

NÃO ESCREVA NO LIVRO.

- 1 Em qual das construções que aparecem na abertura do capítulo é possível identificar detalhes que lembram triângulos? Cite pelo menos 3 características de um triângulo.
- 2 Localize pelo menos 4 detalhes nas fotos das construções que dão ideia de ângulo reto.
Exemplos de resposta: Nos cantos do prédio do MASP ou entre os pilares do Panteão de Roma e a fachada.
- 3 Um triângulo pode ter ângulos retos? Quantos? Sim; apenas 1 ângulo reto.
1. Exemplo de resposta: Nas pirâmides de Gizé; um triângulo tem 3 lados, 3 vértices e 3 ângulos internos e a medida de área da região limitada por ele é dada por $\frac{b \times a}{2}$, em que b é a medida de comprimento da base do triângulo e a é a medida de comprimento da altura.

177

Fonte: (Dante, 2022).

Na imagem 16 acima observamos como parte inicial do conteúdo o contexto sobre construções e arquiteturas que trazem representação de figuras geométricas e logo após apresenta o contexto histórico sobre geometria dedutiva, e acrescenta a figura de Euclides de

Alexandria como um dos pioneiros sobre a temática e seus escritos de baseados no livro Os Elementos, mesmo que de forma simples apresenta essa ideia aos alunos, contudo o recorte não influencia diretamente na aprendizagem dos alunos e destaca apenas como uma informação adicional ao conteúdo a ser estudado na unidade.

Imagem 17: Caso de congruência em triângulos

Aplicação de um caso de congruência de triângulos



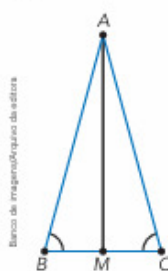
F animado

Você já deve ter percebido que podemos obter conclusões em relação às propriedades geométricas sem a necessidade de efetuar medições. Esse método de raciocínio é chamado de **demonstração**.

Para demonstrar uma propriedade geométrica, devemos seguir alguns passos. Vamos, por exemplo, demonstrar esta propriedade.

Em todo triângulo isósceles, os ângulos opostos aos lados congruentes são também congruentes.

Neste triângulo isósceles ABC , sabemos que $\overline{AB} \cong \overline{AC}$ e queremos provar que $\hat{B} \cong \hat{C}$.



Lembrando que triângulo isósceles é aquele que tem 2 lados de medidas de comprimento iguais, ou seja, 2 lados congruentes.



Para isso, vamos representar $\overline{AM}$, que liga o vértice A ao ponto médio de $\overline{BC}$ (ponto M), e verificar que $\triangle ABM \cong \triangle ACM$.

- $\overline{AB} \cong \overline{AC}$ (dado inicial)
- $\overline{BM} \cong \overline{CM}$ (pois M é o ponto médio de $\overline{BC}$)
- $\overline{AM} \cong \overline{AM}$ (segmento de reta comum aos $\triangle ABM$ e $\triangle ACM$)

Pelo caso LLL, podemos afirmar que $\triangle ABM \cong \triangle ACM$ e, com isso, concluir que $\hat{B} \cong \hat{C}$.

Observações

- Essa propriedade dos triângulos isósceles também pode ser enunciada desta maneira:

Em um triângulo isósceles, os ângulos da base são congruentes.

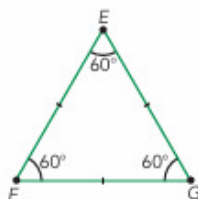
- O triângulo equilátero é um caso particular de triângulo isósceles. Nele, qualquer lado pode ser considerado base.

Podemos, então, enunciar esta propriedade.

Em um triângulo equilátero, os 3 ângulos são congruentes e cada um deles tem medida de abertura de 60° ($180^\circ \div 3 = 60^\circ$).

Por exemplo, se o $\triangle EFG$ é equilátero, então podemos escrever:

$$m(\overline{EF}) = m(\overline{FG}) = m(\overline{EG}) \quad \text{e} \quad m(\hat{E}) = m(\hat{F}) = m(\hat{G}) = 60^\circ$$



Podemos comparar as medidas de comprimento dos lados escrevendo assim:

$$m(\overline{EF}) = m(\overline{FG}) = m(\overline{EG})$$

Ou assim:

$$EF = FG = EG$$

Na imagem 17 acima o contexto do livro apresenta sobre a temática de congruência de triângulos e destaca a perpendicular que corta a figura facilita na compreensão do conteúdo e está ligado a construção matemática estudada nos conteúdos de perpendicularidade e congruência.

Imagem 18: Geometria dedutiva



Você sabia?

 NÃO ESCREVA NO LIVRO.

Geometria dedutiva

Na Geometria experimental, física, desenvolvida até o início do século VI a.C., as propriedades e as relações entre figuras geométricas eram feitas pela “aparência” e por medições aproximadas das figuras.

Mas as aparências podem nos enganar. Por exemplo, nesta figura, qual segmento de reta tem maior medida de comprimento: $\overline{AB}$ ou $\overline{CD}$? Meça e confira sua estimativa.



Banco de Imagens/Arquivo da editora

Na primeira metade do século VI a.C. surgiu um novo modo de ver a Geometria. O filósofo, matemático, engenheiro e astrônomo Tales de Mileto (640 a.C.-550 a.C.) foi um dos primeiros gregos a insistir que fatos geométricos devem ser estabelecidos por raciocínio lógico, por demonstrações, e não apenas por observação, experimentação, tentativa e erro. Surgiu, assim, a **Geometria dedutiva**.

Os estudos de Tales também foram utilizados no desenvolvimento da obra *Os Elementos*, do matemático Euclides (c. 330 a.C.-260 a.C.). Tales, Euclides e outros gregos elevaram a Geometria de um nível puramente físico para um nível mais lógico e abstrato.

Então, por volta do ano 300 a.C., Euclides produziu sua obra memorável, *Os Elementos*, uma cadeia dedutiva única de 465 proposições compreendendo de maneira clara e harmoniosa geometria plana e espacial, teoria dos números e álgebra geométrica grega.

[...]

Os três geômetras gregos mais importantes da Antiguidade foram Euclides (c. 300 a.C.), Arquimedes (287 a.C.) e Apolônio (c. 225 a.C.), tudo que se fez de significativo em geometria até hoje, é originário do trabalho desses três grandes sábios [...].

EVES, Howard. *Tópicos de história da Matemática: Geometria*. Trad. Hygino H. Domingues. São Paulo: Atual, 1992. p. 9-10.

Grande parte da Geometria que estudamos no Ensino Fundamental e no Ensino Médio faz parte da Geometria dedutiva e dos trabalhos desenvolvidos por esses gregos. Com a orientação do professor, faça uma pesquisa sobre um deles e apresente mais informações para os colegas. Lembre-se de utilizar fontes de pesquisa confiáveis.

 **Prática de pesquisa**

7. a) 5,5 cm e 5,5 cm. ($20 - 9 = 11$ e $11 \div 2 = 5,5$)
 b) 11 cm, 9,5 cm e 9,5 cm ou 11 cm, 11 cm e 8 cm.
 ($30 - 11 = 19$, $19 \div 2 = 9,5$ e $9,5 + 9,5 > 11$; ou $30 - 22 = 8$ e $8 + 11 > 11$)
 c) 90° , 45° e 45° . ($x + x + 90^\circ = 180^\circ \Rightarrow 2x = 90^\circ \Rightarrow x = 45^\circ$)

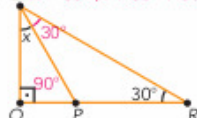
Atividades

7 Responda no caderno.

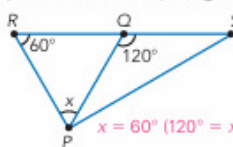
- Quais são as medidas de comprimento dos lados $\overline{AB}$ e $\overline{AC}$ do $\triangle ABC$, isósceles de base $\overline{BC}$, com $BC = 9$ cm e com medida de perímetro de 20 cm?
- Se um triângulo isósceles tem medida de perímetro de 30 cm e um dos lados tem medida de comprimento de 11 cm, então quais são as medidas de comprimento dos 3 lados?
- Quais são as medidas de abertura dos ângulos internos de um triângulo retângulo e isósceles?

8 Em cada triângulo isósceles PQR dado, temos $\overline{PQ} \cong \overline{PR}$. Qual é o valor de x , em graus?

- a) $x = 30^\circ$ ($x + 30^\circ + 90^\circ + 30^\circ = 180^\circ \Rightarrow x = 30^\circ$)



- b) $x = 60^\circ$ ($120^\circ = x + 60^\circ \Rightarrow x = 60^\circ$)



Ilustrações: Banco de Imagens/Arquivo da editora

Na imagem 18, observa-se mais um ponto que destaca os estudos de geometria e história da matemática, mais propriamente esse recorte trás o trabalho dos gregos Euclides (300 a.C), Arquimedes (287 a.C) e Apolônio (225 a.C) e destaca que foram os precursores da geometria, destacando trabalho sábios para o desenvolvimento do conhecimento geométrico. Além disso, o texto destaca que os gregos desenvolveram em seu trabalho as ideias importantes para o que estudamos em geometria no Ensino Fundamental e Ensino Médio.

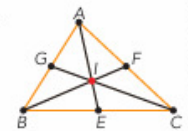
Imagem 19: Altura de um triângulo

Atividades

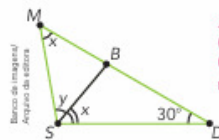
- 10** Analise o $\triangle ABC$ apresentado a seguir e, considerando as informações dadas, calcule $m(\widehat{BIE})$.

- I é o incentro do $\triangle ABC$.
- $m(\widehat{A}) = 82^\circ$
- $m(\widehat{B}) = 62^\circ$

$$\begin{aligned} m(\widehat{BIE}) &= 72^\circ \text{ (No } \triangle ABE: 82^\circ + 2 = 41^\circ; \\ &41^\circ + 62^\circ = 103^\circ; m(\widehat{BEA}) = 180^\circ - 103^\circ = 77^\circ; \\ &\text{no } \triangle BEI: 62^\circ + 2 = 31^\circ; 31^\circ + 77^\circ = 108^\circ; \\ &m(\widehat{BIE}) = 180^\circ - 108^\circ = 72^\circ.) \end{aligned}$$



- 11 Desafio.** No $\triangle MSD$, o $\overline{SB}$ é uma bissetriz. Determine no caderno os valores de x e y e a medida do $\widehat{SBM}$.



$$\begin{aligned} x &= 50^\circ, y = 50^\circ \text{ e } m(\widehat{SBM}) = 80^\circ. \\ (x + (y + x) + 30^\circ) &= 180^\circ \Rightarrow 2x + y = 150^\circ. \\ \text{Como } x &= y, \text{ obtemos } x = 50^\circ \text{ e } y = 50^\circ; \\ m(\widehat{SBM}) &= 180^\circ - (50^\circ + 50^\circ) = 80^\circ. \end{aligned}$$

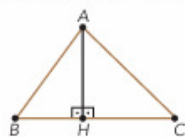
Altura de um triângulo



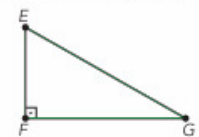
Você se lembra o que é a altura de um triângulo?

A **altura de um triângulo** é o segmento de reta com uma extremidade em um vértice do triângulo e a outra extremidade no lado oposto ou no prolongamento dele, formando ângulos retos com esse lado ou com o prolongamento dele.

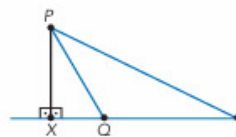
Considere os triângulos representados a seguir.



O segmento de reta $\overline{AH}$ é uma altura do $\triangle ABC$; essa altura é relativa ao lado $\overline{BC}$.



O lado $\overline{EF}$ é uma altura do $\triangle EFG$; essa altura é relativa ao lado $\overline{FG}$.



O segmento de reta $\overline{PX}$ é uma altura do $\triangle PQR$; essa altura é relativa ao lado $\overline{QR}$.

Ortocentro de um triângulo

Analise os triângulos representados a seguir. Em cada um deles, estão representadas as 3 alturas.

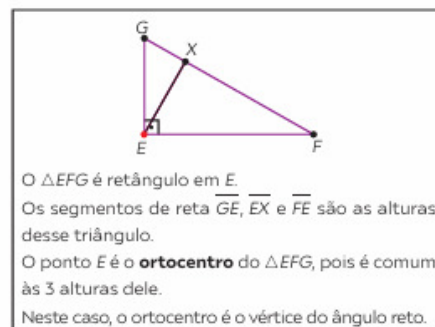
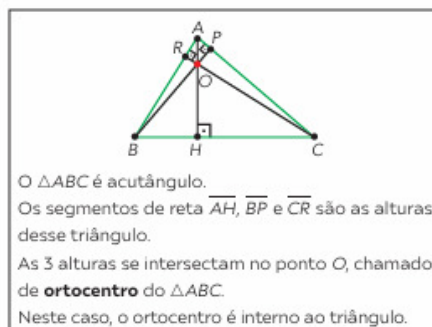
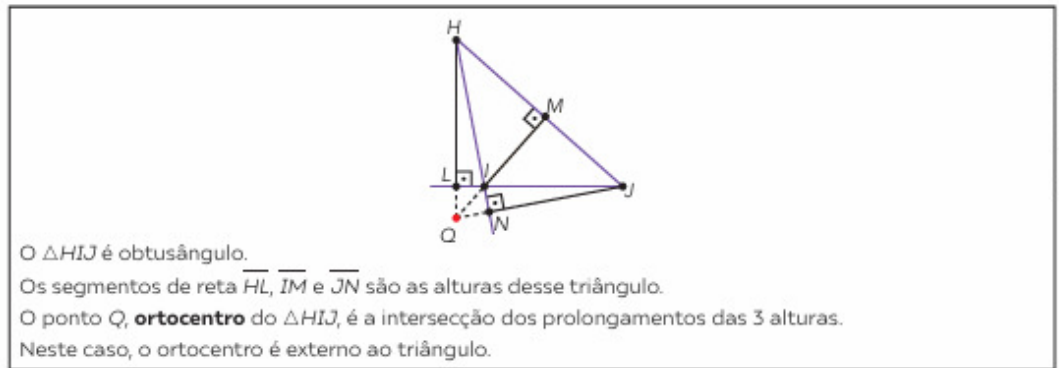


Imagem 20: Exercícios com altura de triângulos



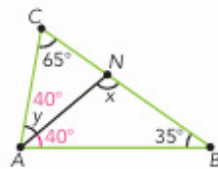
Em todo triângulo, as 3 alturas ou os prolongamentos delas se intersectam em um mesmo ponto, chamado de **ortocentro** do triângulo.

Atividades

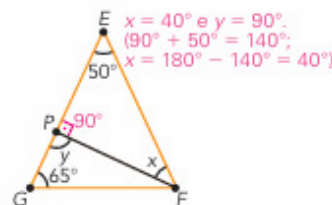
NÃO ESCREVA NO LIVRO.

- 12** Calcule no caderno o valor de x e de y em cada figura geométrica plana representada.

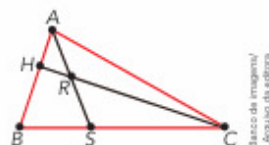
- a) $\overline{AN}$ é bissetriz de um ângulo interno do $\triangle ABC$.



- b) $\overline{FP}$ é uma altura do $\triangle EFG$.



- 13** Neste $\triangle ABC$, o ponto R é a intersecção da bissetriz $\overline{AS}$ e da altura $\overline{CH}$.

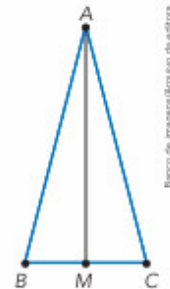


- 12. a)** $x = 105^\circ$ e $y = 40^\circ$. ($65^\circ + 35^\circ = 100^\circ$; $180^\circ - 100^\circ = 80^\circ$; $y = 80^\circ + 2 = 40^\circ$; $40^\circ + 35^\circ = 75^\circ$; $x = 180^\circ - 75^\circ = 105^\circ$ ou $x = 40^\circ + 65^\circ = 105^\circ$)

Sabendo que $m(\hat{ABC}) = 70^\circ$ e $m(\hat{BCA}) = 30^\circ$, determine no caderno a medida de abertura de cada ângulo dado.

- a) $\hat{AHC} 90^\circ$ c) $\hat{ARC} 130^\circ$ e) $\hat{ACH} 10^\circ$
b) $\hat{SAC} 40^\circ$ d) $\hat{ASB} 70^\circ$ f) $\hat{BCH} 20^\circ$

- 14** Este $\triangle ABC$ é isósceles, de base $\overline{BC}$, e o segmento de reta $\overline{AM}$ é mediana dele.



Demonstre no caderno que o $\overline{AM}$ é também altura desse triângulo e bissetriz de um ângulo interno dele, ou seja, demonstre a seguinte propriedade: **MP**

Em todo triângulo isósceles, a mediana relativa à base é também bissetriz e altura.

Fonte: (Dante, 2022).

As imagens 19 e 20 destacam a temática também estudada sobre a altura do triângulo e nesse fragmento compreendemos e observamos a perpendicular tanto no conteúdo

programado como nos exercícios, além disso destacamos a perpendicular como altura e fonte principal para o entendimento e resolução do conteúdo.

Por fim dos fragmentos observamos a imagem 21 abaixo destacando o exercício 6, onde as retas paralelas a base e as laterais são perpendiculares e formam ângulos de 90° e é visível a congruência nesse triângulo equilátero.

Imagem 21: Exercício retas paralelas e perpendiculares

4. Podemos escolher 3 pontos da circunferência, que determinam um triângulo, e representar as mediatrizes de 2 lados desse triângulo. A interseção das mediatrizes traçadas é o centro da circunferência.

Atenção
Retome os assuntos que você estudou neste capítulo. Verifique em quais teve dificuldade e converse com o professor, buscando maneiras de reforçar seu aprendizado.

5. $x = 70^\circ$; $y = 80^\circ$; $z = 24$ cm. $\left(\frac{30 + 18}{2} = 24\right)$

6. Considere o $\triangle ABC$ equilátero representado a seguir. O ponto O é o incentro, o baricentro, o ortocentro e o circuncentro do triângulo.

Podcast
NÃO ESCREVA NO LIVRO.

1 Analise os 4 triângulos representados a seguir.

2,8 cm 5,4 cm
 $\angle 45^\circ$ 7 cm
(I)

2,8 cm 5,4 cm
 $\angle 45^\circ$ 7 cm
(II)

2,8 cm 5,4 cm
 $\angle 45^\circ$ 7 cm
(III)

2,8 cm 5,4 cm
 $\angle 45^\circ$ 7 cm
(IV)

Para cada par de triângulos indicados em cada item, responda no caderno se é possível garantir a congruência entre eles sem saber outras informações. Em caso afirmativo, determine o caso de congruência utilizado.

a) (I) e (II) Sim. Caso LLL.

b) (I) e (III) Sim. Caso LAL.

c) (I) e (IV) Não.

2 Identifique os quadriláteros mencionados em cada item, considerando todas as possibilidades entre quadrado, retângulo, losango, paralelogramo e trapézio.

a) Tem diagonais congruentes e que se intersectam no ponto médio. **Retângulo e quadrado.**

b) Tem diagonais perpendiculares e que se intersectam no ponto médio. **Losango e quadrado.**

c) Tem 2 pares de lados opostos congruentes. **Paralelogramo, retângulo, losango e quadrado.**

d) Tem diagonais congruentes e perpendiculares e que se intersectam no ponto médio. **Quadrado.**

3 Calcule no caderno as medidas x , y e z no $\triangle ABC$, sabendo que I é o incentro do triângulo.

$x = 35^\circ$; $y = 95^\circ$; $z = 25^\circ$.

4 Dada a representação de uma circunferência, como podemos determinar o centro dela? Responda no caderno.

5 Sabendo que M é o ponto médio do segmento de reta PS , N é o ponto médio do segmento de reta QR e $PQRS$ é um trapézio, determine no caderno os valores de x , y e z .

6 Considere o $\triangle ABC$ equilátero representado a seguir. O ponto O é o incentro, o baricentro, o ortocentro e o circuncentro do triângulo.

a) Sendo R a medida de comprimento do raio da circunferência circunscrita e r a medida de comprimento do raio da circunferência inscrita, qual é a relação entre R e r ? **$R = 2r$**

b) As mediatrizes do triângulo equilátero o dividem em 6 triângulos congruentes. Sendo L a medida de comprimento do lado do triângulo equilátero, determine em função de L e de r as medidas de comprimento dos lados de cada um dos 6 triângulos congruentes.

Autoavaliação
AS IMAGENS NÃO ESTÃO REPRESENTADAS EM PROPORÇÃO.

Algumas atitudes e reflexões são fundamentais para melhorar o aprendizado e a convivência na escola. Reflita sobre elas. **Respostas pessoais.**

- Identifico e resolvo problemas utilizando as ideias de mediatriz, bissetriz, altura e mediana sem confundí-las?
- Conheço as principais propriedades dos quadriláteros?
- Empenhei-me em fazer as construções geométricas com precisão e capricho?

Tendo apresentado os fragmentos que lembram contextos da construção matemática estudada, vamos apresentar uma tabela com os pontos estudado resumindo o que foi visto no livro Teláris essencial, com as mesma especificações da tabela anterior, nosso viés é esclarecer o que foi encontrado, observe abaixo:

Tabela 04: Estudo do livro Teláris Essencial

Estudo do livro Teláris Essencial (Dante, 2022)			
Número da imagem	Conteúdo presente no livro didático	Forma apresentada no livro	Conteúdo relacionado a pesquisa
Imagem 13	Cálculo da área do paralelogramo Cálculo de área do triângulo	Conteúdo programado e exercícios propostos	Perpendicularidade e congruência
Imagem 14	Explicação da fórmula da área do triângulo	Conteúdo programado e exercícios propostos	Altura e perpendicularidade
Imagem 15	Exercício sobre altura e área do triângulo equilátero	Exercícios propostos	Perpendicularidade e congruência
Imagem 16	Contexto introdutório sobre matemáticos gregos e a geometria na antiguidade	Conteúdo adicional sobre história da geometria	Influência de Euclides e dos matemáticos gregos
Imagem 17	Congruência de triângulos	Conteúdo programado	Congruência
Imagem 18	Geometria dedutiva	Conteúdo adicional sobre geometria dedutiva	Influência de Euclides e dos matemáticos gregos
Imagem 19	Cálculo da altura do triângulo	Conteúdo programado	Perpendicularidade e congruência
Imagem 20	Exercício sobre altura do triângulo e	Exercícios propostos	Perpendicularidade e congruência

	perpendicularidade		
Imagem 21	Exercício sobre altura e perpendicularidade do triângulo equilátero	Exercícios propostos	Perpendicularidade e congruência

Fonte: autoria própria

Destacamos que o desenvolver dessa pesquisa pode apresentar questões já conhecidas, mas observadas segundo a construção matemática 11, vemos que os conteúdos vão muito além de cálculos de áreas, alturas e outras definições. Podendo partir de conteúdos postos na antiguidade visto de outras formas, com uma matemática mais rigorosa e outros nomes que diferem da realidade de um livro didático posto para o Ensino Fundamental.

Evidenciamos o conceito matemático continua partido de mudanças que os livros *Os Elementos* sofreram algumas modificações ao longo do tempo e ainda continua com contexto para serem aprimorados, destacando a matemática com fortes mudanças, mas sempre compreendendo com a realidade e percepção para uma aprendizagem significativa.

5. CONSIDERAÇÕES FINAIS

Acreditamos que, ao realizar nossa pesquisa, proporcionamos aos leitores uma primeira compreensão que os incentive a pesquisar e se informar sobre a temática apresentada, lançando um novo olhar sobre o livro didático e as construções matemáticas da antiguidade, auxiliando no processo de identificação do conteúdo matemático. Para evidenciar nossa pesquisa qualitativa com caráter de análise documental, situamos este trabalho dentro da temática de análise de livros didáticos, compreendendo-os como materiais de fácil acesso e ampla utilização por estudantes de diferentes níveis escolares, sobretudo na rede pública de ensino. Nesse contexto, o livro didático se apresenta como um instrumento essencial de apoio ao processo de ensino e aprendizagem, servindo como mediador entre o conhecimento formal e a construção do saber em sala de aula, tanto para alunos quanto para professores.

A ideia central da pesquisa nasceu de interesses pessoais e acadêmicos, motivada pelo estudo da disciplina de Tópicos de Geometria durante a especialização, que proporcionou um olhar mais atento e crítico sobre a forma como a geometria, especialmente aquela fundamentada em *Os Elementos*, é abordada nos materiais contemporâneos.

Nosso estudo teve como objetivo geral analisar os livros didáticos de Matemática de Iezzi (2022) e Dante (2022), considerando a apresentação, o tratamento e o uso epistemológico da construção matemática 11 do Livro I de *Os Elementos*, investigando como o pensamento geométrico dedutivo da antiguidade é transposto e reinterpretado no contexto moderno. Buscamos compreender como a Matemática evoluiu na abordagem dessas construções e de que forma os conceitos antigos se mantêm, se transformam ou se ressignificam nos livros atuais.

Durante a análise, os livros foram divididos em seções visuais que evidenciam os contextos matemáticos relacionados à proposição estudada. O livro Matemática e Realidade de Iezzi (2022) apresentou oito imagens associadas à construção analisada, enquanto Teláris Essencial de Dante (2022) apresentou nove imagens que também remetem ao conteúdo da construção matemática 11, abordando conceitos como perpendicularidade e congruência. Embora outros livros tenham sido considerados, nestes encontramos a maior quantidade de conteúdos diretamente relacionados à construção matemática. Observamos que, mesmo quando nomeados de formas distintas, esses conceitos permanecem centrais, revelando a continuidade do pensamento geométrico e a adaptação terminológica ao longo do tempo.

A análise evidencia que a geometria da construção matemática 11 é apresentada nos livros didáticos contemporâneos de forma adaptada ao contexto escolar, preservando seus conceitos essenciais. Ela é tratada por meio de representações visuais, exemplos e exercícios que conectam a teoria à prática, permitindo que os estudantes compreendam a lógica dedutiva da geometria de Euclides. Ao mesmo tempo, os livros reinterpretem os conteúdos antigos, tornando-os acessíveis e aplicáveis a situações pedagógicas atuais, promovendo o desenvolvimento do raciocínio lógico e da capacidade de argumentação.

Essas constatações reforçam que a Matemática, embora baseada em fundamentos históricos sólidos, encontra-se em constante evolução, aperfeiçoando-se na forma de apresentar seus conteúdos e promovendo novas maneiras de compreender a dedução e o raciocínio lógico. Assim, o saber matemático contemporâneo não apenas preserva o legado de Euclides, mas o reinterpreta e amplia, mantendo viva a essência da Geometria como ciência do raciocínio e da demonstração.

A relevância desta pesquisa reside em ressignificar a importância das construções matemáticas e das proposições euclidianas para o ensino moderno, lançando um olhar analítico sobre como esses elementos estruturam a base do conhecimento geométrico presente nos livros didáticos. Ao promover essa reflexão, o trabalho contribui para a formação de um olhar mais crítico e contextualizado sobre o material didático, permitindo que professores e

estudantes compreendam a origem histórica das ideias matemáticas e sua influência na prática pedagógica atual.

Além disso, o livro didático compõe-se por um conjunto diversificado de informações, servindo como fonte de pesquisas e análises posteriores. Ele contribui para os alunos ao apresentar conteúdos que dialogam com os materiais da antiguidade, possibilitando reflexões em sala de aula. Ao mesmo tempo, é possível explorar essa perspectiva na formação de professores, por meio de minicursos e formações sobre a temática, promovendo um olhar mais aprofundado sobre conteúdos que, na maioria das formações, são abordados de maneira breve. Esse processo permite a construção de produtos educacionais que podem orientar outros professores e fortalecer a prática pedagógica.

Portanto, podemos concluir que a geometria da construção matemática 11 do Livro I de *Os Elementos* é apresentada, tratada e reinterpretada nos livros didáticos contemporâneos de maneira a preservar seus fundamentos dedutivos, adaptando sua linguagem e representação visual ao contexto pedagógico atual, promovendo compreensão, aplicação prática e reflexão histórica, consolidando a relação entre a Matemática antiga e sua prática educativa moderna.

6. REFERÊNCIAS

- BOYER, Carl. B. **História da Matemática**. São Paulo. Edgard Blücher, Ltda., 1974.
- BRASIL. **Base Nacional Comum Curricular (BNCC): educação é a base**. Brasília, DF: MEC/CONSED/UNDIME, 2018. Disponível em: http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC_publicacao.pdf
- BRASIL. Secretaria da Educação Fundamental. **Parâmetros curriculares nacionais: matemática**. Brasília: MEC, 1998.
- DANTE, Luiz Roberto Teláris Essencial [livro eletrônico] : Matemática : 8º ano / Luiz Roberto Dante, Fernando Viana. -- 1. ed. -- São Paulo : Ática, 2022. HTML (Teláris Essencial Matemática)
- D'AMBROSIO, U. **A história da matemática: questões historiográficas e políticas e reflexos na Educação Matemática**. In: BICUDO, M. A. V.(org.). Pesquisa em Educação Matemática: concepções e perspectivas. São Paulo: UNESP, 1999, p. 97 115.
- EUCLIDES. **Os elementos**. Tradução e introdução de Irineu Bicudo. São Paulo: Editora UNESP, 2009.
- GAMAS, Carlos Alberto Duarte. **A Matemática em Alexandria: Convergência e Irradiação**. Coimbra. Archai. n. 11, 2013.
- GAMAS, C. A. D. (2013). **A Matemática em Alexandria: Convergência e Irradiação**. Archai, n. 11, jul-dez, p. 47-54.
- GERT, Schubring. **Análise Histórica de Livros de Matemática**. Notas de Aula (Campinas: Editora Autores Associados, 2003).
- IEZZI, Gelson Matemática e realidade [livro eletrônico] : 8º ano / Gelson Iezzi, Osvaldo Dolce e Antonio Machado. -- 10. ed. -- São Paulo : Saraiva Educação S.A., 2022. HTML (Matemática e realidade)
- KÁSSIA, A.; DE FREITAS, R.; FERREIRA. **Educação Matemática na Contemporaneidade: desafios e possibilidades A BIBLIOTECA DE ALEXANDRIA E A CASA DA SABEDORIA: UM BREVE PANORAMA HISTÓRICO**. [s.l: s.n.]. Disponível em: <https://www.sbembrasil.org.br/enem2016/anais/pdf/5544_2732_ID.pdf>.
- LEME DA SILVA, M. C.; OLIVEIRA, M. C. A. **O ensino de geometria durante o Movimento da Matemática Moderna no Brasil: análise do arquivo pessoal de Sylvio**

Nepomuceno. In: VI Congresso Luso-brasileiro de História da Educação, 2006, Uberlândia. Anais do VI Congresso Luso-brasileiro de História da Educação, 2006. Disponível em: http://www2.faced.ufu.br/colubhe06/anais/arquivos/374MariaCeliaLeme_e_MariaCristina.pdf Acesso em 18 de setembro de 2025.

MEC. **Programa Nacional do Livro e do Material Didático (PNLD).** Disponível em: <https://www.gov.br/mec/pt-br/pnld>. Acesso em: 18 set. 2025.

ROQUE, Tatiana. História da Matemática- **Uma visão crítica, desfazendo mitos e lendas.** [S.l.: s.n.], 2002.

SANCHEZ B, Clara Helena. A história como recurso didático: o caso dos Elementos de Euclides. **Rev. Ciência. Tecnol.** , Bogotá, n. 32, pág. 71-92, julho de 2012. Disponível em <http://www.scielo.org.co/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S0121-38142012000200006&lng=en&nrm=iso>. acesso em 11 de setembro de 2025.

	INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA DA PARAÍBA
	Campus Campina Grande - Código INEP: 25137409
	R. Tranquílino Coelho Lemos, 671, Dinamérica, CEP 58432-300, Campina Grande (PB)
	CNPJ: 10.783.898/0003-37 - Telefone: (83) 2102.6200

Documento Digitalizado Ostensivo (Público)

Trabalho de conclusão de curso

Assunto:	Trabalho de conclusão de curso
Assinado por:	Larissa Santos
Tipo do Documento:	Dissertação
Situação:	Finalizado
Nível de Acesso:	Ostensivo (Público)
Tipo do Conferência:	Cópia Simples

Documento assinado eletronicamente por:

- Larissa Alves dos Santos, DISCENTE (202411280015) DE ESPECIALIZAÇÃO EM ENSINO EM MATEMÁTICA - CAMPINA GRANDE, em 16/11/2025 15:08:44.

Este documento foi armazenado no SUAP em 16/11/2025. Para comprovar sua integridade, faça a leitura do QRCode ao lado ou acesse <https://suap.ifpb.edu.br/verificar-documento-externo/> e forneça os dados abaixo:

Código Verificador: 1672346
Código de Autenticação: 7ce4a89ac5

