



INSTITUTO FEDERAL

Paraíba

Campus Campina Grande

**INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA DA PARAÍBA
CURSO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA**

CARLOS DANIEL HENRIQUE DE SOUSA

**ENTRE QUADRILÁTEROS E CIRCUNFERÊNCIAS: PROPOSTA PARA O ENSINO
DAS RELAÇÕES MÉTRICAS NAS AULAS DE ELETIVA NO ENSINO MÉDIO.**

CAMPINA GRANDE - PB

2025

CARLOS DANIEL HENRIQUE DE SOUSA

**ENTRE QUADRILÁTEROS E CIRCUNFERÊNCIAS: PROPOSTA PARA O ENSINO
DAS RELAÇÕES MÉTRICAS NAS AULAS DE ELETIVA NO ENSINO MÉDIO.**

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado no Curso de Especialização em Ensino de Matemática do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia da Paraíba (IFPB), como requisito parcial para obtenção do título de Especialista em Ensino de Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Ramon Formiga Figueira

Catálogo na fonte:

Ficha catalográfica elaborada por Gustavo César Nogueira da Costa - CRB 15/479

S725e Sousa, Carlos Daniel Henrique de

Entre quadriláteros e circunferências: proposta para o ensino das relações métricas nas aulas de eletiva no Ensino Médio / Carlos Daniel Henrique de Sousa. - Campina Grande, 2025.

87 f. : il.

Trabalho de Conclusão de Curso (Curso de Especialização em Ensino de Matemática.) - Instituto Federal da Paraíba, 2025.

Orientador: Prof. Dr. Ramon Formiga Figueira.

1. Matemática 2. Geometria – Estudo e ensino. 3. Ensino de matemática - Ensino médio. 4. GeoGebra I. Figueira, Ramon Formiga II. Título.

CDU 51:37

CARLOS DANIEL HENRIQUE DE SOUSA

ENTRE QUADRILÁTEROS E CIRCUNFERÊNCIAS: PROPOSTA PARA O ENSINO DAS RELAÇÕES MÉTRICAS NAS AULAS DE ELETIVA NO ENSINO MÉDIO.

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado no Curso de Especialização em Ensino de Matemática do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia da Paraíba (IFPB) – Campus Campina Grande, como requisito parcial para obtenção do título de Especialista em Ensino de Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Ramon Formiga Figueira.

Aprovado em: 23/10/2025.

BANCA EXAMINADORA

Documento assinado digitalmente
 **RAMON FORMIGA FIGUEIRA**
Data: 03/11/2025 10:53:49-0300
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

Prof. Dr. Ramon Formiga Figueira
Orientador - Instituto Federal da Paraíba (IFPB)

Documento assinado digitalmente
 **BALDOINO SONILDO DA NOBREGA**
Data: 03/11/2025 08:36:11-0300
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

Prof. Me. Balduino Sonildo da Nóbrega
Avaliador - Instituto Federal da Paraíba (IFPB)

Documento assinado digitalmente
 **JONATHAS JERONIMO BARBOSA**
Data: 03/11/2025 10:00:43-0300
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

Prof. Dr. Jonathas Jerônimo Barbosa
Avaliador - Instituto Federal da Paraíba (IFPB)

AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente à Deus, que me abençoa para lhe dar com as constantes atribulações e continuar minha caminhada e almejando enriquecer ainda mais minha formação profissional.

Agradeço ao Instituto Federal de Educação Ciência e Tecnologia da Paraíba - IFPB, Campus Campina Grande, e a todos os funcionários dessa instituição, essa que teve tanta importância na minha vida.

A toda minha família, meu pai, Daniel Barbosa de Sousa, minha mãe, Valquiria Henrique dos Santos, minha irmã, Carla Cristina e meu irmão, Davi.

Aos meus amigos que fui presenteado durante o curso e aos meus amigos fora do curso, que me escutaram e acreditaram em mim, Gleysom, Iara, Larissa, Wendell, obrigado. Ao técnico que me salvou aos 45 do segundo tempo, Luciano Alves.

Aos professores que passaram em minha vida acadêmica e enriqueceram minha formação profissional, em especial ao Prof. Maxwell, por sua ajuda antes mesmo de ingressar nesse curso.

Ao meu orientador, professor Ramon. Agradeço pela sua dedicação, que até mesmo em dias de sua folga esteve disposto em me auxiliar, agradeço pela atenção e os conselhos que me motivaram a fazer cada vez mais. Sem seu esforço e paciência esse trabalho não seria possível, obrigado por ser esse excelente profissional e pessoa.

Aos professores da banca, Prof. Sonildo e Prof. Jonathas por terem aceitado o convite para analisar este trabalho, agradeço pelas devidas intervenções para o aperfeiçoamento desta obra, o qual entendo como de grande importância.

Muito obrigado à todos.

“A inclusão acontece quando se aprende com as diferenças e não com as igualdades.”
(Paulo Freire)

RESUMO

Este trabalho apresenta uma proposta de sequência didática voltada ao ensino das relações métricas em quadriláteros inscritos, circunscritos e ex-inscritos em circunferências, a ser desenvolvida nas aulas da disciplina eletiva do Ensino Médio. A pesquisa busca contribuir para o aprimoramento do processo de ensino-aprendizagem da Geometria, área frequentemente negligenciada nas escolas, por meio de práticas que valorizem a contextualização e o uso de tecnologia digital, *GeoGebra*. A metodologia adotada fundamenta-se em uma abordagem qualitativa, com caráter descritivo e aplicável à realidade escolar, propondo atividades interativas que estimulam o raciocínio lógico, o desenho geométrico, a autonomia e o trabalho colaborativo entre os discentes. A proposta inclui a exploração de construções geométricas, a revisão de conceitos fundamentais e a aplicação de teoremas clássicos, como os de Pitot, Ptolomeu e Steiner. Os resultados esperados consistem em promover o interesse dos estudantes pela Geometria, ampliar a compreensão dos conceitos e favorecer a aprendizagem significativa, com reflexos positivos no desempenho em avaliações externas e no desenvolvimento de competências cognitivas e socioemocionais.

Palavras-chave: Ensino de Geometria. Sequência didática. Relações métricas. Quadriláteros. Circunferência.

ABSTRACT

This work presents a didactic sequence proposal focused on teaching metric relations in quadrilaterals inscribed, circumscribed, and ex-inscribed in circles, to be developed in elective subject classes in High School. The research aims to contribute to the improvement of the teaching-learning process of Geometry-an area often neglected in schools through practices that emphasize contextualization and the use of digital technologies, such as *GeoGebra*. The adopted methodology is based on a qualitative approach, with a descriptive character and applicable to the school reality, proposing interactive activities that stimulate logical reasoning, geometric drawing, autonomy, and collaborative work among students. The proposal includes the exploration of geometric constructions, the review of fundamental concepts, and the application of classical theorems such as those of Pitot, Ptolemy, and Steiner. The expected results consist of promoting students' interest in Geometry, expanding their conceptual understanding, and fostering meaningful learning, with positive effects on performance in external assessments and on the development of cognitive and socio-emotional skills.

Keywords: Geometry teaching. Didactic sequence. Metric relations. Quadrilaterals. Circumference.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1 – Impedimento	17
Figura 2 – Esquadro e prumo.	17
Figura 3 – Barras de chocolate e sinuca	18
Figura 4 – Visão inferior de uma torre elétrica.	19
Figura 5 – Mandala e vitral superior medieval	19
Figura 6 – Pipa diamante	20
Figura 7 – Circunferência	25
Figura 8 – Circunferência	25
Figura 9 – Ângulo $A\widehat{O}B$	26
Figura 10 – Ângulo central	26
Figura 11 – Ângulos inscritos	27
Figura 12 – Ângulo inscrito	27
Figura 13 – Alguns polígonos	28
Figura 14 – Triângulo	28
Figura 15 – Triângulo retângulo	28
Figura 16 – Triângulo equilátero	29
Figura 17 – Triângulo isósceles	29
Figura 18 – Triângulo escaleno	29
Figura 19 – Quadriláteros	31
Figura 20 – Quadrado	31
Figura 21 – Retângulo	32
Figura 22 – Paralelogramo	32
Figura 23 – Losango	32
Figura 24 – Trapézios	32
Figura 25 – Ícone da ferramenta <i>Círculo: Centro & Raio</i>	35
Figura 26 – Ícone da ferramenta <i>Ponto</i>	35
Figura 27 – Ícone da ferramenta <i>Reta</i>	36
Figura 28 – Ícone da ferramenta <i>Interseção de Dois Objetos</i>	36
Figura 29 – Construção após o passo 2.	36
Figura 30 – Ícone da ferramenta <i>Segmento</i>	36
Figura 31 – Construção após o passo 4.	36
Figura 32 – Construção após o passo 6.	37
Figura 33 – Ícone da ferramenta <i>Distância, Comprimento ou Perímetro</i>	37
Figura 34 – Construção finalizada do quadrilátero $ABCD$	38
Figura 35 – Ícone da ferramenta <i>Círculo definido por Três Pontos</i>	38
Figura 36 – Circunferências a serem feitas no quadrilátero $ABCD$	38

Figura 37 – Possíveis circunferências circunscritas no quadrilátero.	39
Figura 38 – Ícone da ferramenta <i>Círculo dados Centro e Um dos seus Pontos</i> .	39
Figura 39 – Circunferência ex-inscrita no quadrilátero.	40
Figura 40 – Construção após o passo 1	42
Figura 41 – Construção após o passo 2	42
Figura 42 – Construção após o passo 4	42
Figura 43 – Ícone da ferramenta: <i>Reta Perpendicular</i>	43
Figura 44 – Construção após o passo 5	43
Figura 45 – Construção após o passo 6	43
Figura 46 – Proposição 5.2.1	44
Figura 47 – Quadrilátero circunscrito.	45
Figura 48 – Passo 1	48
Figura 49 – Passo 2	48
Figura 50 – Passo 3	48
Figura 51 – Passo 4	48
Figura 52 – Possível visualização do passo 5	49
Figura 53 – Quadrilátero $ABCD$ inscrito em uma circunferência	51
Figura 54 – Quadrilátero $ABCD$ inscrito em uma circunferência	52
Figura 55 – Quadrilátero $ABCD$ inscrito em uma circunferência	52
Figura 56 – Retângulo $ABCD$ inscrito.	55
Figura 57 – Triângulo equilátero e um ponto qualquer na circunferência.	56
Figura 58 – Pentágono regular inscrito.	56
Figura 59 – Quadrilátero ex-inscrito $ABCD$	64
Figura 60 – Quadrilátero $ABCD$ ex-inscrito.	64
Figura 61 – Proposta	67
Figura 62 – Ícone da disposição: <i>Planilha de Cálculos</i>	68
Figura 63 – Quadrilátero $ABCD$ ex-inscrito.	68
Figura 64 – CPAEAM-2025	84
Figura 65 – Jacob Palis JR - 2025	85
Figura 66 – Universo narrado - 2025	86
Figura 67 – ENEM(caderno verde) - 2023	87

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Aula 1	33
Tabela 2 – Aula 2	34
Tabela 3 – Exemplo: Quadrilátero $ABCD$	35
Tabela 4 – Aula 3	41
Tabela 5 – Aula 4	44
Tabela 6 – Aula 5	47
Tabela 7 – Aula 6	51
Tabela 8 – Aula 7	63
Tabela 9 – Tabela auxiliar para as deduções dos quadriláteros $ABCD$	74
Tabela 10 – Cronograma.	82

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	12
1.1	Questão diretriz	14
1.2	Objetivo geral	14
1.3	Objetivos específicos	14
2	FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA	16
2.1	A importância da Geometria	16
2.2	O aprendizado da Geometria até o Ensino Médio	20
2.3	A legitimidade e importância da pesquisa	22
3	METODOLOGIA	24
4	CONCEITOS ELEMENTARES	25
4.1	Circunferência	25
4.1.1	Arco de circunferência	25
4.2	Ângulo	26
4.2.1	Ângulo central	26
4.2.2	Ângulo inscrito	27
4.2.3	Arco capaz	27
4.2.4	Ângulo de segmento	27
4.3	Polígonos	28
4.4	Triângulo	28
4.4.1	Triângulo retângulo	28
4.4.2	Triângulo equilátero	29
4.4.3	Triângulo isósceles	29
4.4.4	Triângulo escaleno	29
4.4.5	Segmento tangente	30
4.5	Quadrilátero	31
4.5.1	Quadrado	31
4.5.2	Retângulo	31
4.5.3	Paralelogramo	31
4.5.4	Losango	32
4.5.5	Trapezio	32
5	SEQUÊNCIA DIDÁTICA	33
5.1	Eletiva de construções geométricas	33
5.1.1	Aula 1	33
5.1.2	Aula 2	34
5.2	Etapa 1 - Construções com quadriláteros circunscritíveis	41
5.2.1	Aula 3	41

5.2.2	Aula 4	44
5.2.3	Teorema de Pitot	45
5.3	Etapa 2 - Construções com quadriláteros inscritíveis	47
5.3.1	Aula 5	47
5.3.2	Aula 6	51
5.3.3	Teorema de Ptolomeu	51
5.3.3.1	Aplicações do Teorema de Ptolomeu em polígonos	54
5.3.3.2	Corolários	59
5.4	Etapa 3 - Construções com quadriláteros ex-inscritos	63
5.4.1	Aula 7	63
5.4.2	Teorema de Steiner	68
5.5	Empecilhos nas etapas	70
6	CONSIDERAÇÕES FINAIS	71
	REFERÊNCIAS	72
	APÊNDICE A Tabela auxiliar das aulas	74
	APÊNDICE B Resolução das questões “Para exercitar”	75
	APÊNDICE C Cronograma	82
	ANEXO A Problemas adicionais	84

1 INTRODUÇÃO

A Geometria é um dos pilares da Matemática, essencial para compreender e representar o espaço em que vivemos. Seu estudo auxilia no desenvolvimento do raciocínio lógico, da percepção espacial e da capacidade de resolver problemas, sendo fundamental na formação intelectual dos estudantes. Além de sua relevância histórica e científica, ela possui ampla aplicação prática em áreas como engenharia, arte e tecnologia.

Esta pesquisa surge da preocupação com a forma como a Geometria é ensinada, especialmente a partir do 6º ano do ensino fundamental. Com frequência, os professores de Matemática cometem equívocos ao abordar a Geometria em sala de aula, o que pode retardar o avanço da aprendizagem e resultar em tratamento insuficiente do conteúdo até o final do ano letivo. Além disso, autores de livros didáticos de Matemática historicamente têm adotado uma distribuição cronológica das temáticas que adia o ensino da Geometria para os finais de livros, contribuindo para sua marginalização no currículo.

Um dos principais [fatores que evidenciam essa marginalização] é a priorização da Álgebra e da Aritmética, muitas vezes impulsionada pelas exigências de avaliações de larga escala. Além disso, a formação insuficiente dos professores contribui para o tratamento superficial ou mesmo negligência dos conteúdos geométricos. (SILVA; RODRIGUES, 2025, p. 21)

Cabe mencionar também a falta de intimidade do professor com a temática que irá ministrar como um aspecto negativo, pois tal deficiência pode comprometer a qualidade do ensino. Quando o professor não domina ou possui dificuldades com o conteúdo, há maior risco de transmitir informações imprecisas e reduzir a profundidade das discussões em sala de aula, limitando a capacidade de responder às dúvidas dos alunos. Ademais, a falta de segurança no tratamento do tema pode afetar sua postura didática, gerando desinteresse ou insegurança nos estudantes. Isso evidencia a importância da formação continuada e da preparação adequada para garantir um processo de ensino-aprendizagem mais eficaz e significativo.

... nos nossos cursos de formação de professores, que possibilitam ao seu término o ensino da Matemática ou Didática da Matemática (Licenciatura em Ciências, em Matemática, em Pedagogia e Formação para o Magistério), a Geometria possui uma fragilíssima posição, quando consta. Ora, como ninguém pode ensinar bem aquilo que não conhece, está aí mais uma razão para o atual esquecimento geométrico. (LORENZATO, 1995, p. 4)

Para que o processo de ensino-aprendizagem ocorra de maneira adequada, possibilitando diálogos construtivos durante a abordagem do conteúdo, é necessário o aprofundamento teórico por meio de fontes variadas além do saber próprio e do livro didático, como

artigos, vídeos e materiais complementares que agreguem definições e explicações lógicas, evitando que conjecturas pessoais sejam interpretadas como “falsas verdades”. Quando o professor é questionado pelo aluno e não possui certeza da resposta, há o risco de apresentar sua opinião como saber científico, impactando negativamente o desenvolvimento acadêmico do estudante.

A disciplina eletiva é uma das matérias implementadas no ensino das Escolas Cidades Integradas (ECI) desde o ano de 2016 na Paraíba (PARAÍBA, 2023). Ela tem como objetivo auxiliar os alunos nas tomadas de decisões para suas carreiras após o término do ensino médio, sendo focada, na maioria das vezes, na escolha de um trajeto alinhado às suas aptidões e interesses (CONECTADO, 2024). Em outras ocasiões, o conteúdo dessa disciplina fica a critério do professor, uma vez que não há cursos preparatórios oferecidos para o ensino dessas disciplinas recentes.

Quando cursei esta disciplina durante o ensino médio, participei de quatro eletivas de temas variados. A primeira foi voltada ao ensino, à história e à prática do xadrez. A segunda envolveu a construção e a conscientização sobre o uso de produtos elétricos e sustentáveis. A terceira abordou as áreas policiais, a medicina legal, a segurança e a investigação, com encenações de casos criminais elaborados pelos próprios integrantes da eletiva. A quarta teve como proposta a encenação das profissões que pretendíamos exercer futuramente.

Embora nem todo o saber adquirido nesse período tenha sido diretamente aplicado, esse conjunto de experiências despertou em mim o interesse e o empenho por práticas diferentes das habituais — uma nova forma de enxergar temas pertinentes. Assim, surgiu a reflexão: por que não criar uma eletiva que viabilize o estudo da Geometria por meio do contato com conteúdos que, devido à limitação de tempo, são frequentemente negligenciados, mas que podem enriquecer a formação discente e contribuir para melhorias no desempenho em avaliações externas? Afinal, “através de um ensino sem quaisquer significados, a falta de um propósito na educação afetará ainda mais o desenvolvimento crítico dos educandos” (VIANA, 2023, p. 24).

Neste trabalho, propõe-se uma sequência didática focada nas relações métricas em quadriláteros, considerando o significativo esquecimento de conteúdos de Geometria como desafio durante a pesquisa. O plano estruturado de aulas é pensado para suprir lacunas frequentemente deixadas durante o ensino fundamental e médio. Por meio da proposta de intervenção pedagógica apresentada neste trabalho, surgem possibilidades de adaptações do currículo escolar que viabilizem o ensino de Geometria mediante recursos e contextualizações diversificadas.

Por se tratar de um conteúdo que exige uma base teórica sólida, a revisão de saberes prévios possibilita uma nova concepção do tema e permite um nivelamento de conhecimentos com a turma em um momento inicial. Considerando isso, a seção de conceitos elementares integra este trabalho, reunindo saberes que orientam as demais atividades da

oficina.

A presunção de um método 100% eficaz está longe de ser defendida nesta obra, não há uma “receita” ou “método” a ser aplicado e que sempre possua em seu desfecho os melhores resultados (LOPES; FERREIRA, 2013, p. 87). Não partiremos da premissa de eficácia máxima da metodologia, pois para uma aprendizagem significativa, vários fatores influenciarão diretamente essa construção, ao invés disso, iremos tratar como objeto auxiliar para contornar problemas anteriormente expostos.

1.1 Questão diretriz

Diante do reduzido espaço dado ao ensino de Geometria na Educação Básica, como planejar e aplicar uma proposta didática que favoreça a compreensão e o domínio dos conteúdos dessa área da Matemática entre os estudantes do Ensino Médio?

1.2 Objetivo geral

O objetivo geral deste trabalho é propor uma sequência didática para o ensino das relações métricas em quadriláteros inscritos, circunscritos e ex-inscritos em circunferências, por meio de uma oficina Matemática oferecida como disciplina eletiva. A proposta visa possibilitar construções geométricas lógicas e gráficas com o uso de materiais manipuláveis, lousa e recursos digitais como o *software GeoGebra*, promovendo a aprendizagem colaborativa e autônoma, dos conteúdos explorados.

1.3 Objetivos específicos

São objetivos específicos deste trabalho:

- Desenvolver habilidades digitais aplicadas à construção de figuras geométricas utilizando *softwares* como o *GeoGebra*, promovendo a autonomia tecnológica dos estudantes;
- Ampliar o domínio conceitual e prático dos conteúdos de Geometria, especialmente relacionados às propriedades de circunferências e quadriláteros;
- Aprofundar o entendimento dos estudantes acerca das relações métricas específicas em quadriláteros inscritos, circunscritos e ex-inscritos em circunferências;
- Potencializar o desempenho dos alunos em atividades que envolvam resolução de problemas geométricos contextualizados, com foco na aplicação em avaliações externas, como o ENEM, vestibulares e concursos;

- Estimular o raciocínio lógico-dedutivo dos alunos por meio da exploração de construções geométricas e formulação de conjecturas;
- Consolidar a visão geométrica dos estudantes, promovendo conexões entre conceitos teóricos e situações do cotidiano e/ou profissionais;
- Favorecer a colaboração e o trabalho em grupo durante as atividades de construção geométrica, contribuindo para o desenvolvimento de competências socioemocionais;
- Desenvolver competências investigativas nos discentes, incentivando-os à análise crítica e à busca autônoma de soluções em problemas geométricos complexos.

2 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

O presente capítulo apresenta os principais fundamentos teóricos que sustentam esta pesquisa, abordando conceitos, autores e perspectivas que contribuem para a compreensão do tema proposto. Busca-se discutir a importância da Geometria no processo de ensino-aprendizagem, suas aplicações no cotidiano e a relevância da utilização de metodologias e recurso tecnológico no ensino dessa área. Assim, esta fundamentação oferece o suporte necessário para a construção da sequência didática proposta nos capítulos seguintes.

2.1 A importância da Geometria

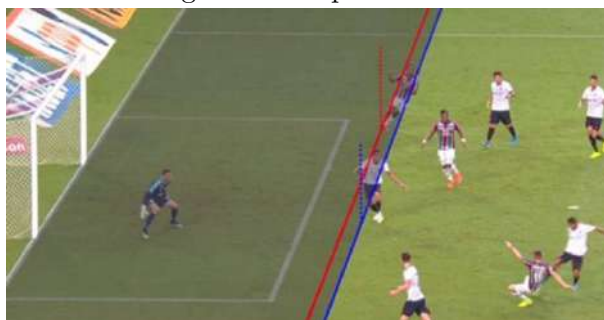
Com o propósito de evidenciar a relevância do ensino da Geometria nas aulas de Matemática e sua importância no currículo escolar, [Lorenzato \(1995\)](#) destaca:

Na verdade, para justificar a necessidade de se ter a Geometria na escola, bastaria o argumento de que sem estudar Geometria as pessoas não desenvolvem o pensar geométrico ou o raciocínio visual e, sem essa habilidade, elas dificilmente conseguirão resolver as situações de vida que forem geometrizadas; também não poderão se utilizar da Geometria como fator altamente facilitador para a compreensão e resolução de questões de outras áreas de conhecimento humano. Sem conhecer Geometria a leitura interpretativa do mundo torna-se incompleta, a comunicação das idéias fica reduzida e a visão da Matemática torna-se distorcida. ([LORENZATO, 1995](#), p. 5)

Diversas são as manifestações da Geometria no cotidiano, tornando essencial sua compreensão e aplicação adequadas para a execução de diferentes atividades práticas. Por estar presente até mesmo nas ações mais simples, a interpretação incorreta de seus princípios compromete sua confiabilidade e aplicabilidade. O uso inadequado dos conceitos geométricos pode gerar equívocos na leitura, levando o indivíduo a aceitar informações distorcidas por desconhecer o certo. Um exemplo dessa aplicabilidade podem ser observados nas linhas de impedimento no futebol, nas inclinações e alinhamentos de paredes e pisos, no jogo de bilhar e em outras situações nas quais a Geometria se mostra essencial para a compreensão e execução correta das ações.

No futebol, a regra do impedimento foi criada para equilibrar o jogo, impedindo que um jogador se posicione próximo ao gol adversário em busca de finalizações rápidas e excessivamente vantajosas. De acordo com a *International Football Association Board* (IFAB, 2024/2025), o impedimento ocorre quando um jogador, posicionado no campo adversário (excluindo a linha central), possui qualquer parte do corpo — exceto braços e mãos — mais próxima da linha de fundo do que a bola e o penúltimo defensor. Para identificar o impedimento, o árbitro assistente (popularmente chamado de bandeirinha)

Figura 1 – Impedimento



Fonte: <<https://images.app.goo.gl/uF6y2jqcYCrwiYm8>>

precisa ter uma percepção geométrica apurada, compreendendo os conceitos de paralelismo e perpendicularidade. É necessário que ele visualize retas imaginárias com base nas posições dos jogadores e analise suas disposições no campo, a fim de determinar quem se encontra à frente ou não do penúltimo defensor. Com o avanço da tecnologia esportiva, especialmente com o uso do VAR (*Video Assistant Referee*), a importância da Geometria permanece evidente. O funcionamento desse recurso depende do domínio conceitual da arbitragem, exigindo conhecimento técnico ou, ao menos, compreensão geométrica intuitiva para seu uso adequado.

Imaginação e intuição são instrumentos tão importantes na invenção matemática como o são para o pintor que concebe um quadro, para o escritor que planeja uma obra literária ou para o músico em suas composições. (ÁVILA et al., 2003 apud OLIVEIRA, 2023, p. 16)

Na construção civil, o mesmo princípio geométrico pode ser facilmente observado nas paredes e nos pisos. Para evitar fissuras e inclinações nas paredes, utiliza-se, na maioria dos casos, o esquadro, ferramenta em formato de L, geralmente graduada em centímetros e polegadas.

Figura 2 – Esquadro e prumo.



Fonte: Autoria própria.

Sua principal função é o esquadreamento - popularmente conhecido como “tirar o esquadro” -, pois possui uma base alongada em seu cabo, que permite apoiar o instrumento na superfície para a medição de ângulos retos, evitando desalinhamentos e falhas que

possam comprometer a estética e a resistência estrutural. Outra ferramenta de finalidade semelhante é o prumo, constituído por um peso suspenso por um cordão. Seu uso baseia-se na verificação do paralelismo entre o fio do prumo e a parede em que é aplicado, garantindo a verticalidade da construção.

Até mesmo para vencer uma partida de bilhar, é necessário possuir um conhecimento básico sobre ângulos, uma vez que analisar as trajetórias das bolas ao longo do jogo é fundamental para quem almeja obter êxito. Além desses exemplos, podemos identificar figuras e conceitos geométricos em diversos outros lugares. Observe a Figura 3¹, na qual estão ilustradas barras de chocolate que remetem a figuras geométricas, bem como uma mesa de sinuca, cuja disposição reflete a relação entre ângulos e propriedades de reflexão.

Figura 3 – Barras de chocolate e sinuca



Fonte: <www.google.com>

Apesar disso, o nível de instrução escolar não constitui o único meio de compreensão dessas situações. Nem sempre uma pessoa que estudou tais conteúdos apresenta grande aptidão para executá-los; em contrapartida, há indivíduos que, mesmo sem o conhecimento científico formal, conseguem desempenhá-los com precisão. No entanto, não será aprofundada aqui a discussão sobre o saber técnico-científico.

As propriedades que definem os quadriláteros estudados são amplamente aplicáveis em campos como a engenharia, o design, a arte e até mesmo em atividades recreativas, possibilitando a criação de estruturas e objetos estáveis, como o desenho de arcos em pontes ou o projeto de rodas. As propriedades de inscrição e circunscrição de um quadrilátero em uma circunferência permitem melhor desempenho em termos de estabilidade, rigidez e distribuição de forças em objetos do cotidiano - mesmo que tais aspectos não sejam percebidos imediatamente. (Ver Figura 4²).

A Geometria dos quadriláteros cíclicos inspira o *design* de elementos e objetos do cotidiano, bem como obras de arte que exploram a harmonia e o equilíbrio de formas inscritas em círculos. A Figura 5³ ilustra a presença da Geometria na arte, representada

¹ <<https://www.istockphoto.com/br/fotos/barra-de-chocolate>>

<<https://www.infoescola.com/esportes/sinuca/>>

² <<https://www.amazon.in/Electric-Voltage-Transmission-Tower-Journal/dp/1539664740>>

³ <<https://www.elo7.com.br/mandala-quadrados-e-espelho/dp/1703620>> <<https://artedadrikinha.blogspot.com/2014/10/arte-feita-com-formas-geometricas.html>>

Figura 4 – Visão inferior de uma torre elétrica.



Fonte: <www.google.com>

Figura 5 – Mandala e vitral superior medieval



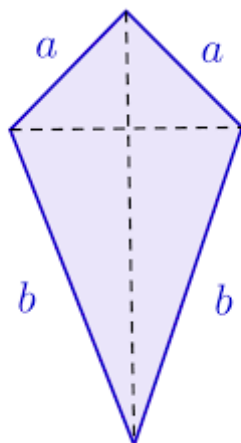
Fonte: <www.google.com>

por vitrais e mandalas.

A compreensão das propriedades dos quadriláteros circunscritos e ex-inscritos manifesta-se em atividades recreativas, como a construção de pipas, nas quais as formas geométricas são fundamentais para o voo. Tomemos como exemplo as pipas do tipo diamante, também conhecidas como peixinhos, cujo formato corresponde a um quadrilátero com pares de lados congruentes, conforme mostrado na Figura 6⁴. Em linguagem matemática, a pipa diamante é uma figura geométrica que apresenta pares de lados adjacentes e ângulos obtusos congruentes.

⁴ <<https://artedadrikkinha.blogspot.com/2014/10/arte-feita-com-formas-geometricas.html>>

Figura 6 – Pipa diamante



Fonte: <www.google.com>

2.2 O aprendizado da Geometria até o Ensino Médio

Considerando o papel do professor em sala de aula, torna-se sua responsabilidade relacionar os conteúdos do currículo acadêmico com tarefas presentes no universo concreto dos discentes. As comparações devem ser fundamentadas em argumentos precisos e objetivos, evitando semelhanças redundantes ou confusas, de modo a garantir que a aprendizagem seja efetiva e significativa.

Por meio de metodologias ativas, as práticas pedagógicas tendem a ser mais envolventes para os alunos. Além disso, a criação de atividades e situações que permitam aos estudantes serem protagonistas de sua própria aprendizagem é fundamental para o desenvolvimento intelectual. Durante o processo de ensino, eles são encorajados a participar ativamente. A reflexão sobre seus atos contribui para o desenvolvimento da capacidade crítica em relação ao objeto de estudo, permitindo também a interação com colegas e professor, bem como a exploração de atitudes e valores pessoais (VALENTE; FREIRE; ARANTES, 2018, p. 25-26).

No emprego dessas metodologias, as tecnologias digitais têm se mostrado ferramentas promissoras no processo de ensino-aprendizagem. Considerando que os alunos são expostos ao mundo digital cada vez mais cedo — por meio de redes sociais e jogos eletrônicos, por exemplo —, a integração de dispositivos tecnológicos na sala de aula constitui uma estratégia para tornar o ensino-aprendizagem mais próximo da realidade dos estudantes. A integração de recursos tecnológicos ao contexto escolar aumenta o interesse e o engajamento dos alunos, que passam a perceber sentido nas atividades e se tornam mais receptivos à aprendizagem.

Porém, muitas ferramentas disponibilizadas pela *internet* para o ensino de diferentes conteúdos escolares não são utilizadas de forma adequada, “[A]s instituições de ensino, tanto do ensino básico quanto do superior, precisam estar conscientes de como as tecnologias digitais estão mudando e como elas estão alterando os processos de ensino e de aprendizagem” (VALENTE; FREIRE; ARANTES, 2018, p. 17).

A reflexão sobre o uso consciente dessas tecnologias não deve ocorrer apenas nas instituições acadêmicas, mas também nos órgãos públicos responsáveis pela educação. O incentivo não deve se restringir a programas anuais de aperfeiçoamento, mas também incluir políticas públicas nas escolas desde o ensino fundamental, bem como uma maior oferta de disciplinas nos cursos de graduação, que possibilitem a implementação de práticas de ensino utilizando ferramentas digitais. Outrossim, o incentivo financeiro pelos órgãos governamentais essencial para a aquisição mínima dos equipamentos utilizados pelos docentes em sala de aula, uma vez que a qualidade da educação depende não apenas de professores e gestores, mas também de recursos adequados.

Podemos apontar, em relação à formação dos professores, que esta é muito precária quando se trata de geometria, pois os cursos de formação inicial não contribuem para que façam uma reflexão mais profunda a respeito do ensino e da aprendizagem dessa área da matemática. Por sua vez, a formação continuada não atende ainda aos objetivos esperados em relação à geometria. Assim, a maioria dos professores do ensino fundamental e do Ensino Médio não está preparada para trabalhar segundo as recomendações e orientações didáticas e pedagógicas dos PCN.

Além disso, alguns livros didáticos também contribuem para a origem de vários problemas, pois as situações de ensino apresentadas naqueles que analisamos e que são propostas para os alunos, de maneira geral, pela maioria dos professores, não enfatizam suficientemente a coordenação de registros de representação semiótica e a importância da figura para a visualização e exploração. (ALMOULOU et al., 2004 p. 6)

Quando a escolha do livro didático é atribuída à instituição de ensino, em alguns casos a direção escolar delega essa responsabilidade ao professor, que, por sua vez, seleciona o livro que considera mais adequado, especialmente nas áreas em que possui maior familiaridade. Segundo essa perspectiva, ‘não há necessidade da procura de um livro didático completo’, de fato, caso existisse um único livro ideal, a escolha seria padronizada em todas as instituições. Essa forma de seleção pode afetar a grade curricular ao longo de três a quatro anos letivos, prejudicando o desempenho dos estudantes. Quando os órgãos público federais repassam sua autonomia educacional para os órgãos municipais, estes assumem a responsabilidade⁵ pela defasagem escolar, pela evasão e pelos diferentes níveis de desempenho intelectual nas escolas sob sua jurisdição.

Programas educacionais distribuídos pelos computadores, seguindo o modelo de instrução programada, CAI5, teve grande desenvolvimento a partir dos anos 60, e exemplificam a abordagem educacional tecnicista, privilegiando a transmissão da informação pela máquina, que, por meio desses CAI, poderia substituir o papel do professor, uma vez que objetivavam a conversão dos conteúdos das aulas em programas de aprendizagem por meio de computadores. Ensaaiou-se nesta época a produção de livros didáticos projetados nos princípios da Instrução Programada. Sem êxito de escala nem de eficácia comprovada. (VALENTE; FREIRE; ARANTES, 2018, p. 126-127)

⁵ Responsabilidade, não restrita somente aos livros, mas com um papel de destaque na influência sobre estes fatores.

Os livros didáticos têm introduzido a integração de tecnologias no ensino, [JÚNIOR \(2022\)](#) por exemplo utiliza o *GeoGebra*, através de links nas notas de rodapé que possuem função de auxiliar a visualização e mostrar exemplos a partir da definição de teoremas sobre Geometria. Contudo, o livro não oferece instruções prévias sobre o manuseio da ferramenta, o que pode ocasionar dificuldades no seu uso.

2.3 A legitimidade e importância da pesquisa

Discutir a importância significa reconhecer o valor que algo possui perante a sociedade, para o conhecimento ou para a formação pessoal e profissional. Identificar o porquê de estudar determinado tema ou desenvolver certa prática é fundamental para que se compreenda seu papel na construção do saber e no desenvolvimento de competências essenciais.

A Geometria constitui um ramo essencial da Matemática, responsável pelo estudo das formas, tamanhos, posições e propriedades do espaço. Ela desenvolve o raciocínio lógico, a percepção espacial e habilidades de visualização, essenciais não apenas para a Matemática, mas para áreas diversas como engenharia, artes, arquitetura e design. Ademais, a Geometria contribui para a compreensão do mundo físico e para o desenvolvimento do pensamento crítico e “considera-se importante que o aluno consiga perceber os processos que levam ao estabelecimento das fórmulas” ([BRASIL, 2006](#) apud [SILVA; NOGUTI, 2025](#), p. 13).

A Geometria é fundamental para a formação de cidadãos capazes de interpretar e interagir com o espaço ao seu redor. A aprendizagem geométrica desenvolve capacidades cognitivas importantes, como a abstração, a análise e a resolução de problemas. Inclusive, contribui para o desempenho em avaliações escolares e concursos, onde esse conteúdo é frequentemente cobrado. O ensino de Geometria de forma dinâmica torna o aprendizado mais significativo, despertando o interesse dos alunos assim com defendido por [Lopes, Santiago e Santiago \(2024\)](#), p. 11), “as evidências revelaram que as pesquisas destacam a importância de um ensino contextualizado e dinâmico, enfatizando a necessidade de um olhar mais humano para a Matemática”.

A Geometria possui papel de destaque em diversas avaliações escolares, vestibulares e concursos públicos. Sua presença nesses exames evidencia sua relevância na formação matemática do indivíduo. O conteúdo geométrico costuma exigir não apenas memorização, mas também compreensão conceitual e capacidade de aplicar fórmulas e principalmente propriedades em situações-problema. Dessa forma, dominar geometria é estratégico para um bom desempenho acadêmico e para diversas carreiras que exigem pensamento lógico e espacial.

A pesquisa é a base do avanço científico e educacional, pois permite investigar, analisar e propor soluções para problemas concretos. No campo educacional, pesquisar significa

aprimorar métodos, compreender melhor as dificuldades de aprendizagem e inovar nas práticas pedagógicas. Assim, contribui tanto para o desenvolvimento do docente quanto para a qualidade do ensino oferecido aos estudantes.

É preciso relacionar o trabalho do professor com o trabalho do matemático, não excluindo a possibilidade de conciliar essas duas atividades. Porém, é importante lembrar que o tipo de trabalho desenvolvido pelo matemático condiciona uma influência considerável na prática pedagógica. (PAIS, 2011, p. 32)

Em virtude disso, esta pesquisa propõe uma alternativa para enfrentar um dos desafios presentes na formação estudantil, podendo ainda servir de modelo para novas abordagens de temas e conteúdos relevantes. A sequência didática elaborada busca, além de oferecer uma oportunidade dentro da grade escolar para o nivelamento de conteúdos defasados, promover a inserção do desenho geométrico por meio do uso do *software GeoGebra* - um recurso que extrapola os limites do livro didático e contribui para o enriquecimento do currículo dos estudantes.

3 METODOLOGIA

A elaboração da sequência metodológica foi pensada para apoiar o professor em sua atuação junto à turma. Nela, incluem-se construções realizadas pelos alunos com o auxílio do *software GeoGebra*, resoluções de problemas propostos durante a eletiva e momentos de reflexão sobre as atividades desenvolvidas. O professor, no papel de mediador, orienta as construções e estimula os estudantes a elaborarem suas próprias conclusões. Por meio de questionamentos, os alunos são conduzidos à formulação de soluções fundamentadas em argumentos viáveis. Ressalta-se que esta pesquisa tem como objetivo apresentar uma sequência didática a ser implementada no ensino médio, nas aulas da disciplina eletiva.

As aulas são constituídas por atividades e exercícios que instigam o raciocínio dedutivo dos estudantes, nas quais o foco não é a resposta final, mas sim as etapas de construção dessa resposta. Inicialmente, a estruturação será realizada por etapas, de acordo com o nível de conhecimento matemático dos alunos. Nesse momento, será aplicada uma avaliação diagnóstica, com o objetivo de compreender o nível de conhecimento prévio da turma. Este material contém um capítulo dedicado exclusivamente aos conteúdos prévios necessários para o avanço das aulas; nele, o professor regente encontrará orientações destinadas ao enfrentamento de situações que possam surgir em sala.

Conforme o cronograma previsto, os alunos serão, primeiramente, apresentados à ferramenta digital por meio de construções relacionadas aos quadriláteros, ocasião em que serão feitos apontamentos sobre o tema e esclarecidas dúvidas quanto ao uso do *GeoGebra*. Após essa fase, o trabalho prosseguirá em três etapas, compostas por fórmulas, construções, exercícios e discussões que possibilitem um maior avanço da aprendizagem.

Cada aula conta com uma tabela resumo, onde consta, tema, objetivo, conteúdo, habilidades da Base Nacional Comum Curricular (BNCC) para o ensino médio, materiais e duração. A sequência de aulas está disposta de forma resumida no Apêndice [C](#), na Tabela [10](#).

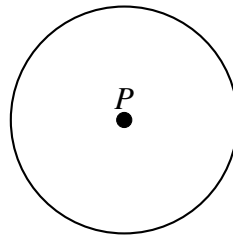
4 CONCEITOS ELEMENTARES

Neste capítulo, são apresentados, de forma sucinta, os conceitos matemáticos essenciais ao desenvolvimento da sequência didática proposta. Recomenda-se que o docente, ao implementar o plano de aulas estruturado, realize antecipadamente uma avaliação diagnóstica, com o objetivo de identificar possíveis lacunas na formação dos alunos e adequar os conteúdos de forma mais eficaz às necessidades da turma.

4.1 Circunferência

Definição 4.1.1 (Circunferência). *Uma circunferência é o conjunto de todos os pontos de um plano, que possuem a mesma distância ‘ r ’ a um ponto fixo pertencente ao mesmo plano, este ponto é denominado ‘centro da circunferência’.*

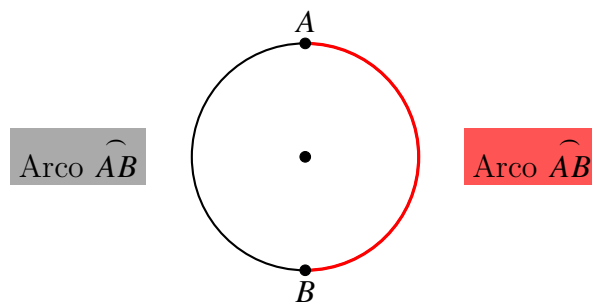
Figura 7 – Circunferência



4.1.1 Arco de circunferência

Definição 4.1.2 (Arco de circunferência). □ *Um arco de circunferência é uma parte da circunferência compreendida entre dois pontos desta circunferência.*

Figura 8 – Circunferência



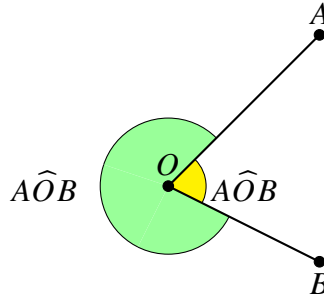
$\widehat{AB}$: Lê-se: Arco A B.

¹ Peña et al. (2019, pág. 276)

4.2 Ângulo

Definição 4.2.1 (Ângulo). ² *Um ângulo é a figura geométrica formada por duas semi-retas que possuem mesma origem.*

Figura 9 – Ângulo $\widehat{AOB}$



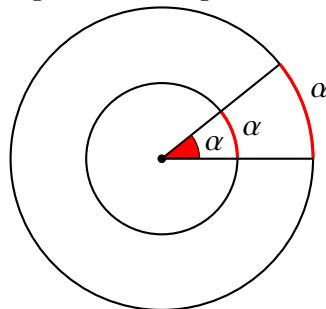
$\widehat{AOB}$: Lê-se: Ângulo $A O B$, ou, ângulo $A O B$ com vértice em O .

Ao tratarmos de um determinado ângulo, como mostrado na Figura 9, referir-nos-emos ao ângulo de menor medida.³

4.2.1 Ângulo central

Definição 4.2.2 (Ângulo central). ⁴ *Um ângulo central é o ângulo cujo vértice é o centro de uma circunferência.*

Figura 10 – Ângulo central



O ângulo central terá a mesma medida do arco da circunferência ao qual corresponde.

² Peña et al. (2019, pág. 33)

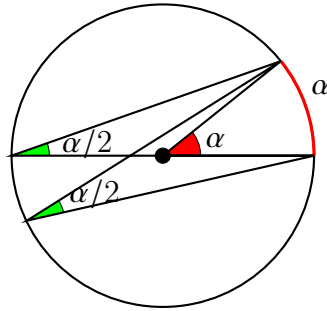
³ Na Figura 9 o ângulo $\widehat{AOB}$, quando não especificado, será o ângulo amarelo.

⁴ Peña et al. (2019, pág. 280)

4.2.2 Ângulo inscrito

Definição 4.2.3 (Ângulo inscrito). ⁵ Um ângulo inscrito é o ângulo cujo vértice está localizado na circunferência e seus lados são cordas.

Figura 11 – Ângulos inscritos



O ângulo inscrito terá metade da medida do arco da circunferência que o inscreve.

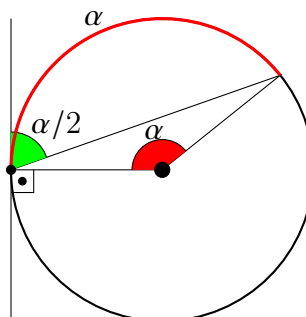
4.2.3 Arco capaz

Definição 4.2.4 (Arco capaz de segmento). ⁶ O arco capaz de um segmento é o lugar geométrico dos pontos que veem um segmento dado, sobre um mesmo ângulo de medida conhecida.

4.2.4 Ângulo de segmento

Definição 4.2.5 (Ângulo de segmento ou ângulo semi-inscrito). ⁷ Um ângulo de segmento é o ângulo cujo vértice encontra-se na circunferência, e os lados que o formam pertencem a duas retas, em que uma delas é secante e a outra é tangente a esta circunferência.

Figura 12 – Ângulo inscrito



O ângulo de segmento terá metade da medida do ângulo do arco que o forma.

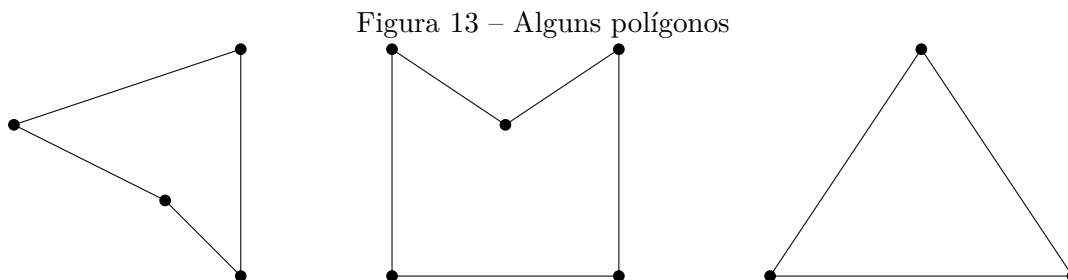
⁵ Peña et al. (2019, pág. 281)

⁶ Peña et al. (2019, pág. 284)

⁷ Peña et al. (2019, pág. 286)

4.3 Polígonos

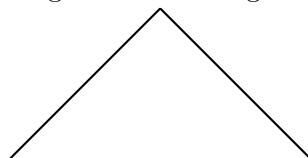
Definição 4.3.1 (Polígonos). *Um polígono é uma linha poligonal fechada, ou seja, uma figura plana formada por segmentos de reta que se interligam por suas extremidades (vértices) do início ao fim.*



4.4 Triângulo

Definição 4.4.1 (Triângulo retilíneo). *Um triângulo é um polígono que possui apenas 3 lados.*

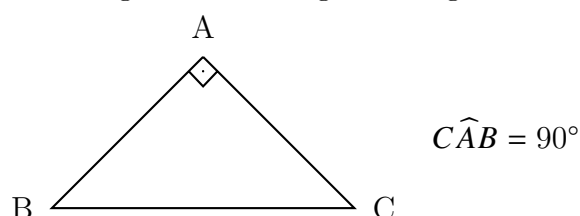
Figura 14 – Triângulo



4.4.1 Triângulo retângulo

Definição 4.4.2 (Triângulo retângulo). *Um triângulo retângulo é o triângulo que possui um dos seus ângulos medindo 90° .*

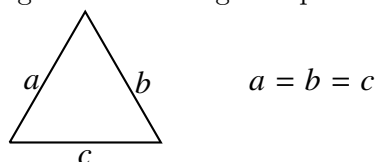
Figura 15 – Triângulo retângulo



4.4.2 Triângulo equilátero

Definição 4.4.3 (Triângulo equilátero). ⁸ *Um triângulo equilátero é o triângulo que possui todos os lados com mesma medida.*

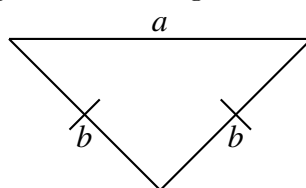
Figura 16 – Triângulo equilátero



4.4.3 Triângulo isósceles

Definição 4.4.4 (Triângulo isósceles). ⁹ *Um triângulo isósceles é o triângulo que possui pelo menos dois lados com mesma medida.*

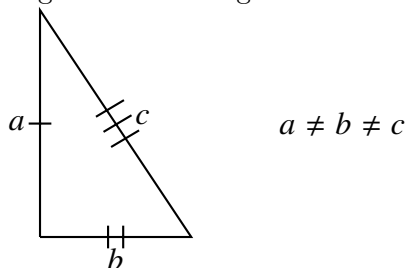
Figura 17 – Triângulo isósceles



4.4.4 Triângulo escaleno

Definição 4.4.5 (Triângulo escaleno). ¹⁰ *Um triângulo escaleno é o triângulo que possui todos os lados com medidas distintas.*

Figura 18 – Triângulo escaleno



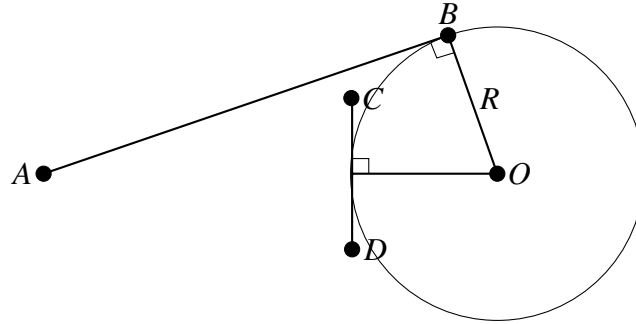
⁸ Peña et al. (2019, pág. 94)

⁹ Peña et al. (2019, pág. 93)

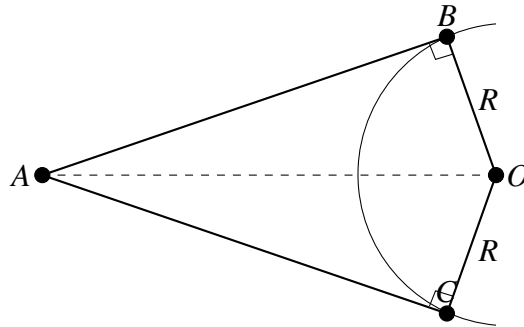
¹⁰ Peña et al. (2019, pág. 93)

4.4.5 Segmento tangente

Definição 4.4.6 (Segmento tangente). *Um segmento é dito tangente quando intersecta a circunferência em um único ponto e é perpendicular ao raio desta neste ponto.*



Observação 4.4.1. *Se dois segmentos distintos que partem do mesmo ponto, possuem extremidades em um ponto de tangência, de um arco ou de uma circunferência, então esses segmentos serão congruentes.*



Demonstração.

Pelo **Teorema de Pitágoras**, temos que os segmentos AB e AC são congruentes. Com efeito, como o triângulo ABO é retângulo em B , a medida de AB é dada por

$$\triangle ABO \rightarrow \overline{AB} = \sqrt{\overline{AO}^2 - R^2}$$

Analogamente, uma vez que o triângulo ACO é retângulo em C , a medida de AC é

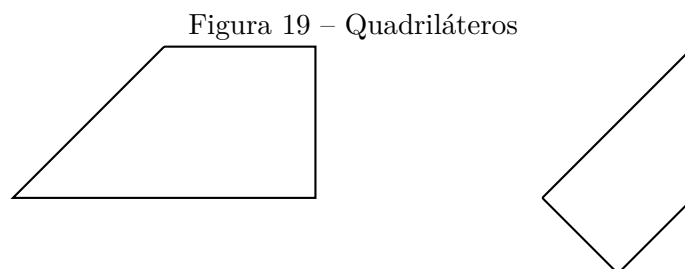
$$\triangle ACO \rightarrow \overline{AC} = \sqrt{\overline{AO}^2 - R^2}$$

Portanto, $\overline{AB} = \overline{AC}$.

■

4.5 Quadrilátero

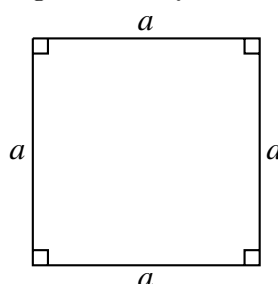
Definição 4.5.1 (Quadrilátero). ¹¹ *Um quadrilátero é um polígono que possui apenas 4 lados.*



4.5.1 Quadrado

Definição 4.5.2 (Quadrado). ¹² *Um quadrado é um quadrilátero cujos lados possuem medidas iguais e seus ângulos internos são iguais a 90° .*

Figura 20 – Quadrado



4.5.2 Retângulo

Definição 4.5.3 (Retângulo). *Um retângulo é um quadrilátero cujos ângulos internos são iguais a 90° .*

4.5.3 Paralelogramo

Definição 4.5.4 (Paralelogramo). *Um paralelogramo é um quadrilátero que possui lados opostos paralelos.*

¹¹ Peña et al. (2019, pág. 232)

¹² Peña et al. (2019, pág. 245)

Figura 21 – Retângulo

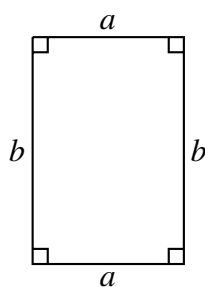
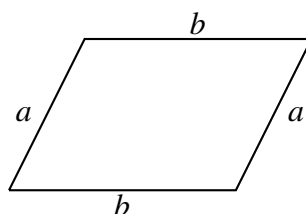


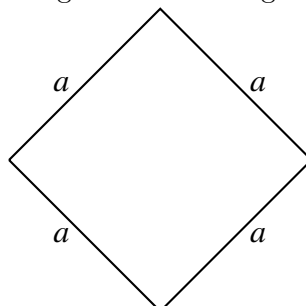
Figura 22 – Paralelogramo



4.5.4 Losango

Definição 4.5.5 (Losango). *Um losango é um quadrilátero que possui todos os lados com mesma medida.*

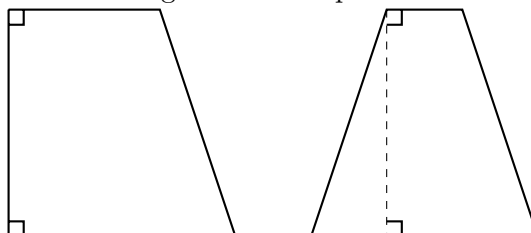
Figura 23 – Losango



4.5.5 Trapézio

Definição 4.5.6 (Trapézio). ¹³ *Um trapézio é um quadrilátero que possui apenas um par de lados opostos paralelos.*

Figura 24 – Trapézios



¹³ Peña et al. (2019, pág. 236)

5 SEQUÊNCIA DIDÁTICA

Neste capítulo é apresentada a proposta de sequência didática para o desenvolvimento do processo de ensino-aprendizagem, destacando as estratégias e os recursos utilizados para garantir a eficácia da abordagem pedagógica proposta. A estrutura didática foi elaborada com foco no aperfeiçoamento do processo de instrução. Em cada etapa, são feitas sugestões voltadas à otimização do tempo e ao esclarecimento de possíveis dúvidas.

5.1 Eletiva de construções geométricas

A elaboração da sequência foi concebida, inicialmente, a partir de uma abordagem generalizada por meio de exemplos construídos pelos próprios alunos em sala de aula com o apoio do *GeoGebra*. O professor deve auxiliar as construções e estimular os estudantes a formularem suas próprias conclusões. A proposta contempla sete aulas, nas quais são previamente definidos os temas, objetivos, conteúdos, habilidades da BNCC, materiais e duração de cada encontro.

5.1.1 Aula 1

Tabela 1 – Aula 1

Tema:	Introdução ao projeto.
Objetivo:	Apresentação do projeto e discussões com situações cotidianas e introdução do tema a ser estudado. (Apresentação da metodologia, materiais e cronograma).
Conteúdo:	Práticas educativas no <i>GeoGebra</i> , circunferência, ângulos, polígonos: tipos e propriedade.
BNCC:	EM13MAT103 e EM13MAT105.
Materiais:	Lousa, marcador de quadro, notebooks/computadores, <i>data-show</i> /televisão.
Duração:	1 hora e 40 minutos.

Fonte: Autoria própria.

A aula inicial terá caráter introdutório, com o objetivo de apresentar o cronograma do curso e realizar uma avaliação diagnóstica da turma. Para isso, será adotada uma metodologia participativa, que combine momentos de diálogo reflexivo entre docente e discentes com atividades práticas. A avaliação prévia poderá ser realizada por meio de um quiz interativo (o *Kahoot*, por exemplo) de perguntas e respostas sobre conceitos básicos de Geometria, permitindo identificar os conhecimentos prévios dos alunos de maneira dinâmica e engajadora. De outro modo, a avaliação inscrita individual poderá ser a melhor opção a depender da turma.

5.1.2 Aula 2

Tabela 2 – Aula 2

Tema:	Introdução aos quadriláteros.
Objetivo:	Apresentar a dinâmica da sequência das aulas e propor a construção de figuras através do <i>GeoGebra</i> refletindo e dialogando durante o processo. Entender e executar a construção de quadriláteros circunscritos em circunferências distintas por meio do <i>GeoGebra</i> .
Conteúdo:	Quadriláteros e suas propriedades, desigualdade triangular, desenho geométrico.
BNCC:	EM13MAT313, EM13MAT314, EM13MAT406 e EM13MAT512.
Materiais:	Lousa, marcador de quadro, notebooks/computadores, <i>data-show</i> /televisão, tabela do Apêndice A.
Duração:	1 hora e 40 minutos.

Fonte: Autoria própria.

Nesta etapa, as construções geométricas são articuladas à resolução de problemas, promovendo uma compreensão mais aprofundada das relações métricas nos quadriláteros. As atividades propostas concentram-se no uso do *GeoGebra* e foram organizadas de modo a possibilitar que os estudantes aprimorem simultaneamente suas habilidades no manuseio da ferramenta digital e na aprendizagem dos fundamentos geométricos por meio de técnicas de construção com régua e compasso. Os procedimentos são apresentados de forma detalhada e explicativa, possibilitando sua reprodução manual com régua e compasso.

No decorrer das construções geométricas, é esperado que os alunos formulem questionamentos pertinentes à execução das atividades. Ao final do desenvolvimento, o material apresentará respostas que orientarão diante dessas dúvidas, bem como sugestões de questionamentos que favoreçam a reflexão crítica e o aprimoramento da sequência didática.

A tabela presente no Apêndice A poderá ser utilizada como instrumento para a investigação de generalizações, considerando as medidas dos lados e diagonais dos quadriláteros. Tal recurso será fundamental para a análise de teoremas e para o desenvolvimento das atividades propostas nas diferentes etapas da sequência — antes, durante e após as construções serão propostos questionamentos que estimulem o debate e o pensamento crítico em sala de aula. Embora o material contenha instruções detalhadas sobre a criação dos polígonos, recomenda-se também a reflexão acerca da fundamentação teórica dos procedimentos adotados, além das construções, as questões propostas visam desenvolver a capacidade lógica, analítica e dedutiva dos estudantes. Ressalta-se que um dos objetivos centrais consiste em aperfeiçoar o domínio conceitual da Geometria como um todo, e não apenas limitar o aprendizado ao estudo dos quadriláteros.

Observação 5.1.1. *Recomende que os alunos preencham a tabela com medidas que considerem adequadas, solicitando, em seguida, que construam os quadriláteros e verifiquem se as medidas propostas de fato originam uma figura convexa.*

Estimule debates e discussões fundamentadas a partir das dúvidas e eventuais equívocos identificados durante a atividade.

Ao tentar construir um quadrilátero $ABCD$ a partir de determinadas medidas de seus lados e diagonais, é fundamental destacar a observância das desigualdades triangulares. Dessa forma, estabelecem-se as seguintes restrições métricas relacionadas às medidas dos segmentos.

$$\begin{array}{l} \overline{AB} + \overline{BC} > \overline{AC} \quad \& \quad \overline{AB} + \overline{AC} > \overline{BC} \quad \& \quad \overline{BC} + \overline{AC} > \overline{AB} \quad \& \\ \overline{AD} + \overline{CD} > \overline{AC} \quad \& \quad \overline{CD} + \overline{AC} > \overline{AD} \quad \& \quad \overline{AC} + \overline{AD} > \overline{CD} \quad \& \\ \overline{BC} + \overline{CD} > \overline{BD} \quad \& \quad \overline{CD} + \overline{BD} > \overline{BC} \quad \& \quad \overline{BD} + \overline{BC} > \overline{CD} \quad \& \\ \overline{AD} + \overline{AB} > \overline{BD} \quad \& \quad \overline{AB} + \overline{BD} > \overline{AD} \quad \& \quad \overline{BD} + \overline{AD} > \overline{AB}. \end{array}$$

Para a construção geométrica de um quadrilátero genérico, conhecendo-se previamente algumas de suas medidas, será seguido o procedimento descrito posteriormente, seguindo como exemplo a construção do quadrilátero $ABCD$ conforme apresentado na Tabela 3.

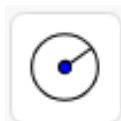
Tabela 3 – Exemplo: Quadrilátero $ABCD$.

SEGMENTOS DOS QUADRILÁTEROS	AB	BC	CD	AD	AC	BD
1º QUADRILÁTERO	2	3	4	5	4	—
2º QUADRILÁTERO						

Fonte: Autoria própria

Passo 1: Trace uma circunferência utilizando a ferramenta *Círculo: Centro & Raio*, definindo o ponto A como centro e adotando raio igual a 2 (correspondente à medida do segmento AB).

Figura 25 – Ícone da ferramenta *Círculo: Centro & Raio*.



Fonte: GeoGebra.

Passo 2: Selecione um ponto Z arbitrário no exterior da circunferência, utilizando a ferramenta *Ponto*, e trace uma reta que conecte os pontos Z e A , com a ferramenta *Reta*. Em seguida, utilize a ferramenta *Interseção de Dois Objetos*, para determinar o ponto B , que pertence simultaneamente à reta e a circunferência, conforme ilustrado na Figura 29.

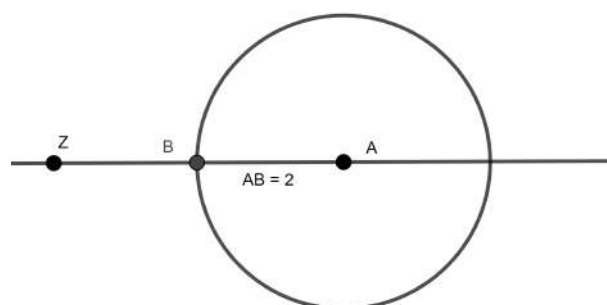
Figura 26 – Ícone da ferramenta *Ponto*.



Fonte: GeoGebra.

Figura 27 – Ícone da ferramenta *Reta*.Fonte: *GeoGebra*.Figura 28 – Ícone da ferramenta *Interseção de Dois Objetos*Fonte: *GeoGebra*.

Figura 29 – Construção após o passo 2.

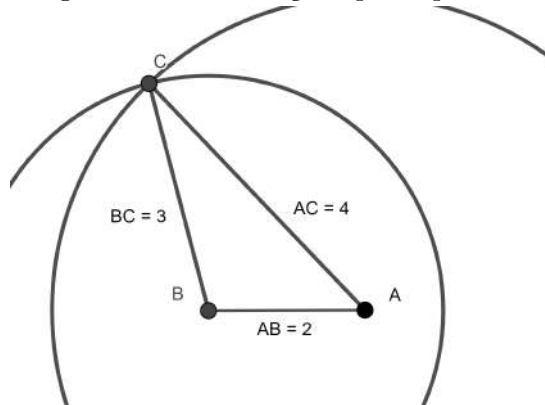


Fonte: Autoria própria.

Passo 3: Construa duas circunferências, sendo a primeira com centro no ponto A e raio de medida igual a 4 (correspondente à medida do segmento AC), e a segunda com centro B de raio de medida igual a 3 (correspondente à medida do segmento BC).

Figura 30 – Ícone da ferramenta *Segmento*.Fonte: *GeoGebra*.

Figura 31 – Construção após o passo 4.



Fonte: Autoria própria.

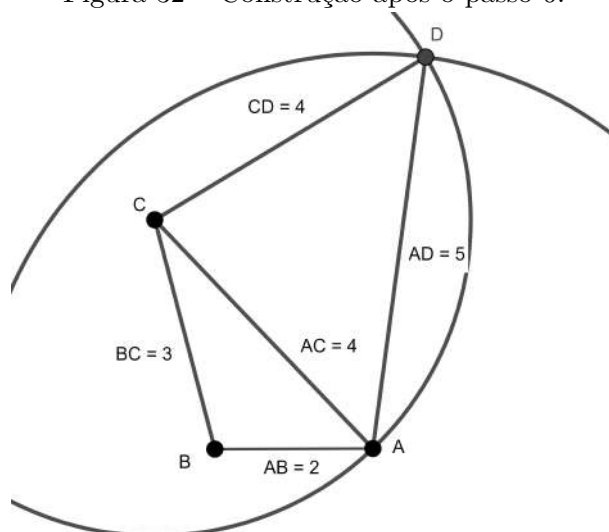
Passo 4: Em seguida, identifique e trace os pontos de interseção entre as circunferências.

Denomine um desses pontos como C e construa os segmentos AC e BC , com a ferramenta *Segmento*, conforme ilustrado na Figura 30.

Passo 5: Posteriormente, construa mais duas circunferências, sendo a primeira com centro no ponto A e raio de medida igual a 5 (correspondente à medida do segmento AD), e a segunda com centro no ponto C e raio igual a 4 (referente à medida do segmento CD).

Passo 6: Localize e destaque os pontos de interseção dessas circunferências. Denomine um desses pontos como D e construa os segmentos AD e CD , conforme apresentado na Figura 32.

Figura 32 – Construção após o passo 6.



Fonte: Autoria própria.

Por fim, o quadrilátero $ABCD$ é construído com base nos dados apresentados na Tabela 3, e, com o auxílio do *GeoGebra*, é possível determinar a medida do segmento $\overline{BD}$, utilizando a ferramenta *Distância, Comprimento ou Perímetro*, conforme representado na Figura 34.

Figura 33 – Ícone da ferramenta *Distância, Comprimento ou Perímetro*

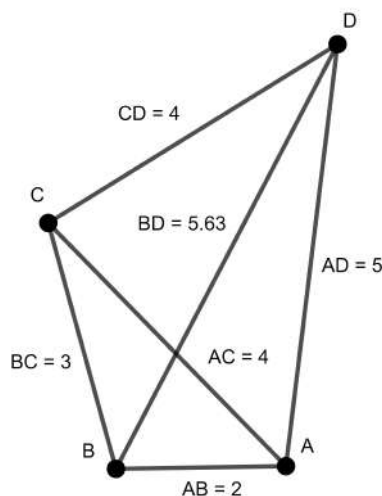


Fonte: *GeoGebra*.

Abrindo uma nova discussão correlata ao tema da pesquisa: será que **todo** quadrilátero obtido por esse procedimento é circunscritível ou inscritível?

Para responder a essa questão, propõe-se, inicialmente, a indagação seguinte: *o quadrilátero construído na Figura 34, é inscritível?*

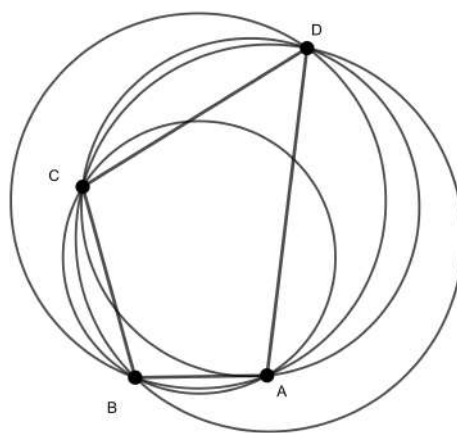
Para tanto, emprega-se a ferramenta *Círculo definido por Três Pontos*, e iremos construir todas as possibilidades, construindo todas as possibilidades: isto é, de quantas maneiras é possível traçar uma circunferência a partir da escolha de três pontos, dentre um conjunto de quatro pontos distintos.

Figura 34 – Construção finalizada do quadrilátero $ABCD$.

Fonte: Autoria própria.

Figura 35 – Ícone da ferramenta *Círculo definido por Três Pontos*

Fonte: *GeoGebra*.

Figura 36 – Circunferências a serem feitas no quadrilátero $ABCD$.

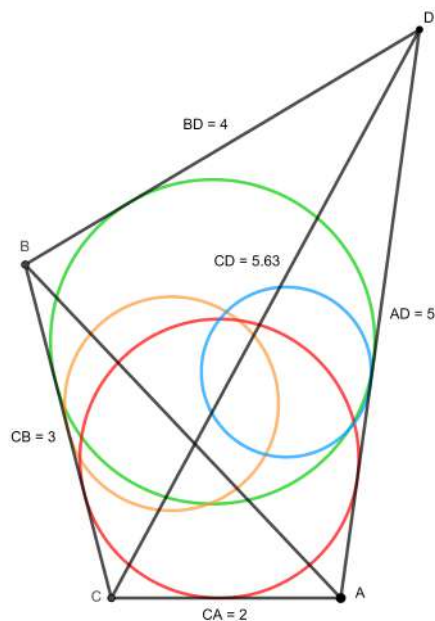
Fonte: Autoria própria.

Observemos assim que, o quadrilátero não é inscrito, não podemos inscrevê-lo a uma circunferência, pois seus quatro vértices não pertencem a uma mesma circunferência. *Será então que o quadrilátero é circunscritível?*

Para verificar a possibilidade de circunscrição, utiliza-se a ferramenta *Bissetriz*, traçando-se todas as bissetrizes correspondentes aos ângulos formados em cada vértice do quadrilátero. Em seguida, identificam-se os pontos de interseção entre essas bissetrizes localizados no interior do polígono. Por fim, traçam-se as circunferências cujos centros coincidem com esses pontos de interseção, situadas no interior do quadrilátero $ABCD$.

Observemos, portanto, que o quadrilátero não é circunscritível, pois não é possível circunscrevê-lo a uma circunferência, já que seus quatro lados não tangenciam o mesmo círculo.

Figura 37 – Possíveis circunferências circunscritas no quadrilátero.

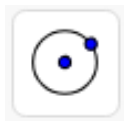


Fonte: Autoria própria.

Diante disso, surge um novo questionamento: será que o quadrilátero é *ex-inscritível*? Para investigar essa possibilidade, serão utilizadas as seguintes ferramentas do *GeoGebra*:

- *Reta*, para traçar os prolongamentos dos lados do quadrilátero;
- *Bissetriz*, para determinar o possível centro da circunferência;
- *Reta Perpendicular*, para traçar o raio que parte do centro até o prolongamento de um dos lados;
- *Interseção de dois objetos*, para identificar os pontos de tangência entre a circunferência e os prolongamentos dos lados.

Por fim, constrói-se as possíveis circunferências (utilizando a ferramenta *Círculo dados Centro e Um dos seus Pontos*) cujos centros coincidem com os pontos de interseções entre as bissetrizes, e cujos pontos de tangência pertencem aos prolongamentos dos lados *AB*, *BC*, *CD* e *AD*.¹

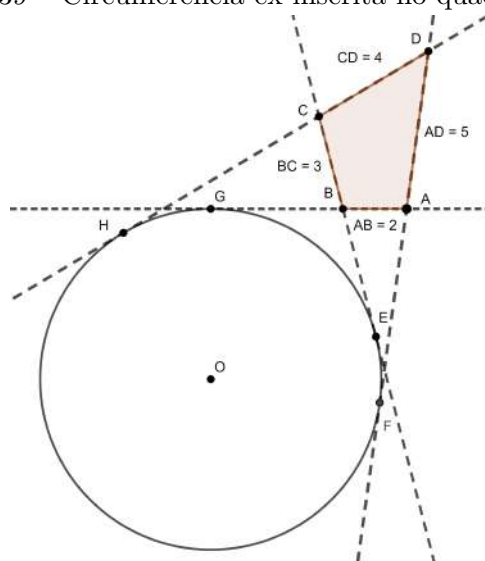
Figura 38 – Ícone da ferramenta *Círculo dados Centro e Um dos seus Pontos*.

Fonte: *GeoGebra*.

Observa-se que o quadrilátero do exemplo inicial é ex-inscrito a uma circunferência, mas porquê será? O que há de particular nesse quadrilátero que permite a sua ex-inscrição,

¹ Informações adicionais acerca do procedimento de desenho podem ser consultadas na Etapa 5.4

Figura 39 – Circunferência ex-inscrita no quadrilátero.



Fonte: Autoria própria.

mas impede que ele seja inscritível ou circunscritível? Como se pode construir um quadrilátero inscritível?² De que modo é possível construir um quadrilátero circunscritível?³ E, por fim, como se constrói um quadrilátero ex-inscritível?⁴

Essas questões, anteriormente expressas, serão analisadas e respondidas ao longo do trabalho, com base em construções geométricas e procedimentos matemáticos. Ademais, o material inclui atividades práticas, exercícios aplicados, construções detalhadas passo a passo desses polígonos e uma variedade de exemplos ilustrativos.

² Etapa 1

³ Etapa 2

⁴ Etapa 3

5.2 Etapa 1 - Construções com quadriláteros circunscritíveis

5.2.1 Aula 3

Tabela 4 – Aula 3

Tema:	Construções geométricas envolvendo quadriláteros circunscritíveis.
Objetivo:	Compreender e realizar a construção de quadriláteros circunscritos a circunferências distintas, utilizando o <i>GeoGebra</i> como ferramenta de apoio.
Conteúdo:	Conceito e propriedades dos quadriláteros circunscritos, princípios do desenho geométrico e aplicação de bissetrizes.
BNCC:	EM13MAT315, EM13MAT406 e EM13MAT512.
Materiais:	Lousa, marcador de quadro, notebooks/computadores, <i>data-show</i> /televisão.
Duração:	50 minutos/1 hora e 40 minutos.

Fonte: Autoria própria.

Definição 5.2.1. *Diz-se que um quadrilátero é circunscritível quando seus quatro lados são tangentes a uma mesma circunferência situada em seu interior.*

Ao abordarmos os conceitos de inscrição e circunscrição de figuras em circunferências, torna-se evidente a busca por procedimentos metódicos e sistemáticos que facilitem a resolução de problemas geométricos. Quando nos referimos a tais processos de construção geométrica, é natural associá-los aos pontos notáveis **do triângulo** - o incentro e o circuncentro -, que desempenham papel fundamental nas relações métricas dessa figura.

Segundo Neto (2017, p. 142) “[a]s três bissetrizes internas de um triângulo intersectam-se em um ponto *I* chamado incentro do triângulo. O incentro é o centro do círculo inscrito no triângulo.”. É importante enfatizar a relação entre o incentro e o triângulo, uma vez que tal ponto é característico e exclusivo⁵ dessa figura, mas seu conceito será utilizado como base teórica e metodológica para as construções propostas nas aulas que sucedem.

A seguir, apresenta-se um procedimento para a construção geométrica desse tipo de polígono.

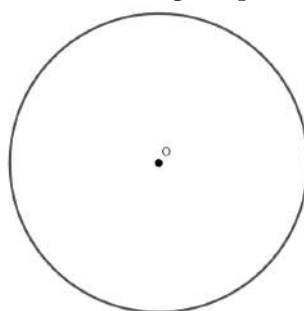
Passo 1: Construa uma circunferência com raio arbitrário, utilizando a ferramenta *Círculo: Centro e Raio*.

Passo 2: Trace duas retas secantes à circunferência utilizando a ferramenta *Reta*, de modo que apresentem pontos de interseção distintos sobre a circunferência.

Passo 3: Destaque os pontos de interseção das retas com a circunferência, utilizando a ferramenta *Intersecção de dois objetos*.

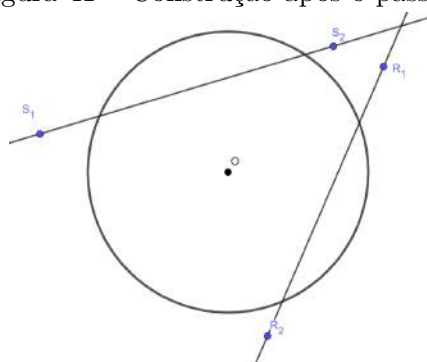
⁵ Pela forma que é apresentado nos livros didáticos.

Figura 40 – Construção após o passo 1



Fonte: Autoria própria.

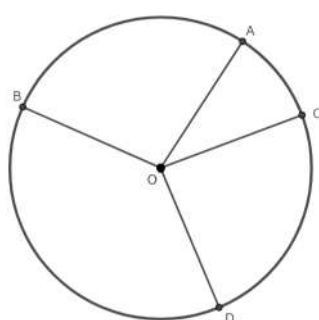
Figura 41 – Construção após o passo 2



Fonte: Autoria própria.

Passo 4: Trace os quatros segmentos utilizando a ferramenta *segmento* de modo que uma das extremidades corresponda a cada ponto de interseção e a outra ao centro da circunferência.

Figura 42 – Construção após o passo 4



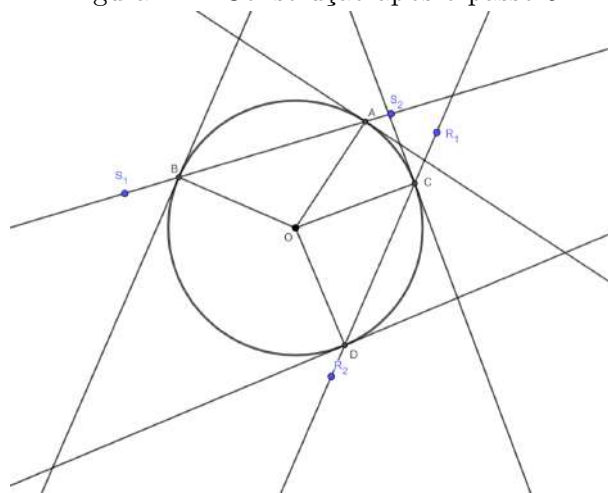
Fonte: Autoria própria.

Passo 5: Trace as retas tangentes à circunferência, que passam pelos pontos encontrados no passo anterior. Para traçar a reta tangente, empregue as ferramentas *Reta perpendicular* e *Segmento*, selecionando o segmento cuja extremidade liga o centro da circunferência ao ponto de interseção.

Figura 43 – Ícone da ferramenta: *Reta Perpendicular*

Fonte: *GeoGebra*.

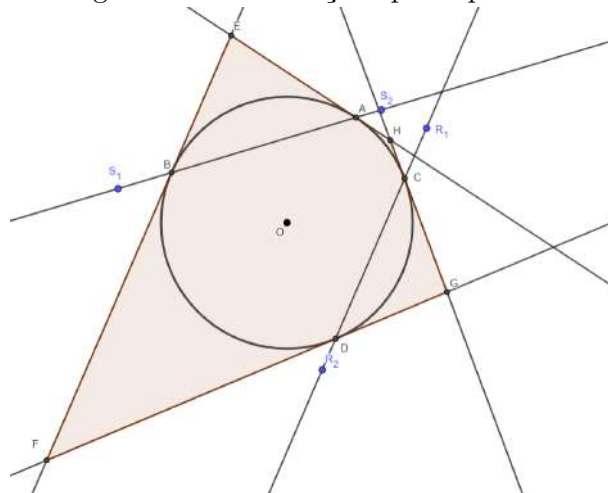
Figura 44 – Construção após o passo 5



Fonte: Autoria própria.

Passo 6: Identifique o quadrilátero circunscrito à circunferência, cujos vértices correspondem a algumas das interseções formadas entre as retas traçadas no passo anterior.

Figura 45 – Construção após o passo 6



Fonte: Autoria própria.

Assim, obtemos um quadrilátero circunscrito à circunferência, sendo possível construir infinitas variações a partir do mesmo procedimento geométrico. No entanto, surge o questionamento: é possível determinar, de forma analítica, se um quadrilátero qualquer admite uma circunferência circunscrita a ele?

5.2.2 Aula 4

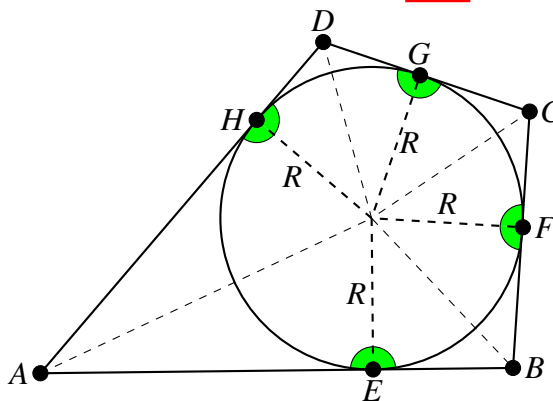
Tabela 5 – Aula 4

Tema:	Indução e apresentação de fórmulas para quadriláteros circunscritíveis.
Objetivo:	Compreender e aplicar fórmulas e métodos que possibilitem a resolução de problemas envolvendo quadriláteros circunscritos a circunferências.
Conteúdo:	Quadriláteros circunscritos a circunferências, desenho geométrico, Teorema de Pitot.
BNCC:	EM13MAT313, EM13MAT314, EM13MAT315, EM13MAT406 e EM13MAT512.
Materiais:	Lousa, marcador de quadro, notebooks/computadores, <i>datashow</i> , lista de exercício.
Duração:	1 hora e 40 minutos.

Fonte: Autoria própria.

Proposição 5.2.1. *Se o quadrilátero é circunscritível, então o centro da circunferência inscrita neste, é o ponto de interseção entre as bissetrizes de seus vértices.*

Figura 46 – Proposição 5.2.1



Fonte: Autoria própria.

Para verificarmos se o centro da circunferência inscrita em um quadrilátero coincide com o ponto de interseção das bissetrizes desse polígono — segmentos que ligam cada vértice ao centro da circunferência. Caso essas bissetrizes se intersectem em um único ponto, conclui-se que o quadrilátero possui uma circunferência inscrita, tendo como centro esse ponto de interseção, caracterizando, assim, um caso especial de incentro. A demonstração fundamenta-se em relações de semelhança entre triângulos retângulos ou, de forma equivalente, na congruência entre triângulos.⁶

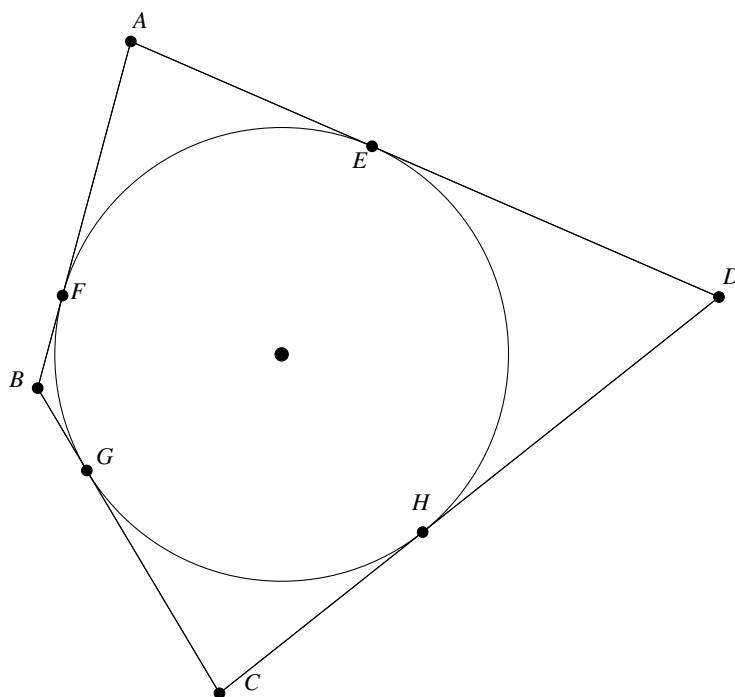
⁶ Recomenda-se rever a Definição 4.4.5

5.2.3 Teorema de Pitot

Teorema 5.2.2 (Teorema de Pitot). *Em todo quadrilátero circunscrito a uma circunferência, a soma de seus lados opostos são iguais a soma dos outros dois lados opostos.*⁷

$$\overline{AB} + \overline{CD} = \overline{AC} + \overline{BD} \quad (\text{Teorema de Pitot})$$

Figura 47 – Quadrilátero circunscrito.



Fonte: Autoria própria.

Demonstração. Consideremos o quadrilátero circunscrito ilustrado na Figura 47, e seus respectivos pontos de tangência.

Obtemos assim as seguintes relações por consequência da divisão dos segmentos $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$:

$$\overline{AB} + \overline{CD} = (\overline{AF} + \overline{BF}) + (\overline{HC} + \overline{DH})$$

Além disso, por se tratar de segmentos tangentes congruentes⁸, temos as seguintes proporções:

$$\begin{cases} \overline{AF} = \overline{AE} \\ \overline{DH} = \overline{DE} \\ \overline{BF} = \overline{BG} \\ \overline{CH} = \overline{CG} \end{cases}$$

⁷ Na Figura 47, os pontos E, F, G e H são pontos de tangência da circunferência de raio O com os lados do quadrilátero $ABCD$.

⁸ Capítulo 4.4.1

Substituindo esses segmentos e operando-os, obtemos:

$$\begin{aligned}\overline{AB} + \overline{CD} &= (\overline{AF} + \overline{BF}) + (\overline{CH} + \overline{DH}) \\ \overline{AB} + \overline{CD} &= (\overline{AE} + \overline{BG}) + (\overline{CG} + \overline{DE}) \\ \overline{AB} + \overline{CD} &= \overline{AE} + \overline{BG} + \overline{CG} + \overline{DE} \\ \overline{AB} + \overline{CD} &= (\overline{AE} + \overline{DE}) + (\overline{BG} + \overline{CG}) \\ \overline{AB} + \overline{CD} &= \overline{AD} + \overline{BC}\end{aligned}$$

Dessa forma, em todo quadrilátero circunscrito, a soma das medidas de dois lados opostos é igual à soma das medidas dos outros dois lados, confirmando, assim, a validade do Teorema de Pitot.

$$\overline{AB} + \overline{CD} = \overline{AD} + \overline{BC}$$

■

Para exercitar⁹

1. A medida do raio de uma circunferência inscrita em um trapézio isósceles de bases 16 *u.m.* e 36 *u.m.* é um número:
 - a) Primo;
 - b) Par;
 - c) Irracional;
 - d) Múltiplo de 5;
 - e) Múltiplo de 9;

Resolução **B.0.1**

2. Determine a medida da base maior de um trapézio retângulo, que possui uma circunferência inscrita de raio igual a 5 *cm*, base menor igual a 4 *cm* e um dos seus lados, que não é a base maior, igual 16 *cm*.

Resolução **B.0.2**

⁹ Neste momento, será concedido um período de 30 minutos para que os estudantes resolvam as duas questões propostas, aplicando os conceitos abordados durante a aula.

5.3 Etapa 2 - Construções com quadriláteros inscritíveis

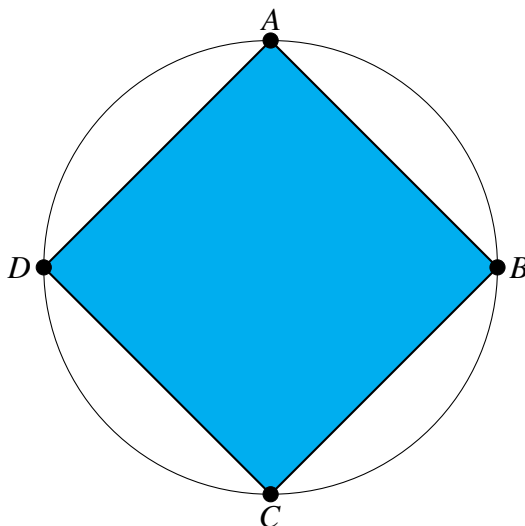
5.3.1 Aula 5

Tabela 6 – Aula 5

Tema:	Construções com quadriláteros inscritíveis.
Objetivo:	Compreender e realizar a construção de quadriláteros inscritos em circunferências distintas utilizando o <i>GeoGebra</i> , bem como resolver problemas relacionados às construções geométricas e à elaboração de fórmulas aritméticas para dedução de medidas.
Conteúdo:	Quadriláteros inscritos em circunferências, desenho geométrico, bissetriz.
BNCC:	EM13MAT313, EM13MAT314, EM13MAT315.
Materiais:	Lousa, marcador de quadro, notebooks/computadores, <i>data-show</i> /televisão.
Duração:	1 hora e 40 minutos.

Fonte: Autoria própria.

Definição 5.3.1. *Um quadrilátero é inscritível, quando todos os seus quatro vértices pertencem a uma mesma circunferência que o circunscreve.*



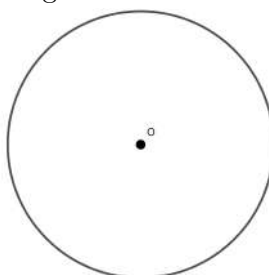
Vejamos uma forma de construir tal polígono.

Passo 1: Construa uma circunferência com raio de valor arbitrário;

Passo 2: Trace duas retas secantes à circunferência, garantindo que os pontos de interseção sejam distintos;

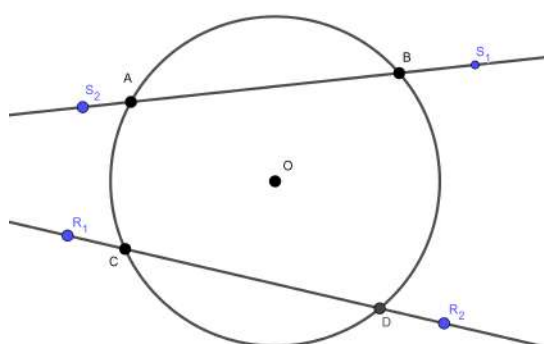
Passo 3: Construa o polígono cujos vértices correspondem aos pontos de interseção entre as retas e a circunferência, observando a disposição simétrica das interseções;

Figura 48 – Passo 1



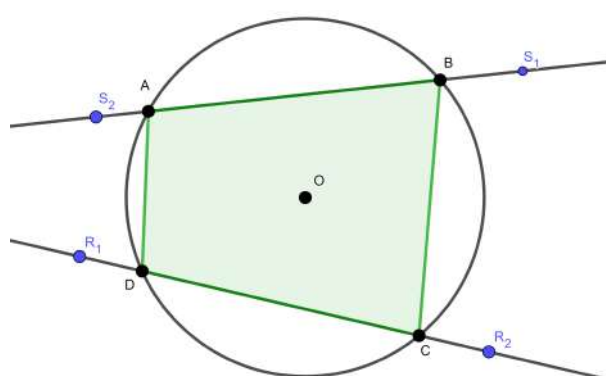
Fonte: Autoria própria.

Figura 49 – Passo 2



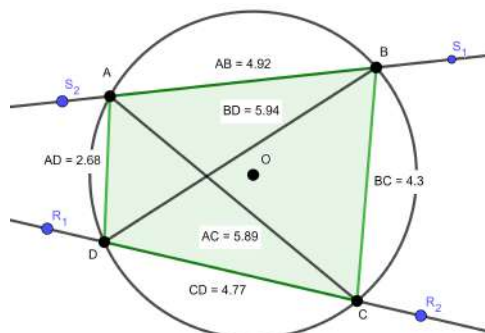
Fonte: Autoria própria.

Figura 50 – Passo 3



Fonte: Autoria própria.

Figura 51 – Passo 4



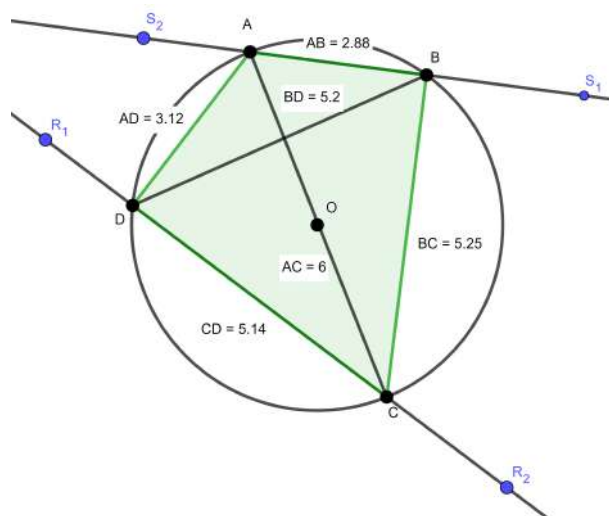
Passo 4: Una os vértices não adjacentes para formar as diagonais do polígono e, utilizando a ferramenta *Distância*, *Comprimento* ou *Perímetro*, determine as medidas correspondentes dos lados e diagonais, registrando os valores obtidos para posterior análise comparativa.

Orientações ao professor: Incentive os estudantes por meio de perguntas instigantes e provocações pedagógicas, como: “Tente igualar as medidas em diferentes operações” ou “Utilize a calculadora, científica ou convencional”. Estimule a investigação: há alguma relação que pode ser observada entre os comprimentos obtidos?

Os alunos devem sentir-se à vontade para explorar e descobrir padrões, utilizando a Tabela **A** como suporte para suas análises.

Passo 5: Modifique as posições das retas e continue a investigação, registrando quaisquer relações ou regularidades observadas.

Figura 52 – Possível visualização do passo 5



Fonte: Autoria própria.

Observação 5.3.1. Não é garantido que ao término da dinâmica, os alunos atinjam necessariamente o Teorema de Ptolomeu. Podem, igualmente, formular outras hipóteses ou descobrir relações matemáticas associadas a Packein, Chaddu ou Pitágoras, ou até mesmo não alcançar uma conclusão definitiva. É recomendável que o professor analise com os discentes as soluções e estratégias adotadas¹⁰, incentivando a troca de informações entre colegas e a reflexão crítica sobre a aplicabilidade de suas teorias em diferentes figuras geométricas.

Por meio da construção geométrica de figuras e da reflexão sobre essas construções, a atividade visa praticar habilidades de desenho geométrico, bem como o aprimoramento de habilidades cognitivas e concepções geométricas.

Recomenda-se que as figuras sejam construídas seguindo instruções detalhadas e precisas, com a determinação das medidas a serem utilizadas. Caso necessário, os alunos devem retornar à análise do Passo **5.1.2** para orientação adicional.

¹⁰ A utilização da calculadora permite a exploração de múltiplas abordagens na Matemática. O uso adequado do dispositivo eletrônico (D.E.), aliado à compreensão dos conceitos matemáticos envolvidos, permite a análise de erros percentuais e a obtenção de resultados distintos para uma mesma expressão. Esse processo propicia debates enriquecedores e promove uma reflexão crítica mais aprofundada em sala de aula.

Sugestões de questionamentos para os estudantes:

1. *Calcule a diagonal de um quadrilátero cujos lados medem 3, 4, 5 e 6, considerando que a outra diagonal possui comprimento igual a 5.*
2. *Construa geometricamente esse quadrilátero.*
3. *Tente inscrever este quadrilátero em uma circunferência, verificando a possibilidade de inscrição.*
4. *Quais conclusões podem ser extraídas durante esse processo de construção e análise?*
5. *Quais estratégias foram empregadas na construção da última figura? Justifique o raciocínio adotado.*

O professor deve estimular a capacidade dos estudantes de contornar situações de forma criativa e dialogada, promovendo a reflexão crítica e a argumentação Matemática.

Observação 5.3.2. *Critério de inscrição: Um quadrilátero será inscritível se, e somente se, a soma de seus ângulos opostos for igual a 180° .*

Exploração avançada do desenho geométrico

Atividade 1 Construa um quadrilátero arbitrário inscrito em uma circunferência, observando a posição dos vértices e a precisão do traçado.

Atividade 2 Construa um quadrilátero inscrito em uma circunferência, de modo que um par de lados opostos meça 6 unidades, garantindo a condição de inscritibilidade.

Atividade 3 Construa um quadrilátero inscritível cujos lados opostos medem 5 e 7 unidades, analisando a viabilidade geométrica da construção.

Debate: Durante a execução das atividades, observe se é possível identificar alguma relação entre os lados e diagonais dos quadriláteros. Caso exista, descreva-a; caso não, explique os motivos. Avalie também se foi possível realizar as construções de forma autônoma ou se houve necessidade de orientação adicional.

5.3.2 Aula 6

Tabela 7 – Aula 6

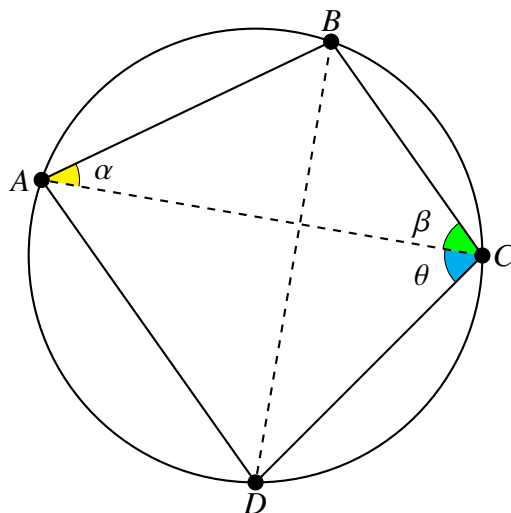
Tema:	Indução e apresentação de fórmulas para quadriláteros inscritíveis.
Objetivo:	Compreender e aplicar fórmulas e métodos que possibilitem a resolução de problemas envolvendo quadriláteros inscritos em circunferências.
Conteúdo:	Quadriláteros inscritos em circunferências, Teorema de Ptolomeu e algumas aplicações, Corolários.
BNCC:	EM13MAT105, EM13MAT308, EM13MAT313, EM13MAT314, EM13MAT315 e EM13MAT512.
Materiais:	Lousa, marcador de quadro, <i>datashow</i> /televisão, listas de exercícios.
Duração:	1 hora e 40 minutos.

Fonte: Autoria própria.

5.3.3 Teorema de Ptolomeu

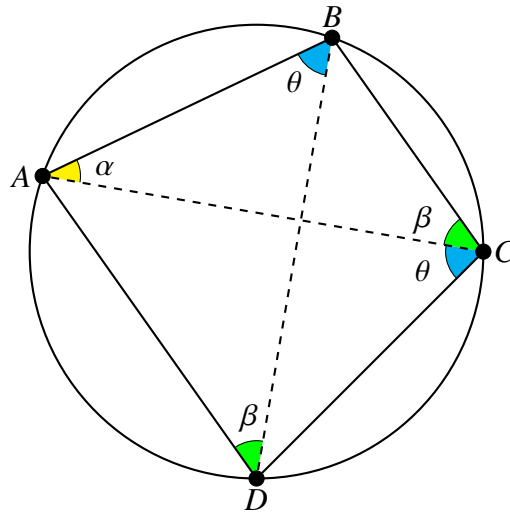
Teorema 5.3.1 (Teorema de Ptolomeu). *Se um quadrilátero convexo $ABCD$ está inscrito numa circunferência, então o produto das suas diagonais é igual à soma dos produtos dos pares de lados opostos.*

$$\overline{AC} \cdot \overline{BD} = \overline{AB} \cdot \overline{CD} + \overline{BC} \cdot \overline{AD} \quad (\text{Teorema de Ptolomeu})$$

Figura 53 – Quadrilátero $ABCD$ inscrito em uma circunferência

Fonte: Autoria própria.

Demonstração. Consideremos um quadrilátero convexo $ABCD$ inscrito em uma circunferência (Figura 53). Admitiremos a seguinte nomenclatura para os ângulos: α, β e θ .

Figura 54 – Quadrilátero $ABCD$ inscrito em uma circunferência

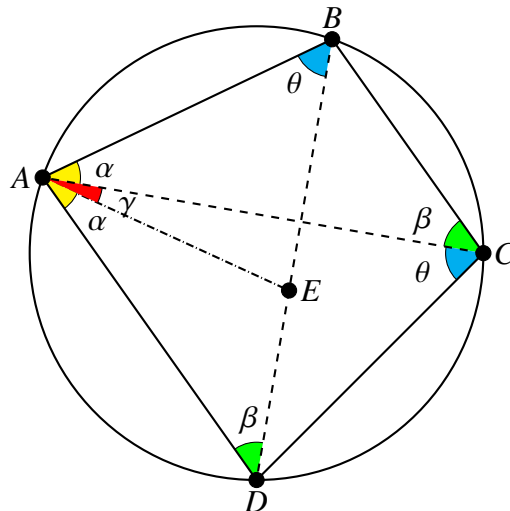
Fonte: Autoria própria.

Observe que β é um ângulo inscrito ao arco AB , enquanto θ é um ângulo inscrito ao arco AD . Note que, $\widehat{ADB}$ também é um ângulo inscrito ao arco AB , assim como $\widehat{ABD}$ se inscreve no arco AD . Consequentemente:

$$\widehat{ACB} = \widehat{ADB} = \beta$$

$$\widehat{ACD} = \widehat{ABD} = \theta$$

Consideremos $\widehat{BAC} < \widehat{CAD}$. Trace o segmento $\overline{AE}$ (sendo E um ponto pertencente ao segmento BD) de modo que o ângulo $\widehat{DAE}$ seja igual a $\widehat{BAC}$, e chamemos de γ o ângulo $\widehat{CAE}$, conforme mostrado na Figura 55.

Figura 55 – Quadrilátero $ABCD$ inscrito em uma circunferência

Fonte: Autoria própria.

Desta forma, é possível identificar as seguintes semelhanças entre triângulos:

1. $(\triangle ABC \sim \triangle AED)$ São semelhantes da seguinte forma:

$$\alpha = \widehat{BAC} = \widehat{EAD}, \quad \beta = \widehat{ACB} = \widehat{ADE}, \quad \widehat{ABC} = \widehat{AED}.$$

2. $(\triangle ABE \sim \triangle ACD)$ São semelhantes da seguinte forma:

$$\alpha + \gamma = \widehat{BAE} = \widehat{CAD}, \quad \theta = \widehat{ABE} = \widehat{ACD}, \quad \widehat{BEA} = \widehat{CDA}.$$

Consequentemente, podem ser estabelecidas as seguintes relações matemáticas:

$$\triangle ABC \sim \triangle AED \Rightarrow \frac{\overline{AC}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{AD}}{\overline{ED}} \rightarrow \overline{AC} \cdot \overline{ED} = \overline{BC} \cdot \overline{AD} \quad (5.1)$$

$$\triangle ABE \sim \triangle ACD \Rightarrow \frac{\overline{AB}}{\overline{BE}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{CD}} \rightarrow \overline{AC} \cdot \overline{BE} = \overline{AB} \cdot \overline{CD} \quad (5.2)$$

Somando as equações 5.1 e 5.2, obtemos:

$$\begin{aligned} \overline{AC} \cdot \overline{BE} + \overline{AC} \cdot \overline{ED} &= \overline{AB} \cdot \overline{CD} + \overline{BC} \cdot \overline{AD} \\ \overline{AC} \cdot (\overline{BE} + \overline{ED}) &= \overline{AB} \cdot \overline{CD} + \overline{BC} \cdot \overline{AD} \\ \overline{AC} \cdot \overline{BD} &= \overline{AB} \cdot \overline{CD} + \overline{BC} \cdot \overline{AD} \end{aligned} \quad (5.3)$$

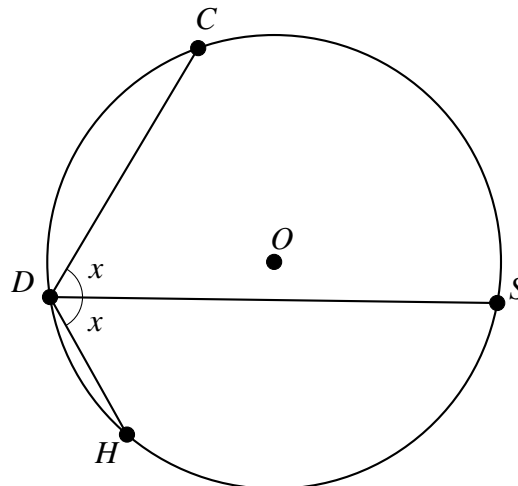
Portanto, sob a suposição de que $\widehat{BAC} < \widehat{CAD}$ - sendo a demonstração igualmente válida para os casos $\widehat{BAC} > \widehat{CAD}$ e $\widehat{BAC} = \widehat{CAD}$ - concluímos que o produto das suas diagonais é igual à soma dos produtos dos pares de lados opostos, em conformidade com o Teorema de Ptolomeu:

$$\overline{AC} \cdot \overline{BD} = \overline{AB} \cdot \overline{CD} + \overline{BC} \cdot \overline{AD}$$

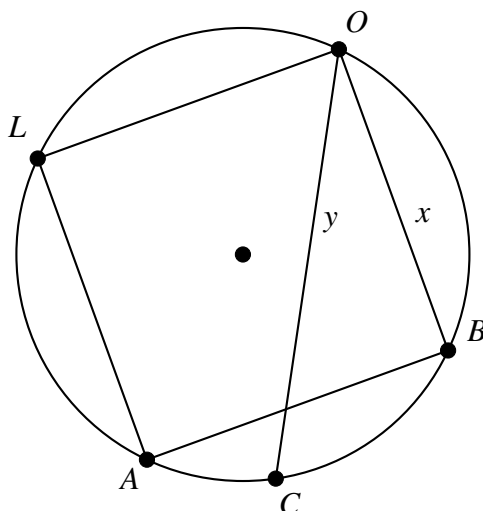
■

Para exercitar

1. (**Questão repensada** - Colégio Naval) Dados quatro pontos distintos C, D, H e S pertencentes a uma circunferência de raio r e centro O , tais que $\overline{DS} = \overline{CD} + \overline{DH}$. Sabe-se que $\widehat{CDS} = \widehat{HDS} = x$. Calcule a medida de x , em graus.



2. (**Autoria própria**) Um quadrado *BOLA* de lado x está inscrito em uma circunferência de raio r . Dado um ponto C , pertencente a essa circunferência e distinto dos vértices desse quadrado, determine o valor de y , sabendo que $\overline{AC} = \frac{13}{5}u.m.$ e $\overline{BC} = \frac{114}{25}u.m.$, considere a esquematização abaixo e utilize $\sqrt{2} = 1,414$.



- a. $y \in [9, 0; 9, 5[$
- b. $y \in [8, 5; 9, 0[$
- c. $y \in [8, 0; 8, 5[$
- d. $y \in [7, 5; 7, 0[$
- e. $y \in [7, 0; 7, 5[$

Resolução B.0.4

5.3.3.1 Aplicações do Teorema de Ptolomeu em polígonos

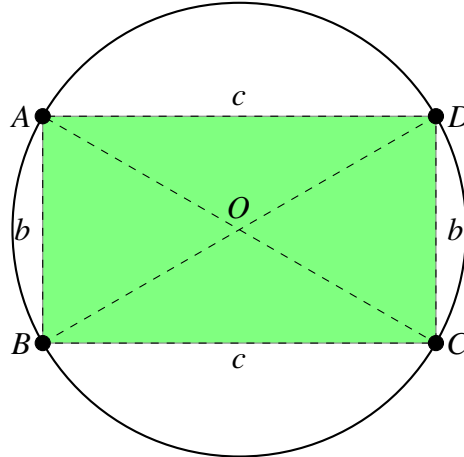
Aplicando o Teorema de Ptolomeu em figuras planas inscritas em circunferências, obtemos relações matemáticas conhecidas e interessantes, de uma forma ‘nova’ e fascinante.

Para tal análise, é fundamental recordar o critério de inscrição (5.3.2), essa condição de ângulos suplementares garante que todos os vértices pertençam a uma mesma circunferência.

Ao professor: diante dessa discussão, promova a reflexão entre os discentes por meio de perguntas investigativas, conduzindo-os à construção autônoma do conhecimento. Questões como “*Todo retângulo é inscritível?*” “*Que generalizações podem ser feitas sobre outros tipos de quadriláteros?*” ou ainda “*É possível aplicar o Teorema de Ptolomeu em polígonos com mais de quatro lados?*” podem ampliar a compreensão e o senso crítico dos alunos.

Exemplo 5.3.1 (Retângulo). *Todo retângulo é inscritível, pois os seus 4 ângulos medem 90° , sendo assim, cada par de ângulos são suplementares, satisfazendo a condição necessária para que o retângulo possa ser inscrito em uma circunferência.*

Figura 56 – Retângulo $ABCD$ inscrito.



Fonte: Autoria própria.

Por ser um retângulo, suas diagonais terão iguais medidas, denotaremos esta medida por a .

Aplicando o **Teorema de Ptolomeu** no retângulo da Figura 56.

$$\begin{aligned}\overline{AC} \cdot \overline{BD} &= \overline{AB} \cdot \overline{CD} + \overline{BC} \cdot \overline{AD} \\ a \cdot a &= b \cdot b + c \cdot c \\ a^2 &= b^2 + c^2\end{aligned}$$

Por consequência, obtemos a relação das medidas dos lados de um triângulo qualquer, que tenha um ângulo reto, o famoso **Teorema de Pitágoras**.

$$a^2 = b^2 + c^2 \quad \text{(Teorema de Pitágoras)}$$

Exemplo 5.3.2 (Triângulo equilátero). *Todo triângulo é inscritível, pois por três pontos distintos, não colineares, existe uma única circunferência que os pertence. Sendo assim, iremos analisar um triângulo equilátero qualquer, inscrito em uma circunferência de centro O , e um ponto D da circunferência que não seja vértice deste triângulo.*

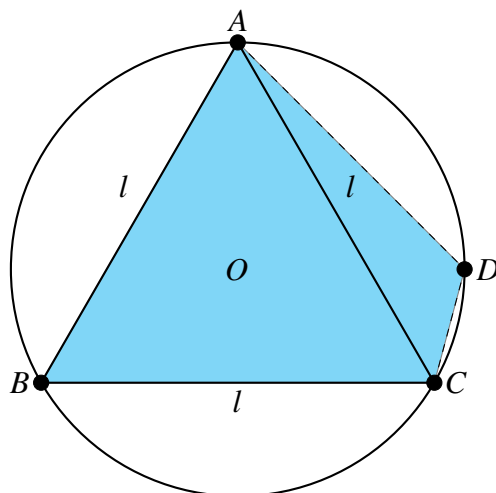
Aplicando o **Teorema de Ptolomeu** no quadrilátero da Figura 57.

$$\begin{aligned}\overline{AC} \cdot \overline{BD} &= \overline{AB} \cdot \overline{CD} + \overline{BC} \cdot \overline{AD} \\ l \cdot \overline{BD} &= l \cdot \overline{CD} + l \cdot \overline{AD}\end{aligned}$$

Obtendo assim, um algorítmico¹¹ que relaciona a distância de um ponto qualquer da circunferência, aos três vértices de um triângulo equilátero inscrito nela inscrito, representada pela equação:

¹¹ Inicialmente exposta em umas das demonstrações do teorema de Chaddu, em Neto (2013).

Figura 57 – Triângulo equilátero e um ponto qualquer na circunferência.



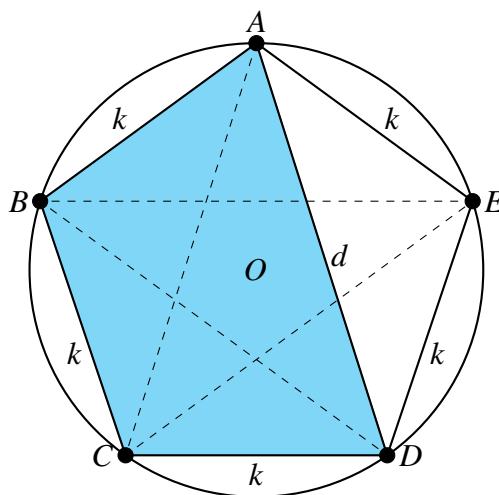
Fonte: Autoria própria.

$$\overline{BD} = \overline{AD} + \overline{CD}$$

(Postulado do triângulo equilátero)

Exemplo 5.3.3 (Pentágono regular). *Todo pentágono regular é inscritível, uma vez que seus cinco vértices pertencem a uma mesma circunferência. De modo mais abrangente, qualquer polígono regular é inscritível, pois apresenta ângulos e lados congruentes, o que assegura a simetria necessária para a inscrição em uma circunferência.*

Figura 58 – Pentágono regular inscrito.



Fonte: Autoria própria.

Observe que, ao selecionar quatro vértices quaisquer de um pentágono regular para a formação de um quadrilátero, as diferentes combinações possíveis resultarão sempre em quadriláteros congruentes, devido as propriedades geométricas da figura original.

Seja d a medida da diagonal e k a medida do lado do pentágono regular, conforme ilustrado na Figura 58.

A seguir, aplica-se o Teorema de Ptolomeu a esse pentágono, obtendo-se relações que conectam suas diagonais e lados, evidenciando a harmonia entre as partes da figura.

$$\begin{aligned}
\overline{AC} \cdot \overline{BD} &= \overline{AB} \cdot \overline{CD} + \overline{BC} \cdot \overline{AD} \\
d \cdot d &= k \cdot k + k \cdot d \\
d^2 - kd - k^2 &= 0
\end{aligned} \tag{5.4}$$

Por meio desse cálculo, é possível estabelecer uma relação entre as medidas dos lados e das diagonais de um pentágono regular inscrito em uma circunferência. Esses valores podem ser determinados a partir das seguintes fórmulas:

$$d = k \cdot \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right) = 1,618 \cdot k \quad (\text{diagonal do pentágono regular})$$

$$k = d \cdot \left(\frac{-1 + \sqrt{5}}{2} \right) = 0,618 \cdot d \quad (\text{lado do pentágono regular})$$

Podemos ainda obter as seguintes relações:

1. As razões entre as medidas:

$$\frac{k}{d} = \varphi - 1 \quad \frac{d}{k} = \varphi = 1,61803398875 \dots$$

2. O valor do $\cos 108^\circ$:

Aplicando a lei do cosseno no triângulo ABC , temos:

$$\begin{aligned}
a^2 &= b^2 \cdot c^2 - 2bc \cos 108^\circ \\
d^2 &= k^2 \cdot k^2 - 2 \cdot k \cdot k \cdot \cos 108^\circ \\
\left(k \cdot \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right) \right)^2 &= 2k^2 - 2k^2 \cdot \cos 108^\circ \\
k^2 \cdot \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^2 &= 2k^2 (1 - \cos 108^\circ) \\
\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^2 &= 2 (1 - \cos 108^\circ) \\
2 \cdot \left(\frac{\sqrt{5} + 3}{4} \right) &= 2 (1 - \cos 108^\circ) \\
\frac{\sqrt{5} + 3}{4} &= 1 - \cos 108^\circ \\
\cos 108^\circ &= 1 - \left(\frac{\sqrt{5} + 3}{4} \right)
\end{aligned}$$

Sendo assim, obtemos as medidas correspondentes dos cossenos dos ângulos 72° , 108° , 252° e 288° :

$$\begin{cases} \cos 108^\circ = \cos 288^\circ = \frac{1 - \sqrt{5}}{4} \\ \cos 72^\circ = \cos 252^\circ = \frac{\sqrt{5} - 1}{4} \end{cases}$$

A exploração do Teorema de Ptolomeu em diferentes figuras planas foi idealizada com o intuito de despertar a curiosidade dos alunos, romper com a rotina das aulas anteriores e incentivar a investigação autônoma, conduzindo os educandos à reflexão sobre novos procedimentos geométricos e promover um aumento significativo na atenção e no engajamento da turma.

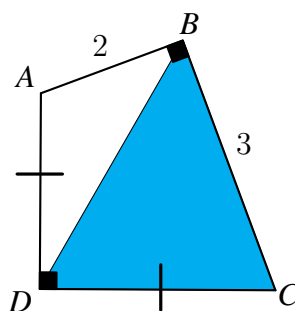
Para exercitar

1. (ITA - 1995) O comprimento da diagonal de um pentágono regular de lado medindo 1 unidade é igual à raiz positiva de:
 - a) $x^2 + x - 2 = 0$
 - b) $x^2 - x - 2 = 0$
 - c) $x^2 - 2x + 1 = 0$
 - d) $x^2 + x - 1 = 0$
 - e) $x^2 - x - 1 = 0$

Resolução B.0.5

2. Determine a área em azul no quadrilátero $ABCD$ abaixo. ¹²

Considere $AB = 2$, $BC = 3$, $\overline{AD} = \overline{CD}$



Resolução B.0.6

¹² <<https://www.youtube.com/watch?v=jgl9iPrWaHU>>.

5.3.3.2 Corolários

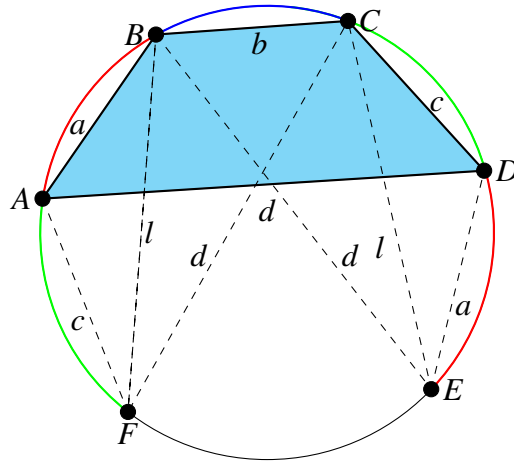
Surge, então, uma questão relevante: como determinar as medidas dos lados e das diagonais de um quadrilátero inscrito dispondo de um conjunto limitado de informações conhecidas?

Nesse contexto, apresentam-se os Teoremas de Viette, Packein e Chaddu, os quais são alternativas viáveis para a resolução desse tipo de problema, oferecendo diferentes abordagens na relação entre lados e diagonais de quadriláteros inscritos em circunferências.

Teorema 5.3.2 (Teorema de Viette). *Em todo quadrilátero inscrito, a razão das medidas das suas diagonais são iguais a razão da soma dos produtos dos lados adjacentes aos extremos dessas diagonais.*

$$\frac{\overline{AC}}{\overline{BD}} = \frac{\overline{AB} \cdot \overline{AD} + \overline{BC} \cdot \overline{CD}}{\overline{AB} \cdot \overline{BC} + \overline{CD} \cdot \overline{AD}} \quad (\text{Teorema de Viette})$$

Demonstração. Consideremos as medidas dos arcos $\widehat{AB} = \alpha$, $\widehat{BC} = \beta$ e $\widehat{CD} = \theta$. Por construção traçamos os arcos $\widehat{BF} = \alpha + \theta$ e $\widehat{CE} = \theta + \alpha$, consequentemente, $\overline{DE} = a$ e $\overline{AF} = c$. Observe que como o $\widehat{FAB}$ tem a mesma medida do $\widehat{CDE}$ ($\alpha + \theta$), portanto $\overline{BF} = \overline{CE} = l$. De mesma forma, os arcos $\widehat{FABC}$, $\widehat{ABCD}$ e $\widehat{BCDE}$ terão iguais medidas ($\alpha + \theta + \beta$), sendo assim $\overline{AD} = \overline{FC} = \overline{BE} = d$.



Fonte: Autoria própria.

Aplicando o Teorema de Ptolomeu nos quadriláteros $ABCF$ e $BCDE$ temos as seguintes relações:

$$\begin{aligned} \overline{AC} \cdot \overline{BF} &= \overline{AB} \cdot \overline{CF} + \overline{BC} \cdot \overline{AF} & \& \quad \overline{BD} \cdot \overline{CE} &= \overline{BC} \cdot \overline{DE} + \overline{CD} \cdot \overline{BE} \\ \overline{AC} \cdot l &= a \cdot d + b \cdot c & \& \quad \overline{BD} \cdot l &= b \cdot a + c \cdot d \end{aligned}$$

Dividindo ambas relações.

$$\frac{\overline{AC} \cdot l}{\overline{BD} \cdot l} = \frac{a \cdot d + b \cdot c}{b \cdot a + c \cdot d}$$

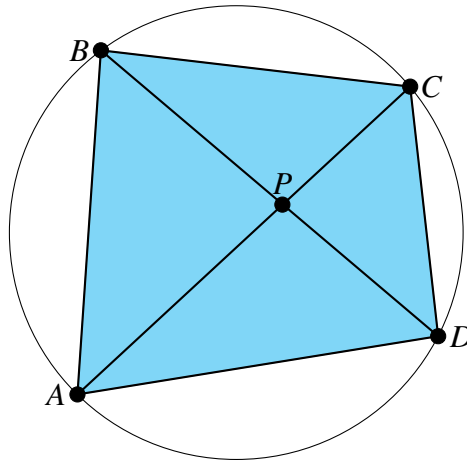
Desta forma obtemos o **Teorema de Viette**, a razão das medidas de suas diagonais são iguais a razão da soma dos produtos dos lados adjacentes aos extremos dessas diagonais.

$$\frac{\overline{AC}}{\overline{BD}} = \frac{\overline{AB} \cdot \overline{AD} + \overline{BC} \cdot \overline{CD}}{\overline{AB} \cdot \overline{BC} + \overline{CD} \cdot \overline{AD}} \quad (\text{Teorema de Viette})$$

■

Teorema 5.3.3 (Teorema de Packein). *Em todo quadrilátero inscrito em uma circunferência, a razão dos comprimentos originados pelo ponto de intersecção de suas diagonais, é igual a razão de seus respectivos lados adjacentes.*

$$\frac{\overline{AP}}{\overline{CP}} = \frac{\overline{AB} \cdot \overline{AD}}{\overline{BC} \cdot \overline{CD}} \quad (\text{Teorema de Packein})$$



Demonstração. Note que podemos obter as seguintes semelhanças

$(\triangle ABP \sim \triangle DCP)$ São semelhantes da seguinte forma:

$$\left\{ \begin{array}{l} \widehat{BAC} = \widehat{CDB}, \text{ por ser arco capaz do arco } \widehat{BC} \\ \widehat{ABD} = \widehat{DCA}, \text{ por ser arco capaz do arco } \widehat{AD} \\ \widehat{APB} = \widehat{DPC}, \text{ por serem opostos pelo vértice } P. \end{array} \right.$$

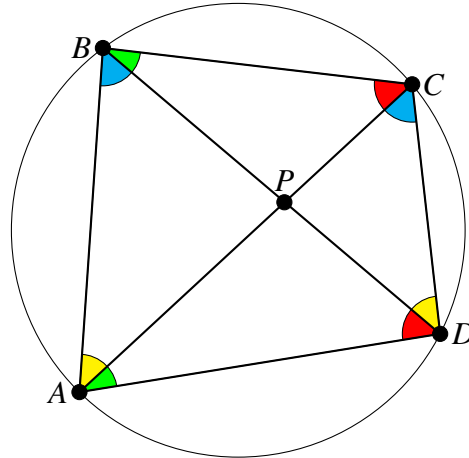
Os triângulos $\triangle ADP \sim \triangle BCP$ são semelhantes da seguinte forma:

$$\left\{ \begin{array}{l} \widehat{DAD} = \widehat{CBD}, \text{ por ser arco capaz do arco } \widehat{CD} \\ \widehat{ADB} = \widehat{BCA}, \text{ por ser arco capaz do arco } \widehat{AB} \\ \widehat{APD} = \widehat{BPC}, \text{ por serem opostos pelo vértice } P. \end{array} \right.$$

Obtemos assim as seguintes relações:

$$\frac{\overline{AP}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{DP}}{\overline{CD}} \Rightarrow \overline{AP} = \frac{\overline{AB} \cdot \overline{DP}}{\overline{CD}} \quad (5.5)$$

$$\frac{\overline{AD}}{\overline{DP}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{CP}} \Rightarrow \overline{CP} = \frac{\overline{BC} \cdot \overline{DP}}{\overline{AD}} \quad (5.6)$$



Dividindo a equação (5.5) pela equação (5.6), obtemos o seguinte.

$$\frac{\overline{AP}}{\overline{CP}} = \frac{\frac{\overline{AB} \cdot \overline{DP}}{\overline{CD}}}{\frac{\overline{BC} \cdot \overline{DP}}{\overline{AD}}} = \frac{\overline{AB} \cdot \overline{DP} \cdot \overline{AD}}{\overline{BC} \cdot \overline{DP} \cdot \overline{CD}} = \frac{\overline{AB} \cdot \overline{AD}}{\overline{BC} \cdot \overline{CD}} \quad (5.7)$$

Sendo assim, chegamos ao **Teorema de Páquein**.

$$\frac{\overline{AP}}{\overline{CP}} = \frac{\overline{AB} \cdot \overline{AD}}{\overline{BC} \cdot \overline{CD}} \quad (\text{Teorema de Páquein})$$

■

Teorema 5.3.4 (Teorema de Chaddu). *O quadrado da medida do lado do triângulo equilátero é igual a metade da soma dos quadrados das distâncias de um ponto qualquer da circunferência circunscrita aos vértices do triângulo equilátero.*

$$l^2 = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{2} \quad (\text{Teorema de Chaddu})$$

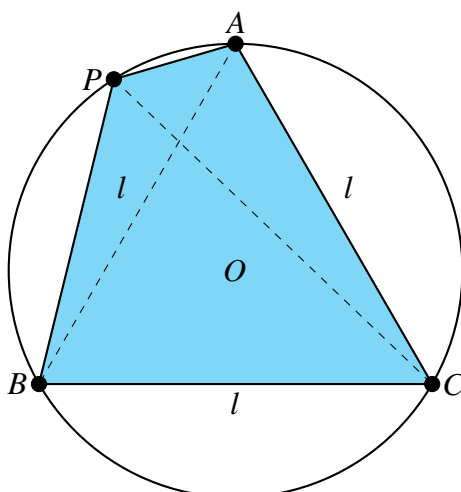
Demonstração. Pelo **Postulado do triângulo equilátero***.

$$\overline{AP} + \overline{BP} = \overline{CP}$$

Como as medidas dos ângulos $\widehat{APC}$ e $\widehat{BPC}$ são iguais a 60° , podemos aplicar a lei dos cossenos nos triângulos APC e BPC , respectivamente.

$$\begin{cases} l^2 = AP^2 + CP^2 - 2 \cdot AP \cdot CP \cdot \cos 60^\circ \\ l^2 = BP^2 + CP^2 - 2 \cdot BP \cdot CP \cdot \cos 60^\circ \end{cases}$$

Somando ambas equações, temos:



Fonte: Autoria própria.

$$\begin{aligned}
 2l^2 &= AP^2 + CP^2 + BP^2 + CP^2 - 2 \cdot AP \cdot CP \cdot \cos 60^\circ - 2 \cdot BP \cdot CP \cdot \cos 60^\circ \\
 2l^2 &= AP^2 + BP^2 + 2CP^2 - 2 \cdot AP \cdot CP \cdot \frac{1}{2} - 2 \cdot BP \cdot CP \cdot \frac{1}{2} \\
 2l^2 &= AP^2 + BP^2 + 2CP^2 - AP \cdot CP - BP \cdot CP \\
 2l^2 &= AP^2 + BP^2 + 2CP^2 - CP(AP + BP)
 \end{aligned}$$

Aplicando o **Postulado do triângulo equilátero**, obtemos o seguinte.

$$\begin{aligned}
 2l^2 &= AP^2 + BP^2 + 2CP^2 - CP(CP) \\
 l^2 &= \frac{AP^2 + BP^2 + CP^2}{2}
 \end{aligned} \tag{5.8}$$

Desta forma, obtemos o **Teorema de Chaddu**.

$$l^2 = \frac{AP^2 + BP^2 + CP^2}{2} \quad (\text{Teorema de Chaddu})$$

■

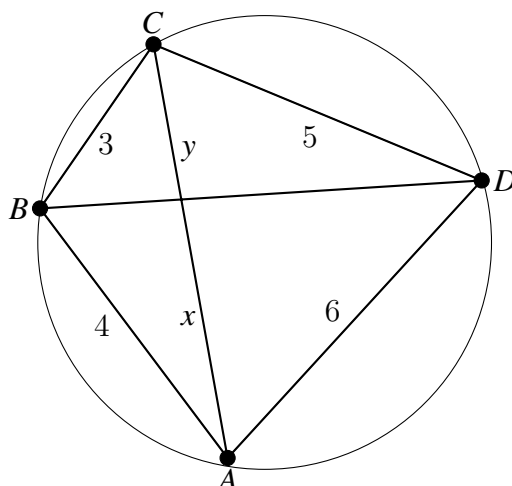
Para exercitar.

1. [Geometria, **Peña et al.** (2019)] Em um quadrilátero inscritível $ABCD$, as medidas de seus lados são $AB = 7$, $BC = 7$, $CD = 3$ e $AD = 5$. Determine a soma das medidas das diagonais.

Resolução B.0.7

2. Considere o quadrilátero inscrito em uma circunferência com $AC = 13$. Calcule o valor de $x - y$, abaixo.

Resolução B.0.8



5.4 Etapa 3 - Construções com quadriláteros ex-inscritos

5.4.1 Aula 7

Tabela 8 – Aula 7

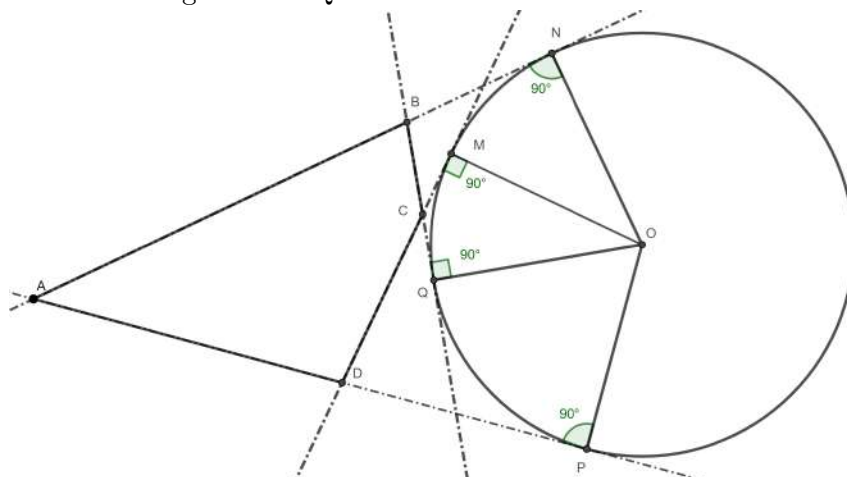
Tema:	Construções com quadriláteros ex-inscritos e exploração da sua lógica.
Objetivo:	Compreender e executar a construção de quadriláteros ex-inscritos, bem como verificar metodicamente se um quadrilátero é ex-inscrito. Além disso, aplicar procedimentos matemáticos para resolver problemas relacionados às construções e formular expressões aritméticas que permitam a dedução de medidas desconhecidas.
Conteúdo:	Quadriláteros ex-inscritos em circunferências, desenho geométrico, Teorema de Steiner.
BNCC:	EM13MAT103, EM13MAT105, EM13MAT308, EM13MAT313, EM13MAT314, EM13MAT315, EM13MAT406 e EM13MAT512.
Materiais:	Lousa, marcador de quadro, notebooks/computadores, <i>data-show</i> /televisão.
Duração:	1 hora e 40 minutos.

Fonte: Autoria própria.

A construção e o cálculo de quadriláteros ex-inscritos são temas pouco explorados na literatura brasileira. Em contrapartida, obras estrangeiras, como o de [PEÑA et al.](#) (*geometría plana: Fundamentos y aplicaciones de las figuras bidimensionales*), é apresentada de forma detalhada, abordagens variadas incluindo teoremas e fórmulas que permitem o cálculo das medidas dos lados e das áreas desses quadriláteros, antes não contemplada pela nossa.

Definição 5.4.1. *O quadrilátero é ex-inscrito quando podemos traçar uma circunferência tangente as retas que contenham todos os seus lados.*

A construção de uma circunferência ex-inscrita em um quadrilátero pode ser realizada de maneira relativamente direta. O centro dessa circunferência é definido como o ponto

Figura 59 – Quadrilátero ex-inscrito $ABCD$ 

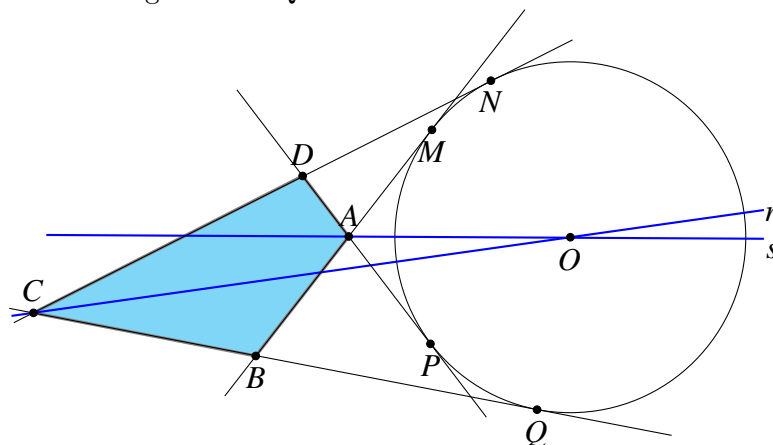
Fonte: Autoria própria.

de interseção das bissetrizes dos ângulos formados pelos lados mais longos e mais curtos do quadrilátero.

Para pensar.

- Se o quadrilátero apresentar o maior e o segundo maior lado em posições opostas, ele ainda poderá ser ex-inscrito?
- É possível afirmar que todo quadrado é um quadrilátero ex-inscrito?
- Quadrados, retângulos ou paralelogramos podem ser ex-inscritos?
- Por que utilizamos especificamente as bissetrizes? Essa estratégia sempre garante a construção correta?

A seguir, apresenta-se a demonstração das bissetrizes, que permitirá responder de forma fundamentada, a última questão em especial, e, compreender melhor a lógica geométrica envolvendo a construção de quadriláteros ex-inscritos.

Figura 60 – Quadrilátero $ABCD$ ex-inscrito.

Fonte: Autoria própria.

Demonstração da intersecção das bissetrizes. Dado o quadrilátero $ABCD$ ex-inscrito a uma circunferência de centro O e raio R , demonstremos que as retas s e r , cuja intersecção é o ponto O são bissetrizes do quadrilátero, consideremos a Figura 60, onde N , M , P e Q são pontos de tangência das retas que contêm todos os lados e a circunferência de centro O .

Note que de fato existem as retas r e s , pois, por dois pontos distintos é possível traçar uma única reta. A reta r passa por O e C , enquanto a reta s passa por O e A .

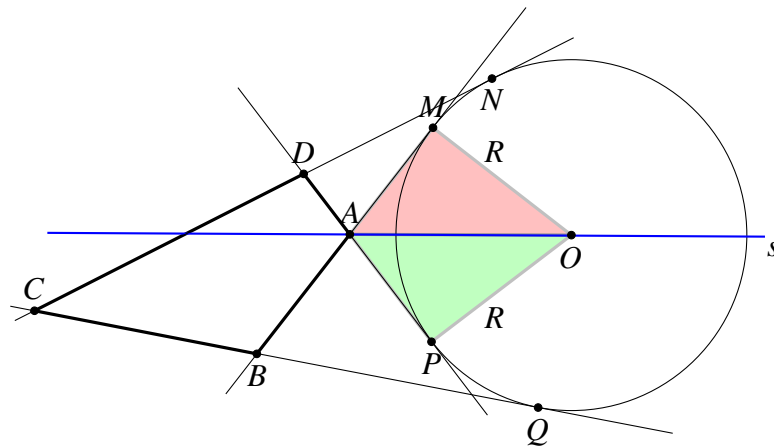
Desta forma podemos notar os seguintes casos de congruência entre triângulos.

1. $(\triangle AMO \equiv \triangle APO)$ São congruentes da seguinte forma:

Como M e P são pontos de tangência, os ângulos $\widehat{AMO} = \widehat{APO} = 90^\circ$.

O segmento $\overline{AO}$ está em ambos os triângulos, tratando-se assim do mesmo segmento.

Os segmentos $\overline{MO}$ e $\overline{PO}$ terão medida igual ao raio(R) da circunferência.



Pelo Teorema de Pitágoras, temos:

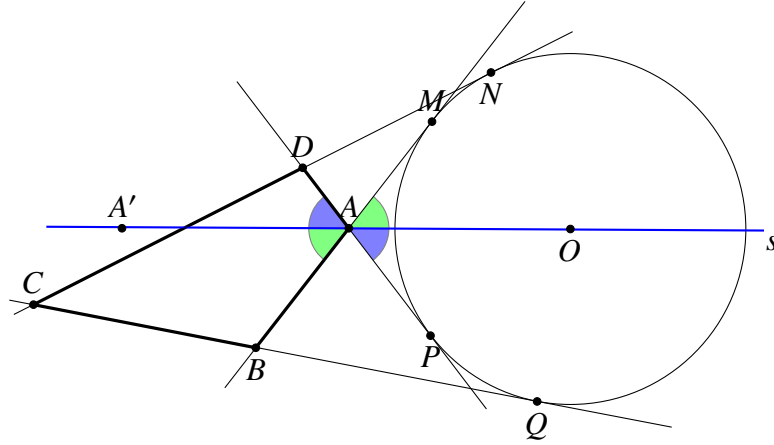
$$\begin{aligned} (\overline{AM})^2 + (\overline{MO})^2 &= (\overline{AO})^2 & \& \quad (\overline{AP})^2 + (\overline{PO})^2 &= (\overline{AO})^2 \\ (\overline{AM})^2 &= (\overline{AO})^2 - (\overline{MO})^2 & \& \quad (\overline{AP})^2 &= (\overline{AO})^2 - (\overline{PO})^2 \\ (\overline{AM})^2 &= (\overline{AO})^2 - R^2 & \& \quad (\overline{AP})^2 &= (\overline{AO})^2 - R^2 \end{aligned}$$

Desta forma, $\overline{AM} = \overline{AP}$, tornando assim os triângulos congruentes(Caso LAL).

Ressaltando que os ângulos $\widehat{OAM}$ e $\widehat{OAP}$ terão mesma medida.

Note que, considerando o ponto A' pertencente a reta s , os ângulos $\widehat{A'AD}$ e $\widehat{A'AB}$ são opostos pelo vértice A aos ângulos $\widehat{OAP}$ e $\widehat{MAO}$, respectivamente, conforme apresentado na figura abaixo.

Provando assim que a reta s é bissetriz do ângulo $\widehat{BAD}$.

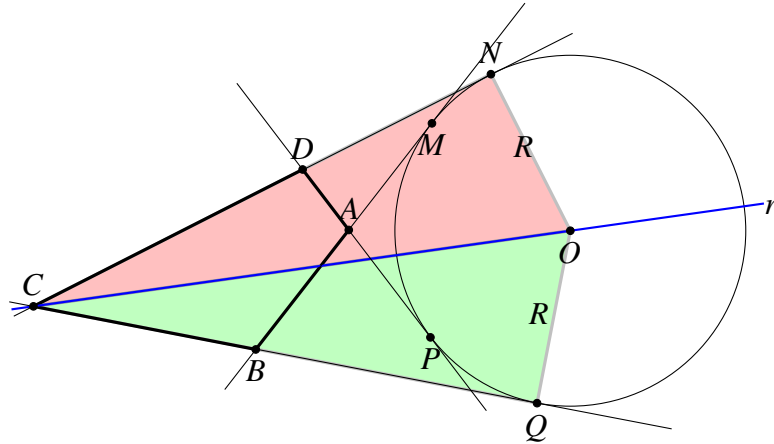


2. ($\triangle CNO \equiv \triangle CQO$) São congruentes da seguinte forma:

Como N e Q são pontos de tangência, os ângulos $\widehat{CNO} = \widehat{CQO} = 90^\circ$.

O segmento $\overline{CO}$ está em ambos os triângulos, tratando-se assim do mesmo segmento.

Os segmentos $\overline{NO}$ e $\overline{QO}$ terão medida igual ao raio(R) da circunferência.



Pelo Teorema de Pitágoras, temos:

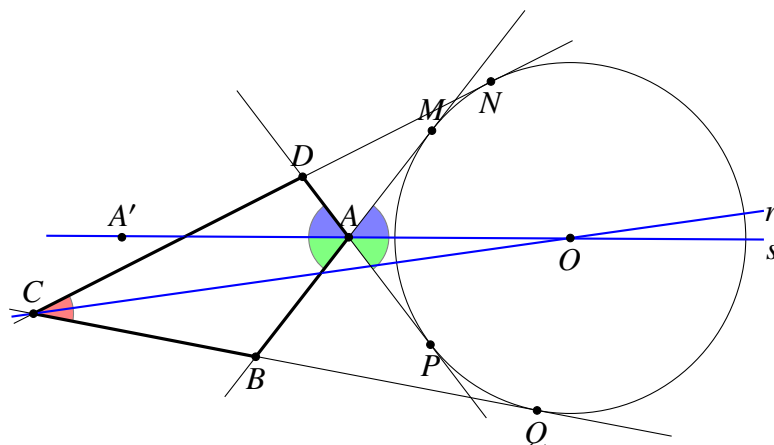
$$\begin{aligned} (\overline{CN})^2 + (\overline{NO})^2 &= (\overline{CO})^2 & \& \quad (\overline{CQ})^2 + (\overline{QO})^2 &= (\overline{CO})^2 \\ (\overline{CN})^2 &= (\overline{CO})^2 - (\overline{NO})^2 & \& \quad (\overline{CQ})^2 &= (\overline{CO})^2 - (\overline{QO})^2 \\ (\overline{CN})^2 &= (\overline{CO})^2 - R^2 & \& \quad (\overline{CQ})^2 &= (\overline{CO})^2 - R^2 \end{aligned}$$

Desta forma, $\overline{CN} = \overline{CQ}$, tornando assim os triângulos congruentes(Caso LAL).

Ressalta-se que os ângulos $\widehat{OCN}$ e $\widehat{OCQ}$ terão mesma medida.

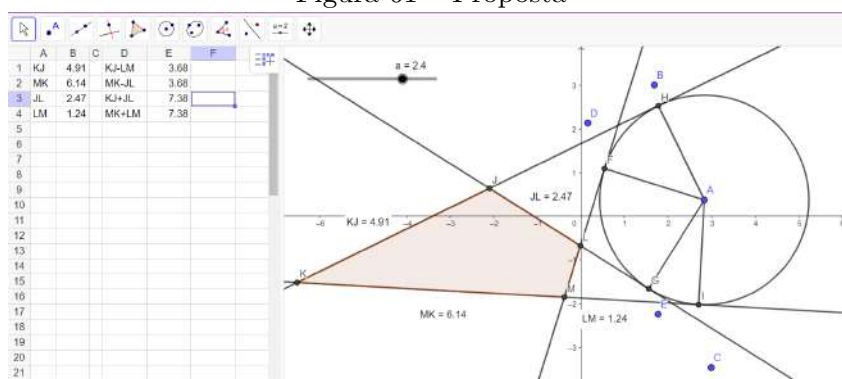
Provando assim que a reta r é bissetriz do ângulo $\widehat{BCD}$.

Portanto, fica provado que as retas r e s são bissetrizes dos ângulo $\widehat{BCD}$ e $\widehat{BAD}$.



Para a exploração em sala de aula, os alunos deverão utilizar o *GeoGebra* juntamente com a ferramenta **Planilha de cálculos**¹³ disponível no próprio *software*. Os alunos irão tentar encontrar, de forma mais rápida, “padrões” em relação às medidas de quadriláteros ex-inscritos.

Figura 61 – Proposta



Fonte: Autoria própria.

1. Insira um *controle deslizante*¹⁴, esse recurso permitirá maior manipulação dos elementos da construção, ampliando o número de exemplos e possibilidades de exploração geométrica;
2. Construa uma circunferência com centro em um ponto qualquer e raio definido pela variável associada ao controle deslizante;
3. Trace duas retas secantes à circunferência, de modo que a primeira forme uma corda menor que o diâmetro e a segunda intercepte o menor arco dessa circunferência;
4. Destaque os pontos de interseção entre as retas e a circunferência;;

¹³ Janela interativa encontrada dentro do programa que atua como uma extensão no *Excel* nos próprios projetos do *GeoGebra*

¹⁴ Caso não se adeque melhor às habilidades digitais da turma, o *controle deslizante* pode ser dispensado ou substituído pelo controle manual das retas, de modo a favorecer uma maior adaptação à realidade dos estudantes

5. Utilize a ferramenta *Reta perpendicular* para criar retas tangentes a circunferência nos pontos destacados no passo anterior, (para auxiliar crie os segmentos de raios dessa circunferência);
6. Aplique a ferramenta *Interseção de dois objetos* entre as retas perpendiculares construídas, determinando assim os vértices do quadrilátero;
7. Empregue a ferramenta *Distância, comprimento e perímetro* para medir os lados do quadrilátero obtido;
8. Acesse o menu secundário do *software* e, na aba disposições, abra simultaneamente a **planilha de cálculos**, permitindo organizar e analisar os valores obtidos de forma sistemática;

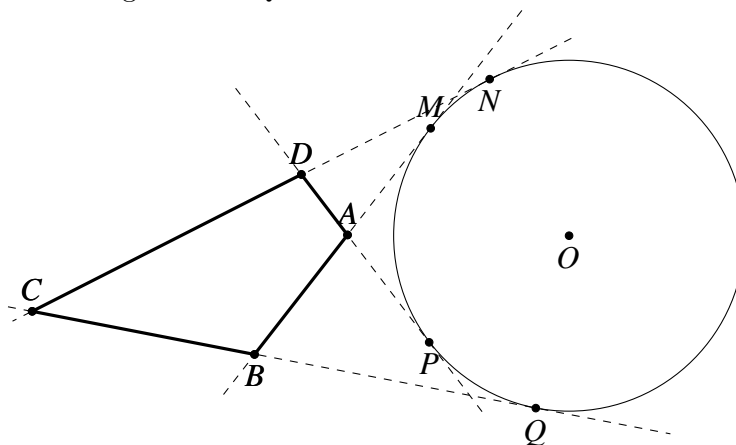
Figura 62 – Ícone da disposição: *Planilha de Cálculos*Fonte: *GeoGebra*.

Outra forma para explorar as construções destes quadriláteros, é partindo da construção de um quadrilátero qualquer e manipulando suas medidas e posições variadas.

Observação 5.4.1. *Nenhum paralelogramo será ex-inscrito.*

5.4.2 Teorema de Steiner

Teorema 5.4.1. *Teorema de Steiner: Em todo quadrilátero ex-inscrito, o módulo da diferença entre as medidas dos lados opostos são iguais.*

Figura 63 – Quadrilátero $ABCD$ ex-inscrito.

$$|\overline{AB} - \overline{CD}| = |\overline{AD} - \overline{BC}| \quad (\text{Teorema de Steiner})$$

Demonstração. Observe que os segmentos $\overline{CN}$ e $\overline{CQ}$ são segmentos tangentes congruentes à circunferência de centro O (Postulado do triângulo equilátero).

Desta forma:

$$\begin{aligned}\overline{CN} &= \overline{CQ} \\ \overline{CD} + \overline{DN} &= \overline{CB} + \overline{BQ}\end{aligned}$$

Além disso, os segmentos $\overline{DN}$ e $\overline{DP}$, $\overline{BQ}$ e $\overline{BM}$, são, respectivamente, segmentos tangentes congruentes a mesma circunferência de centro O .

Implicando que:

$$\begin{aligned}\overline{CD} + \overline{DP} &= \overline{CB} + \overline{BM} \\ \overline{CD} + \overline{DA} + \overline{AP} &= \overline{CB} + \overline{BA} + \overline{AM}\end{aligned}$$

Por fim, os segmentos $\overline{AP}$ e $\overline{AM}$ são segmentos tangentes congruentes a mesma circunferência de centro O .

$$\begin{aligned}\overline{CD} + \overline{AD} &= \overline{BC} + \overline{AB} \\ |\overline{AB} - \overline{CD}| &= |\overline{AD} - \overline{BC}|\end{aligned}$$

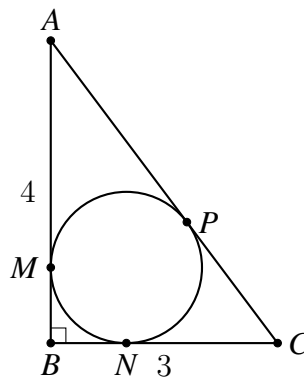
■

Para exercitar.

1. Dado um quadrilátero ex-inscrito, relativo aos seus lados BC e CD , determine a medida de CD sabendo que $BC = 10$, $AD = 45$ e $AB + CD = 83$.

Resolução B.0.9

2. Determine a medida do raio na figura abaixo, sabendo que M , N e P são pontos de tangência.



Resolução B.0.10

5.5 Empecilhos nas etapas

Caso a escola não possua computadores ou uma sala de computação, recomenda-se que professor utilize seu próprio computador para construir diferentes figuras com auxílio dos alunos, projetando-as para que todos os discentes possam acompanhar o processo e preencher a Tabela **A** com as informações de cada quadrilátero elaborado no *GeoGebra*. Além disso, as aulas podem contar com o uso de dispositivos eletrônicos móveis dos estudantes, além das calculadoras.

Caso a situação anteriormente descrita não seja viável, o recurso que possibilita a realização do projeto é o tradicional kit de desenho geométrico (papel, lapiseira, borracha, régua e compasso). Nesse contexto, algumas adaptações metodológicas podem ser necessárias — por exemplo, a redução de etapas que envolvam medições diretas no papel, devido à possibilidade de erros de aproximação.

Na construção de circunferências, por exemplo, a linguagem empregada no Passo 1 da Aula **5.1.2**, pode ser reformulada para “*trace um arco de comprimento igual a 2cm, com a ponta seca do compasso no ponto A, e destaque um ponto neste arco, denominando-o de ponto B*”.

A exploração de apenas uma das possibilidades não inviabiliza o uso das demais, visto que cada abordagem trabalha o mesmo tema de maneira semelhante, porém com conceitos e caminhos distintos. Assim, caso o professor opte por utilizar diferentes formas de construção, o conhecimento adquirido pelos alunos tende a ser, eventualmente, mais amplo e diversificado.

Durante a execução do Passo 6 (Etapa **5.1.2**), pode surgir uma discussão interessante: a utilização do outro ponto de interseção entre as circunferências - o ponto que está situado no outro semi-plano definido pela reta que passa por *A* e *B*. Na situação de escolha do outro ponto, a figura resultante será um quadrilátero não convexo.

A Questão **2** (Etapa **5.2**) foi elaborada com o intuito de promover uma reflexão entre a Matemática abstrata e a Matemática real, levantando o seguinte questionamento: será que esses valores realmente permitem a construção dessa figura?

Apesar de o resultado numérico estar correto, a criação da figura no plano é impossível. Por meio de tentativas e análises práticas, é possível constatar inconsistências que explicam as razões desse fato intrigante.

6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

A presente pesquisa teve como objetivo investigar possibilidades metodológicas para o ensino das relações métricas em quadriláteros - inscritos, circunscritos e ex-inscritos em circunferências - no contexto da disciplina eletiva do Ensino Médio. A proposta fundamentou-se na compreensão de que a Geometria, apesar de sua importância histórica, cultural e científica, ainda ocupa um espaço restrito nos currículos escolares, sendo frequentemente abordada de maneira fragmentada e pouco contextualizada.

A elaboração e aplicação da sequência didática, apoiada no uso de materiais concretos e de ferramentas digitais, como o *GeoGebra*, demonstrou que a integração entre teoria e prática amplia a compreensão conceitual, estimula a autonomia intelectual e contribui para uma aprendizagem mais significativa e duradoura. Paralelamente, os desafios observados ao longo do processo reforçam a necessidade de flexibilidade docente, de adaptação metodológica e de reflexão contínua sobre a prática pedagógica.

Como fonte para pesquisas futuras, é necessário adequações perante as turmas e instituições que supra as devidas carências. A substituição do material digital por régua e compasso, é uma das formas de dar continuidade com o desenho geométrico para os discentes sem perda da conceituação e etapas de construção das figuras, assim como, a implementação de uma maior quantidade de aulas com finalidade de contemplar as necessidades dos alunos em sua grade curricular, são fatores importantes que agregam ainda mais a realização dessa sequência de aulas.

Conclui-se que o ensino de Geometria deve ir além da memorização de fórmulas e procedimentos, configurando-se como um espaço voltado ao desenvolvimento do raciocínio lógico, da percepção espacial e da capacidade de argumentação matemática. Assim, a abordagem proposta neste estudo revela-se como uma alternativa promissora para ressignificar a experiência dos alunos com a Matemática, promovendo um ambiente investigativo, colaborativo e alinhado às demandas contemporâneas da educação.

Por fim, reconhece-se que a formação continuada de professores e o acesso equitativo a recursos tecnológicos ainda representam desafios a serem enfrentados. Entretanto, acredita-se que as contribuições desta pesquisa reforçam a valorização da Geometria no Ensino Médio e o fortalecimento de práticas pedagógicas significativas, capazes de dialogar com as necessidades reais dos estudantes e de estimular uma visão da Matemática como ciência viva, dinâmica e essencial à compreensão crítica do mundo.

REFERÊNCIAS

- ALMOULOUD, S. A. et al. A geometria no ensino fundamental: reflexões sobre uma experiência de formação envolvendo professores e alunos. *Revista Brasileira de Educação*, SciELO Brasil, p. 94–108, 2004. Citado na página [21](#).
- ÁVILA, P. d. et al. Os elementos de euclides. 2003. Citado na página [17](#).
- BRASIL, M. d. E. e. C. Orientações curriculares nacionais para o ensino médio. Secretaria da Educação e Tecnologia Brasília, 2006. Citado na página [22](#).
- CONECTADO, A. *Disciplinas eletivas nas escolas públicas da Paraíba: um modelo inspirador para o futuro dos estudantes brasileiros*. 2024. Acesso em: 14 jun. 2024. Disponível em: <https://eace.org.br/disciplinas-eletivas-nas-escolas-publicas-da-paraiba-um-modelo-inspirador-para-o-futuro-dos-estudantes-brasileiros/>. Citado na página [13](#).
- JÚNIOR, J. R. G. *A conquista matemática: 8º ano: ensino fundamental: anos finais. Manual do professor*. 1. ed. São Paulo: FTD, 2022. 418 fls. Citado na página [22](#).
- LOPES, L. M. L.; SANTIAGO, A. P. M.; SANTIAGO, A. G. A. Análise das abordagens de ensino de geometria baseadas na teoria da objetivação: Revisão bibliográfica. *REMATEC*, v. 19, n. 50, p. e2024004–e2024004, 2024. Citado na página [22](#).
- LOPES, L. S.; FERREIRA, A. L. A. Um olhar sobre a história nas aulas de matemática. *Abakós*, v. 2, n. 1, p. 75–88, 2013. Citado na página [14](#).
- LORENZATO, S. Por que não ensinar geometria? *Educação Matemática em revista*, v. 3, n. 4, p. 3–13, 1995. Citado 2 vezes nas páginas [12](#) e [16](#).
- NETO, A. C. M. Tópicos de matemática elementar: geometria euclidiana plana. *Rio de Janeiro: SBM*, v. 2, 2013. Citado na página [55](#).
- NETO, A. P. Geometria plana e construções geométricas. *UAB/IFCE*, v. 226, 2017. Citado na página [41](#).
- OLIVEIRA, I. L. M. *Traçando o conhecimento: laces e enlaces do aprendizado de geometria a partir do desenho geométrico*. Dissertação (B.S. thesis) — Instituto Federal da Paraíba, 2023. Citado na página [17](#).
- PAIS, L. C. *Didática da Matemática: uma análise da influência francesa*. [S.l.]: Autêntica Editora, 2011. Citado na página [23](#).
- PARAÍBA, G. D. *Escolas Cidadãs Integrais*. 2023. Acesso em: 18 out. 2025. Disponível em: <https://paraiba.pb.gov.br/diretas/secretaria-da-educacao/programas/escolas-cidadas-integrais-1>. Citado na página [13](#).
- PEÑA, M. D. et al. *Geometría plana: fundamentos y aplicaciones de las figuras bidimensionales*. 1. ed. Lima: Asociación Fondo de Investigadores y Editores: Lumbreras Editores, 2019. 858 p. Il., diagrs. (algumas col.), retrs. ; 22 cm. Citado 8 vezes nas páginas [25](#), [26](#), [27](#), [29](#), [31](#), [32](#), [62](#) e [63](#).

SILVA, E. J. S.; RODRIGUES, R. F. Uma investigação histórica do ensino de geometria no brasil. *Revista Baiana de Educação Matemática*, v. 6, n. 1, 2025. Citado na página [12](#).

SILVA, M. F. S. d.; NOGUTI, F. C. H. Algumas considerações sobre a abordagem de geometria espacial em livros didáticos de matemática: uma ênfase na resolução de problemas. *Revista Dynamis*, v. 31, p. e12166, 2025. Publicação contínua. Citado na página [22](#).

VALENTE, J. A.; FREIRE, F. M. P.; ARANTES, F. L. Capítulo: Tecnologia e educação: passado, presente e o que está por vir. In: ALMEIDA; SILVA (Ed.). *Tecnologia e educação [recurso eletrônico]: passado, presente e o que está por vir*. Campinas, SP: NIED/UNICAMP, 2018. p. 126–127. 406 p. Citado 2 vezes nas páginas [20](#) e [21](#).

_____. Tecnologia e educação: passado, presente e o que está por vir. *Campinas, SP: NIED/Unicamp*, 2018. Citado na página [20](#).

VIANA, G. M. *Matemática, justiça e democracia: um vínculo utópico ou uma realidade a ser conquistada?* Dissertação (B.S. thesis) — Instituto Federal da Paraíba, 2023. Citado na página [13](#).

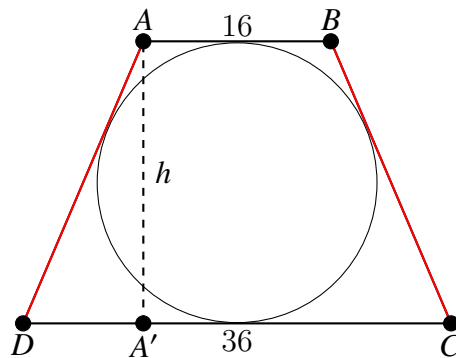
APÊNDICE A – TABELA AUXILIAR DAS AULAS

Tabela 9 – Tabela auxiliar para as deduções dos quadriláteros $ABCD$.[illegible]

APÊNDICE B – RESOLUÇÃO DAS QUESTÕES “PARA EXERCITAR”

Resolução B.0.1. Questão 1, página 46.

Desenhando a figura, obtemos o seguinte esquema onde h é a altura (a altura nessa figura, vai ter mesmo comprimento do diâmetro da circunferência).



Aplicando o Teorema 5.2.2 no quadrilátero $ABCD$, temos:

$$\begin{aligned}\overline{AD} + \overline{BC} &= \overline{AB} + \overline{CD} \\ \overline{AD} + \overline{AD} &= 16 + 36 \\ 2\overline{AD} &= 52 \\ \overline{AD} &= 26\end{aligned}$$

Aplicando o Teorema de Pitágoras no triângulo $AA'D$ encontramos valor da medida do raio.

$$\begin{aligned}\overline{AD}^2 &= \overline{AA'}^2 + \overline{A'D}^2 \\ 26^2 &= h^2 + 10^2 \\ 676 &= h^2 + 100 \\ 676 - 100 &= h^2 \\ \pm\sqrt{576} &= h \\ \pm 24 &= h\end{aligned}$$

Desta forma descobrimos que a medida da altura é igual a 24, portanto o raio é 12. O raio é um número par.

Resolução B.0.2. Questão 2, página 46.

Por se tratar de um quadrilátero circunscrito a uma circunferência, podemos aplicar o Teorema 5.2.2. Nesse contexto, o lado perpendicular às bases mede 10 cm, uma vez que é paralelo ao diâmetro da circunferência.

$$a + c = b + d$$

$$a + 4 = 10 + 16$$

$$a = 26 - 4$$

$$a = 22$$

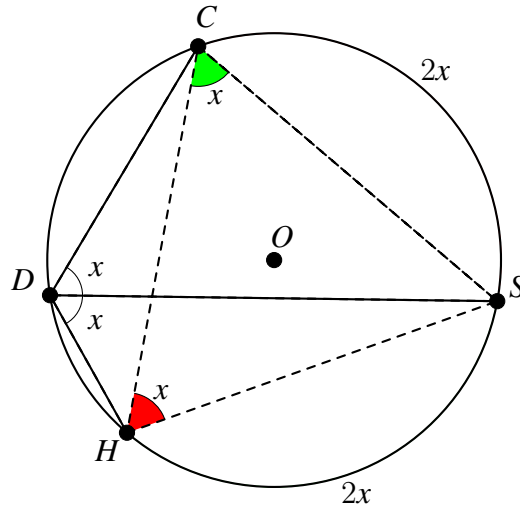
Sendo assim, a base maior deste trapézio irá medir 16cm.

Resolução B.0.3. Questão 1, página 53.

Perceba que o arco $\widehat{SH}$ é o arco capaz do ângulo $\widehat{SDH}$, logo, a medida do arco $\widehat{SH}$ será igual a $2x$, e consequentemente, o ângulo $\widehat{SCH}$ é igual a x .

Analisando o arco $\widehat{CS}$, percebemos que ele será o arco capaz do ângulo $\widehat{CDH}$, logo, a medida do arco $\widehat{CS}$ será igual a $2x$, e consequentemente, o ângulo $\widehat{CHS}$ é igual a x .

Desta forma, o triângulo CHS é isósceles, implicando na seguinte igualdade quanto aos seus lados, $\overline{CS} = \overline{HS}$.



Aplicando Teorema de Ptolomeu no quadrilátero $CDHS$, temos:

$$\overline{DS} \cdot \overline{CH} = \overline{CD} \cdot \overline{HS} + \overline{DH} \cdot \overline{CS}$$

$$\overline{DS} \cdot \overline{CH} = \overline{CD} \cdot \overline{CS} + \overline{DH} \cdot \overline{CS}$$

$$\overline{DS} \cdot \overline{CH} = \overline{CS} \cdot (\overline{CD} + \overline{DH})$$

$$\overline{DS} \cdot \overline{CH} = \overline{CS} \cdot (\overline{DS})$$

$$\overline{CH} = \overline{CS}$$

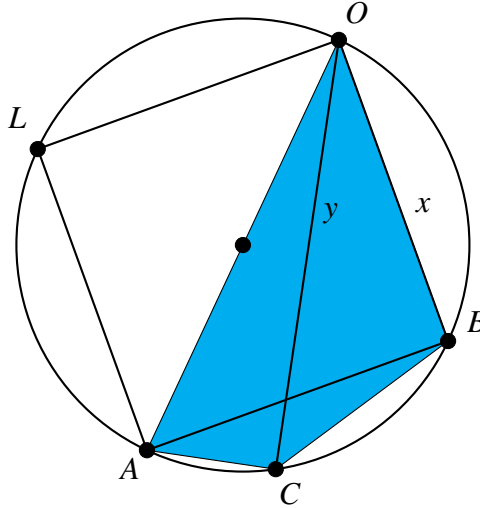
Podemos concluir que o triângulo CHS é equilátero, portanto todos seus ângulos internos serão iguais.

Logo o valor do ângulo x é 60° graus.

Resolução B.0.4. Questão 2, página 54.

Inicialmente devemos identificar as medidas pertinentes na figura.

Pelo quadrilátero $BOLA$ ser um quadrado, temos que $\overline{BO} = \overline{OL} = \overline{LA} = \overline{AB} = x$.



É fácil ver que o segmento $\overline{OA}$ é numericamente igual a diagonal do quadrado de lado x , logo,

$$\overline{OA} = x\sqrt{2}$$

Tracemos agora um segundo quadrilátero de forma a utilizar as medidas dadas no enunciado, $\overline{AC}$ e $\overline{BC}$.

Aplicando o Teorema de Ptolomeu no quadrilátero $BOAC$, obtemos:

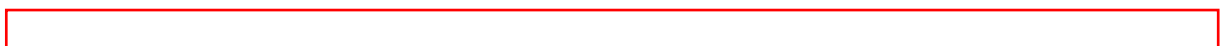
$$\overline{BO} \cdot \overline{AC} + \overline{OA} \cdot \overline{CB} = \overline{BA} \cdot \overline{OC}$$

$$\begin{aligned} x \cdot \frac{13}{5} + x\sqrt{2} \cdot \frac{114}{25} &= x \cdot y \quad \div x \\ \frac{13}{5} + \frac{114\sqrt{2}}{25} &= y \\ \frac{65}{25} + \frac{114\sqrt{2}}{25} &= y \\ \frac{65 + 114\sqrt{2}}{25} &= y \end{aligned}$$

Portanto $y \approx 9,048$. Resposta **letra a**.

Resolução B.0.5. Questão 1, página 58.

Por se tratar de um polígono regular, é possível inscrevê-lo em uma circunferência. Dessa forma, ao selecionar quatro vértices aleatoriamente, podemos aplicar o Teorema de



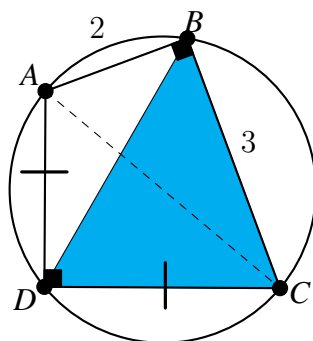
Ptolomeu, permitindo a obtenção da equação que relaciona lados e diagonais do quadrilátero formado.

Utilizando a equação **5.4** ($d^2 - kd - k^2 = 0$), onde d é a medida da diagonal e k a medida do lado) chegamos que $x^2 - x - 1 = 0$. Resposta correta, letra **e**.

Resolução B.0.6. Questão **2**, página **58**.

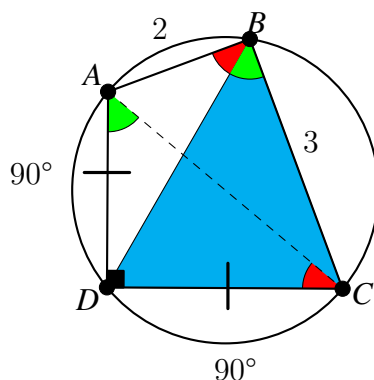
Pelo quadrilátero $ABCD$ possui ângulos opostos cuja soma resulta em 180° , ele pode ser inscrito em uma circunferência.

Tracemos a diagonal AC para auxiliar-nos.



Observe que o triângulo ACD é isósceles e retângulo em $\widehat{D}$, logo $\widehat{ACD} = \widehat{DAC} = 45^\circ$.

Por ângulo inscrito, temos que os arcos CD e DA são iguais a 90° , portanto os ângulos $\widehat{DBC}$ e $\widehat{ABD}$ são iguais a 45° . Conforme mostrado na figura.



Adotando $\overline{AD} = l$, apliquemos o Teorema de Ptolomeu.

$$\begin{aligned}\overline{AC} \cdot \overline{BD} &= \overline{AB} \cdot \overline{CD} + \overline{BC} \cdot \overline{AD} \\ l\sqrt{2} \cdot \overline{BD} &= 2 \cdot l + 3 \cdot l \quad \div l \\ \overline{BD} &= \frac{5}{\sqrt{2}}\end{aligned}$$

Conhecendo o valor de $\overline{BD}$ e $\overline{BC}$, determinemos a área da figura em verde por meio da seguinte fórmula:

$$A_{\Delta} = \frac{\overline{BD} \cdot \overline{BC} \cdot \text{sen}(\theta)}{2} \quad (\text{B.1})$$

Sendo assim,

$$A_{\Delta} = \frac{\frac{5}{\sqrt{2}} \cdot 3 \cdot \sin(45^\circ)}{2}$$

$$A_{\Delta} = \frac{\frac{5}{\sqrt{2}} \cdot 3 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}}{2}$$

$$A_{\Delta} = \frac{15}{4} \text{ u.a.}$$

Resolução B.0.7. Questão 1, página 62.

Aplicando o Teorema de Ptolomeu neste quadrilátero, temos que:

$$\begin{aligned}\overline{AC} \cdot \overline{BD} &= \overline{AB} \cdot \overline{CD} + \overline{BC} \cdot \overline{AD} \\ \overline{AC} \cdot \overline{BD} &= 7 \cdot 3 + 7 \cdot 5 \\ \overline{AC} \cdot \overline{BD} &= 56\end{aligned}\tag{B.2}$$

Aplicando o Teorema de Viette neste quadrilátero, temos que:

$$\begin{aligned}\frac{\overline{AC}}{\overline{BD}} &= \frac{\overline{AB} \cdot \overline{AD} + \overline{BC} \cdot \overline{CD}}{\overline{AB} \cdot \overline{BC} + \overline{CD} \cdot \overline{AD}} \\ \frac{\overline{AC}}{\overline{BD}} &= \frac{7 \cdot 5 + 7 \cdot 3}{7 \cdot 7 + 3 \cdot 5} \\ \frac{\overline{AC}}{\overline{BD}} &= \frac{35 + 21}{49 + 15} \\ \frac{\overline{AC}}{\overline{BD}} &= \frac{56}{64}\end{aligned}\tag{B.3}$$

Desta forma,

$$\begin{aligned}\frac{\overline{AC}}{\overline{BD}} \div \overline{AC} \cdot \overline{BD} &= \frac{56}{64} \div 56 \\ \frac{1}{\overline{BD}^2} &= \frac{1}{64} \\ \overline{BD} &= 8\end{aligned}\tag{B.4}$$

Desta forma, determinamos que as medidas de $\overline{AC}$ e $\overline{BD}$ são respectivamente iguais a 7 e 8, logo a soma das diagonais resulta em 15.

Resolução B.0.8. Questão 2, página 62.

Aplicando o Teorema de Páckein neste quadrilátero, temos que:

$$\begin{aligned}\frac{\overline{AP}}{\overline{CP}} &= \frac{\overline{AB} \cdot \overline{AD}}{\overline{BC} \cdot \overline{CD}} \\ \frac{x}{y} &= \frac{4 \cdot 6}{3 \cdot 5} \\ \frac{x}{y} &= \frac{24}{15}\end{aligned}$$

Sabendo que $x + y = 13$, podemos pensar nas frações equivalentes a $\frac{24}{15}$, e que a soma entre o denominador e numerador resulta em 13. Desta maneira, descobrimos que $x = 8$ e $y = 5$, portanto, $x - y = 3$.

Resolução B.0.9. Questão 1, página 69.

Aplicando o 5.4.1 no quadrilátero, temos:

$$\begin{aligned}|\overline{AB} - \overline{CD}| &= |\overline{AD} - \overline{BC}| \\ |\overline{AB} - \overline{CD}| &= |45 - 10| \\ \overline{AB} - \overline{CD} &= 35\end{aligned}\tag{B.5}$$

(B.6)

Subtraindo a equação B.5 da equação $\overline{AB} + \overline{CD} = 83$ determinamos o valor de $\overline{CD}$.

$$\begin{aligned}\overline{AB} + \overline{CD} - \overline{AB} - \overline{CD} &= 83 - 35 \\ 2\overline{CD} &= 48 \\ \overline{AB} &= 24\end{aligned}\tag{B.7}$$

Portanto, a medida do CD é igual a 24.

Resolução B.0.10. Questão 2, página 69.

Observe que os segmentos AM e AP , BM e BN , CP e CN , possuem mesma medida, pois são segmentos tangentes. Desta forma, $AM = AP$, $BM = BN$ e $CP = CN$.

Podemos notar que pelo triângulo ABC ser retângulo, $BM = BN = r$.

Aplicando o Teorema de Pitágoras, temos:

$$\begin{aligned}AC^2 &= 3^2 + 4^2 \\ AC^2 &= 9 + 16 \\ AC^2 &= 25 \\ AC &= 5\end{aligned}\tag{B.8}$$

Somando AB com BC encontramos a solução. Note que:

$$\begin{aligned}AB + BC &= (AM + MB) + (BN + NC) \\4 + 3 &= AM + MB + BN + NC \\7 &= AP + R + R + PC \\7 &= (AP + PC) + 2R \\7 &= AC + 2R \\7 &= 5 + 2R \\\frac{7 - 5}{2} &= R \\1 &= R\end{aligned}\tag{B.9}$$

Desta forma descobrimos que o raio vale 1.

APÊNDICE C – CRONOGRAMA

Tabela 10 – Cronograma.

Encontro	Conteúdo	Descrição	TCC
1º Dia	Introdução Práticas educativas no <i>GeoGebra</i> ; Circunferência; Ângulos; Polígonos: tipos e propriedades.	Apresentação do projeto e discussões com situações cotidianas e introdução do tema a ser estudado.	5.1.1
2º Dia	Quadriláteros e suas propriedades; Desigualdade triangular; Desenho geométrico.	Apresentar a dinâmica da sequência das aulas e propor a construção de figuras através do <i>GeoGebra</i> refletindo e dialogando durante o processo. Entender e executar a construção de quadriláteros circunscritos em circunferências distintas por meio do <i>GeoGebra</i> .	5.1.2
3º Dia	Quadriláteros circunscritos em circunferências; Desenho geométrico; Bissetriz.	Compreender e realizar a construção de quadriláteros circunscritos a circunferências distintas, utilizando o <i>GeoGebra</i> como ferramenta de apoio.	5.2.1
4º Dia	Quadriláteros circunscritos em circunferências; Desenho geométrico; Teorema de Pitot.	Compreender e aplicar fórmulas e métodos que possibilitem a resolução de problemas envolvendo quadriláteros circunscritos a circunferências.	5.2.2
5º Dia	Quadriláteros inscritos em circunferências; Desenho geométrico; Bissetriz.	Compreender e realizar a construção de quadriláteros inscritos em circunferências distintas utilizando o <i>GeoGebra</i> , bem como resolver problemas relacionados às construções geométricas e à elaboração de fórmulas aritméticas para dedução de medidas.	5.3.1
6º Dia	Quadriláteros inscritos em circunferências; Teorema de Ptolomeu e algumas aplicações; Teoremas que se desprendem do Teorema de Ptolomeu.	Compreender e aplicar fórmulas e métodos que possibilitem a resolução de problemas envolvendo quadriláteros inscritos em circunferências.	5.3.2

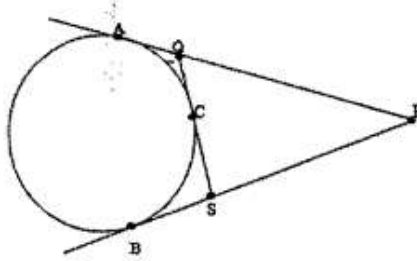
Encontro	Conteúdo	Descrição	TCC
7º Dia	Quadriláteros ex-inscritos em circunferência; Desenho geométrico; Teorema de Steiner.	Compreender e executar a construção de quadriláteros ex-inscritos, bem como verificar metodicamente se um quadrilátero é ex-inscrito. Além disso, aplicar procedimentos matemáticos para resolver problemas relacionados às construções e formular expressões aritméticas que permitam a dedução de medidas desconhecidas.	5.4.1

ANEXO A – PROBLEMAS ADICIONAIS

1. Questão 28 - CPAEAM - 2005

Na figura abaixo $\overline{PA} = 13$ cm, $\overline{QC} = 2$ cm, $\overline{CS} = 3$ cm e A , B e C são pontos de tangência entre as retas e a circunferência.

Figura 64 – CPAEAM-2025



Assim, é correto afirmar que a área do triângulo PQS , em cm^2 , é igual a:

- (A) $3\sqrt{29}$
- (B) $4\sqrt{39}$
- (C) $5\sqrt{19}$
- (D) $4\sqrt{61}$
- (E) $6\sqrt{21}$

2. Questão 14 - IME - 2017

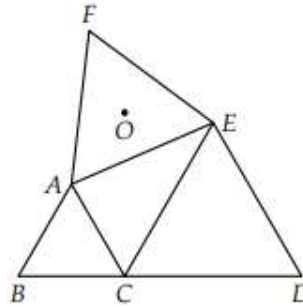
Seja um heptágono regular de lado l cuja menor diagonal vale d . O valor da maior diagonal satisfaz a qual das expressões?

- (A) $\frac{l \cdot d}{d - l}$
- (B) $\frac{d^2}{d - l}$
- (C) $\frac{l \cdot d}{d + l}$
- (D) $\frac{l^2}{d + l}$
- (E) $\frac{3d}{2}$

3. Questão 13 - Jacob Palis JR - 2025

Na figura a seguir, ABC , CDE e AEF são triângulos equiláteros, com C sobre o segmento BD . O ponto O é o centro do triângulo AEF .

Figura 65 – Jacob Palis JR - 2025



A medida do ângulo $\angle ACO$

- (A) É sempre 30° .
- (B) É sempre 60° .
- (C) É 30° ou 60° , assumindo os dois valores dependendo de C .
- (D) É 15° ou 30° , assumindo os dois valores dependendo de C .
- (E) Pode assumir infinitos valores.

4. Questão 18 - ITA - 2015

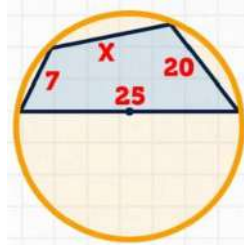
Num triângulo PQR , considere os pontos M e N pertencentes aos lados $\overline{PQ}$ e $\overline{PR}$, respectivamente, tais que o segmento $\overline{MN}$ seja tangente à circunferência inscrita ao triângulo PQR . Sabendo-se que o perímetro do triângulo PQR é 25 e que a medida de $\overline{QR}$ é 10, então o perímetro do triângulo PMN é igual a

- (A) 5.
- (B) 6.
- (C) 8.
- (D) 10.
- (E) 15.

5. Questão no Youtube - Universo narrado - 2025

Determine o valor de x no quadrilátero inscrito na circunferência.

Figura 66 – Universo narrado - 2025



<https://www.youtube.com/watch?v=NhP5eneMmLA&t=327s>

6. Questão 2 - CPACN(prova amarela) - 2025

Considere as informações a seguir referentes a duas circunferências L_1 e L_2 .

L_1 : Está inscrita num triângulo equilátero ABC , de altura H e seu raio é R .

L_2 : Tem raio r , está na superfície do mesmo triângulo ABC de L_1 , tangenciando internamente os lados AB e BC , e tangenciando externamente a circunferência L_1 .

É correto afirmar que a expressão $E = \frac{R-r}{H}$ é igual a:

- (A) $1/2$.
- (B) $1/3$.
- (C) $2/5$.
- (D) $2/9$.
- (E) $3/7$.

7. Questão 4 - CPACN(prova amarela) - 2023

Sejam x e y ($x < y$) as medidas das diagonais distintas de um heptágono regular cujo lado tem medida igual a k . Assinale a opção que apresenta de forma correta uma possível relação entre k , x e y .

- (A) $k^2y + kx = xy$.
- (B) $k^2y + kx = x^2y$.
- (C) $y^2 = xy + k^2$.
- (D) $x^2 = ky + kx$.
- (E) $x^2 = k^2y - ky$.

8. CPACN(prova amarela) - 2025

Um triângulo retângulo isósceles está inscrito na circunferência L_1 e circunscrito a circunferência L_2 . Se os catetos desse triângulo medem 5 cm e as áreas de L_1 e L_2 são respectivamente, S_1 e S_2 , é correto afirmar que a razão $\frac{S_1}{S_2}$ é:

(A) $7 - 2\sqrt{2}$.

(B) $\frac{10 + \sqrt{5}}{3}$.

(C) $\frac{5 + 2\sqrt{3}}{2}$.

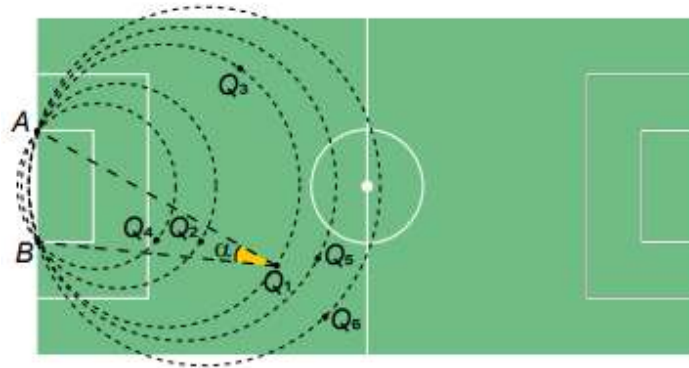
(D) $6 - \sqrt{2}$.

(E) $3 + 2\sqrt{2}$.

9. Questão 169 - ENEM(caderno verde) - 2023

Num certo momento de um jogo digital, a tela apresenta a imagem representada na figura. O ponto Q_1 representa a posição de um jogador que está com a bola, os pontos Q_2 , Q_3 , Q_4 , Q_5 e Q_6 também indicam posições de jogadores da mesma equipe, e os pontos A e B indicam os dois pés da trave mais próxima deles. No momento da partida retratado, o jogador Q_1 tem a posse da bola, que será passada para um dos outros jogadores das posições Q_n , $n \in \{2, 3, 4, 5, 6\}$, cujo ângulo $\widehat{AQ_nB}$ tenha a mesma medida do ângulo $\alpha = \widehat{AQ_1B}$.

Figura 67 – ENEM(caderno verde) - 2023



Qual é o jogador que receberá a bola?

(A) Q_2 .

(B) Q_3 .

(C) Q_4 .

(D) Q_5 .

(E) Q_6 .