INSTITUTO FEDERAL DA PARAÍBA
CAMPUS CAJAZEIRAS
CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

LUCAS SARMENTO DA SILVA

UM ESTUDO SOBRE NÚMEROS PERFEITOS

CAJAZEIRAS
2026

LUCAS SARMENTO DA SILVA

UM ESTUDO SOBRE NÚMEROS PERFEITOS

TCC apresentado junto ao **Curso de Licenciatura em Matemática** do **Instituto Federal da Paraíba**, como requisito à obtenção do título de **Licenciado em Matemática**.

Orientador(a):

Prof. Dr. Vinicius Martins Teodosio Rocha.

Cajazeiras

2026

LUCAS SARMENTO DA SILVA

UM ESTUDO SOBRE NÚMEROS PERFEITOS

TCC do **Curso de Licenciatura em Matemática** do **Instituto Federal da Paraíba**, como requisito à obtenção do título de **Licenciado em Matemática**.

Data de aprovação: 30/07/2026

Banca Examinadora:

Documento assinado digitalmente
gov.br
VINICIUS MARTINS TEODOSIO ROCHA
Data: 06/08/2026 09:12:02-0300
Verifique em https://validar.iti.gov.br

Prof. Dr. Vinicius Martins Teodosio Rocha
Instituto Federal da Paraíba - IFPB

Documento assinado digitalmente
gov.br
JOSE DOVAL NUNES MARTINS
Data: 06/08/2026 12:43:43-0300
Verifique em https://validar.iti.gov.br

Prof. Me. Jose Doval Nunes Martins
Instituto Federal da Paraíba - IFPB

Documento assinado digitalmente
gov.br
FRANCISCO AURELIANO VIDAL
Data: 06/08/2026 11:23:12-0300
Verifique em https://validar.iti.gov.br

Prof. Me. Francisco Aureliano Vidal
Instituto Federal da Paraíba - IFPB

IFPB / Campus Cajazeiras
Coordenação de Biblioteca
Biblioteca Prof. Ribamar da Silva
Catalogação na fonte: Cícero Luciano Félix CRB-15/750

S586e Silva, Lucas Sarmento da.
Um estudo sobre números perfeitos / Lucas Sarmento da Silva.– 2026.

46f. : il.

Trabalho de Conclusão de Curso (Licenciatura em Matemática) - Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia da Paraíba, Cajazeiras, 2026.

Orientador(a): Prof. Dr. Vinicius Martins Teodosio Rocha.

1. Teoria dos números. 2. Números perfeitos. 3. Números primos. 4. Teoremas. I. Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia da Paraíba. II. Título.

IFPB/CZ CDU: 51(043.2)

Venho dedicar esse trabalho a Marcelo Rufino Sarmento, Laudiana Alves da Silva, Rebeca Sarmento da Silva e Matheus Sarmento da Silva.

AGRADECIMENTOS

Quero agradecer primeiramente a Deus pela sua infinita bondade e por ter me dado a vida por ter me protegido durante todo o período da graduação.

Agradecer ao meu pai, Marcelo Rufino Sarmento, minha mãe, Laudiana Alves da Silva, minha irmã, Rebeca Sarmento da Silva e meu irmão Matheus Sarmento da Silva. Por ter me apoiado de alguma forma nesse longo período de graduação, seja financeiramente para pagar o ônibus ou comer algum lanche na faculdade, também quando chegava tarde estavam me esperam no ponto de ônibus.

Agradecer também a todos os meus colegas do curso de Licenciatura em matemática - Cajazeiras que de alguma forma contribuiu para meu aprendizado destacando: Dalton Rodrigues da Silva e Francisca Araujo Barbosa muito obrigado por fazerem parte da minha formação durante todo esse período, foi muito gratificante ter vocês do lado.

Agradecer a todos os professores do curso de Licenciatura em matemática do Campus Cajazeiras, em especial ao coordenador do curso Me. Francisco Aureliano Vidal. Agradecer ao Dr. Vinícius Martins Teodósio Rocha por aceitar ser meu orientador e pela paciência para ajudar na construção do meu TCC que praticamente me alfabetizou de novo pois eu não fazia ideia de como é escrever um TCC, sou muito grato por isso.

"O sucesso é a soma de pequenos esforços repetidos dia após dia."

Robert Collier, O Segredo das Eras

RESUMO

Nesse trabalho, estudamos alguns tópicos da teoria dos números focando principalmente nos números perfeitos, primos de Mersenne e a sua ligação com o teorema de Euclides-Euler, também a sua parte histórica e a contribuição de cada matemático ao longo do tempo e da sua importância para o tema. Mostramos alguns conceitos fundamentais necessários para o desenvolvimento das demonstrações e dos resultados discutidos ao longo do texto. Com objetivo de compreender as características desses números, evidenciando problemas que permanecem em aberto, como a existência de números perfeitos ímpares e a infinitude dos números perfeitos pares. A pesquisa foi desenvolvida por meio de uma revisão bibliográfica, fundamentada em livros, artigos científicos e materiais especializados. A conclusão foi que todos os números perfeitos conhecidos são pares e que encontrar um número perfeito par resume a encontrar um novo primo de Mersenne, apesar de grandes avanços com ajuda computacionais, principalmente com o projeto GIMPS, ainda existem problemas sem soluções. Concluindo que os números perfeitos é um tema relevante na matemática, reunindo aspectos históricos, teóricos e computacionais, contribuindo na teoria dos números e o incentivo para novas pesquisas na área.

Palavras-chave: Teoria dos Números, Números Perfeitos, Primos de Mersenne.

ABSTRACT

In this work, we studied some topics in Number Theory, focusing mainly on perfect numbers, Mersenne primes, and their connection with the Euclid-Euler theorem, as well as their historical development and the contributions of different mathematicians throughout time and their importance to the subject. We presented some fundamental concepts necessary for the development of the proofs and results discussed throughout the text. The objective was to understand the characteristics of these numbers, highlighting open problems such as the existence of odd perfect numbers and the infinitude of even perfect numbers. The research was developed through a bibliographic review, based on books, scientific articles, and specialized materials. The conclusion was that all known perfect numbers are even and that finding a new even perfect number is equivalent to finding a new Mersenne prime. Despite significant advances achieved through computational methods, especially with the GIMPS project, some problems related to perfect numbers remain unsolved. It is concluded that perfect numbers are a relevant topic in mathematics, bringing together historical, theoretical, and computational aspects, contributing to Number Theory and encouraging further research in the area.

Keywords: Number Theory; Perfect Numbers; Mersenne Primes.

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

O estudo dos números perfeitos remonta à escola pitagórica no século VI a.C. (Frei, 2002). Período de influência da escola pitagórica, os estudos relacionados à teoria dos números já apresentavam grande interesse pelos números e suas propriedades. Nas escolas pitagóricas, onde a ideia central era explicar o universo através dos números e havia uma conexão entre o estudo de religião e a matemática, os números eram classificados de diversas formas. Um número é chamado de número primo se ele só for divisível por 1 ou por ele mesmo. Por exemplo, o número 11 é primo pois só é divisível por 1 ou por 11. Já o conceito de números perfeitos é abordado de forma diferente, um número era classificado como perfeito se a soma de seus divisores positivos (exceto o próprio número) é exatamente igual a esse número. Por exemplo o número 6, cujos divisores são 1, 2 e 3, somados resultam no número 6, assim ele é um número perfeito. Pitágoras buscava propriedades especiais desses números e buscavam significados para eles, no entanto ainda não tinha encontrado uma fórmula para encontrar esses números.

Por volta de 300 a.C. O matemático grego, Euclides, no seu livro Os elementos, registra uma fórmula para gerar números perfeitos. Na época, só eram conhecidos 4 números perfeitos, a saber 6, 28, 496 e 8128. No seu livro IX dos elementos, na proposição 36, descreve um procedimento que fornece sempre números perfeitos. Na linguagem de Euclides, o procedimento era descrito da seguinte forma:

> Caso números, quantos quer que sejam, a partir da unidade, sejam expostos, continuadamente, na proporção duplicada, até que o que foi composto todo junto se torne primo, e o todo junto, tendo sido multiplicado pelo último, faça algum, o produzido será perfeito. (Euclides, 2009, Prop. 36)

Na linguagem matemática contemporânea, o processo pode ser descrito da seguinte forma: se um número da forma $1+2+2^2+...+2^n$ - 1 é primo, então o número $2^n \times 2^{n+1}-1$ é um número perfeito. A fórmula fornecida por Euclides resulta em um procedimento simples para encontrar novos números perfeitos, contudo, se faz necessário discutir a primalidade de $1+2+\cdots+2^n-1$.

Como consequência do que foi descoberto, segundo (O'Connor; Robertson, 2020), o matemático Nicómaco de Gerasa fez 4 afirmações (sem demonstração) com base nos 4 primeiros números perfeitos. Afirmando que:

- O n-ésimo número perfeito tem n dígitos.

- Todos os números perfeitos são pares.
- Todos os números perfeitos terminam em 6 e 8 alternando entre esses números.
- O algoritmo de Euclides é capaz de gerar todos os números perfeitos.

Assim, todo número perfeito seria dessa forma e por fim que existiriam infinitos números perfeitos, no entanto algumas dessas afirmações foram sendo negadas a partir dos próximos números perfeitos encontrados.

Os matemáticos árabes também tinham grande interesse nos números perfeitos, em destaque o matemático árabe Ismail ibn Ibrahim ibn Fallus (1194-1239), que apresentou em seu tratado uma lista com 10 números que eram considerados perfeitos, porém, apenas 7 dos 10 números eram realmente perfeitos. Mas, ainda, tal resultado ainda não tinha chegado na Europa.

A descoberta do quinto número perfeito ocorreu no século XV, onde o matemático Hudalrichus Regius tornou pública sua descoberta do número perfeito 33550336. Com a descoberta desse número, provou-se errônea a primeira afirmação de Nicómaco, pois, o quinto número perfeito tem 8 dígitos. Já com a descoberta do sexto número perfeito, 8589869056 que também termina com 6, refutou-se a terceira afirmação de Nicómaco. Fermat também teve uma grande contribuição a cerca dos números perfeitos. Ele escreveu para Mersenne as suas descobertas sobre os números perfeitos. Depois de escrever para Mersenne o que tinha descoberto, escreveu a Frenicle de Bessy em 18 de outubro de 1640. Apresentando o pequeno teorema de Fermat, um teorema que foi encontrado com consequência dos estudos sobre os números perfeitos. Mersenne gostou muito dos estudos de Fermat sobre os números perfeitos e como isso publicou suas afirmações próprias, afirmações que eram de bastante avanço na época e por muitos anos. Em 1644, ele publicou Cogitata physica mathematica, onde afirma que $2^p - 1$ é primo, e portanto $2^{p-1} \times (2^p - 1)$ é um número perfeito, para $p = 2, 3, 5, 7, 13, 17, 19, 31, 67, 127, 257$. Tratava-se apenas de uma conjectura; contudo, suas proposições revelaram-se notavelmente precisas.

Euler também teve grandes contribuições acerca dos números perfeitos. Ele descobriu o oitavo número perfeito 2305843008139952128, que foi descoberto depois de 125 anos. Também provou que todo número perfeito par tinha a forma descrita por Euclides, $2^{p-1} \times (2^p - 1)$, fornecendo uma espécie de recíproca para a afirmação de Euclides. Também que terminam em 6 ou 8 (mas não alternadamente). Euler também estudou a: existência de números perfeitos ímpares. Provou que todo número perfeito ímpar tinha que ter essa forma

$$n = p^k \cdot m^2.$$

O perfeito encontrado por Euler permaneceu por 150 anos sendo o maior número encontrado. Outro matemático que fez avanços importantes foi Édouard Lucas, que criou a base computacional para encontrar os primos de Mersenne, portanto, números perfeito.

Com o passar do tempo houve muitos erros e acertos, alguns erros que foram corrigidos com o tempo. O processo para encontrar números perfeitos pares foi bastante duradouro e permanece como campo de pesquisa atual, associado ao estudo sobre primos de Mersenne. Houve, também, tentativas de demostrar que números perfeitos impares não existiam. Em 1888, o matemático inglês James Sylvester provou que qualquer número perfeito ímpar tem que ter pelo menos 4 fatores primos distintos, esse limite na quantidade de primos na fatoração de um possível perfeito ímpar foi sendo aprimorada e hoje sabemos que um suposto perfeito ímpar deve possuir 8 fatores primos distintos e 29 fatores primos que não precisam ser distintos, porém o problema ainda segue sem solução. Atualmente existem 52 números perfeitos encontrados, o último encontrado manualmente foi em 1911, todos os outros foram encontrados por computadores, os computadores facilitaram muito para encontrar novos números. O maior número perfeito conhecido é

$$2^{136279840} \times (2^{136279841} - 1),$$

que foi encontrado em 2024. Este é o 52° número perfeito e tem mais de 82 milhões de dígitos.

Nesse trabalho estudaremos alguns tópicos da teoria dos números focando principalmente nos números perfeitos e primos de Mersenne. Também para alcançar nosso objetivo principal vamos apresentar conceitos de divisibilidades, números primos e funções aritméticas. Esse problema matemático vem sendo estudado desde a antiguidade por grande matemáticos, como Euler, Fermat, Mersenne e outros. Com o objetivo de encontrar formulas matemáticas que possa expressar todos os números perfeitos.

Ainda nos tempos de hoje com ajuda computacional matemáticos procuram novos números perfeitos, até o momento sendo conhecidos 52 números perfeitos. Apesar de Euler ter encontrado uma fórmula para expressar um número perfeito par, os números perfeitos ímpares ainda são um mistério.

Trata-se de um trabalho de tcc teórico e histórico, na parte histórica utilizamos como base (Eves, 2004), (Boyer; Merzbach, 2012), (Daniel, 2012), (Veritasium em Português, 2023), analisamos artigos na teoria dos números, especificamente nos números perfeitos. O objetivo principal desse trabalho é estudar os números perfeitos, abordando seus aspectos históricos, propriedades e caracterização, com ênfase no teorema de Euclides-Euler e na relação entre números perfeitos pares e primos de Mersenne. E tem como objetivo específico, apresentar aspectos históricos relacionados ao estudo dos números perfeitos,

conceitos básicos de teoria dos números, estudar as funções aritméticas relacionadas à soma dos divisores, apresentar e demostrar o teorema de Euclides-Euler, relação dos números perfeitos com os primos de Mersenne, apresentar propriedades e representações dos números perfeitos pares, discutir os números perfeitos ímpares, também questões em aberto relacionadas aos números perfeitos. A escolha desse tema foi o interesse em teoria dos números, em destaque pelos números perfeitos e sua parte histórica que mesmo sendo um tema que vem sendo estudado desde da antiguidade ainda existem assuntos em aberto, além da sua ligação com os primos de Mersenne, despertou o interesse em aprofundar seu estudo e compreender suas principais propriedades.

Para isso, no primeiro capítulo relembramos conceitos de divisibilidade, números primos, teorema fundamental da aritmética, primos de Mersenne e definição de números perfeitos.

No segundo capítulo descrevemos o que é um função aritmética, estudamos especificamente a função $\sigma(n)$, que fornece a soma dos divisores positivos de um inteiro n, e fazemos uma conexão com os números perfeitos.

No terceiro capítulo apresentamos a prova do teorema de Euclides-Euler que serviu de base para encontrar novos números perfeitos e apresentação dos 5 últimos números perfeitos encontrados pelo projeto GIMPS (Great Internet Mersenne Prime Search).

No quarto capítulo falamos um pouco sobre o que é o projeto GIMPS e como ele funciona. Um fato curioso e histórico que todo número perfeito é um número triangular e também um número hexagonal, também que todo número perfeito par, exceto o 6, pode ser escrito como a soma dos cubos dos primeiros números ímpares consecutivos e nesse capítulo também vamos ver a representação binária dos números perfeitos e uma breve citação sobre os números perfeitos ímpares.

2 CONCEITOS BÁSICOS

Nesse capítulo apresentamos as definições e resultados básicos que serão utilizados para discutir os conceitos e resultados no decorrer do trabalho (divisibilidade, primos, teorema fundamental da aritmética, primos de Mersenne e números perfeitos). Foram utilizadas como referencias os textos (Hardy; Wright, 1960), (Castro, 2010), (Filho, 1981), (Santos, 2020).

2.1 DIVISIBILIDADE

A divisibilidade desempenha um papel fundamental na Teoria dos Números, tendo um papel de grande importância nos estudos das propriedades dos números inteiros. E a partir desse conceito, estabelecer resultados importantes em relação aos números primos.

Definição 2.1. Se a e b são inteiros, dizemos que a divide b, denotamos por $a|b$, se existir um inteiro c tal que $b = a \cdot c$. É equivalente dizer que b é um múltiplo de a.

Exemplo 2.2. Como $10 = 2 \times 5$, podemos dizer que $2|10$ e $5|10$, ou seja, 2 e 5 são divisores de 10.

Se a não divide b, denotamos $a \nmid b$. Por exemplo, temos que $5|10$ mas $10 \nmid 5$.

Proposição 2.3. *Se a, b e c são inteiros, $a|b$ e $b|c$, então $a|c$.*

Demonstração. Como $a|b$ e $b|c$, então existem inteiros k e m, tal que $b = k \cdot a$ e $c = m \cdot b$. Substituindo b na equação $c = m \cdot b$ vamos obter a seguinte equação $c = m \cdot k \cdot a$, como $m \cdot k$ é inteiro implica que $a|c$.

□

Exemplo 2.4. Como $2|8$ e $8|40$, então $2|40$.

Proposição 2.5. *Se $a \mid b$ e $c \in \mathbb{Z}$, com $c \neq 0$, então $ac \mid bc$.*

Demonstração. Como $a|b$, então $b = ka$. Multiplicando tudo por $c \in \mathbb{Z}$, temos que $bc = kca$ implica $ac|bc$ □

Proposição 2.6. *Se $a \mid b$ e $a \mid c$, então $a \mid (b+c)$.*

Demonstração. Se $a|b$ e $a|c$, então existem k e m inteiros tal que $b = ak$ e $c = am$. Somando essas duas equações vem $b + c = ak + am = a(k + m)$, assim $a|b + c$. □

Proposição 2.7. *Se* $a,b,c,m,n \in \mathbb{Z}$*,* $c \mid a$ *e* $c \mid b$*, então* $c \mid (ma+nb)$*.*

Demonstração. Se $c|a$ e $c|b$, então existem k e q inteiros tal que $a = ck$ e $c+bq$. Multiplicando as duas equações por m e n respectivamente obtemos $ma = mkc$ e $nb = nqc$. Somando as duas equações vem $ma+nb = (mk+nq)c$, isso implica que $c|(ma+nb)$. □

Exemplo 2.8. Como $3|15$ e $3|42$, então $3|(8\times 15-7\times 42)$.

Teorema 2.9. *A divisão tem as seguintes propriedades:*

(i) $n \mid n$

(ii) $d \mid n \Rightarrow ad \mid an$

(iii) $ad \mid an$ *e* $a \neq 0 \Rightarrow d \mid n$

(iv) $1 \mid n$

(v) $n \mid 0$

(vi) $d \mid n$ *e* $n \neq 0 \Rightarrow |d| \leq |n|$

(vii) $d \mid n$ *e* $n \mid d \Rightarrow |d| = |n|$

(viii) $d \mid n$ *e* $d \neq 0 \Rightarrow (n/d) \mid n$

2.2 NÚMEROS PRIMOS

Os números primos vem sendo estudados desde da Grécia antiga entre os gregos e principalmente na escola pitagórica (aprox. 500 - a.C.), fundada por Pitágoras de Samos (c. 570–495 a.C.) foi um filósofo grego que fez importantes contribuições para a matemática, a astronomia e a teoria da música. O teorema hoje conhecido como teorema de Pitágoras já era conhecido pelos babilônios mil anos antes, mas ele pode ter sido o primeiro a demonstrá-lo.

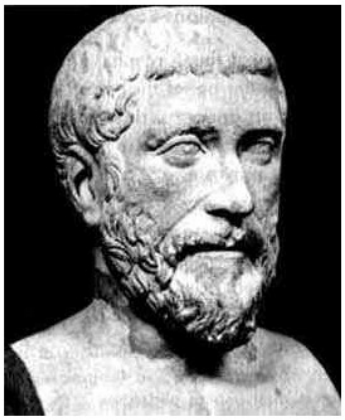


Figura 2.1 – Pitágoras de Samos (c. 570–495 a.C.).
Fonte: Adaptado de O'Connor e Robertson (MacTutor History of Mathematics Archive).

Os pitagóricos Foram os primeiros a estudar o que tinha por trás desses números. Um marco importante acerca dos números primos foi a publicação de Euclides do seu livro IX dos elementos que ele faz uma demostração que existem infinitos números primos. Abaixo vamos fornecer a definição formal de um número primo.

Definição 2.10. Dizemos que um número inteiro $p > 0$, é um número **primo** se, p possui exatamente dois divisores positivos: p e 1.

Exemplo 2.11. 2, 3, 5, 7 e 11 são números primos.

Definição 2.12. Um número inteiro >1 que tem mais que dois divisores positivos é chamado de número **composto**.

Exemplo 2.13. 4, 6, 8 e 9 são números compostos.

Observação 2.14. O número 1 não é primo e nem composto. O número 2 é o único número par que também é primo.

Observação 2.15. Se p e q são primos e $p \mid q$, então $p = q$. Se p é um primo e $p \nmid a$, então $mdc(p,a) = 1$

Demonstração. Como $mdc(a,p) = d \Rightarrow d \mid p$ e $d \mid a$, como p é um número primo e $d \mid p$, então $d = 1$ ou $d = p$. Temos que $d = 1$ porque $p \nmid a$ por hipótese. Portanto, $(p,a) = 1$ □

Se n é um número composto, então vai existir um divisor n_1 de n, tal que $n_1 \neq 1$ e $n_1 \neq n$. Assim, vai existir um n_2 tal que $n = n_1 n_2$, com $1 < n_1 < n$ e $1 < n_2 < n$.

Proposição 2.16. *Sejam a,b e p números inteiros, Se p é primo e $p \mid ab$, então $p \mid a$ ou $p \mid b$. Demostração disponível em (Cruz, 2013).*

Corolário 2.17. *Se $p, p_1, p_2, \ldots, p_n$ são números primos e, se $p \mid p_1 \cdot p_2 \cdot \cdots \cdot p_n$, então $p = p_i$, para algum $i = 1, 2, \ldots, n$. Demostração disponível em (Cruz, 2013).*

2.3 TEOREMA FUNDAMENTAL DA ARITMÉTICA

O Teorema Fundamental da Aritmética (TFA) tem um papel importante na teoria dos números, pois reduz os problemas envolvendo os inteiros aos números primos. Porque todo número inteiro maior que 1 pode ser decomposto em uma fatoração única de primos, assim a partir dessa fatoração facilitando o estudo de muitas propriedades aritméticas, principalmente no estudo das funções aritméticas e na descrição dos números perfeitos que vai ser apresentado posteriormente. A prova do Teorema Fundamental da Aritmética foi fornecida por Euclides de Alexandria, nos livros Os Elementos. Especificamente no livro 9, proposição 14. Mas a sua primeira demonstração matemática completa e rigorosa foi feita por Carl Friedrich Gauss em 1801, ano em que publicou formalmente a prova no seu livro [Disquisitiones Arithmeticae]. Euclides de Alexandria (325 a.C - 265 a.C) foi um matemático grego mais conhecido por seu tratado sobre geometria: O livro Os Elementos, influenciou o desenvolvimento da matemática ocidental por mais de 2000 anos.

Figura 2.2 – Euclides (c. 325–265 a.C.).
Fonte: Adaptado de O'Connor e Robertson (MacTutor History of Mathematics Archive).

Definição 2.18. Todo número inteiro $n > 1$ ou é primo ou pode ser escrito de maneira única com um produto de números primos.

Demonstração. Vamos utilizar indução em n. Se n é primo (inclui $n = 2$), o resultado segue. Nossa Hipótese de Indução ($H.I.$) diz que vamos supor que o resultado vale para todo natural menor do que n. Agora vamos mostrar que vale para n. Como já fizemos para n primo, agora vamos considerar para n composto. Segue então que $n = n_1 n_2$, com $1 < n_1 < n$ e $1 < n_2 < n$. Pela ($H.I.$), existem primos $p_1, \ldots, p_r$ e $q_1, \ldots, q_s$ tais

que $n_1 = p_1 \dots p_r$ e $n_2 = q_1 \dots q_s$. Logo, $n = n_1 n_2 = p_1 \dots p_r q_1 \dots q_s$. Assim, fica provada a existência da decomposição em números primos.

Agora vamos provar a unicidade da fatoração.

Se o número já é primo, o resultado já fica provado, pois a decomposição é apenas o próprio número. Para o caso geral, vamos supor que n possua duas decomposições, tais que $n = p_1 \dots p_r$ e $n = q_1 \dots q_s$, em que os p_i e os q_j são números primos. Nesse caso, temos que $p_1 \mid q_1 \dots q_s$. Pelo corolário já citado, segue que $p_1 = q_j$ para algum j. Podemos supor, sem perda de generalidade, que q_j é q_1. Assim, temos a igualdade $p_1 p_2 \dots p_r = p_1 q_2 \dots q_s$, o que implica em $p_2 \dots p_r = q_2 \dots q_s$. Como o produto $p_2 \dots p_r$ é menor do que n, pela Hipótese de Indução ($H.I.$), temos que $r - 1 = s - 1$ e que os primos p_i e q_j são iguais aos pares para $i = 2, \dots, r$. Logo, conclui-se que $r = s$ e, como já tínhamos $p_1 = q_1$, segue que os primos p_i e q_j são iguais aos pares para todo $i = 1, 2, \dots, r$. □

O teorema a seguir generaliza o TFA para todos os inteiros exceto para $n \neq -1, 0, 1$, com uma diferença para os inteiros positivos a presença de $\pm$, mas mantendo a unicidade da fatoração em primos, esse será o a notação utilizada para demostrações nas próximas seções.

Teorema 2.19. *Dado um inteiro $n \neq -1, 0, 1$ existem primos $p_1 < ... < p_r$ e $\alpha_1, ...\alpha_r \in \mathbb{N}^*$, univocamente determinado, tais que $n = \pm p_1^{\alpha_1} ... p_r^{\alpha_r}$.*

Exemplo 2.20. Para $n = 120 = 2^3 \cdot 3^1 \cdot 5^1$. Para $n = -45 = -3^2 \cdot 5^1$. Para $n = 3600 = 2^4 \cdot 3^2 \cdot 5^2$.

Ao longo do trabalho será de grande destaque números da forma $2^m - 1$. Os números dessa forma têm um papel bastante importante para caracterizar os números perfeitos, especialmente no teorema de Euclides-Euler que apresentamos posteriormente. Antes de introduzir os Primos de Mersenne fazemos um breve estudo desses números, apresentar propriedades importantes e mostrar a importância deles para apresentar os números perfeitos.

Analisando os primeiros números da forma $2^m - 1$, com m inteiro positivo, observamos um padrão que indica a primalidade dos números da forma $2^m - 1$ com m primo.

Exemplo 2.21. Para $m = 2$, temos que $2^2 - 1 = 3$, que é primo. Para $m = 3$, temos que $2^3 - 1 = 7$, que é primo. Para $m = 5$, temos que $2^5 - 1 = 31$, que é primo. Para $m = 7$, temos que $2^7 - 1 = 127$, que é primo.

De fato, o resultado a seguir mostra que a única forma de $2^m - 1$ ser primo é se m o for.

Lema 2.22. *Se $2^m - 1$ é primo, então m é primo.*

Demonstração. Vamos supor que m é composto, então ele será da forma $m = a \cdot b$, com $a, b > 1$.

$$2^m - 1 = 2^{ab} - 1 = (2^a)^b - 1 = (2^a - 1)\left((2^a)^b + (2^a)^{b-1} + \cdots + (2^a) + 1\right) \tag{1}$$

Agora, para que $2^m - 1$ seja composto nenhum dos fatores acima deve ser igual a 1.

- Para $2^a - 1$: Como $a > 1$, então $2^a - 1 \geq 3$.
- Agora analisando o segundo fator, como $b > 1$ e o segundo termo já tem o 1 na sua composição, então ele é estritamente maior do que 1.

Portanto, como $2^m - 1$ foi escrito como produto de dois números maiores que 1, ele é composto. Por contrapositiva, se $2^m - 1$ for primo m é primo. □

No entanto, ao se perguntar se a volta é válida, a resposta é negativa. O exemplo a seguir mostra que nem todos os números da forma $2^m - 1$ com m primos são primos.

Exemplo 2.23. Consideremos $m = 11$. Assim $2^{11} - 1 = 2047 = 23 \times 89$, que é composto. Portanto, m primo não implica necessariamente que $2^m - 1$ seja primo.

2.4 PRIMOS DE MERSENNE

Marin Mersenne (1588 - 1648) foi um monge francês mais conhecido por seu papel como intermediário na correspondência entre filósofos e cientistas eminentes e por seu trabalho na teoria dos números.

Figura 2.3 – Marin Mersenne (1588–1648).
Fonte: Adaptado de O'Connor e Robertson (MacTutor History of Mathematics Archive).

Em 1644 Publicou o trabalho Cogitata Physico-Mathematica onde ele fala de números perfeitos e fala sobre os números da forma $2^p - 1$, apresentando outros números dessa forma diferente dos que já eram conhecidos por Nicômaco de Gerasa que eram o $6, 28, 496$ e 8128. Assim surgindo a Conjectura de Mersenne, onde ele achava que $2^p - 1$ é primo para $p = 2, 3, 5, 7, 13, 17, 19, 31, 67, 127, 257$. Mersenne cometeu erros 67 e 257 não são primos e esqueceu também de mencionar $61, 89$ e 107. Encontrar um primo de Mersenne é encontrar o próximo número perfeito, pois todo número perfeito par tem um primo de Mersenne nos seus fatores.

Definição 2.24. Os números de Mersenne são definidos dessa forma

$$M_p = 2^p - 1$$

Se M_p for primo, ele é chamado de **primo de Mersenne.**

Exemplo 2.25. Para $n = 2$, temos que $2^2 - 1 = 3$, que é primo. Para $n = 3$, temos que $2^3 - 1 = 7$, que é primo. Para $n = 5$, temos que $2^5 - 1 = 31$, que é primo. Para $n = 7$, temos que $2^7 - 1 = 127$, que também é um número primo.

2.5 NÚMEROS PERFEITOS

Os números perfeitos é um tema bastante importante na teoria dos números e é o tema principal desse trabalho, desde da antiguidade vem sendo estudado pelos matemáticos as suas propriedades e o desenvolvimento de propriedades relacionada aos seus divisores. Aqui apresentamos a definição de números perfeitos, deficientes e abundantes e alguns exemplos para entender a classificação e uma base para o que vem posteriormente.

Definição 2.26. Definição: Um número natural n é chamado de **número perfeito** se ele é igual a soma dos seus divisores positivos, retirando o próprio n.

Definição 2.27. Seja N um número natural. Dizemos que:

- N é um número perfeito se a soma dos seus divisores é igual a N;
- N é um número deficiente se a soma dos seus divisores é menor do que N;
- N é um número abundante se a soma dos seus divisores é maior do que N.

Corolário 2.28. *Se N é perfeito, então $\sum_{d|N} \frac{1}{d} = 2$.*

Exemplo 2.29. Tomando $N = 6$, os divisores de 6 são $1, 2, 3$ e 6. Aplicando na fórmula:

$$\sum_{d|6} \frac{1}{d} = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} = 2$$

Portanto, 6 é um número perfeito.

Exemplo 2.30. Tomando $N = 8$, os divisores de 8 são $1, 2, 4$ e 8. Aplicando na fórmula:

$$\sum_{d|8} \frac{1}{d} = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} = 1,875$$

Assim, 8 é um número deficiente.

Exemplo 2.31. Tomando $N = 12$, os divisores de 12 são $1, 2, 3, 4, 6$ e 12. Aplicando na fórmula:

$$\sum_{d|12} \frac{1}{d} = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} = \frac{28}{12} \approx 2,33$$

Com isso, 12 é um número abundante.

Nos exemplos a seguir vou trazer os 4 primeiros números perfeitos conhecidos na antiguidade e também listar os seus divisores.

Exemplo 2.32. Considere o número 6, cujos divisores próprios são $1, 2, 3$, Note que $6 = 1 + 2 + 3 = 6$, logo 6 é um número perfeito. Os divisores próprios de 28 são $1, 2, 4, 7, 14$, assim $28 = 1 + 2 + 4 + 7 + 14 = 28$ e portanto 28 é um número perfeito. Os números perfeitos seguintes são: 496, cujos divisores próprios são $1, 2, 4, 8, 16, 31, 62, 124$ e 248, também o número perfeito 8128 cujos divisores são $1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 127, 254, 508, 1016, 2032$ e 4064.

Observação 2.33. Percebemos que os números perfeitos apresentados vão ficando cada vez maiores, tornando inviável listar todos os seus divisores com a aparição de números cada vez maiores. Nicômaco de Gerasa já tinha observado esse comportamento, que conjecturou que cada novo número perfeito possuiria exatamente um algarismo decimal a mais que o anterior. Porém, só é valida para os 4 primeiros números e não é válida para geral. Pois, o 5° número perfeito é 33550336 e ele tem 8 dígitos.

3 FUNÇÕES ARITMÉTICAS

As funções aritméticas desempenham um papel fundamental na Teoria dos Números, pois permitem descrever propriedades importantes do inteiros positivos por meio de funções definidas sobre eles. Neste capítulo apresentamos algumas funções aritméticas clássicas, com destaque para a função soma dos divisores, denotada por $\sigma(n)$, que será a principal ferramenta utilizada na caracterização dos números perfeitos. Além disso, introduzimos o conceito de função aritmética multiplicativa, essencial para o desenvolvimento dos resultados apresentados nas seções seguintes.

Definição 3.1. Uma função aritmética é uma função cujo domínio é o conjunto dos números naturais, $f : \mathbb{N} \to X$, onde X é um subconjunto de $\mathbb{C}$. Utilizaremos apenas o caso em que $X = \mathbb{Z}$.

A ideia das funções aritméticas é que o valor de $f(n)$ forneça alguma propriedade aritmética de n. Vejamos alguns exemplos que ilustram o conceito de função aritmética.

Definição 3.2. A função $\tau : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ é definida por

$$\tau(n) = \text{ quantidade de divisores positivos de } n$$

Exemplo 3.3. Calculemos τ para alguns números.

$$\tau(6) = \#\{1, 2, 3, 6\} = 4$$

$$\tau(7) = \#\{1, 7\} = 2$$

$$\tau(16) = \#\{1, 2, 4, 8, 16\} = 5$$

Observe que p é primo se e somente se $\tau(p) = 2$. De fato, por definição, primos são os únicos inteiros positivos que possuem apenas dois divisores positivos distintos, 1 e o próprio número.

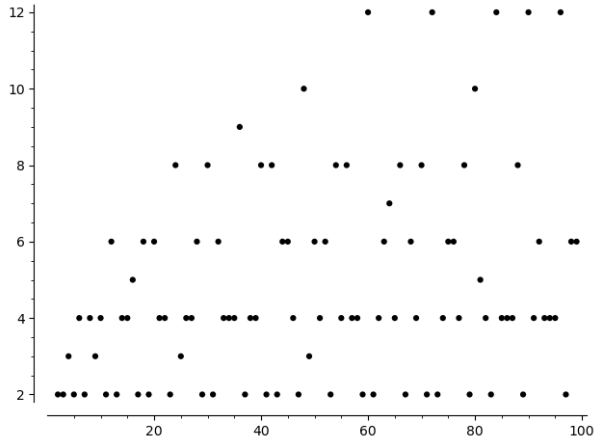


Figura 3.1 – Gráfico da função τ.

Definição 3.4. Seja $n \in \mathbb{N}$. A função de Euler é a função

$$\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N},$$

definida por

$$\varphi(n) = |\{k \in \mathbb{N} : 1 \leq k \leq n \text{ e } \text{mdc}(k,n) = 1\}|,$$

em que $|A|$ denota o número de elementos do conjunto A.

Leonhard Euler (1707 - 1783) foi um matemático suíço que deu enormes contribuições a uma ampla gama de áreas da matemática e da física, incluindo geometria analítica, trigonometria, geometria, cálculo e teoria dos números.

Figura 3.2 – Leonhard Euler.
Fonte: Adaptado de O'Connor e Robertson (MacTutor History of Mathematics Archive).

A função "*phi*" denotada por $\varphi(n)$, fornece a quantidade de inteiros positivos menores ou iguais a n que são coprimos com n.

Exemplo 3.5. $\varphi(6) = 2$, pois apenas 1 e 5 são coprimos com 6.

Observação 3.6. Nota-se que $\varphi(1) = 1$, pois o unico número natural menor ou igual a 1 é ele mesmo e ainda mdc(1,1)= 1

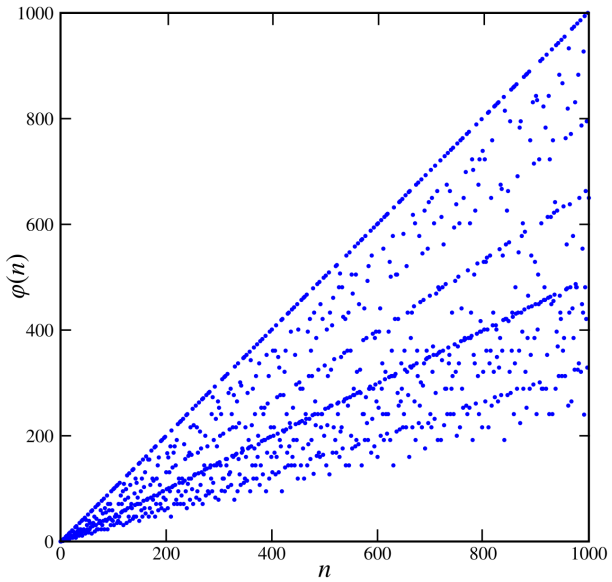


Figura 3.3 – Os primeiros mil valores da função $\varphi(n)$.
Fonte: Adaptado de Battiston (2009).

Apresentamos agora a função σ e uma generalização, a função σ_k que, por definição, estão intimamente relacionadas à caracterização e ao estudo das propriedades dos números perfeitos.

Definição 3.7. Seja $n \in \mathbb{N}$. A função soma dos divisores é a função

$$\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N},$$

definida por

$$\sigma(n) = \sum_{d|n} d,$$

em que a soma é tomada sobre todos os divisores positivos de n.

Exemplo 3.8. Os divisores positivos de 6 são $1, 2, 3$ e 6. Portanto, $\sigma(6) = 1+2+3+6 = 12$.

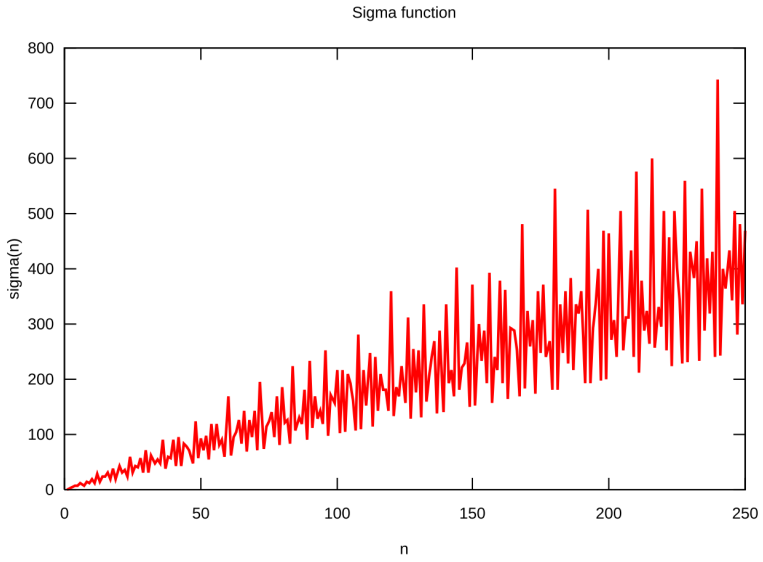


Figura 3.4 – Gráfico da função soma dos divisores $\sigma(n)$ para $1 \leq n \leq 250$.
Fonte: Inductiveload (2007).

Abaixo tem a comparação dado um determinado número n aplicando em cada um das funções os valores são destintos de acordo com a característica de cada função aritmética.

Tabela 3.1 – Valores de algumas funções aritméticas

n	$\tau(n)$	$\sigma(n)$	$\varphi(n)$
2	2	3	1
3	2	4	2
4	3	7	2
5	2	6	4
6	4	12	2

Fonte: Elaboração própria

Observa-se que cada uma dessas funções destaca uma característica distinta dos números naturais. A função $\tau(n)$ fornece a quantidade de divisores positivos de n, a função $\sigma(n)$ fornece a soma desses divisores e a função $\varphi(n)$ indica a quantidade de inteiros positivos menores ou iguais a n que são coprimos com n. Dentre elas, a função $\sigma(n)$ terá papel central neste trabalho, pois permite caracterizar os números perfeitos através da relação $\sigma(n) = 2n$.

A propriedade a seguir é uma característica importante de algumas funções aritméticas, pois auxiliam no cálculo da função para um dado n sabendo apenas a fatoração de n e o valor da função em potências de primos.

Definição 3.9. Uma função aritmética f é dita multiplicativa quando $f(m,n) = f(m)\cdot(n)$ sempre que $(m,n) = 1$. Vejamos algumas funções multiplicativas importantes.

As funções $\tau(n)$, $\sigma(n)$ e $\varphi(n)$ são exemplos importantes de funções aritméticas multiplicativas. Em particular, a multiplicatividade da função $\sigma(n)$ será fundamental para a demonstração do Teorema de Euclides-Euler. Estudaremos a seguir uma generalização da função σ.

Definição 3.10. Seja n um número inteiro positivo. Define-se a função aritmética $\sigma_k(n)$ como a soma das k-ésimas potências dos divisores positivos de n, dada por, ou seja:

$$\sigma_k(n) = \sum_{d|n} d^k. \tag{2}$$

Proposição 3.11. *Seja $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_r^{\alpha_r}$ a decomposição de um número inteiro $n \geq 2$ em fatores primos distintos, onde os α_i são inteiros positivos para cada $i = 1, \ldots, r$. A função soma das potências k dos divisores, denotada por $\sigma_k(n)$, é dada por*

$$\sigma_k(n) = \frac{p_1^{(\alpha_1+1)k} - 1}{p_1^k - 1} \cdot \frac{p_2^{(\alpha_2+1)k} - 1}{p_2^k - 1} \cdot \cdots \cdot \frac{p_r^{(\alpha_r+1)k} - 1}{p_r^k - 1} \tag{3}$$

Demonstração. Observemos primeiramente que se p é primo, os divisores de positivos de p^α são da forma:

$$1, p, p^2, \cdots, p^{\alpha-1}, p^\alpha \tag{4}$$

Os divisores de $p_1^{\alpha_1}$ são $1, p_1, \ldots, p_1^{\alpha_1}$; os de $p_2^{\alpha_2}$ são $1, p_2, \ldots, p_2^{\alpha_2}$ e, analogamente, os divisores de $p_r^{\alpha_r}$ são $1, p_r, \ldots, p_r^{\alpha_r}$. Como os divisores de $n = p_1^{\alpha_1} \ldots p_r^{\alpha_r}$ são quaisquer produtos desses divisores, a soma de todas as k-ésimas potências dos divisores de n é dada da seguinte maneira:

$$\sigma_k(n) = (1 + p_1^k + \cdots + p_1^{\alpha_1 k}) \times (1 + p_2^k + \cdots + p_2^{\alpha_2 k}) \times \cdots \times (1 + p_r^k + \cdots + p_r^{\alpha_r k}).$$

Mas esse somatório é o produto de somas de termos de Progressões Geométricas (P.G.) finitas, onde cada fator possui o primeiro termo igual a 1 e a razão p_i^k, para $i = 1, \ldots, r$. Vale lembrar que a soma de uma P.G. finita é da seguinte forma:

$$1 + x + x^2 + \cdots + x^m = \frac{x^{m+1} - 1}{x - 1}.$$

Logo, ao aplicarmos essa propriedade em cada fator, obtemos:

$$\sigma_k(n) = \frac{p_1^{(\alpha_1+1)k} - 1}{p_1^k - 1} \times \frac{p_2^{(\alpha_2+1)k} - 1}{p_2^k - 1} \times \cdots \times \frac{p_r^{(\alpha_r+1)k} - 1}{p_r^k - 1}.$$

Em particular para $k = 1$,

$$\sigma_1(n) = \frac{p_1^{(\alpha_1+1)} - 1}{p_1 - 1} \times \frac{p_2^{(\alpha_2+1)} - 1}{p_2 - 1} \times \cdots \times \frac{p_r^{(\alpha_r+1)} - 1}{p_r - 1}. \tag{5}$$

□

Vale observar que essa é a formula para calcular a soma dos divisores positivos de n.

Exemplo 3.12. Aplicando a formula para $n = 7$, temos:

$$\sigma(7) = \frac{7^{1+1} - 1}{7 - 1} = \frac{7^2 - 1}{6} = \frac{49 - 1}{6} = \frac{48}{6} = 8$$

.

Para $n = 6 = 2^1 \times 3^1$, temos:

$$\sigma(6) = \left(\frac{2^{1+1} - 1}{2 - 1}\right) \times \left(\frac{3^{1+1} - 1}{3 - 1}\right) \Rightarrow \sigma(6) = 3 \times 4 = 12 = 2 \times 6.$$

Para $n = 28 = 2^2 \times 7^1$, temos:

$$\sigma(28) = \left(\frac{2^{2+1} - 1}{2 - 1}\right) \times \left(\frac{7^{1+1} - 1}{7 - 1}\right) \Rightarrow \sigma(28) = 7 \times 8 = 56 = 2 \times 28.$$

Corolário 3.13. *Se* $(m,n) = 1$, *então* $\sigma(m \cdot n) = \sigma(m) \cdot \sigma(n)$.

Demonstração. Tomando m e n dois inteiros positivos tal que $\text{mdc}(m,n) = 1$. Se $m = 1$ ou $n = 1$, então aplicando nas funções vamos obter:

$\sigma(m,n) = \sigma(m)\sigma(n)$

Agora supondo

$$n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_r^{\alpha_r} \geq 2$$

e

$$m = q_1^{\beta_1} q_2^{\beta_2} \cdots q_s^{\beta_s} \geq 2,$$

em que os $p_i's$ e os $q_i's$ são números primos e $\alpha_i, \beta_j \in \mathbb{N}^*$, para todo i e j. Como $\text{mdc}(m,n) = 1$, todo p_i é diferente de todo q_j. Logo,

$$m \cdot n = q_1^{\beta_1} q_2^{\beta_2} \cdots q_s^{\beta_s} \times p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_r^{\alpha_r}$$

e assim, pela proposição anterior, temos:

$$\sigma(m,n) = \frac{q_1^{\beta_1+1} - 1}{q_1 - 1} \times ... \times \frac{q_s^{\beta_r+1} - 1}{q_s - 1} \times \frac{p_1^{\alpha_1+1} - 1}{p_1 - 1} \times ... \times \frac{p_r^{\alpha_r+1} - 1}{p_r - 1}.$$

$= \sigma(m)\sigma(n).$

□

Portanto, fica provado que $\sigma(n)$ é uma função aritmética multiplicativa.

Exemplo 3.14. Calculemos o valor da função σ de acordo com a fórmula obtida.

Para $\sigma(12) = 2^2 \times 3^1 = \frac{2^{2+1}-1}{2-1} \times \frac{3^{1+1}-1}{3-1} = 28.$

Para $\sigma(20) = 5^1 \times 2^2 = \frac{5^{1+1}-1}{5-1} \times \frac{2^{2+1}-1}{2-1} = 6 \times 7 = 42.$

E também para $\sigma(496) = 2^4 \times 31^1 = \frac{2^{4+1}-1}{2-1} \times \frac{31^{1+1}-1}{31-1} = 31 \times 32 = 992.$

Como definimos no primeiro capítulo que um número é perfeito se ele é igual à soma dos seus divisores próprios (todos os divisores exceto ele mesmo). Como a função $\sigma(n)$ inclui o próprio n na soma, a condição para um número ser perfeito passa a ser:

$$\sigma(n) = (\text{divisores positivos próprios}) + n = 2n$$

Essa fórmula vai facilitar o estudo sobre números perfeitos, já que vai ser usada para calcular a soma de todos os divisores positivos de um número n.

4 TEOREMA DE EUCLIDES-EULER

Nesse capítulo apresentamos a caracterização dos números perfeitos pares a partir do teorema de Euclides-Euler. Inicialmente, apresentando o método proposto por Euclides para a construção dos números perfeitos pares. Depois apresentaremos o teorema de Euclides-Euler, que determina que todo perfeito par pode ser escrito dessa forma. É um teorema bastante importante para teoria dos números que estabelece a relação dos números perfeitos pares com os primos de Mersenne. As referências utilizadas para a construção desse teorema foram: (Gomes; Costa; Santos, 2008), (Brandão, 2021), (Cruz, 2013), (Voight, 1998), (Canal da Álgebra Abstrata, 2021), (Numberphile, 2015).

Por volta de 300 a.C. Euclides descreveu esse padrão que forma os números perfeitos pares, começando do número 1 e dobrando ele. Vamos apresentar uma lista de passos:

1. Escolha um inteiro positivo n.
2. Calcule a soma
$$1+2+2^2+\cdots+2^{n-1}.$$
3. Verifique se essa soma é um número primo.
4. Se a soma for um número primo, multiplique-a por 2^{n-1}.
5. O número obtido será um número perfeito.

Vamos mostrar alguns exemplos:

Exemplo 4.1. Tomando $n=2$, temos: $1+2^1=3$ é primo. Multiplicando por $2^{2-1}=2$, assim $3\times 2=6$ que é um número perfeito.

Exemplo 4.2. Tomando $n=3$, temos: $1+2^1+2^2=7$ é primo. Multiplicando por $2^{3-1}=4$, assim $7\times 4=28$ que é um número perfeito.

Exemplo 4.3. Tomando $n=4$, temos: $1+2^1+2^2+2^3=15$ não é primo. Então, não podemos obter um número perfeito par.

Exemplo 4.4. Tomando $n=5$, temos: $1+2^1+2^2+2^3+2^4=31$ é primo. Multiplicando por $2^{5-1}=16$, assim $31\times 16=496$ que é um número perfeito.

Os exemplos anteriores mostram que os números perfeitos obtidos pelo método de Euclides podem ser obtidos da seguinte maneira:

- $6 = (1+2)\cdot 2^1$
- $28 = (1+2+4)\cdot 2^2$
- $496 = (1+2+4+8+16)\cdot 2^4$

Observe que a soma

$$1+2^1+2^2+\cdots+2^{n-1}.$$

corresponde aos termos de uma progressão geométrica de razão 2. Assim, utilizando a fórmula da soma dos termos de uma progressão geométrica, temos:

$$1+2^1+2^2+\cdots+2^{n-2}+2^{n-1} = 2^n-1$$

Portanto, substituindo essa soma na expressão utilizada para a construção dos números perfeitos pares, obtemos $= (2^p-1)\cdot 2^{p-1}$. Que é exatamente a forma apresentada por Euclides para a construção dos números perfeitos pares.

Os naturais $6, 28, 496$ e 8128 eram os únicos números perfeitos conhecidos na antiguidade esses números aparecem por volta de 300 a.C no livro Os elementos de Euclides. Mas desde de então a busca por novos números perfeitos ainda continua.

Vale observar que os números perfeitos pares conhecidos até o momento tem os primos de Mersenne em sua composição que provaremos na seção seguinte.

Os Primos de Mersenne que são da forma 2^n-1, assim multiplicando por 2^{n-1} gerando os números perfeitos que são da forma $2^{n-1}(2^n-1)$ que é o Teorema de Euclides-Euler. Por volta de 300 a.C. Euclides demostrou a primeira parte do Teorema na sua obra "Os Elementos" (no livro IX). Já a segunda parte (recíproca) foi provada por Leonhard Euler, mostrando que todo número perfeito par tem a forma de Euclides. Era um problema de 1600 anos que estava em aberto.

As referências utilizadas foram (Gomes; Costa; Santos, 2008),

Teorema 4.5 (Euclides-Euler)**.** *Sejam p um número primo e $n = 2^{p-1}(2^p-1)$, onde 2^p-1 é um primo de Mersenne. Então n é par e perfeito.*

Demonstração. Suponha que $n = 2^{p-1}(2^p-1)$, onde 2^p-1 é um primo de Mersenne. Então, $p > 1$ e com isso n é par. Agora vamos mostrar que n é perfeito, n satisfaz $\sigma(n) = 2n$. Como 2^{p-1} é par e 2^p-1 é ímpar, temos que $\text{mdc}(2^{p-1}, 2^p-1) = 1$. Assim temos:

$$\sigma(n) = \sigma[2^{p-1}(2^p - 1)] = \sigma(2^{p-1}) \cdot \sigma(2^p - 1).$$

Usando a fórmula para a soma dos divisores de uma potência de primos:

$$\sigma(2^{p-1}) = \frac{2^{(p-1)+1} - 1}{2 - 1} = \frac{2^p - 1}{1} = 2^p - 1.$$

Como $2^p - 1$ é um número primo (Primo de Mersenne), a soma de seus divisores é ele mais 1:

$$\sigma(2^p - 1) = (2^p - 1) + 1 = 2^p.$$

Assim,

$$\begin{aligned} \sigma(n) &= \sigma(2^{p-1}) \cdot \sigma(2^p - 1) \\ &= (2^p - 1) \cdot 2^p \\ &= 2 \cdot [2^{p-1} \cdot (2^p - 1)] \\ &= 2n \end{aligned}$$

Portanto, o número da forma $n = 2^{p-1}(2^p - 1)$ é perfeito.

Verifiquemos agora a recíproca, isto é, se $n \in \mathbb{N}^*$ é par e perfeito, então $n = 2^{p-1}(2^p - 1)$, onde $2^p - 1$ é um primo de Mersenne.

Seja $n > 0$ par e perfeito. Seja 2^{p-1} a maior potência de 2 que divide n, no pior dos casos o próprio 2, pois, sendo n par, temos $p - 1 > 0$, assim $p > 1$. Também vale ressaltar que $n = 2^{p-1} \cdot b$, para algum b ímpar. Assim, $\text{mdc}(2^{p-1}, b) = 1$. Segue-se disso que:

$$\sigma(n) = \sigma(2^{p-1} \cdot b) = \sigma(2^{p-1}) \cdot \sigma(b) = (2^p - 1) \cdot \sigma(b).$$

Por hipótese temos que $\sigma(n) = 2n$ assim:

$$(2^p - 1) \cdot \sigma(b) = 2n = 2 \cdot 2^{p-1} \cdot b = 2^p \cdot b \implies 2^p - 1 \mid 2^p \cdot b.$$

Como $\text{mdc}(2^p - 1, 2^p) = 1$, temos que $2^p - 1 \mid b$, portanto existe um $c \in \mathbb{N}$, com $c < b$, tal que

$$b = (2^p - 1) \cdot c \quad (1).$$

Substituindo (1) em $(2^p - 1) \cdot \sigma(b) = 2^p \cdot b$, obtemos $\sigma(b) = 2^p \cdot c$. Somando c em ambos os lados em (1), temos:

$$c + b = (2^p - 1) \cdot c + c \implies c + b = (2^p - 1 + 1) \cdot c \implies c + b = 2^p \cdot c \implies c + b = \sigma(b).$$

Observe que $c = 1$, pois se $c \neq 1$, então b teria pelo menos 3 divisores distintos: $1, c$ e b. Se ele tem 3 divisores distintos, então $\sigma(b) \geq 1 + c + b > b + c = \sigma(b)$, que é uma contradição. Desse resultado e de (1), obtemos $b = 2^p - 1$. E $\sigma(b) = b + 1$, o que implica que b é primo. Logo $n = 2^{p-1} \cdot b = 2^{p-1}(2^p - 1)$, com $2^p - 1$ sendo um primo de Mersenne. Então p é primo pelo Lema 2.22. □

Com a prova do Teorema Euclides-Euler, fica totalmente definida a forma dos números perfeitos pares, mais precisamente, um número natural é perfeito e par se, e somente se, pode ser escrito na forma

$$n = 2^{p-1}(2^p - 1),$$

em que $2^p - 1$ é um primo de Mersenne.

A prova desse teorema define com vigor os exemplos que foram apresentados anteriormente, indica que todo número perfeito par tem um primo de Mersenne em sua composição, o que significa que ao encontrar um primo de Mersenne consequentemente encontrará um número perfeito par. Então a busca por novos números perfeitos fica reduzida a busca por primos de Mersenne.

Todavia, ainda não sabemos se os primos de Mersenne são infinitos ou não, com isso permanece em aberto a existência de infinitos números perfeitos pares. Até o presente momento todos os números perfeitos conhecidos foram obtidos a partir de primos de Mersenne.

Abaixo apresentamos uma tabela com os últimos 5 números perfeitos conhecidos, juntamente com os primos de Mersenne que lhes associados, descobertos com a ajuda do projeto GIMPS (Great Internet Mersenne Prime Search) que apresentamos no capítulo seguinte, foi responsável pela descoberta dos maiores primos de Mersenne conhecidos, sendo assim, encontrando os maiores números perfeitos conhecidos.

Tabela 4.1 – Últimos 5 Números Perfeitos descobertos pelo projeto GIMPS.

Ordem	**Data**	**Número de Mersenne (M_p)**	**Número Perfeito Correspondente**
48º	25/01/2013	$2^{57.885.161} - 1$	$2^{57.885.160}(2^{57.885.161} - 1)$
49º	07/01/2016	$2^{74.207.281} - 1$	$2^{74.207.280}(2^{74.207.281} - 1)$
50º	26/12/2017	$2^{77.232.917} - 1$	$2^{77.232.916}(2^{77.232.917} - 1)$
51º	07/12/2018	$2^{82.589.933} - 1$	$2^{82.589.932}(2^{82.589.933} - 1)$
52º	12/10/2024	$2^{136.279.841} - 1$	$2^{136.279.840}(2^{136.279.841} - 1)$

Fonte: (Great Internet Mersenne Prime Search, 2026)

Vimos que o último número perfeito encontrado é dado por $2^{136.279.840}(2^{136.279.841} - 1)$, uma curiosidade é que ele possui mais do que 82 milhões de dígitos decimais. Se fosse

impresso em um livro com cerca de 3.500 dígitos por página, ocuparia aproximadamente 23 mil páginas.

Gráfico de distribuição dos números primos de Mersenne encontrado pelo GIMPS.

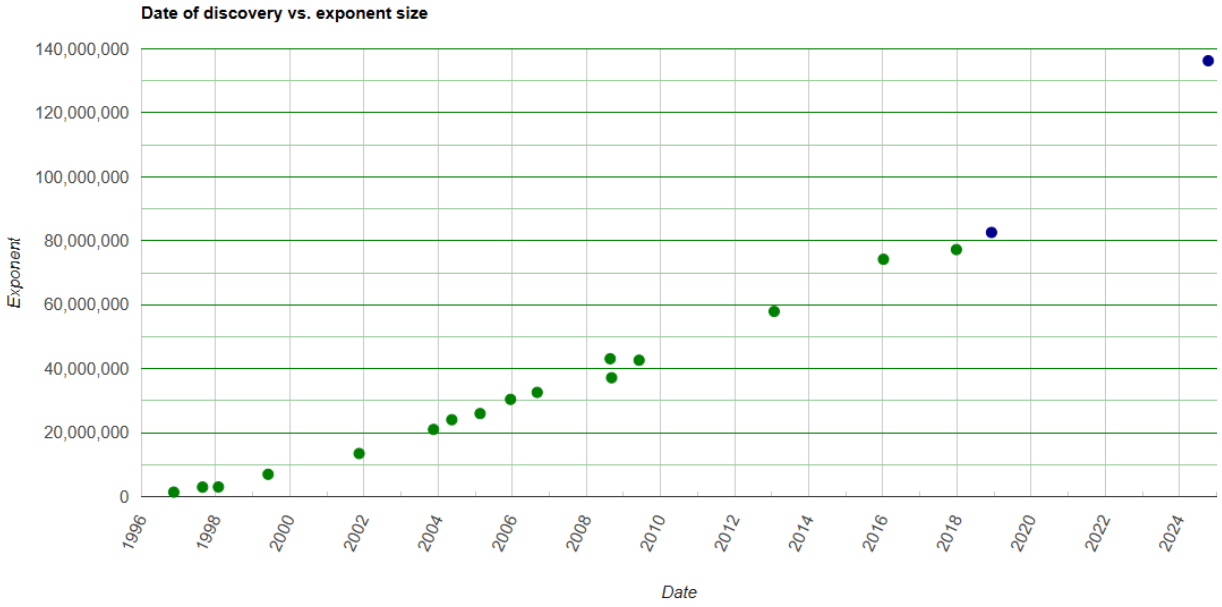


Figura 4.1 – Evolução do expoente dos primos de Mersenne descobertos ao longo dos anos. Observa-se um crescimento significativo dos maiores expoentes encontrados, impulsionado pelo projeto GIMPS.

Fonte: (Great Internet Mersenne Prime Search, 2026)

5 DISCUSSÕES GERAIS

Nesse capítulo trouxemos algumas discussões que envolvem os números perfeitos pares, falamos sobre o projeto GIMPS que está em atividade até os dias de hoje, relação dos números triangulares e hexagonais com números perfeitos, também sobre todo número perfeito par, exceto o número 6, pode ser escrito como a soma dos cubos dos primeiros números ímpares consecutivos e a representação binária desses números e uma breve citação sobre os perfeitos ímpares.

5.1 PROJETO GIMPS

(Great Internet Mersenne Prime Search, 2026), é um projeto colaborativo de voluntários que utilizam software gratuito para buscar números primos de Mersenne. O GIMPS foi fundado em 1996 por George Woltman. O projeto foi tão relevante que em novembro naquele mesmo ano foi encontrado um primo de Mersenne. Era muito eficaz o sistema no começo, mas com o passar do tempo criou-se a necessidade de melhorar cada vez mais, para conseguir mais avanços.

Desde a sua concepção até 2018, o projeto baseou-se principalmente no teste de primalidade de Lucas-Lehmer (LL) que foi fornecido pelos matemáticos Édouard Lucas e Derrick Henry Lehmer. Édouard Lucas (1842 - 1891) foi um matemático francês mais conhecido por seus resultados na teoria dos números. Ele estudou a sequência de Fibonacci e desenvolveu o teste para números primos de Mersenne, ainda utilizado atualmente.

Figura 5.1 – Édouard Lucas (1842–1891).
Fonte: Adaptado de O'Connor e Robertson (MacTutor History of Mathematics Archive).

Derrick Henry Lehmer (1905 - 1991) foi um matemático americano que trabalhou na área da teoria dos números e, em particular, generalizou o teste de Lucas para números

primos de Mersenne. O teste é um algoritmo especializado para testar primos de Mersenne e particularmente eficiente em arquiteturas de computadores binários.

Figura 5.2 – Derrick Henry Lehmer (1905–1991).
Fonte: Adaptado de O'Connor e Robertson (MacTutor History of Mathematics Archive).

Agora vamos fazer um breve comentário explicando como é encontrado um novo Primo de Mersenne.

Como vimos o número de Mersenne tem a forma $2^p - 1$, devemos criar uma lista de primos para testar, se esse primo tiver um fator diferente, então ele não é um primo de Mersenne, portanto o primeiro passo é encontrar o menor fator e assim seguir para o próximo candidato.

Se depois de muitos testes não for encontrado um fator, o número é testado pelo PRP(Provavelmente Primo), se for composto, ele não é um primo de Mersenne. Se por acaso depois do PRP indicar que esse candidato é provavelmente um primo, ele será testado novamente pelo teste de Lucas-Lehmer para verificar se é primo.

Como foi mencionado o projeto (Great Internet Mersenne Prime Search, 2026) ainda continua em funcionamento, além da descoberta de novos primos de Mersenne, o GIMPS também verifica os expoentes já testados, é de bastante importância, pois garante que nenhum primo de Mersenne tenha sido deixado pra trás por causa de erro de computadores.

Os marcos mais recentes e importantes são:

8 de setembro de 2025: todos os expoentes até 77232917 foram verificados, confirmando definitivamente que $2^{77232917} - 1$ é o 50° primo de Mersenne conhecido. Isso

significa que os expoentes menores que 77232917 foram verificados duas vezes, então não havia outro primo de Mersenne para ser o 50°.

24 de abril de 2026: todos os expoentes menores que 140000000 haviam sido testados pelo menos uma vez. Isso significa que para expoente $p < 140000000$, já foi verificado se é primo pelo menos um vez, mas precisa passar pelo um segunda verificação para confirmar.

1° de julho de 2026: todos os testes para expoentes inferiores a 81000000 foram verificados, concluindo uma nova etapa do processo de dupla verificação realizado pelo projeto. Isso significa que foi passado pelo uma primeira verificação e também por um segundo computador para a segunda verificação, isso da mais confiabilidade, evitando erros de hardware, memória ou processamento.

Tabela 5.1 – Marcos recentes do projeto GIMPS.

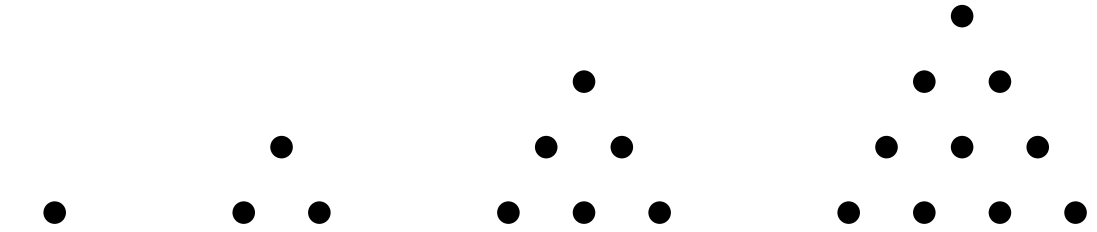
Data	Marco
08/09/2025	Todos os expoentes abaixo de 77 232 917 foram verificados, confirmando que $2^{77\,232\,917} - 1$ permanece como o 50º primo de Mersenne conhecido.
24/04/2026	Todos os expoentes inferiores a 140 000 000 foram testados pelo menos uma vez, garantindo que toda essa faixa já foi investigada pelo projeto GIMPS.
01/07/2026	Todos os testes para expoentes inferiores a 81 000 000 foram verificados por uma segunda execução independente, aumentando a confiabilidade dos resultados obtidos.

Fonte: Elaboração própria, com dados do GIMPS (Great Internet Mersenne Prime Search, 2026).

Até o momento foram encontrados 52 primos de Mersenne e o maior já encontrado é $M_{136279841} = 2^{136279841} - 1$ (com mais de 41 milhões de dígitos), descoberto pelo GIMPS, mas não se sabe se são infinitos e a busca por novos primos de Mersenne continua.

5.2 RELAÇÃO DOS NÚMEROS TRIANGULARES E HEXAGONAIS COM NÚMEROS PERFEITOS

Os pitagóricos desde da antiguidade estudavam os números figurados. Os números figurados são números expressos como reunião de pontos numa determinada configuração geométrica, isto é, a quantidade de pontos representa um número, e estes são agrupados de formas geométricas sugestivas. Em especial, os números triangulares são as quantidades que formam triângulos equiláteros. Os diagramas abaixo representam alguns números triangulares.



Fórmula Geral dos números triangulares é dada por: $T_n = \frac{n(n+1)}{2}$, onde n é um número natural. Como já foi mostrando o teorema de Euclides-Euler é dado por $N = 2^{p-1} \cdot (2^p - 1)$. Tomando $n = 2^p - 1$, temos $n + 1 = 2^p$. Portanto, $T_n = \frac{n(n+1)}{2} = \frac{(2^p-1)\cdot 2^p}{2} = 2^{p-1} \cdot (2^p - 1)$, que é a fórmula dos números perfeitos pares. Assim, todo número perfeito par é um número triangular.

Exemplo 5.1.

Para $n = 3$, vem $T_3 = \frac{3(3+1)}{2} = 6$

Para $n = 7$, vem $T_7 = \frac{7(7+1)}{2} = 28$

Nicômaco de Gerasa (60 - 120) foi um dos principais membros da Escola Pitagórica, cuja obra Introdução à Aritmética foi o texto padrão de aritmética por mais de 1000 anos.

Figura 5.3 – Nicômaco de Gerasa (c. 60–120 d.C.).
Fonte: Adaptado de O'Connor e Robertson, *MacTutor History of Mathematics Archive*.

Na sua Introdução à Aritmética, apresenta os seguintes números perfeitos: $6, 28, 496$ e 8128, também apresenta os seguintes números triangulares: $1, 3, 6, 10, 15, 21, 28, 36, 45$ e 55. Podemos perceber que 6 e 28 aparecem nas duas listas, Nicômaco de Gerasa poderia

especular que todo número perfeito é um número triangular, mas não fez. Porém a proposição de que todo número perfeito é um número triangular é conhecida desde da antiguidade, pois foi conhecido por Jâmblico e, provavelmente, por Nicômaco.

Também vale lembrar que todo número perfeito par é um número hexagonal. Um número hexagonal é um número poligonal que pode ser representado na forma de um hexágono. Todo número hexagonal também é um número triangular, mas só os números triangulares de ordem ímpar são hexagonais.

E podem ser calculados com a seguinte fórmula: $H_n = n(2n-1)$. Como já foi mostrando o teorema de Euclides-Euler é dado por $N = 2^{p-1} \cdot (2^p - 1)$. Tomando $n = 2^{p-1}$, assim, $2n - 1 = 2 \cdot 2^{p-1} - 1 = 2^p - 1$, Substituindo na formula dos hexagonais: $H_n = n(2n-1) = 2^{p-1} \cdot 2^p - 1$. Que é a fórmula dos números perfeitos pares. Assim, todo número perfeito par é um número Hexagonal.

Exemplo 5.2.

Para $n = 2$, temos $H_2 = 2(2 \times 2 - 1) = 2(4-1) = 6$

Para $n = 4$, temos $H_4 = 4(2 \times 4 - 1) = 4(8-1) = 28$

Aqui estão os 20 primeiros números hexagonais: 1, 6, 15 , 28, 45, 66, 91, 120, 153, 190, 231, 276, 325,3 78, 435, 496, 561, 630, 703, 780.

Proposição 5.3. *Todo número perfeito par, exceto o número 6, pode ser escrito como a soma dos cubos dos primeiros números ímpares consecutivos.*

Lembrando que a soma dos primeiros m cubos ímpares consecutivos são sempre dados pela fórmula $m^2(2 \cdot m^2 - 1)$. Observando o teorema de Euclides-Euler para os perfeitos: $N = 2^{p-1} \cdot (2^p - 1)$. Como $p > 2$, então p é ímpar, com isso $p - 1$ é par, portanto, $2^{p-1} = \left(2^{\frac{p-1}{2}}\right)^2$. Tomando $m = 2^{\frac{p-1}{2}}$, assim $m^2 = 2^{p-1}$. Além disso, $2 \cdot m^2 - 1 = 2 \cdot 2^{p-1} - 1 = 2^p - 1$. Substituindo essas igualdades na fórmula da soma dos cubos dos ímpares, temos $m^2(2 \cdot m^2 - 1) = 2^{p-1} \cdot (2^p - 1)$. Que é justamente o Teorema de Euclides-Euler. Portanto, todo número perfeito par maior que 6 pode ser escrito como a soma dos cubos dos primeiros números ímpares consecutivos.

Exemplo 5.4.

$28 = 1^3 + 3^3$

$$496 = 1^3 + 3^3 + 5^3 + 7^3$$

$$8128 = 1^3 + 3^3 + \cdots + 15^3$$

$$33550336 = 1^3 + 3^3 + \cdots + 255^3$$

5.3 REPRESENTAÇÃO BINÁRIA DE NÚMEROS PERFEITOS

O sistema que utilizamos para representar um número é o sistema decimal, base 10, que utiliza 10 algarismos $(0,1,2,3,4,5,6,7,8,9)$. Esse sistema que utilizamos foi implementado pelos hindus e foi divulgado pelos árabes. Recordemos brevemente o seu funcionamento: Ao escrever um inteiro positivo em sua expansão decimal, cada algarismo representa não o seu próprio valor, e sim seu valor multiplicado pela potência de 10 correspondente à posição do algarismo. Vejamos em um exemplo.

Exemplo 5.5.

$$\begin{aligned} 2569 &= 2 \times 10^3 + 5 \times 10^2 + 6 \times 2^1 + 9 \times 10^0 \\ &= 3 \times 1000 + 5 \times 100 + 6 \times 10 + 9 \times 1 \\ &= 2000 + 500 + 60 + 9 \end{aligned}$$

É um resultado básico da aritmética elementar que todo inteiro positivo tem uma expansão decimal única. Mais geralmente, dado um inteiro $b > 0$, é possível verificar que todo inteiro positivo n tem uma expansão em base b dada por

$$n = a_d b^d + a_{d-1} b^{d-1} + \cdots + a_1 b^1 + a_0 b, \text{ onde } a_i \in \{0, \ldots, b-1\} \tag{6}$$

Dizemos que n tem representação em base b dada por $(a_d a_{d-1} \ldots a_1 a_0)_b$. Quando $b > 0$, a convenção é utilizar letras para indicar os números maiores que 9.

E agora vamos utilizar esse mesmo raciocínio para o sistema binário, que é utilizado pelos computadores. O sistema binário equivale a utilizar a base $b = 2$ para representar os números positivos, portanto os algarismos utilizados são apenas 0 e 1.

Exemplo 5.6.

$$\begin{aligned} (78)_{10} &= 64 + 8 + 4 + 2 \\ &= 1 \times 2^6 + 0 \times 2^5 + 0 \times 2^4 + 1 \times 2^3 + 1 \times 2^2 + 1 \times 2^1 + 0 \times 2^0 \\ &= (1001110)_2 \end{aligned} \tag{7}$$

Na tabela a seguir listamos as representações dos primeiros positivos no sistema binário,

Dec.	*Bin.*	*Dec.*	*Bin.*
0	0	10	1010
1	1	11	1011
2	10	12	1100
3	11	13	1101
4	100	14	1110
5	101	15	1111
6	110	16	10000
7	111	17	10001
8	1000	18	10010
9	1001	19	10011

Exibimos agora alguns exemplos demonstrando a conversão de números dados em representação binária para representação decimal.

Exemplo 5.7. $(1010)_2 = 1\times 2^3 + 0\times 2^2 + 1\times 2^1 + 0\times 2^0 = 1\times 8 + 0\times 4 + 1\times 2 + 0\times 1 = 8+0+2+0 = (10)_{10}$.

Exemplo 5.8. $(1101)_2 = 1\times 2^3 + 1\times 2^2 + 0\times 2^1 + 1\times 2^0 = 1\times 8 + 1\times 4 + 0\times 2 + 1\times 1 = 8+4+0+1 = (13)_{10}$.

Esse sistema permite fazer operações lógicas utilizando apenas esses dois números. E são utilizados em sistemas digitais para codificar algarismos. O sistema binário é amplamente utilizado em ciências da computação e eletrônica, onde os circuitos digitais operam com base nesse sistema de numeração posicional.

Para exibir a representação binária de um número perfeito, observamos dois padrões:

Observação 5.9. Na representação decimal dois efeitos são facilmente observados: multiplicar um número n por uma potência 10^k da base $b = 10$ equivale a adicionar k zeros seguidos ao final da representação decimal de n e os antecessores de uma potência 10^k são da forma $\underbrace{9\cdots 9}_{k \text{ 9 seguidos}}$. De forma análoga, as potencias de 2 tem representação binária de um único digito de 1 seguida de k zeros, vale também lembrar que ao multiplicamos por 2^k acrescentamos um k dígitos 0 ao final do nosso número.

Assim como na base 10 a potência de 2^k também tem um antecessor, basta multiplica por $2^k - 1$, que a representação escrito em binário será uma sequência de k dígitos 1 consecutivos,

Exemplo 5.10. $8 = (1000)_2$

Multiplicando por 2, temos: $8 \times 2 = 16$ $(1000)_2 \longrightarrow (10000)_2$

Multiplicando por $4 = 2^2$, vem: $8 \times 2^2 = 8 \times 4 = 32$ $(1000)_2 \longrightarrow (100000)_2$

Como já mencionamos anteriormente, se continuarmos multiplicando por potências de 2 vai sempre acrescer um 0 a representação do número em binário.

Agora vamos ver exemplos do antecessor das potências de 2

Tabela 5.2 – Representação binária dos números da forma $2^k - 1$.

Expressão	Decimal	Binário
$2^1 - 1$	1	1
$2^2 - 1$	3	11
$2^3 - 1$	7	111
$2^4 - 1$	15	1111
$2^5 - 1$	31	11111
$2^6 - 1$	63	111111

Observamos que o antecessor de uma potência de 2^k em binário é sempre uma sequência de k algarismos de 1.

A representação binária de um número perfeito é uma união de n dígitos consecutivos 1 e $n-1$ dígitos consecutivos 0. Pois, vale lembrar que a fórmula dos números perfeitos já apresentada é da forma $N = 2^{p-1} \cdot (2^p - 1)$. Exemplos na tabela:

Tabela 5.3 – Representação Binária de Números Perfeitos.

Número Perfeito	Representação Binária
6	110
28	11100
496	111110000
8128	1111111000000
33550336	1111111111111000000000000
8589869056	11111111111111111000000000000000000

5.4 NÚMEROS PERFEITOS ÍMPARES

René Descartes (1596 - 1650) foi um filósofo francês cuja obra, A Geometria (La géométrie), inclui sua aplicação da álgebra à geometria, da qual deriva a geometria analítica. Seu trabalho teve grande influência tanto em matemáticos quanto em filósofos.

Figura 5.4 – René Descartes (1596–1650).
Fonte: Adaptado de O'Connor e Robertson, *MacTutor History of Mathematics Archive*.

Em uma carta de 1638 a Mersenne, afirmou que não havia razão para que um número perfeito ímpar não pudesse existir. Descartes foi um dos primeiros a considerar a existência de números perfeitos ímpares, muitos autores haviam assumido implicitamente (sem provas) que os números perfeitos gerados pela construção de Euclides abrangiam todos os números perfeitos possíveis.

Quando Descartes estava procurando os números perfeitos ímpares ele se deparou com o número $198.585,576,189 = 3^2 \cdot 7^2 \cdot 11^2 \cdot 13^2 \cdot 22021$. (Wikipedia contributors, 2026). Aplicando a função $\sigma(n)$

$\sigma(3^2) \cdot \sigma(7^2) \cdot \sigma(11^2) \cdot \sigma(13^2) \cdot \sigma(22021) = 2 \cdot 198.585,576,189$ um número perfeito, mas tem um detalhe $22021 = 19^2 \cdot 61$, então esse número vira:

$\sigma(3^2) \cdot \sigma(7^2) \cdot \sigma(11^2) \cdot \sigma(13^2) \cdot \sigma(19^2) \cdot \sigma(61) = 4 \cdot 26 \cdot 10^{11} > 2 \cdot 198.585,576,189$. Assim não é um número perfeito, esses números que são próximos de números perfeitos são chamados de paródias que são os números de Descartes.

Até hoje não se sabe da existência de números perfeitos ímpares, também não foi provado se existe ou não. Apesar de ser um grande mistério a existência desses números, muitos matemáticos ainda continuam trabalhando tentando encontrar soluções. O próprio Euler provou um teorema que mostra a forma dos números perfeitos ímpares, se existem, tem que ter essa forma

$$n = p^k \cdot m^2.$$

Hoje em dia com a ajuda dos computadores e cálculos demorados, já se foi comprovado que nenhum número ímpar menor que $N > 10^{1500}$ é perfeito. (Ochem; Rao,

2012) Além disso, diversas outras condições necessárias para que um ímpar seja perfeito existem, por exemplo:

- N não é divisível por 105, (Kühnel, 1950)
- A maior potência prima p a que divide N é maior que 10^{62}, (Ochem; Rao, 2012)
- N tem pelo menos 101 fatores primos e pelo menos 10 fatores primos distintos, (Ochem; Rao, 2012)
- se 3 não divide N, então N tem pelo menos 12 fatores primos distintos. (Nielsen, 2015)

Em 1888, Sylvester afirmou:

> ...uma meditação prolongada sobre o assunto me convenceu de que a existência de um único número perfeito ímpar desse tipo — sua fuga, por assim dizer, da complexa teia de condições que o cercam por todos os lados — seria pouco menos que um milagre. (SYLVESTER, 1888).

Desde de Euler matemáticos vem criando condições para a existência desses números que vai ficar tão restrito que não vão existir. Na tabela a baixo vemos as tentativas computacionais de encontrar esses tais números.

Tabela 5.4 – Limites inferiores para a existência de números perfeitos ímpares.

Autor(es)	**Ano**	**Limite**
Kanold	1957	10^{20}
Tuckerman	1973	10^{36}
Hagis	1973	10^{50}
Brent e Cohen	1989	10^{160}
Brent *et al.*	1991	10^{300}
Ochem e Rao	2012	10^{1500}

Fonte: Adaptado de (Ochem; Rao, 2012).

6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

De modo geral, este trabalho teve como objetivo apresentar os principais aspectos da teoria dos números perfeitos, abordando seu desenvolvimento histórico, suas propriedades, sua caracterização por meio do teorema de Euclides-Euler, sua relação com os primos de Mersenne e os principais resultados conhecidos sobre os números perfeitos ímpares.

Inicialmente foi abordado um estudo histórico com a contribuição de vários matemáticos, Euler, Euclides, Mersenne, Descartes, Gerasa e os demais que contribuíram para a construção dos números perfeitos pares. Observamos que os estudos nesse tema vem desde dos estudos de Pitágoras por volta de 540 a.C até a atualidade.

O principal objetivo deste trabalho foi alcançado ao apresentar os fundamentos teóricos dos números perfeitos, evidenciando sua caracterização por meio do teorema de Euclides-Euler e sua relação com os primos de Mersenne, além de discutir os avanços e os desafios relacionados aos números perfeitos ímpares, também observamos que a busca por novos perfeitos pares, limita-se a busca por novos primos de Mersenne, vimos a ligação com outros temas da matemática que todo número perfeito par é um número triangular, hexagonal e que todo número perfeito par, exceto o 6 pode ser escrito como soma dos cubos dos primeiros números ímpares consecutivos.

Vale destacar os números perfeitos ímpares, percebe-se que apesar de diversos resultados ao longo de séculos, ainda não conseguimos caracterizar como é formado os números perfeito ímpares, também não conseguimos encontrar nenhum até o momento, nem mesmo sabemos da existência deles, apesar de ter limites inferiores conhecidos e diversas restrições para os números perfeitos ímpares, sua existência ainda segue sendo um mistério.

Também apresentamos o projeto (Great Internet Mersenne Prime Search, 2026), o principalmente responsável pelas descobertas dos primos de Mersenne nas últimas décadas. Vale destacar que existem marcos recentes dos trabalhos computacionais a cerca dos primos de mersenne, mostrando que o avanço e o interesse nesse tema ainda segue em atividade.

Portanto, apesar de muitos resultados que contribuíram para o avanço dos números perfeitos desde de Euclides até os tempos atuais, ainda existem temas em aberto, como se existem infinitos primos de Mersenne e com consequência infinitos números perfeitos, também a existência de números perfeitos ímpares. Assim, o tema segue sendo bastante interessante e ainda existem desafios para solucionar.

Deseja-se que esse trabalho sirva de forma introdutória na teoria dos números, promovendo um assunto clássico que são os números perfeitos, apesar de ser um tema bastante antigo, ainda existem diversas contribuições recentes, pois ainda existe o fato de alguns problemas relacionados aos números perfeitos ainda permanecerem em aberto, como a existência de números perfeitos ímpares e a infinitude dos números perfeitos pares. Além disso, o estudo teve caráter teórico, não envolvendo a implementação de métodos computacionais para busca e análise desses números.

Como perspectivas futuras, sugere-se o aprofundamento nos números perfeitos ímpares dos primos de Mersenne e dos algoritmos computacionais utilizados na descoberta de novos casos. Também futuras pesquisas que possa implementar esse assunto no ensino da matemática e com aplicações matemáticas relacionadas aos números perfeitos.

REFERÊNCIAS

BATTISTON, Pietro. **EulerPhi.svg**. 2009. Wikimedia Commons. Acesso em: 15 jul. 2026. Disponível em: <https://commons.wikimedia.org/wiki/File:EulerPhi.svg>.

BOYER, Carl B.; MERZBACH, Uta C. **História da Matemática**. São Paulo: Editora Edgard Blücher, 2012. 528 p. ISBN 978-85-212-0666-6.

BRANDãO, Calebe Lopes. **Números Perfeitos**. Dissertação (Dissertação de Mestrado) — Universidade Federal do Ceará (UFC), Fortaleza, 2021. Disponível em: <http://repositorio-.ufc.br/handle/123456789/62112>.

Canal da Álgebra Abstrata. **Aritmética: Aula 6 - Parte VI: Relação Entre Números Perfeitos e de Mersene**. 2021. YouTube. (MA14 - Aritmética do PROFMAT). Acesso em: [13/02/26]. Disponível em: <https://www.youtube.com-/watch?v=zWozEKE8NLQ&list=PL8DpasF7au6KNA2L2psmmYT-MSzjOYz1E>.

CASTRO, Jânio Kléo Sousa. **Teoria dos Números**. Fortaleza, CE: UAB/IFCE, 2010. 112 p. Licenciatura em Matemática - Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Ceará. ISBN 978-85-63953-22-3.

CRUZ, Sílvio Orleans. **Números Perfeitos**. Dissertação (Trabalho de Conclusão de Mestrado) — Universidade Federal da Paraíba (UFPB), João Pessoa, 2013. Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT. Apoio: CAPES.

DANIEL, Douglas. **Números perfeitos: um passeio pela história dos números perfeitos**. 2012. Seara da Ciência, Universidade Federal do Ceará. Acesso em: [09/07/26]. Disponível em: <https://seara.ufc.br/pt/producoes/nossas-producoes-e-colaboracoes/secoes-especiais-de-ciencia-e-tecnologia/secoes-especiais-matematica/numeros-perfeitos/>.

EUCLIDES. **Os Elementos**. São Paulo: Editora UNESP, 2009. 600 p. Tradução do original grego. ISBN 978-85-7139-935-8.

EVES, Howard. **Introdução à História da Matemática**. Campinas, SP: Editora da Unicamp, 2004. 843 p. ISBN 85-268-0657-2.

FILHO, Edgard de Alencar. **Teoria Elementar dos Números**. São Paulo: Nobel, 1981. Ex-professor de Geometria Analítica e Cálculo da Escola Militar do Realengo e de Matemática da Escola Preparatória de São Paulo. ISBN 35-213-0040-9.

FREI, Günther. **L'Età dei Lumi: matematica. La teoria dei numeri**. 2002. <https://www.treccani.it/enciclopedia/l'eta-dei-lumi-matematica-la-teoria-dei-numeri_(Storia-della-Scienza)/>. In: Storia della Scienza. Enciclopedia Treccani. Acesso em: 03 ago. 2026.

GOMES, Alacyr J.; COSTA, Eudes A. da; SANTOS, Ronaldo A. dos. Números perfeitos e primos de mersenne. **Revista da Olimpíada - IME - UFG**, n. 7, p. 99–111, set. 2008.

Great Internet Mersenne Prime Search. **GIMPS – Great Internet Mersenne Prime Search**. 2026. Disponível em: <https://www.mersenne.org/>.

HARDY, G. H.; WRIGHT, E. M. **An Introduction to the Theory of Numbers**. 4. ed. Oxford: Clarendon Press / Oxford University Press, 1960.

INDUCTIVELOAD. **Sigma function**. 2007. Wikimedia Commons. Acesso em: 15 jul. 2026. Disponível em: <https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Sigma_function.svg>.

KüHNEL, Ullrich. Verschärfung der notwendigen bedingungen für die existenz von ungeraden vollkommenen zahlen. **Mathematische Zeitschrift**, v. 52, p. 202–211, 1950.

NIELSEN, Pace P. Odd perfect numbers, diophantine equations, and upper bounds. **Mathematics of Computation**, v. 84, n. 295, p. 2549–2567, set. 2015. ISSN 0025-5718. Disponível em: <https://doi.org/10.1090/S0025-5718-2015-02941-X>.

Numberphile. **Perfect Number Proof**. 2015. YouTube. Acesso em: [11/10/25]. Disponível em: <https://www.youtube.com/watch?v=q8n15q1v4Xo&t=32s>.

OCHEM, Pascal; RAO, Michaël. Odd perfect numbers are greater than 10^{1500}. **Mathematics of Computation**, v. 81, n. 279, p. 1869–1877, 2012. ISSN 0025-5718.

O'CONNOR, J. J.; ROBERTSON, E. F. **Perfect numbers**. 2020. MacTutor History of Mathematics Archive, University of St Andrews. Acesso em: [09/07/26]. Disponível em: <https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/HistTopics/Perfect_numbers/>.

SANTOS, José Plínio de Oliveira. **Introdução à Teoria dos Números**. 3. ed. Rio de Janeiro: Instituto de Matemática Pura e Aplicada (IMPA), 2020. 128 p. (Coleção Matemática Universitária). ISBN 978-85-244-0496-2.

SYLVESTER, James Joseph. Sur l impossibilite de l existence d un nombre parfait impair qui ne contient pas au moins 5 facteurs premiers distincts. **Comptes Rendus de l'Academie des Sciences**, Paris, v. 106, p. 446–450, 1888.

Veritasium em Português. **O Problema Mais Antigo Não Resolvido da Matemática**. 2023. YouTube. Acesso em: [20/01/26]. Disponível em: <https://www.youtube.com/watch?v=qwDb_wD-ups&t=1723s>.

VOIGHT, John. Perfect numbers: An elementary introduction. **University of California, Berkeley**, 1998. Updated January 27, 2024. Disponível em: <https://math.berkeley.edu/~jvoight/>.

Wikipedia contributors. **Descartes number**. 2026. <https://en.wikipedia.org/wiki/Descartes_number>. Wikipedia, The Free Encyclopedia. Acesso em: 19 jul. 2026.

INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA DA PARAÍBA
Campus Cajazeiras - Código INEP: 25008978
Rua José Antônio da Silva, 300, Jardim Oásis, CEP 58.900-000, Cajazeiras (PB)
CNPJ: 10.783.898/0005-07 - Telefone: (83) 3532-4100

Documento Digitalizado Ostensivo (Público)

Entrega do TCC final

Assunto:	Entrega do TCC final
Assinado por:	Lucas Sarmento
Tipo do Documento:	Dissertação
Situação:	Finalizado
Nível de Acesso:	Ostensivo (Público)
Tipo do Conferência:	Cópia Simples

Documento assinado eletronicamente por:

- **Lucas Sarmento da Silva**, **ALUNO (202022020008) DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA - CAJAZEIRAS**, em 07/08/2026 16:26:06.

Este documento foi armazenado no SUAP em 07/08/2026. Para comprovar sua integridade, faça a leitura do QRCode ao lado ou acesse https://suap.ifpb.edu.br/verificar-documento-externo/ e forneça os dados abaixo:

Código Verificador: 1941673
Código de Autenticação: 5504132ad3