



**INSTITUTO FEDERAL DA PARAÍBA
CAMPUS CAJAZEIRAS
CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA**

DALTON RODRIGUES DA SILVA

**MULTIPLICADORES DE LAGRANGE: FUNDAMENTOS
TEÓRICOS E ALGUMAS APLICAÇÕES EM PROBLEMAS
DE OTIMIZAÇÃO**

CAJAZEIRAS

2026

DALTON RODRIGUES DA SILVA

**MULTIPLICADORES DE LAGRANGE: FUNDAMENTOS TEÓRICOS E
ALGUMAS APLICAÇÕES EM PROBLEMAS DE OTIMIZAÇÃO**

Monografia apresentada junto ao **Curso de
Licenciatura em Matemática** do **Instituto
Federal da Paraíba**, como requisito à obtenção
do título de **Licenciado em Matemática**.

Orientador:

Prof. Dr. José Ivelton Siqueira Lustosa

Coorientador:

Prof. Me. João Paulo de Araújo Souza

**Cajazeiras
2026**

DALTON RODRIGUES DA SILVA

MULTIPLICADORES DE LAGRANGE: FUNDAMENTOS TEÓRICOS E ALGUMAS APLICAÇÕES EM PROBLEMAS DE OTIMIZAÇÃO

Monografia apresentada ao programa de **Curso de Licenciatura em Matemática** do **Instituto Federal da Paraíba**, como requisito à obtenção do título de **Licenciado em Matemática**.

Data de aprovação: 22/07/2026

Banca Examinadora:



Documento assinado digitalmente

JOSE IVELTON SIQUEIRA LUSTOSA

Data: 23/07/2026 10:46:14-0300

Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

Prof. Dr. José Ivelton Siqueira Lustosa
Instituto Federal da Paraíba - IFPB



Documento assinado digitalmente

JOAO PAULO DE ARAUJO SOUZA

Data: 23/07/2026 10:52:25-0300

Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

Prof. Me. João Paulo de Araújo Souza
Instituto Federal do Ceará - IFCE



Documento assinado digitalmente

WILLIAM DE SOUZA SANTOS

Data: 23/07/2026 11:07:33-0300

Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

Prof. Dr. William de Souza Santos
Instituto Federal da Paraíba - IFPB



Documento assinado digitalmente

JOSE DOVAL NUNES MARTINS

Data: 27/07/2026 07:39:01-0300

Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

Prof. Me. José Doval Nunes Martins
Instituto Federal da Paraíba - IFPB

IFSertãoPB / Campus Cajazeiras
Coordenação de Biblioteca
Biblioteca Prof. Ribamar da Silva
Catalogação na fonte: Cícero Luciano Félix CRB-15/750

S586m Silva, Dalton Rodrigues da.
Multiplicadores de Lagrange : fundamentos teóricos e algumas aplicações
em problemas de otimização / Dalton Rodrigues da Silva.– 2026.

43f. : il.

Trabalho de Conclusão de Curso (Licenciatura em Matemática) - Instituto
Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Sertão Paraibano, Cajazeiras,
2026.

Orientador(a): Prof. Dr. José Ivelton Siqueira Lustosa.
Coorientador(a): Prof. Me. João Paulo de Araújo Souza.

1. Geometria. 2. Cálculo. 3. Função. 4. Valores máximos e mínimos. I.
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia da Paraíba. II. Título.

IFSertão
PB/CZ

CDU: 514(043.2)

Este trabalho é dedicado ao Sagrado Coração de Jesus, ao Imaculado Coração de Maria e a minha mãe Aldenizia Gonçalves Custódio (in-memoriam), que sempre me orientou a estudar.

AGRADECIMENTOS

Agradeço ao Pai, Filho e Espírito Santo, o Leão da tribo de Judá, Deus uno e trino, que é meu seguro durante a vida, sobretudo na hora da morte, por nunca me abandonar e sempre estar comigo nas minhas dificuldades e nunca me deixar desistir. “Porque eu, o Senhor teu Deus, tomo-te pela mão e te digo: Não temas, eu vou em teu auxílio” (Isaías 41:13).

Agradeço à bem-aventurada sempre virgem Maria a Mãe do Perpétuo socorro à qual eu recorro e ela vem em meu favor intercedendo a Jesus em minha causa a qual não me deixou cair no presente momento e jamais me deixará. “A devoção a Maria nos ajuda a superar as tentações e as dificuldades da vida.” (Tratado da verdadeira devoção à Santíssima Virgem).

Agradeço à corte celeste de anjos e santos de Deus homens e mulheres que nos inspiram a ser santos, que me ajudam sempre em minhas dificuldades com sua intercessão. De forma especial, ao glorioso Pai Seráfico São Francisco de Ássis, São José, Santa Terezinha do Menino Jesus, São Padre Pio, glorioso São Miguel arcanjo, o Príncipe da milícia celeste, São Tomás de Aquino, meu padrinho Cícero do Juazeiro e Frei Damião.

Agradeço à minha família. Em especial, à minha mãe Aldenizia *in memoriam*, que repousa nos braços de Jesus e está muito orgulhosa, à Júlia, minha irmã, que tem sido uma mãe, ao meu sobrinho, Emanuel Arthur, o qual é como um filho para mim e à minha madrinha Lora por todo carinho e cuidado materno. Sem essas pessoas, eu não teria chegado onde cheguei.

Aos meus orientadores Dr. Ivelton e Me. João Paulo. Sem eles esse trabalho não ficaria pronto. Agradeço por toda paciência que tiveram comigo, por sempre me incentivar a crescer e por cada conversa, em que sempre incentivaram a estudar. Acredito que todos deveriam ter um João Paulo e um Ivelton na sua vida, pois além de grandes orientadores são inspirações para todos os seus alunos.

A todos os professores do IF Sertão - PB Campus Cajazeiras, a coordenação do curso de Licenciatura em Matemática, a todos que me ajudaram durante o curso. De forma especial, ao Prof. Dr. William de Souza Santos e ao Prof. Me. José Doval Nunes Martins, por terem aceitado o convite para serem avaliadores desse trabalho e pelas suas contribuições que servirá para que eu possa melhorar sempre.

A todos meus colegas amigos e conhecidos do curso que por sinal são muitos, mas quero destacar Lucas, Marcilane e Nanda. Três amigos que o IF me deu e eu quero

levar para a vida. Sou tão grato por terem me ajudado, pelas risadas nos corredores e o companheirismo que vocês tiveram comigo.

À minha namorada Edvirgem de Andrade pela sua paciência e ajuda no trabalho. Aos meus amigos: Júlio Barbosa, Julimar Barbosa, Pedro Mateus, Niceliston, Diego Mayard, Ronan, Daniela Duarte, Vitória Honório, Vitória Teodório, Bruno de Bernadete, Fábricia, Aline, José Luan, Keliha, Venan, Lohan, Victor, Valdir e Edvanilson. À minha madrinha Zalma, a quem eu tenho um grande amor por ela.

Aos meus professores de Ensino Fundamental e Médio. De maneira especial, quero destacar os três irmãos: Me. Jorge Bélem, Juliane Bélem e Me. Wilames Bélem, que me ajudaram tanto e me fizeram amar a matemática e por sempre me ajudar nas horas que precisei. Agradeço a Marcos Campos, grande professor e amigo, o qual sempre acreditou em mim e me incentivou bastante para que eu não desistisse nunca, Rivanildo Ricarte, Claudia, Everaldo, Dra. Zuleide, Hélio Batista, Abel Junior, Vera, Aurélio, professores que me ajudaram tanto.

RESUMO

Este trabalho apresenta uma pesquisa sobre os multiplicadores de Lagrange e suas aplicações em problemas com uma ou mais restrições, nos quais esse método se mostra uma ferramenta eficaz. Suas aplicações abrangem diversas áreas da matemática, com ênfase, neste estudo, nas aplicações da geometria. Para isso, são utilizados exemplos, definições, propriedades, entre outros recursos necessários. O procedimento metodológico adotado consiste em uma pesquisa bibliográfica, de natureza básica e abordagem qualitativa. Durante o desenvolvimento da pesquisa, observou-se o quanto os multiplicadores de Lagrange podem ser aplicados, facilitando os cálculos. Como consequência, este trabalho torna-se um material de grande utilidade para a comunidade acadêmica que deseja se aprofundar no estudo do tema.

Palavras-chave: Multiplicadores de Lagrange; Derivadas parciais; Máximos e Mínimos.

ABSTRACT

This paper presents a study of the method of Lagrange multipliers and its applications to optimization problems with one or more constraints, in which this method proves to be an effective tool. Its applications cover several areas of mathematics, with particular emphasis in this study on applications in geometry. To this end, examples, definitions, properties, and other necessary theoretical concepts are presented. The methodological approach adopted consists of a basic, qualitative bibliographic study. Throughout the research, it was observed that the method of Lagrange multipliers can be applied in a wide variety of situations, significantly simplifying computations. As a result, this work serves as a valuable resource for the academic community interested in gaining a deeper understanding of the subject.

Keywords: Lagrange multipliers; Partial derivatives; Maxima and minima.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1.1 – Joseph-Louis Lagrange	9
Figura 3.1 – Representação do domínio e da imagem de uma função de duas variáveis.	15
Figura 3.2 – Representação do Domínio.	16
Figura 3.3 – Representação gráfica de $f(x, y)$	18
Figura 3.4 – Representação do gráfica de $g(x, y)$	18
Figura 3.5 – Representação de $\vec{u}$ e $\nabla f(x_0, y_0)$ no ponto (x_0, y_0)	22
Figura 3.6 – Representação geométrica da situação problema.	24
Figura 3.7 – Representação do gráfico.	28

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	9
2	METODOLOGIA	12
3	DESENVOLVIMENTO ANALÍTICO	14
3.1	Funções de duas ou mais variáveis	14
3.1.1	Domínio	14
3.1.2	Imagem	15
3.1.3	Gráfico	17
3.2	Derivada parcial	18
3.3	Vetor Gradiente	20
3.3.1	Propriedades do Gradiente	24
3.4	Multiplicadores de Lagrange	25
3.4.1	Máximos e Mínimos Locais e Absolutos	25
3.4.2	O Método dos Multiplicadores de Lagrange	27
4	PROBLEMAS DIVERSOS	33
4.1	Aplicação do multiplicador de Lagrange na área da saúde . . .	33
4.2	Problemas de geometria utilizando os multiplicadores de Lagrange	35
4.2.1	Maximizar uma Região Retangular	35
4.2.2	Construção de uma Caixa com Volume Constante, Gastando o Mínimo de Material	37
4.2.3	Construção de um Recipiente Cilíndrico de Volume Constante, com Área Total Mínima	38
5	CONSIDERAÇÕES FINAIS	40
	REFERÊNCIAS	41

1 INTRODUÇÃO

A resolução de problemas na matemática é de grande importância desde a antiguidade até os dias atuais, tendo em vista que podemos criar uma modelagem para resolver o que é proposto. A resolução de problemas é utilizada na forma de prever resultados, encontrar padrões, entre outros meios, pois há diferentes caminhos para solucionar o mesmo problema. A depender do caminho escolhido, pode-se ou não chegar aos resultados esperados; ou seja, “Resolver problemas é um componente essencial de fazer matemática e permite o contato com ideias matemáticas significativas” (Nunes; Santana, 2017, p. 4) .

Dentro desta perspectiva, inúmeros matemáticos foram responsáveis pela construção do embasamento teórico matemático para solução de problemas nas mais diversas áreas de conhecimento. Dentre eles, destacam-se um dos maiores matemáticos do século XVIII, Joseph-Louis Lagrange (1736-1813), nascido na cidade de Turim, Itália. Estudou em Turin, ainda jovem, tornou-se professor de Matemática na Academia Militar local. Seu conhecimento era tão notável que Frederico II da Prússia, disse “O maior dos reis da Europa desejava ter em sua corte” (Eves, 2011, p. 483). Lagrange assumiu uma cadeira na Academia de Berlim, ocupando o lugar de outro grande matemático, Leonhard Euler.

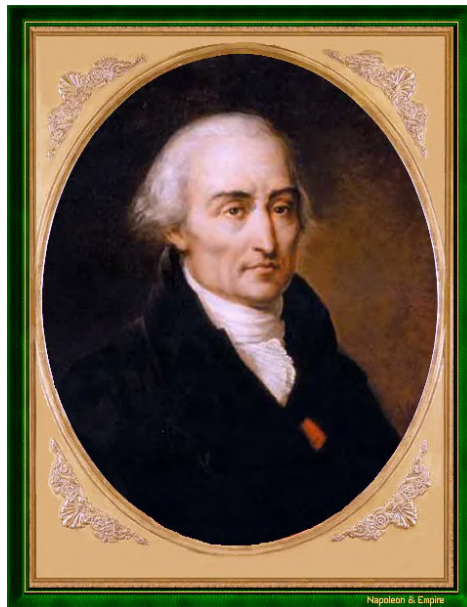


Figura 1.1 – Joseph-Louis Lagrange

Fonte: <https://www.napoleon-empire.org/en/personalities/lagrange.php>

Ao longo de sua carreira, foi autor de diversos trabalhos de grande importância para a Matemática. Entre suas principais obras, destacam-se *Traité de Résolution des Équations Numériques de Tous Degrés* (1767) e sua monumental *Mécanique Analytique* (1788), além de *Théorie des Fonctions Analytiques*, que apresenta princípios fundamentais

do cálculo diferencial. Lagrange contribuiu com diversas obras e conceitos fundamentais, como a série de Lagrange, equações diferenciais, o princípio de Lagrange, equações do movimento e, claro, o objeto de estudo deste trabalho: os multiplicadores de Lagrange, um método revolucionário que leva seu nome (Eves, 2011, p. 484).

Os multiplicadores de Lagrange surgem como uma forma alternativa para solucionar problemas de máximos e mínimos, sujeitos a uma ou mais restrições. Vale destacar que quanto maior o número de variáveis em uma função, maior a dificuldade para determinar o conjunto solução. Logo, para funções com um grande número de variáveis, obter soluções analíticas ótimas para o sistema obtido torna-se trabalhoso, surgindo assim a necessidade de usar técnicas computacionais para auxiliar no processo, conforme destaca (Saramago; Junior, 2008).

O presente trabalho visa contemplar os objetivos que seguem.

Geral

- Desenvolver uma pesquisa bibliográfica sobre problemas que podem ser resolvidos usando os multiplicadores de Lagrange.

Específicos

- Fazer um levantamento bibliográfico sobre livros, apostilas, trabalho de conclusão de curso que abordem o tema Multiplicador de Lagrange.
- Descrever conceitos básicos necessários para desenvolver solução de problemas utilizando o Multiplicador de Lagrange.
- Resolver problemas clássicos nas áreas da saúde e geometria utilizando o multiplicador de Lagrange.

Como os multiplicadores podem ser utilizados para facilitar a abordagem e a compreensão de problemas de otimização e evidenciar sua importância como método alternativo. Além disso, pretende-se que este trabalho sirva como um material complementar de consulta para a comunidade acadêmica, com o intuito de auxiliar na resolução de problemas que envolvam algum tipo de otimização, contribuindo para a compreensão.

O trabalho é composto pela Introdução intitulada como o Capítulo 1, a Metodologia como Capítulo 2 e mais dois capítulos.

O Capítulo 3 é constituído pelo desenvolvimento analítico do trabalho, onde são abordadas, respectivamente, as funções de duas ou mais variáveis, domínio, imagem, gráfico, derivada parcial, derivada direcional, vetor gradiente, máximos e mínimos locais e absolutos, e o método dos Multiplicadores de Lagrange.

No Capítulo 4, são abordados alguns problemas que podem ser resolvidos, usando os multiplicadores de Lagrange. Dentre eles, destacam-se problemas na área da saúde, geometria plana e espacial.

2 METODOLOGIA

Para que uma pesquisa seja feita, é necessário que o pesquisador primeiro conheça o tipo de pesquisa, a metodologia que será usada e o que será coletado para que a partir disso tenha em mente como vai proceder diante de sua contextualização. Nesse contexto, “Pesquisa é a construção de conhecimento original, de acordo com certas exigências científicas. É um trabalho de produção de conhecimento sistemático, não meramente repetitivo, mas produtivo, que faz avançar a área de conhecimento a qual se dedica” (Goldenberg, 2004, p. 105).

No que se refere à finalidade, esta é uma pesquisa básica, que, segundo Prodanov e Freitas (2013, p. 126), “Envolve verdades e interesses universais, procurando gerar conhecimentos novos úteis para o avanço da ciência, sem aplicação prática prevista”. Nesse ponto, salientamos que este trabalho busca apresentar uma fundamentação relativa ao conhecimento sobre os multiplicadores de Lagrange e a algumas de suas possíveis aplicações.

Esta pesquisa caracteriza-se como bibliográfica. Pois, de acordo com (Lima; Mito, 2007, p. 38), temos a relação explícita em que “... a pesquisa bibliográfica implica em um conjunto ordenado de procedimentos de busca por soluções, atento ao objeto de estudo, e que, por isso, não pode ser aleatório.” Em virtude disso busca-se resolver problemas utilizando os multiplicadores de Lagrange utilizando livros, artigos, trabalhos de conclusão de curso, entre outros materiais.

Já que o objetivo é desenvolver uma pesquisa bibliográfica sobre problemas que podem ser resolvidos utilizando os multiplicadores de Lagrange, entre outros aspectos, de trabalhos já existentes, que são coletados em acervos digitais, monografias, trabalho de conclusão de curso, sites como CAPES, por exemplo, livros de Cálculo Diferencial e repositório das universidades entre outros, a abordagem adotada nesse trabalho foi uma abordagem qualitativa, que, para (Prodanov; Freitas, 2013, p. 70),

Pesquisa qualitativa: considera que há uma relação dinâmica entre o mundo real e o sujeito, isto é, um vínculo indissociável entre o mundo objetivo e a subjetividade do sujeito que não pode ser traduzido em números. A interpretação dos fenômenos e a atribuição de significados são básicas no processo de pesquisa qualitativa. Esta não requer o uso de métodos e técnicas estatísticas. O ambiente natural é a fonte direta para coleta de dados e o pesquisador é o instrumento-chave. Tal pesquisa é descritiva. Os pesquisadores tendem a analisar seus dados indutivamente. O processo e seu significado são os focos principais de abordagem.

Nesse sentido, vale ressaltar que o método hipotético-dedutivo estruturou o trabalho em dois momentos: o Capítulo 3 consiste no desenvolvimento analítico propriamente dito, e o Capítulo 4 decorre desse desenvolvimento, apresentando aplicações em problemas diversos. No qual está fundamentado nos livros de Cálculo Diferencial e Integral: Cálculo de James Stewart; Um Curso de Cálculo de Guidorizzi; Cálculo de Munem Foulis, Thomas, Weir Hass, tendo em vista que a teoria se torna relevante para o desenvolvimento da pesquisa. Vale destacar que a escolha desses livros se deram por causa do fácil acesso, pois são encontrados no acervo bibliográfico do campus.

No Capítulo 3, fora destacada toda teoria necessária para abordagem do real objetivo do trabalho. Tratando, no referido capítulo, temas diversos como: funções de duas ou mais variáveis, derivadas parciais, vetor gradiente, entre outros. Tendo em vista que os resultados (propriedades e demonstrações) decorrem dos livros citados no Capítulo 3.

No capítulo 4, vamos tratar dos multiplicadores de Lagrange como uma forte ferramenta teórica na resolução de diversos problemas matemáticos, apresentando uma teoria elaborada que vai além dos livros de Cálculo Diferencial, no sentido de dar um foco maior para a resolução desses problemas. Sendo este fundamentado em decorrência dos resultados dos trabalhos dos autores Marta Cristina de Moraes Parazi, no Trabalho de Conclusão de Curso com o tema: Aplicações do método dos multiplicadores de Lagrange, Bianca Masques Prescott e Carlos Frederico F. B. Vasconcellos, no artigo intitulado Aplicação de Multiplicadores de Lagrange em economia e Lucas Marchand, no trabalho de Conclusão de Curso como tema: Multiplicadores de Lagrange: uma aplicação em problemas de otimização global restrita.

3 DESENVOLVIMENTO ANALÍTICO

Neste capítulo, serão apresentados alguns conceitos de funções de duas ou mais variáveis, derivadas parciais, vetor gradiente, com o intuito de fundamentar as ideias matemáticas para a validação do resultado conhecido por multiplicadores de Lagrange, o qual é o principal objeto de estudo deste trabalho.

O desenvolvimento deste capítulo tem como base as referências: (Stewart; Clegg; Watson, 2022), (Guidorizzi, 2013), (Munem; Foulis, 1982), (Thomas; Weir; Hass, 2012), (Marchand, 2016), (Parizi, 2018) e (Prescott; Vasconcellos, 2014)

3.1 FUNÇÕES DE DUAS OU MAIS VARIÁVEIS

Para tratar sobre os multiplicadores de Lagrange, precisamos de alguns conceitos matemáticos que serão utilizados como suporte. Assumiremos todas as propriedades relativas às noções básicas de cálculo diferencial e integral de uma função real $f : D \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Para além disso, trataremos de funções reais de várias variáveis, como apresentadas a seguir.

Definição 1. *Seja $D \subset \mathbb{R}^2$ um conjunto não vazio. Uma função $f : D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ é dita de duas variáveis se para cada $(x, y) \in D$, a função associa um único número real $z = f(x, y)$.*

São exemplos de funções de duas variáveis:

- A área de um retângulo, cujos lados perpendiculares são $x, y \in \mathbb{R}_+$, dada por

$$A(x, y) = x \cdot y;$$

- A distância de um ponto $P(x, y)$ do plano xOy à origem desse plano, dada por

$$d(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

3.1.1 Domínio

Para toda função de duas variáveis, é essencial estabelecermos, a priori, quais pares de valores podem ser atribuídos as variáveis independentes x e y , ou seja, o conjunto dos pares (x, y) variáveis para os quais a regra $z = f(x, y)$ faz sentido matematicamente falando. Tal conjunto é denominado domínio da função z , dada por $z = f(x, y)$.

Formalmente, tem-se que dado $f : D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ uma função de duas variáveis. O domínio de f são os pares ordenados $(x, y) \in D$, que consequentemente satisfazem a relação $z = f(x, y)$.

3.1.2 Imagem

Seja $f : D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ uma função de duas variáveis. A imagem de f é o conjunto $Im(f) = \{z \in \mathbb{R} \mid (x, y) \in D \text{ e } z = f(x, y)\}$. O gráfico da Figura (3.1) ilustra a representação do domínio e imagem de uma função de duas variáveis.

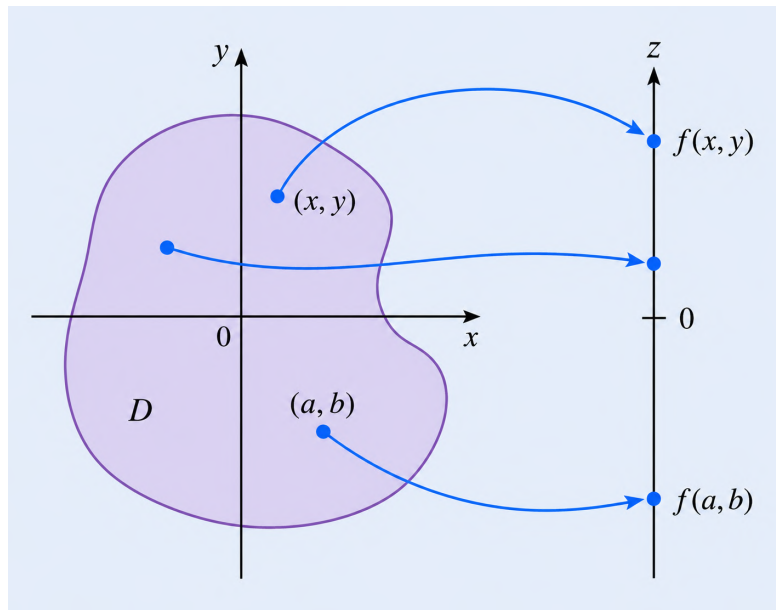


Figura 3.1 – Representação do domínio e da imagem de uma função de duas variáveis.

Fonte: Adaptado de STEWART, James. *Cálculo*. v. 2. 7. ed. norte-americana. São Paulo: Cengage Learning, 2013.

O exemplo a seguir destaca o domínio de algumas funções de duas variáveis.

Exemplo 1. *Descreva o domínio para cada uma das funções dadas a seguir.*

$$(a) f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$(b) f(x, y) = \sqrt{\frac{x+y+3}{x-1}}$$

Solução.

(a) Note que o radicando precisa ser não-negativo em casos de índices pares. Para além disso, temos que $x^2 + y^2 \geq 0$, para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}$. Portanto, o domínio de f é $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 \geq 0\} = \mathbb{R}^2$.

(b) De modo análogo ao item anterior, o radicando precisa ser não-negativo. Para tal, devemos ter

$$(x+y+3) \cdot (x-1) \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x-1 \geq 0 \text{ e } x+y+3 \geq 0 \text{ (i)} \\ \text{ou} \\ x-1 \leq 0 \text{ e } x+y+3 \leq 0 \text{ (ii)} \end{cases}.$$

Além disso, devemos ter $x-1 \neq 0$ por ser o denominador. Assim, (i) e (ii) tornar-se

$$\begin{cases} x-1 > 0 \text{ e } x+y+3 \geq 0 \text{ (iii)} \\ x-1 < 0 \text{ e } x+y+3 \leq 0 \text{ (iv)} \end{cases}.$$

O domínio de f pode ser representado por

$$D_f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x \neq 1 \text{ e } (x+y+3) \cdot (x-1) \geq 0\}.$$

Graficamente, podemos observar que D_f é a união dos pontos do $\mathbb{R}^2$ tais que as inequações representadas em (iii) e (iv) são verdadeiras. Por exemplo, para (iii), deve valer $x-1 > 0$ e $x+y+1 \geq 0$. O gráfico da Figura 3.2 representa geometricamente tal parte do domínio.

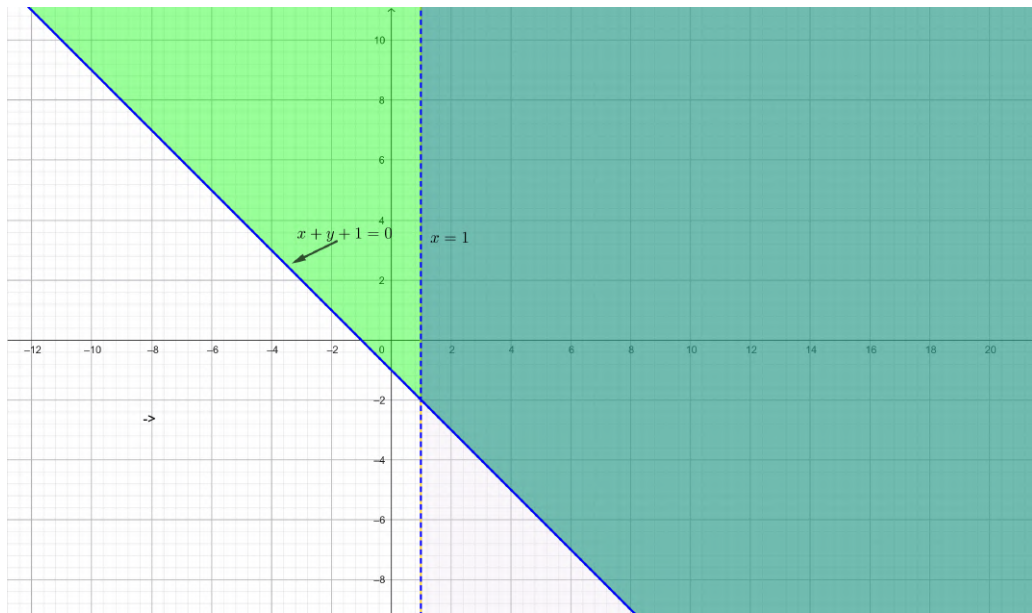


Figura 3.2 – Representação do Domínio.

Fonte: Produzido pelo autor via *software* GeoGebra.

Pode-se gerar um gráfico semelhante para o caso da inequação apresentada em (iv). $\diamond$

Exemplo 2. Descreva a imagem para cada uma das funções dadas a seguir.

(a) $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$

(b) $f(x, y) = \sqrt{\frac{x+y+3}{x-1}}.$

Solução.

(a) Neste caso, tem-se que $\text{Im}(f) = \{z \in \mathbb{R} \mid (x, y) \in D \text{ e } z = f(x, y)\} = \{z \in \mathbb{R}; z \geq 0\}$. Pois, ao tomar $x = 0$, podemos escolher y adequadamente de modo que tenhamos $f(0, y) = z \in \mathbb{R}_+$. Com efeito, basta que $|y| = |z| = z$. Disso,

$$f(0, y) = \sqrt{0^2 + y^2} = \sqrt{y^2} = |y| = z \therefore z = f(0, y).$$

(b) Neste caso, temos que $\text{Im}(f) = \{z \in \mathbb{R} \mid (x, y) \in D \text{ e } z = f(x, y)\} = \{z \in \mathbb{R}; z \geq 0\}$. Pois, ao tomar $x = 2$, podemos escolher y adequadamente de modo que tenhamos $f(2, y) = z \in \mathbb{R}_+$. efetivamente, basta que $y = z^2 - 5$. Disso,

$$f(2, y) = \sqrt{\frac{2 + (z^2 - 5) + 3}{2 - 1}} = \sqrt{\frac{z^2}{1}} = \sqrt{z^2} = |z| = z \therefore z = f(2, y).$$

◇

3.1.3 Gráfico

Definição 2. *Seja $f : D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ uma função de duas variáveis, o gráfico de f é o conjunto de todos os pontos $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ tal que $z = f(x, y)$ e $(x, y) \in D$.*

No Exemplo 3, são apresentados os gráficos de algumas funções de duas variáveis. Vale aqui reforçar o fato de que a dimensão do domínio de f é 2 e a dimensão da imagem de f é 1 e, por isso, o gráfico de f tem dimensão 3. Ou seja, o gráfico de f é um subconjunto do $\mathbb{R}^3$.

No geral, independentemente da dimensão na qual o gráfico da função está inserido, esboçar gráficos é um processo muito trabalhoso e que depende de ferramentas auxiliares para gerar um esboço que possa ser considerado plausível. Para além disso, há diversos programas de computadores que possibilitam uma visualização desses gráficos para os casos em que eles estão inseridos no $\mathbb{R}^2$ ou no $\mathbb{R}^3$.

Exemplo 3. *Os gráficos de $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ e $g(x, y) = \sqrt{\frac{x+y+3}{x-1}}$ são representados a seguir, respectivamente, na Figura 3.3 e Figura 3.5.*

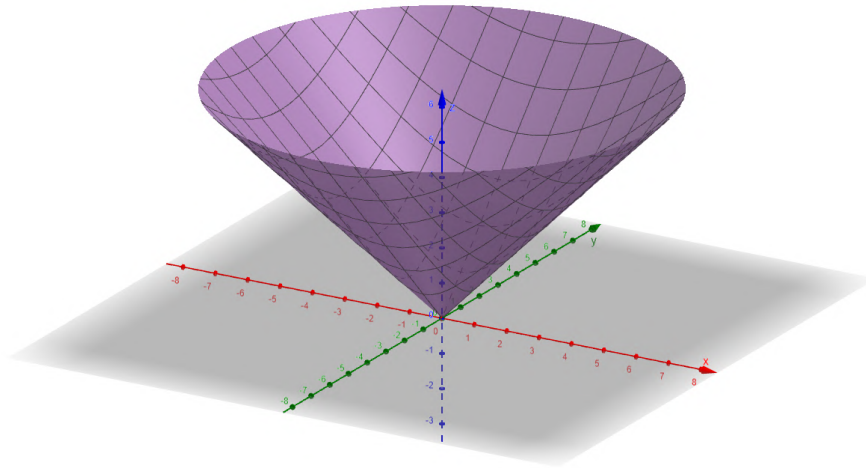


Figura 3.3 – Representação gráfica de $f(x, y)$.

Fonte: Produzido pelo autor via *software* GeoGebra.

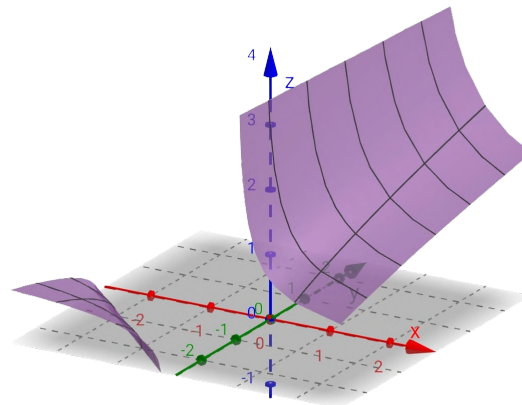


Figura 3.4 – Representação do gráfica de $g(x, y)$.

Fonte: Produzido pelo autor via *software* GeoGebra.

3.2 DERIVADA PARCIAL

Definição 3. Seja $f : D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ uma função de duas variáveis dada por $z = f(x, y)$. A derivada parcial de $f(x, y)$ com relação a x no ponto (x_0, y_0) que podemos denotar por

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = f_x(x_0, y_0) = f_1(x_0, y_0) = D_x f(x_0, y_0) = D_1 f(x_0, y_0)$$

é definida por

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\Delta x},$$

se tal limite existe. A derivada parcial de $f(x, y)$ com relação a y no ponto (x_0, y_0) que podemos denotar por

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = f_y(x_0, y_0) = f_2(x_0, y_0) = D_y f(x_0, y_0) = D_2 f(x_0, y_0)$$

é definida por

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)}{\Delta y},$$

se tal limite existe.

Algumas notações usadas para derivadas parciais de f em relação a x e a y , são dadas respectivamente.

$$f_x(x, y) = \frac{\partial}{\partial x} f(x, y) = \frac{\partial z}{\partial x} = f_1(x, y) = D_1 f(x, y) = D_x f(x, y) \quad (1)$$

$$f_y(x, y) = \frac{\partial}{\partial y} f(x, y) = \frac{\partial z}{\partial y} = f_2(x, y) = D_2 f(x, y) = D_y f(x, y). \quad (2)$$

A seguir, são apresentados alguns exemplos, cuja solução sai direto da Definição 3.

Assumiremos como verdadeiras as propriedades relacionadas às funções reais de uma variável real. Por exemplo, assumiremos como verdadeiras as propriedades para a derivadas da soma, produto e divisão de funções reais de uma variável real.

Disso, podemos observar que ao fixar uma das variáveis das funções de duas variáveis, recaímos exatamente no caso em que estamos considerando funções reais de uma variável real. Ou seja, as derivadas parciais se tornam uma derivada simples ao fixar uma dessas variáveis. Por exemplo, calcular $f_x(x, y)$ é o mesmo que calcular a derivada de f com relação à variável x e tomar $y = k$ em que k é um valor fixado.

Exemplo 4. Sendo $f(x, y) = x^3 + x^2y^3 - 2y^3$, obtenha $f_x(x, y)$, $f_y(x, y)$, $f_x(1, 2)$ e $f_y(2, 1)$.

Solução. As derivadas parciais em relação a x e y são respectivamente $f_x(x, y) = 3x^2 + 2xy^3$ e $f_y(x, y) = 3x^2y^2 - 6y^2$. Isso posto, temos que os valores nos pontos são $f_x(1, 2) = 19$ e $f_y(2, 1) = 6$. $\diamond$

Exemplo 5. Obter as derivadas parciais $f_x(x, y)$ e $f_y(x, y)$ para a função

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

Resolução. De acordo com a Definição 3 e como a função está definida por duas sentenças, devemos analisar suas derivadas parciais, na origem e fora da origem.

Na origem, obtém-se a derivada parcial usando a Definição 3, isto é

$$\begin{aligned} f_x(0,0) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(0+\Delta x,0) - f(0,0)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(\Delta x,0) - 0}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{0 - 0}{\Delta x} = 0. \end{aligned} \quad (3)$$

Analogamente, tem-se

$$f_y(0,0) = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f(0,0+\Delta y) - f(0,0)}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f(0,\Delta y) - 0}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{0 - 0}{\Delta y} = 0. \quad (4)$$

Fora da origem podemos usar a regra do quociente para calcular as derivadas parciais com relação a x e a y , respectivamente, tem-se:

$$f_x(x,y) = \frac{\frac{\partial(xy)}{\partial x} \cdot (x^2+y^2) - \frac{\partial(x^2+y^2)}{\partial x} \cdot (xy)}{(x^2+y^2)^2} \Rightarrow f_x(x,y) = \frac{y(x^2+y^2) - xy(2x)}{(x^2+y^2)^2} = \frac{y^3 - yx^2}{(x^2+y^2)^2},$$

ou seja,

$$f_x(x,y) = \frac{y^3 - yx^2}{(x^2+y^2)^2}.$$

De modo análogo, tem-se

$$f_y(x,y) = \frac{x^3 - xy^2}{x^2+y^2}.$$

◇

3.3 VETOR GRADIENTE

Nesta seção, serão apresentadas algumas caracterizações para o vetor gradiente das funções de duas e três variáveis. Começaremos definindo a derivada direcional.

Definição 4. *Seja $f : D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ uma função de duas variáveis e $(x_0, y_0) \in D$. Se f é diferenciável em (x_0, y_0) , tem-se que;*

1. *A derivada direcional de f no ponto (x_0, y_0) na direção do vetor unitário $u = (a, b)$ é dada por:*

$$D_u f(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \cdot a + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \cdot b,$$

onde $a = (1, 0)$ e $b = (0, 1)$.

2. *A derivada direcional de f no ponto (x_0, y_0) na direção do vetor $u = (a, b)$ qualquer é dada por*

$$D_u f(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \cdot \bar{a} + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \cdot \bar{b},$$

onde $\bar{a}$ e $\bar{b}$ são as coordenadas de um vetor unitário na direção de $\mathbf{u}$.

Definição 5. . Seja $f : D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ uma função de duas variáveis. O vetor gradiente no ponto $(x_0, y_0) \in D$ onde existem derivadas parciais $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$ e $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$ é definido por

$$\nabla f(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \cdot \hat{i} + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \cdot \hat{j} = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0), \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \right). \quad (5)$$

O Exemplo 6 é uma aplicação direta da Definição da Definição 5.

Exemplo 6. Sendo $f(x, y) = \sin x + e^{xy}$. Vamos obter $\nabla f(x, y)$ e $\nabla f(0, 1)$.

Solução. Note que $\nabla f(x, y) = (\cos x + ye^{xy}, xe^{xy})$. Aplicando no ponto $(0, 1)$, obtemos $\nabla f(0, 1) = (2, 0)$. $\diamond$

Da Definição 4, tem-se que se f é diferenciável em (x_0, y_0) , então a derivada direcional de f no ponto (x_0, y_0) na direção do vetor $\mathbf{u} = (a, b)$ qualquer é dada por

$$D_{\mathbf{u}}f(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \cdot \bar{a} + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \cdot \bar{b}, \quad (6)$$

onde $\bar{a}$ e $\bar{b}$ são as coordenadas de um vetor unitário na direção de $\mathbf{u}$. Assim, tem-se que

$$D_{\mathbf{u}}f(x_0, y_0) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0), \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \right) \cdot \mathbf{u} = \nabla f(x_0, y_0) \cdot \mathbf{u}. \quad (7)$$

O gráfico da Figura 3.5 apresenta a representação de $\vec{u}$ e $\nabla f(x_0, y_0)$ em um ponto (x_0, y_0) do domínio de f .

Do gráfico da Figura 3.5, tem-se que

$$\cos \theta = \frac{\vec{u} \cdot \nabla f(x_0, y_0)}{\|\vec{u}\| \|\nabla f(x_0, y_0)\|}.$$

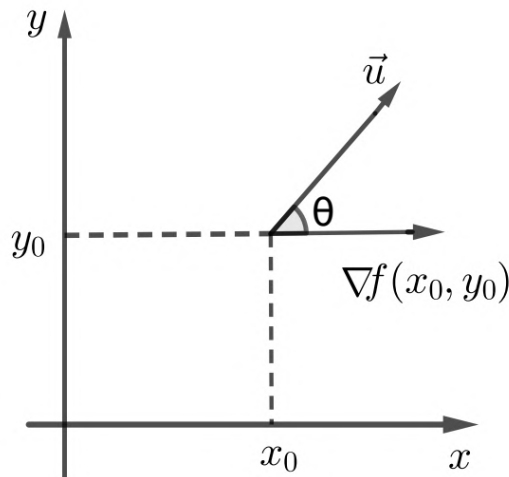


Figura 3.5 – Representação de $\vec{u}$ e $\nabla f(x_0, y_0)$ no ponto (x_0, y_0) .

Fonte: Produzido pelo autor via *software* GeoGebra.

Como $\vec{u}$ é unitário, podemos escrever

$$\vec{u} \cdot \nabla f(x_0, y_0) = \|\nabla f(x_0, y_0)\| \cos \theta. \quad (8)$$

Logo, $D_{\vec{u}}f(x_0, y_0) = \|\nabla f(x_0, y_0)\| \cos \theta$. Daí tem-se que a derivada direcional de f em (x_0, y_0) assumirá:

(i) valor máximo, quando $\cos \theta = 1$, ou seja, $\theta = 0$. Neste caso, o $\nabla f(x_0, y_0)$ e $\vec{u}$ tem a mesma direção e mesmo sentido. O valor máximo da derivada direcional é

$$D_{\vec{u}}\nabla(x_0, y_0) = \|\nabla f(x_0, y_0)\|.$$

(ii) valor mínimo, quando $\cos \theta = -1$, ou seja, $\theta = \pi$. Neste caso, $\vec{u}$ e $\nabla f(x_0, y_0)$ têm mesma direção e sentidos contrários. O valor mínimo da derivada direcional é

$$D_{\mathbf{u}}f(x_0, y_0) = -\|\nabla f(x_0, y_0)\|. \quad (9)$$

(iii) valor nulo, quando $\cos \theta = 0$, ou seja, quando $\theta = \frac{\pi}{2}$. Neste caso, $\vec{u}$ e $\nabla f(x_0, y_0)$ são perpendiculares.

Daí, podemos concluir que:

- Ao movermos em uma direção perpendicular ao gradiente, a função se mantém constante.

- Se nos movermos na direção do gradiente, a função crescerá mais rapidamente.
- Se nos movermos na direção oposta ao gradiente, a função decrescerá mais rapidamente.

O Exemplo 7 apresenta uma aplicação direta de tal propriedade.

Exemplo 7. Suponha que a temperatura num ponto (x, y) do plano seja dada por

$$T(x, y) = \frac{80}{1 + x^2 + 2y^2},$$

onde T é medido em graus Celsius e x e y em metros.

- a) Em que direção a partir do ponto $(-1, -1)$ a temperatura aumenta mais rapidamente?
 b) Qual a taxa máxima de aumento?

Solução. As derivadas parciais em relação da função T são respectivamente:

$$\frac{\partial T}{\partial x}(x, y) = -\frac{160x}{(1 + x^2 + 2y^2)^2}, \quad \frac{\partial T}{\partial y}(x, y) = -\frac{320y}{(1 + x^2 + 2y^2)^2}.$$

Aplicando no ponto $(-1, -1)$, tem-se

$$\frac{\partial T}{\partial x}(-1, -1) = 10, \quad \frac{\partial T}{\partial y}(-1, -1) = 20.$$

Portanto,

$$\nabla T(-1, -1) = (10, 20).$$

- b) A taxa máxima de aumento é dada pela norma do gradiente, isto é,

$$\|\nabla T(-1, -1)\| = \sqrt{10^2 + 20^2} = \sqrt{100 + 400} = \sqrt{500} = 10\sqrt{5} \text{ °C/m}.$$

◇

Definição 6. Seja $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ uma função de três variáveis. O vetor gradiente no ponto $(x_0, y_0, z_0) \in D$ onde existem derivadas parciais $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0, z_0)$ e $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0, z_0)$ é definido por

$$\begin{aligned} \nabla f(x_0, y_0, z_0) &= \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0, z_0) \cdot \hat{i} + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0, z_0) \cdot \hat{j} + \frac{\partial f}{\partial z}(x_0, y_0, z_0) \cdot \hat{k} \\ &= \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0, z_0), \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0, z_0), \frac{\partial f}{\partial z}(x_0, y_0, z_0) \right). \end{aligned} \quad (10)$$

Exemplo 8. Seja $f(x, y, z) = x \sin(yz)$. Obtenha o gradiente de f no ponto $(1, 3, 0)$.

Resolução. Usando a Definição 6, tem-se $\nabla f(x, y, z) = (\sin(yz), xz \cos(yz), xy \cos(yz))$. Consequentemente, obtem-se $\nabla f(1, 3, 0) = (0, 0, 3)$.

◇

3.3.1 Propriedades do Gradiente

Propriedade 1. *Seja f uma função diferenciável em $D \subset \mathbb{R}^2$ (aberto) e considere $(x_0, y_0) \in D$ tal que $\nabla f(x_0, y_0) \neq \vec{0}$. Então $\nabla f(x_0, y_0)$ é normal à curva de nível que passa pelo ponto (x_0, y_0) .*

Demonstração. O gráfico da Figura 3.6 representa geometricamente tal propriedade.

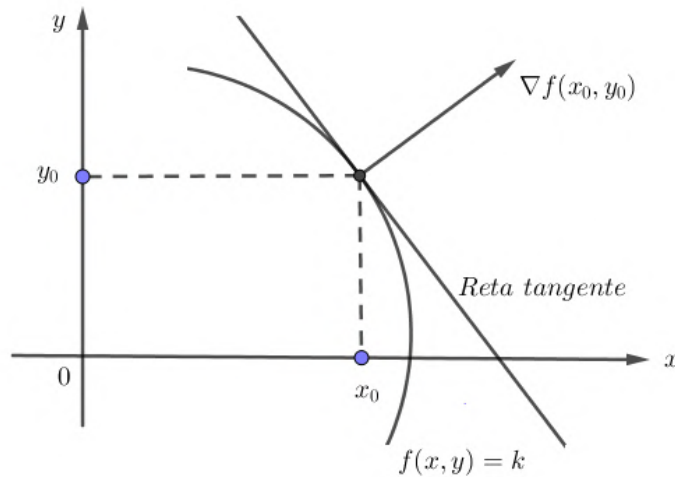


Figura 3.6 – Representação geométrica da situação problema.

Fonte: Produzido pelo autor usando o *Software GeoGebra*.

Para mostrarmos tal fato, imponha que: $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$, tal que $\alpha(t) = (x(t), y(t))$ para uma parametrização de curva de nível $K = f(x(t), y(t))$, com $\alpha(t_0) = (x(t_0), y(t_0)) = (x_0, y_0)$. Logo, $f(x(t), y(t)) = K$, $\forall t \in I$.

Por outro lado, tem-se que

$$\begin{aligned}
 0 &= \frac{\partial f}{\partial t} \\
 &= \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x} \cdot x'(t_0) + \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y} y'(t_0) \\
 &= \left(\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x}, \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y} \right) \cdot (x'(t_0), y'(t_0)) \\
 &= \nabla f(x_0, y_0) \cdot \alpha'(t_0).
 \end{aligned}$$

Portanto, $\nabla f(x_0, y_0) \cdot \alpha'(t_0) = 0$. Tal fato implica $\nabla f(x_0, y_0) \perp \alpha'(t_0)$. ■

Propriedade 2. *Seja f uma função diferenciável em $D \subset \mathbb{R}^3$ (aberto) e considere $(x_0, y_0, z_0) \in D$ tal que $\nabla f(x_0, y_0, z_0) \neq \vec{0}$. Então $\nabla f(x_0, y_0, z_0)$ é normal à superfície de*

nível da função f que passa pelo ponto (x_0, y_0, z_0) , isto é, $\nabla f(x_0, y_0, z_0)$ é normal ao plano tangente à superfície de nível de f em (x_0, y_0, z_0) .

Demonstração. Para mostrar tal fato, suponha $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ tal que $\alpha(t) = (x(t), y(t), z(t))$ seja uma parametrização da superfície de nível $K = f(x, y, z)$, com $\alpha(t_0) = (x(t_0), y(t_0), z(t_0)) = (x_0, y_0, z_0)$. Logo, $f(x(t), y(t), z(t)) = k \quad \forall t \in I$.

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial t} &= \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0, z_0) \cdot x'(t_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0, z_0) \cdot y'(t_0) + \frac{\partial f}{\partial z}(x_0, y_0, z_0) \cdot z'(t_0) \\ 0 &= \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0, z_0), \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0, z_0), \frac{\partial f}{\partial z}(x_0, y_0, z_0) \right) \cdot (x'(t_0), y'(t_0), z'(t_0)). \end{aligned}$$

Tal fato implica $\nabla f(x_0, y_0, z_0) \perp \alpha'(t_0)$. Portanto, o vetor gradiente é perpendicular à superfície de nível no ponto considerado.

■

3.4 MULTIPLICADORES DE LAGRANGE

Nesta seção serão apresentados alguns conceitos e propriedades elementares de máximos e mínimos para funções de duas variáveis ou mais variáveis, destacando o método dos multiplicadores de Lagrange, ferramenta necessária para fundamentação dos problemas propostos.

3.4.1 Máximos e Mínimos Locais e Absolutos

Definição 7. Uma função de duas variáveis tem um **máximo local** em (x_0, y_0) se $f(x, y) \leq f(x_0, y_0)$ quando (x, y) está próximo de (x_0, y_0) . O número $f(x_0, y_0)$ é chamado **MÁXIMO LOCAL**.

1º) Se $f(x, y) \geq f(x_0, y_0)$ quando (x, y) está próximo de (x_0, y_0) , então $f(x, y)$ tem um **mínimo local** em (x_0, y_0) . O número $f(x_0, y_0)$ é chamado **MÍNIMO LOCAL**.

2º) Se $f(x, y) \leq f(x_0, y_0)$ para $(x, y) \in D(f)$, então $f(x, y)$ possui um **máximo absoluto** em (x_0, y_0) .

3º) Se $f(x, y) \geq f(x_0, y_0)$ para $(x, y) \in D(f)$, então $f(x, y)$ possui um **mínimo absoluto** em (x_0, y_0) .

O Teorema 1 permite obter os pontos candidatos a serem extremantes locais para uma função de duas variáveis.

Teorema 1. *Seja $f : D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, (x_0, y_0) um ponto de interior de D e suponha que $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$ e $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$ existam. Uma condição necessária para que (x_0, y_0) seja extremante local de f é que $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = 0$ e $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = 0$.*

Demonstração. Suponha que (x_0, y_0) seja um ponto de máximo local de f . Como por hipótese, (x_0, y_0) é um ponto interior de D , então existe uma bola aberta $B \subset D$ com centro em (x_0, y_0) tal que para todo (x, y) na bola B

$$f(x, y) \leq f(x_0, y_0).$$

Por outro lado, pode-se garantir que existe um intervalo aberto I com $x_0 \in I$ tal que para todo $x \in I$ tem-se $(x, y_0) \in B$.

Considere a função

$$g(x) = f(x, y_0),$$

com $x \in I$. Daí, tem-se que

- g é derivável em x_0 , pois

$$g'(x_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0).$$

- x_0 é ponto de interior de I .
- x_0 é ponto de máximo local de g .

Portanto,

$$g'(x_0) = 0 \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = 0.$$

De modo análogo, mostra-se que

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = 0.$$

■

Teorema 2 (Teste da segunda derivada). *Seja f uma função de classe C^2 e (x_0, y_0) um ponto interior do domínio de f . Sendo (x_0, y_0) um ponto crítico de f e*

$$D = D(x_0, y_0) = f_{xx}(x_0, y_0) \cdot f_{yy}(x_0, y_0) - [f_{xy}(x_0, y_0)]^2.$$

Então

- Se $D > 0$ e $f_{xx}(x_0, y_0) > 0$, então $f(x_0, y_0)$ é **mínimo local**.
- Se $D > 0$ e $f_{xx}(x_0, y_0) < 0$, então $f(x_0, y_0)$ é **máximo local**.
- Se $D < 0$, $f(x, y)$ não é mínimo nem máximo local. Em tal caso (x_0, y_0) é ponto de sela de f e o gráfico de f atravessa seu plano tangente em (x_0, y_0) .
- Se $D = 0$, nada se pode concluir.

Demonstração. Ver (Guidorizzi, 2013) ■

O Teorema 3 é utilizado para determinar o máximo e o mínimo absoluto em um conjunto compacto.

Teorema 3 (Teorema de Weierstrass). *Se f for contínua em um conjunto D fechado e limitado de $\mathbb{R}^2$, então existem pontos (x_1, y_1) e (x_2, y_2) pertencentes a D tais que, para todo $(x, y) \in D$, tem-se*

$$f(x_1, y_1) \leq f(x, y) \leq f(x_2, y_2).$$

*Em particular, f atinge um **mínimo absoluto** em (x_1, y_1) e um **máximo absoluto** em (x_2, y_2) .*

Demonstração. Para obter os valores máximos ou mínimos absolutos de uma função f contínua em um conjunto fechado e limitado D , pode-se proceder como segue.

- 1º) Usando Teorema(6) obtém-se os valores de f nos pontos críticos no interior de D .
 - 2º) Obtém-se os valores extremos de f na fronteira de D .
 - 3º) O maior valor obtido nos passos (1) e (2) é o máximo absoluto e o menor valor é mínimo absoluto.
-

3.4.2 O Método dos Multiplicadores de Lagrange

O método dos multiplicadores de Lagrange tem como objetivo estudar máximo e mínimo de funções sobre conjuntos do tipo

- 1) $\{(x, y) : g(x, y) = 0\}$
- 2) $\{(x, y, z) : g(x, y, z) = 0\}$
- 3) $\{(x, y, z) : g(x, y, z) = 0 \text{ e } h(x, y, z) = 0\}$.

A seguir são mencionados e demonstrados os teoremas que fundamentam cada um dos referidos casos.

Teorema 4 (Multiplicador de Lagrange). *Seja $f(x, y)$ diferenciável no conjunto aberto A , representado na Figura(3.7) e seja $B = \{(x, y) : g(x, y) = 0\}$, onde g é de classe C^1 em A e $\nabla g(x_0, y_0) \neq (0, 0)$ para todo $(x, y) \in B$. Uma condição necessária para que exista um máximo local de f em B é que exista λ tal que*

$$\nabla f(x_0, y_0) = \lambda \nabla g(x_0, y_0).$$

Demonstração. Suponha que $f(x_0, y_0) \in B$ seja um ponto de máximo local de f em B . Isso significa que existe uma bola aberta V de centro (x_0, y_0) tal que $f(x, y) \leq f(x_0, y_0)$ para todos $(x, y) \in B \cap V$.

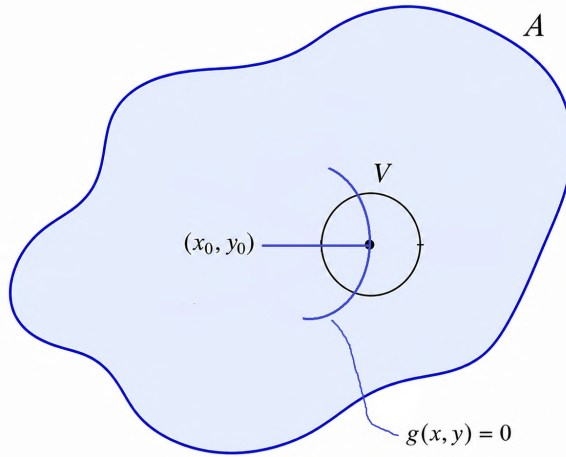


Figura 3.7 – Representação do gráfico.

Fonte: Produzido por IA adaptada *ChatGpt, Paint*.

Logo $(x, y) \in B \cap V$, com $g(x, y) = 0$ e $(x, y) \in V$. Considere uma curva diferenciável $\alpha(t) = (x(t), y(t))$ em um intervalo aberto $I \subset \mathbb{R}$ tal que $\alpha(t_0) = (x_0, y_0)$ para $t_0 \in I$, $\alpha'(t_0) \neq 0$ e $g(\alpha(t)) = 0$, para $t \in I$. A existência de tal curva diferenciável α é garantida pelo Teorema das funções (Lima, 2013). Da continuidade da curva $\alpha(t)$ existe $\delta > 0$ tal que $t \in (t_0 - \delta, t_0 + \delta) \Rightarrow \alpha(t) \in B \cap V$. Daí, $f(\alpha(t)) \leq f(\alpha(t_0))$ para todo $t \in (t_0 - \delta, t_0 + \delta)$. Assim, t_0 é um máximo local de $F(t) = f(\alpha(t))$ e, como t_0 é ponto interior a I , tem-se que

$$F'(t_0) = 0 \implies \nabla f(\alpha(t_0)) \cdot \alpha'(t_0) = 0 \quad (I)$$

Por outro lado, de $g(\alpha(t)) = 0$ em I , tem-se

$$\nabla g(\alpha(t_0)) \cdot \alpha'(t_0) = 0 \quad (II).$$

Como $\nabla g(\alpha(t_0)) \neq \vec{0}$ e $\alpha'(t_0) \neq \vec{0}$, então $\nabla f(\alpha(t_0))$ é paralelo a $\nabla g(\alpha(t_0))$. Portanto, existe $\lambda_0 \in \mathbb{R}$ tal que $\nabla f(\alpha(t_0)) = \lambda_0 \nabla g(\alpha(t_0))$. Então, sendo f diferenciável no conjunto aberto A e $B = \{(x, y) : g(x, y) = 0\}$, onde g é de classe C^1 em A e $\nabla g(x, y) \neq (0, 0)$ em B , os candidatos a extremantes locais de f em B são os pontos $(x, y) \in A$ que satisfazem o sistema

$$\begin{cases} \nabla f(x, y) = \lambda \nabla g(x, y) \\ g(x, y) = 0 \end{cases}.$$

■

Uma aplicação direta do Teorema 1 é obter os extremantes da função $f(x, y) = 3x + 2y$ com a restrição $x^2 + y^2 = 13$.

Solução. Pelo Teorema 1, tem-se

$$\begin{cases} \nabla f(x, y) = \lambda \nabla g(x, y) \\ g(x, y) = 0, \end{cases}.$$

para $f(x, y) = 3x + 2y$ e $g(x, y) = x^2 + y^2 - 13$. Daí, tem-se que

$$\begin{cases} (3, 2) = \lambda(2x, 2y) & (i) \\ x^2 + y^2 - 13 = 0. & (ii) \end{cases}.$$

Da Equação (i) do sistema, obtém-se

$$x = \frac{3}{2\lambda} \text{ e } y = \frac{1}{\lambda}, \quad (11)$$

que substituindo na restrição, tem-se

$$\left(\frac{3}{2\lambda}\right)^2 + \left(\frac{1}{\lambda}\right)^2 = 13 \implies \frac{9}{4\lambda^2} + \frac{1}{\lambda^2} = 13 \implies \lambda^2 = \frac{1}{4} \implies \lambda = \pm \frac{1}{2}.$$

Voltando na Equações 16, tem-se que $\lambda = \frac{1}{2} \implies (x, y) = (3, 2)$ e $\lambda = -\frac{1}{2} \implies (x, y) = (-3, -2)$.

Finalmente, para $(x, y) = (3, 2)$, obtém-se $f(3, 2) = 13$, que o valor máximo de f , considerando a restrição dada. Analogamente, para $(x, y) = (-3, -2)$, obtém-se $f(-3, -2) = -13$, que o valor mínimo, considerando a restrição dada. $\diamond$

Teorema 5 (Multiplicador de Lagrange). *Seja $f(x, y, z)$ diferenciável no conjunto aberto $A \subset \mathbb{R}^3$ e seja $B = \{(x, y, z) \in A; g(x, y, z) = 0\}$, onde g é de classe C^1 em A e $\nabla g(x, y, z) \neq (0, 0, 0)$ em B . Uma condição necessária para que $(x_0, y_0, z_0) \in B$ seja extremo local de f em B é que exista $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que*

$$\nabla f(x_0, y_0, z_0) = \lambda \nabla g(x_0, y_0, z_0).$$

Demonstração. A demonstração é análoga ao Teorema 1 e pode ser encontrada em (Lima, 2013). ■

Uma aplicação direta do Teorema 5 é obter o ponto do elipsoide $x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 1$ cuja soma das coordenadas seja máxima.

Solução. Pelo Teorema 5, tem-se

$$\begin{cases} \nabla f(x, y, z) = \lambda \nabla g(x, y, z) \\ g(x, y, z) = 0, \end{cases}.$$

para $f(x, y, z) = x + y + z$ e $g(x, y, z) = x^2 + 2y^2 + 3z^2 - 1$. Daí, tem-se que

$$\begin{cases} (1, 1, 1) = \lambda(2x, 4y, 6z) & (i) \\ x^2 + 2y^2 + 3z^2 - 1 = 0. & (ii) \end{cases}.$$

Da Equação (i) do sistema, obtém-se

$$x = \frac{1}{2\lambda}, y = \frac{1}{4\lambda} \text{ e } z = \frac{1}{6\lambda}, \quad (12)$$

que substituindo na restrição, tem-se

$$\left(\frac{1}{2\lambda}\right)^2 + \left(\frac{1}{4\lambda}\right)^2 + \left(\frac{1}{6\lambda}\right)^2 = 1 \implies \lambda^2 = \frac{11}{24}.$$

Como pretende-se obter a soma máxima das coordenadas, então toma-se o valor positivo de λ , isto é $\lambda = \sqrt{\frac{11}{24}}$.

Voltando na Equações 16, tem-se que $\lambda = \sqrt{\frac{11}{24}} \implies (x, y, z) = \left(\sqrt{\frac{66}{11}}, \sqrt{\frac{66}{22}}, \sqrt{\frac{66}{33}}\right)$.

Portanto, o ponto do elipsoide que maximiza a soma das coordenadas é $(x, y, z) = \left(\sqrt{\frac{66}{11}}, \sqrt{\frac{66}{22}}, \sqrt{\frac{66}{33}}\right)$. ◇

Proposição 1. *Sejam $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ e $\vec{c}$ vetores não nulos de $\mathbb{R}^3$ tais que*

$$\vec{u} \times \vec{v} \neq 0, \vec{u} \cdot \vec{c} = 0, \vec{v} \cdot \vec{c} = 0 \text{ e } \vec{w} \cdot \vec{c} = 0.$$

Então existem λ_1 e λ_2 reais tais que

$$\vec{w} = \lambda_1 \vec{u} + \lambda_2 \vec{v}.$$

Demonstração.

Por hipótese, tem-se que $\vec{u} \times \vec{v} \neq \vec{0}$. Isso significa que $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são LI, ou seja, formam uma base para um plano em $\mathbb{R}^3$. Por outro lado, do fato de $\vec{u} \cdot \vec{c} = 0$ e $\vec{v} \cdot \vec{c} = 0$, tem-se que

$\vec{c}$ é ortogonal tanto a $\vec{u}$ quanto a $\vec{v}$. Logo, $\vec{c}$ é paralelo ao produto vetorial $\vec{u} \times \vec{v}$. Como os vetores são não nulos, então $\vec{c}$ é perpendicular ao plano gerado por $\vec{u}$ e $\vec{v}$. Mas sabemos que $\vec{w} \cdot \vec{c} = 0$, então $\vec{w}$ é perpendicular a $\vec{c}$. Assim, $\vec{w}$ pertence ao plano gerado por $\vec{u}$ e $\vec{v}$. Portanto, podemos escrever $\vec{w}$ como combinação linear de $\vec{u}$ e $\vec{v}$, isto é, existem $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ tais que:

$$\vec{w} = \lambda_1 \vec{u} + \lambda_2 \vec{v}.$$

■

Teorema 6 (Multiplicadores de Lagrange). *Seja $f(x, y, z)$ diferenciável no aberto $X \subset \mathbb{R}^3$ e seja $B = \{(x, y, z) \in X \mid g(x, y, z) = 0 \text{ e } h(x, y, z) = 0\}$, onde g e h são de classe C^1 em X e $\nabla g(x, y, z) \times \nabla h(x, y, z) \neq 0$ em B . Uma condição necessária para que $(x_0, y_0, z_0) \in B$ seja extremo local de f em B é que existam $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ tais que*

$$\nabla f(x_0, y_0, z_0) = \lambda_1 \nabla g(x_0, y_0, z_0) + \lambda_2 \nabla h(x_0, y_0, z_0).$$

Demonstração. Suponha que (x_0, y_0, z_0) seja ponto de máximo local de f em B . Então existe uma bola aberta V de centro (x_0, y_0, z_0) tal que, para todos $(x, y, z) \in B \cap V$ tem-se $f(x, y, z) \leq f(x_0, y_0, z_0)$. Como X é aberto, podemos supor $V \subset X$. Considere agora a curva diferenciável $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ tal que $\alpha(t) = (x(t), y(t), z(t))$. Sendo I aberto tal que $\alpha(t_0) = (x_0, y_0, z_0)$, $\alpha'(t_0) \neq \vec{0}$ e $\alpha(t) \in B$ para todo $t \in I$. O Teorema das funções implícitas garante a existência de $\alpha(t)$. Da continuidade de α , existe $\delta > 0$ tal que $t \in (t_0 - \delta, t_0 + \delta) \Rightarrow \alpha(t) \in B \cap V$. Assim, para todo $t \in (t_0 - \delta, t_0 + \delta)$ tem-se $f(\alpha(t)) \leq f(\alpha(t_0))$. Logo t_0 é ponto de máximo local de $F(t) = f(\alpha(t))$ e daí, $F'(t_0) = 0$, o que implica

$$\nabla f(\alpha(t_0)) \cdot \alpha'(t_0) = 0. \quad (13)$$

Por outro lado, como $\alpha \in B$ para todo $t \in I$, segue que

$$g(\alpha(t)) = 0 \text{ e } h(\alpha(t)) = 0 \text{ } t \in I. \quad (14)$$

Daí, para todo $t \in I$ tem-se

$$\nabla g(\alpha(t_0)) \cdot \alpha'(t_0) = 0, \nabla h(\alpha(t_0)) \cdot \alpha'(t_0) = 0. \quad (15)$$

Como por hipótese, $\nabla g(\alpha(t_0)) \times \nabla h(\alpha(t_0)) \neq \vec{0}$ e $\alpha'(t_0) \neq \vec{0}$ conclui-se das Equações 13 e 14 e da Proposição 1, que existem λ_1 e λ_2 reais tais que

$$\nabla f(\alpha(t_0)) = \lambda_1 \nabla g(\alpha(t_0)) + \lambda_2 \nabla h(\alpha(t_0)).$$

Portanto, os extremos locais (x, y, z) são soluções do sistema

$$\begin{cases} \nabla f(x, y, z) = \lambda_1 \nabla g(x, y, z) + \lambda_2 \nabla h(x, y, z) \\ g(x, y, z) = 0 \\ h(x, y, z) = 0. \end{cases}$$



Uma aplicação direta do Teorema 6 é obter os valores extremos da função $f(x, y, z) = x + 2y + 3z$ sujeita às restrições $x + y + z = 1$ e $y^2 + z^2 = 4$.

Solução. Pelo Teorema 6, tem-se

$$\begin{cases} \nabla f(x, y, z) = \lambda_1 \nabla g(x, y, z) + \lambda_2 \nabla h(x, y, z) \\ g(x, y, z) = 0 \\ h(x, y, z) = 0. \end{cases}$$

para $f(x, y, z) = x + 2y + 3z$, $g(x, y, z) = x + y + z - 1$ e $h(x, y, z) = x^2 + z^2 - 4$. Daí, tem-se que

$$\begin{cases} (1, 2, 3) = \lambda_1(1, 1, 1) + \lambda_2(0, 2y, 2z) & (i) \\ x + y + z = 1 & (ii) \\ y^2 + z^2 = 4. & (iii) \end{cases}.$$

Da Equação (i) do sistema, obtém-se

$$\lambda_1 = 1, y = \frac{1}{2\lambda_2} \text{ e } z = \frac{1}{\lambda_2}, \quad (16)$$

que substituindo na Equação (iii), tem-se

$$\left(\frac{1}{2\lambda_2}\right)^2 + \left(\frac{1}{\lambda_2}\right)^2 = 4 \implies \lambda_2 = \pm \frac{\sqrt{5}}{4}.$$

Voltando nas Equações 16, tem-se que $\lambda_2 = \frac{\sqrt{5}}{4} \implies (x, y) = \left(\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{4}{\sqrt{5}}\right)$. Consequentemente, da Equação (ii), obtém-se $(x, y, z) = \left(1 - \frac{6}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{4}{\sqrt{5}}\right)$. Analogamente, para $\lambda_2 = -\frac{\sqrt{5}}{4}$, obtém-se $(x, y, z) = \left(1 + \frac{6}{\sqrt{5}}, -\frac{2}{\sqrt{5}}, -\frac{4}{\sqrt{5}}\right)$.

Finalmente, substituindo os respectivos pontos na função $f(x, y, z) = x + 2y + 3z$, obtém-se $f\left(1 - \frac{6}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{4}{\sqrt{5}}\right) = 1 + \frac{10}{\sqrt{5}}$ e $f\left(1 + \frac{6}{\sqrt{5}}, -\frac{2}{\sqrt{5}}, -\frac{4}{\sqrt{5}}\right) = 1 - \frac{10}{\sqrt{5}}$, que são os respectivos valores extremos de f considerando as restrições dadas. $\diamond$

4 PROBLEMAS DIVERSOS

Neste capítulo, apresentaremos alguns problemas relacionados aos Multiplicador de Lagrange, que é utilizado na solução de otimização visando encontrar pontos de máximo, mínimo e extremos de uma função multivariável sujeita a uma ou mais restrições. É importante destacar que esse método pode ser aplicado em diversas áreas do cotidiano, levando-se em consideração sua praticidade, ou seja, como uma abordagem que simplifica problemas que, de outra forma, suas soluções seriam possivelmente mais complexas.

4.1 APLICAÇÃO DO MULTIPLICADOR DE LAGRANGE NA ÁREA DA SAÚDE

Ressaltamos que, mesmo os problemas tentando apresentar a modelagem de situações próximas ao real, estamos tratando apenas com dados fictícios e as quantidades encontradas não podem ser consideradas como soluções reais para os problemas apresentados. Tais soluções servem apenas para exemplificar a aplicação do método matemático.

Problema 1. *Um médico deseja prescrever Glimepirida (x mg) e Metformina (y mg) para um paciente diabético, minimizando os efeitos colaterais. O risco total é dado por $f(x, y) = x^2 + \frac{y}{2}$, onde x^2 modela o risco de hipoglicemia da Glimepirida, e $\frac{y}{2}$ modela o risco gastrointestinal da Metformina. A eficácia mínima requer $8x + y \geq 1016$ e as doses máximas diárias são $x \leq 6$ mg e $y \leq 2000$ mg. Quais doses o médico deve prescrever a fim de minimizar os efeitos colaterais?*

Resolução. Como se trata de uma função de várias variáveis sujeita a uma condição poderemos usar o multiplicador de Lagrange, como apresentado no Teorema 1. Como a função f é dada por $f(x, y) = x^2 + \frac{y}{2}$, temos que a derivada parcial em relação às variáveis x e y são, respectivamente, $f_x(x, y) = 2x$ e $f_y(x, y) = \frac{1}{2}$. Consequentemente, $\nabla f(x, y) = (2x, \frac{1}{2})$.

Além disso, a restrição apresentada no problema é dada por $g(x, y) = 8x + y \geq 1016$, cujo vetor gradiente é $\nabla g(x, y) = (8, 1)$.

Aplicando o método do multiplicador de Lagrange, encontramos o seguinte sistema:

$$\begin{cases} 2x = 8\lambda & (1) \\ \frac{1}{2} = \lambda & (2) \\ 8x + y \geq 1016 & (3) \end{cases} .$$

Na primeira equação, podemos determinar que $x = 4\lambda$ e, na segunda equação, vemos que $\lambda = \frac{1}{2}$. Disso, $x = 2$. Então, podemos determinar um intervalo para y utilizando os valores de x e λ e a terceira equação do sistema:

$$8x + y \geq 1016 \Rightarrow 8 \cdot 2 + y \geq 1016 \Rightarrow y \geq 1000.$$

Observando que $x = 2$ mg e $y \geq 1000$ mg estão dentro do limite diário imposto no problema, ou seja, o médico pode prescrever 2 mg de Glimpirida e 1000 mg de Metformina por dia, garantindo eficácia terapêutica com o menor risco de efeitos colaterais por estar dentro dos limites seguros.

◇

Problema 2. *Para um hospital funcionar adequadamente, é necessário equilibrar recursos entre os setores. O diretor percebeu que os setores Vermelho (UTI) e Amarelo (Enfermaria) precisavam de ajustes na alocação de leitos. A eficiência do atendimento é modelada por*

$$P(x, y) = 3x^2 + 4y^2,$$

onde x e y são, respectivamente, o número de leitos de UTI e o número de leitos de enfermaria. Cada leito de UTI custa R\$ 1.000,00 por dia, e cada leito de enfermaria custa R\$ 500,00 por dia. A verba disponível é de R\$ 19.000,00 por dia. Determine quantos leitos alocar para cada setor de modo a maximizar $P(x, y)$, respeitando o orçamento.

Resolução. Veja que o diretor do hospital está querendo melhorias para o ambiente hospitalar, então ele tem uma função que fala sobre o quanto ele vai investir e outra que é uma restrição orçamentária. Logo, pode-se usar o multiplicador de Lagrange, como apresentado no Teorema 1, para resolver a questão.

Desse modo, temos o seguinte: $P(x, y) = 3x^2 + 4y^2$ e $G(x, y) = 1000x + 500y = 19000$, com $P_x(x, y) = 6x$, $P_y(x, y) = 8y$ e, conseqüentemente, $\nabla P(x, y) = (6x, 8y)$. De modo análogo, $G_x(x, y) = 1000$ e $G_y(x, y) = 500$. Aplicando o processo do multiplicador de Lagrange, teremos o sistema:

$$\begin{cases} 6x = 1000\lambda \\ 8y = 500\lambda \\ 1000x + 500y = 19000 \end{cases}.$$

Para simplificar, dividimos a terceira equação por 500:

$$\frac{1000x}{500} + \frac{500y}{500} = \frac{19000}{500} \Rightarrow 2x + y = 38.$$

Da primeira equação desse sistema, podemos isolar λ :

$$\lambda = \frac{6x}{1000} \Rightarrow \lambda = \frac{3x}{500}.$$

Pela segunda equação, encontramos outra expressão para λ :

$$\lambda = \frac{8y}{500} \Rightarrow \lambda = \frac{2y}{125}.$$

Igualando as duas expressões de λ :

$$\frac{3x}{500} = \frac{2y}{125} \Rightarrow 3x = 8y \Rightarrow x = \frac{8y}{3}.$$

Substituindo $x = \frac{8y}{3}$ na terceira equação do sistema:

$$2\left(\frac{8y}{3}\right) + y = 38 \Rightarrow \frac{16y}{3} + y = 38 \Rightarrow \frac{19y}{3} = 38. \Rightarrow \frac{y}{3} = 2 \Rightarrow y = 6.$$

Juntando essas informações, podemos encontrar o valor de x :

$$x = \frac{8}{3} \cdot 6 = \frac{48}{3} = 16.$$

Temos, então, que o valor de $x = 16$ e $y = 6$. Sendo a alocação ótima de 16 leitos de UTI e 6 leitos de enfermaria.

Verificação do custo:

$$1000 \cdot 16 + 500 \cdot 6 = 16000 + 3000 = 19000.$$

Assim, a alocação que respeita integralmente o orçamento e maximiza a eficiência é 16 leitos de UTI e 6 leitos de enfermaria.

◇

4.2 PROBLEMAS DE GEOMETRIA UTILIZANDO OS MULTIPLICADORES DE LAGRANGE

Nesta seção, serão apresentados alguns problemas de Geometria que podem ser resolvidos utilizando o Multiplicador de Lagrange de maneira direta, facilitando a abordagem desses problemas e simplificando as soluções em comparação às soluções clássicas que não utilizam essa ferramenta.

4.2.1 Maximizar uma Região Retangular

A seguir, é apresentado um problema clássico de limitar uma região retangular, cujo perímetro é fixo e de modo que tenha-se a maior área possível.

Problema 3. Um fazendeiro deseja delimitar uma área retangular e, para isso, dispõe de uma tela de comprimento L . Para cercar uma área ainda maior, ele deseja aproveitar a parede de um muro já construído, com comprimento maior que L . Quais as dimensões do retângulo de maior área que o fazendeiro consegue delimitar.

Solução: De acordo com os dados do problema, um fazendeiro deseja cercar um terreno retangular e tem uma tela para fazer isso. A tela tem comprimento L , mas não é suficiente para cobrir todo o terreno, ou seja, L é menor que o terreno. Porém, ele vai usar a parede de um muro à sua disposição, e o comprimento dessa parte do muro é maior que L . Tendo em vista que ele quer cobrir a maior área possível. Nessas condições, podemos utilizar o Teorema 1 para encontrar os valores extremantes dessa função.

A área do terreno é dada por $A = x \cdot y$, onde x é o comprimento e y é a largura. Sendo A a função que desejamos maximizar.

Nossa restrição será $G(x, y) = x + 2y = L$, pois a tela cobre dois lados de largura e um lado de comprimento, oposto ao muro, enquanto o outro lado do comprimento é o próprio muro.

De posse do Teorema 1, do Multiplicador de Lagrange, podemos resolver o problema.

Calculando os gradientes, teremos:

$$\nabla A(x, y) = (y, x) \quad e \quad \nabla G(x, y) = (1, 2),$$

dando-nos o sistema de equações

$$\begin{cases} y = \lambda \\ x = 2\lambda \\ x + 2y = L \end{cases}.$$

Do sistema tem-se que

$$y = \lambda \quad e \quad x = 2\lambda.$$

Substituindo na terceira equação, vem

$$2\lambda + 2\lambda = L \Rightarrow 4\lambda = L \Rightarrow \lambda = \frac{L}{4}.$$

Daí, obtém-se

$$x = 2\lambda \Rightarrow x = 2\left(\frac{L}{4}\right) \Rightarrow x = \frac{L}{2} \quad e \quad y = \lambda \Rightarrow y = \frac{L}{4}.$$

Portanto, as dimensões do retângulo que maximizam a área são: $x = \frac{L}{2}$ e $y = \frac{L}{4}$, com a área máxima sendo:

$$A = \frac{L^2}{8}.$$

4.2.2 Construção de uma Caixa com Volume Constante, Gastando o Mínimo de Material

O próximo problema clássico trata de uma situação em que temos um volume fixo que desejamos alocar em um recipiente, cujo formato é de caixa retangular de tal forma que a quantidade de material utilizada seja minimizada. Esse tipo de problema reforça as possibilidades de aplicações práticas nas quais podemos utilizar o Multiplicador de Lagrange como suporte.

Problema 4. *Deseja-se construir uma caixa retangular de volume constante V . Determine suas dimensões de forma que se gaste o mínimo possível de material para sua confecção.*

Solução: *Sejam x o comprimento, y a largura e z a altura da caixa. Assim, $x, y, z \in \mathbb{R}_+^*$, pois não tratamos de dimensões negativas, por se tratarem de medidas, e também não podem ser iguais a zero, pois, caso contrário seria uma figura degenerada (sem dimensão).*

A função que representa a área dessa figura e que desejamos minimizar é dada por

$$A(x, y, z) = 2xz + 2yz + 2xy$$

e a restrição será

$$g(x, y, z) = xyz = V,$$

em que V é o volume da caixa.

Usaremos o Teorema 5, do multiplicador de Lagrange, para resolver o problema proposto. Calculando o gradiente dessas funções teremos;

$$\nabla A(x, y, z) = (2y + 2z, 2x + 2z, 2x + 2y)$$

$$\nabla g(x, y, z) = (yz, xz, xy).$$

Pelo método do Multiplicador de Lagrange, temos que, para pontos extremantes de $A(x, y, z)$, deve valer a condição $\nabla A(x, y, z) = \lambda \nabla g(x, y, z)$. Assim,

$$\begin{cases} 2y + 2z = \lambda yz \\ 2x + 2z = \lambda xz \\ 2x + 2y = \lambda xy \\ xyz = V \end{cases}.$$

Multiplicando a primeira equação do sistema por x , a segunda equação por y e a terceira equação por z , obtemos:

$$\lambda xyz = 2xy + 2xz = 2xy + 2yz = 2xz + 2yz.$$

Assim,

$$2xy + 2xz = 2xy + 2yz \Rightarrow 2xz = 2yz.$$

Como $z \neq 0$, dividimos por $2z$:

$$x = y.$$

Além disso:

$$2xy + 2yz = 2xz + 2yz \Rightarrow 2xy = 2xz.$$

Como $x \neq 0$, dividimos por $2x$:

$$y = z.$$

Ou seja, $x = y = z$. Logo, aplicando na restrição original, temos

$$xyz = v \Rightarrow x \cdot x \cdot x \Rightarrow x^3 = v \Rightarrow x = \sqrt[3]{v}.$$

Para gastar a menor quantidade de material em uma caixa retangular em que o volume é constante, ela deve ter dimensões $x = y = z = \sqrt[3]{V}$. Portanto, a caixa de menor área para um volume fixo, nessas condições, é um cubo.

4.2.3 Construção de um Recipiente Cilíndrico de Volume Constante, com Área Total Mínima

No próximo problema proposto, manteremos o volume do sólido tratado fixo como no Problema 4, porém mudaremos seu formato para um corpo redondo.

Problema 5. *Deseja-se construir um recipiente com formato de um cilindro circular reto, com volume constante fixo e igual a V e de modo que se gaste o mínimo de material. Nestas condições, obtenha o raio da base e a altura do recipiente.*

Solução: A questão nos pede para encontrar o raio da base ($r \in \mathbb{R}_+^*$) e a altura ($z \in \mathbb{R}_+^*$) do cilindro e nos fornece que o volume é constante. Além disso, temos

$$v(r, z) = \pi r^2 z = V.$$

Para calcularmos a área do cilindro (área lateral somada às áreas das suas tampas), temos

$$A(r, z) = 2\pi r^2 + 2\pi r z.$$

Nossa função restrição será $v(r, z) = V$, com $v \in \mathbb{R}_+^*$ fixado, com a função associada que iremos otimizar sendo dada $A(r, z)$. Seguindo o processo proposto no Teorema 1, calcularemos os gradientes das funções de modo a encontrar:

$$\begin{aligned}\nabla A(r, z) &= (A_r, A_z) \Rightarrow \nabla A(r, z) = (4\pi r + 2\pi z, 2\pi r), \\ \nabla v(r, z) &= (v_r, v_z) \Rightarrow \nabla v(r, z) = (2\pi r z, \pi r^2).\end{aligned}$$

Para que a condição do Teorema 1, do Multiplicador de Lagrange,

$$\nabla A(r, z) = \lambda \nabla v(r, z)$$

seja satisfeita, deve valer o seguinte sistema;

$$\begin{cases} 4\pi r + 2\pi z = \lambda(2\pi r z) \\ 2\pi r = \lambda(\pi r^2) \\ \pi r^2 z = V \end{cases}$$

Da segunda equação do sistema e por $r \neq 0$, temos:

$$2\pi r = \lambda(\pi r^2) \Rightarrow \lambda = \frac{2}{r}.$$

Substituindo $\lambda = \frac{2}{r}$ na primeira equação do sistema, temos:

$$4\pi r + 2\pi z = \frac{2}{r}(2\pi r z) \Rightarrow 4\pi r + 2\pi z = 4\pi z \Rightarrow 4\pi r = 2\pi z \Rightarrow z = 2r.$$

Logo, temos que a relação entre o raio e a altura é: $z = 2r$. Substituindo tal relação na terceira equação do sistema, resta-nos que:

$$V = \pi r^2(2r) \Rightarrow V = 2\pi r^3 \Rightarrow r = \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}.$$

Como $z = 2r$, então

$$z = \sqrt[3]{\frac{4V}{\pi}}.$$

Sendo esses valores de r e z os que satisfazem a condição de termos um cilindro circular reto de menor área total, quando o volume é previamente fixado.

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

No presente trabalho, foi apresentada uma pesquisa sobre os Multiplicadores de Lagrange e suas aplicações. No decorrer da elaboração, observou-se que os multiplicadores de Lagrange se aplicam a diversas áreas da matemática.

Foi realizado um levantamento bibliográfico a partir da consulta a livros, apostilas, trabalhos de conclusão de curso e outros materiais relacionados ao tema. A seleção, leitura e análise dessas fontes possibilitaram reunir diferentes abordagens sobre os Multiplicadores de Lagrange, bem como compreender os conceitos e procedimentos utilizados na aplicação do método. A partir desse levantamento, foram selecionados exemplos e problemas que contribuíram para o desenvolvimento e a organização do conteúdo apresentado ao longo da pesquisa.

Foram apresentados os principais conceitos necessários para a resolução de problemas por meio dos Multiplicadores de Lagrange. Nesse contexto, foram abordados fundamentos relacionados às funções de várias variáveis, incluindo domínio, imagem, vetor gradiente, critérios para obter máximos e mínimos.

Por fim, foram abordados os multiplicadores de Lagrange e suas aplicações, a fim de fornecer um material de estudo alternativo para a resolução de problemas sob outra perspectiva. Diante disso, considera-se que o objetivo do trabalho foi atingido. Ademais, esse método se torna uma abordagem mais eficiente para a resolução dos problemas propostos.

Vale destacar que, apesar de os Multiplicadores de Lagrange serem uma relevante ferramenta para resolver problemas em diversas áreas, eles apresentam limitações, por exemplo, se o gradiente for nulo ($\nabla g = 0$) ou a função não for diferenciável.

Espera-se que o trabalho possa ser utilizado pela comunidade acadêmica e que sirva como material de apoio para aqueles que pretendem estudar sobre o tema abordado neste trabalho.

REFERÊNCIAS

- EVES, Howard. **Introdução à História da Matemática**. 5. ed. Campinas: Editora da Unicamp, 2011.
- GOLDENBERG, Mirian. **A arte de pesquisar: como fazer pesquisa qualitativa em Ciências Sociais**. 8. ed. Rio de Janeiro: Editora Record, 2004. ISBN 85-01-04965-4.
- GUIDORIZZI, Hamilton Luiz. **Um Curso de Cálculo**. 5. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2013. v. 2. ISBN 978-85-216-2349-8.
- LIMA, Elon Lages. **Análise Real, Volume 2**. 6. ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2013. ISBN 978-85-244-0221-0.
- LIMA, Telma Cristiane Sasso de; MIOTO, Regina Célia Tamasso. Procedimentos metodológicos na construção do conhecimento científico: a pesquisa bibliográfica. **Revista Katálysis**, Florianópolis, v. 10, n. especial, p. 37–45, 2007.
- MARCHAND, Lucas. Trabalho de Conclusão de Curso (Bacharelado em Matemática Aplicada), **Multiplicadores de Lagrange: uma aplicação em problemas de otimização global restrita**. Rio Grande: [s.n.], 2016. Orientadora: Bárbara Denicol do Amaral Rodriguez. Coorientador: Leonardo Ramos Emmendorfer.
- MUNEM, Mustafa; FOULIS, David James. **Cálculo, Volume 2**. Rio de Janeiro: Guanabara, 1982.
- NUNES, Célia Barros; SANTANA, Eurivalda Ribeiro dos Santos. **Uma proposta de ensino-aprendizagem-avaliação de matemática através da resolução de problemas: perspectivas à formação docente**. *Acta Scientiae*, v. 19, n. 1, p. 4–19, 2017.
- PARIZI, Marta Cristina de Moraes. **Aplicações do Método dos Multiplicadores de Lagrange**. Monografia (Trabalho de Conclusão de Curso (Licenciatura em Matemática)) — Universidade Federal do Sul e Sudeste do Pará, Marabá, 2018. Orientadora: Elizabeth Rego Sabino.
- PRESCOTT, Bianca Masques; VASCONCELLOS, Carlos Frederico F. B. **Aplicação de Multiplicadores de Lagrange em economia**. Rio de Janeiro, 2014. Disponível em: <<https://www.ime.uerj.br>>.
- PRODANOV, Cleber Cristiano; FREITAS, Ernani Cesar de. **Metodologia do Trabalho Científico: Métodos e Técnicas da Pesquisa e do Trabalho Acadêmico**. 2. ed. Novo Hamburgo: Editora Feevale, 2013. ISBN 978-85-7717-158-3.
- SARAMAGO, Simone Pereira; JUNIOR, Valder Steffen. Introdução às técnicas de otimização em engenharia. **Horizonte Científico**, v. 2, n. 2, 2008. Acesso em: 04 jul. 2026. Disponível em: <<https://seer.ufu.br/index.php/horizontecientifico/article/view/4050>>.
- STEWART, James; CLEGG, Daniel; WATSON, Saleem. **Cálculo**. 6. ed. São Paulo: Cengage Learning, 2022. v. 2. ISBN 978-65-5558-410-3.

THOMAS, George Brinton Junior; WEIR, Maurice Duncan; HASS, Joel. **Cálculo**. 12. ed.
São Paulo: Pearson, 2012. ISBN 9788581430874.