



INSTITUTO FEDERAL

Paraíba

Campus Campina Grande

INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA DA PARAÍBA
CURSO SUPERIOR DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

MANOEL VITOR DE FARIAS MACÊDO

A Ressignificação de Sistemas de Equações Diferenciais na Formação de Professores de
Matemática

CAMPINA GRANDE - PB

2026

MANOEL VITOR DE FARIAS MACÊDO

**A Ressignificação de Sistemas de Equações Diferenciais na Formação de Professores de
Matemática**

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado no Curso Superior de Licenciatura em Matemática do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia da Paraíba (IFPB), como requisito parcial para obtenção do título de Licenciado em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Jonathas Jerônimo Barbosa

Catálogo na fonte:

Ficha catalográfica elaborada por Gustavo César Nogueira da Costa - CRB 15/479

M141r Macêdo, Manoel Vitor de Farias.

A ressignificação de sistemas de equações diferenciais na formação de professores de matemática / Manoel Vitor de Farias Macêdo. – Campina Grande, 2026. - Campina Grande, 2026.

66 f. : il.

Trabalho de Conclusão de Curso (Curso de Licenciatura em Matemática.) - Instituto Federal da Paraíba, 2026.

Orientador: Prof.Dr. Jonathas Jerônimo Barbosa

1. Matemática. 2. Equações diferenciais ordinárias.
3. Formação de professores - matemática. 4. GeoGebra
5. Sistemas lineares. I. Barbosa, Jonathas Jerônimo. II. Título.

CDU 517.9

MANOEL VITOR DE FARIAS MACÊDO

A Ressignificação de Sistemas de Equações Diferenciais na Formação de Professores de Matemática

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado no Curso Superior de Licenciatura em Matemática do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia da Paraíba (IFPB), como requisito parcial para obtenção do título de Licenciado em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Jonathas Jerônimo Barbosa

Aprovado em: 30 / 06 / 2026

BANCA EXAMINADORA

Documento assinado digitalmente
 JONATHAS JERONIMO BARBOSA
Data: 06/07/2026 12:31:21-0300
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

Prof. Dr. Jonathas Jerônimo Barbosa
Instituto Federal da Paraíba
Documento assinado digitalmente

 KISSIA CARVALHO
Data: 06/07/2026 20:27:43-0300
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

Prof. Ma. Kissia Carvalho
Instituto Federal da Paraíba
Documento assinado digitalmente

 JEFFERSON DAGMAR PESSOA BRANDAO
Data: 08/07/2026 11:49:57-0300
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

Prof. Dr. Jefferson Dagmar Pessoa Brandão
Instituto Federal da Paraíba

Este trabalho é dedicado àqueles que veem a beleza da matemática.

AGRADECIMENTOS

Este trabalho representa não apenas o fechamento de uma etapa acadêmica, mas o reflexo do meu amadurecimento pessoal e profissional. Em vista dessa conquista, manifesto minha sincera gratidão. Agradeço primeiramente a Deus, pela força e discernimento ao longo de toda esta jornada acadêmica. À minha família, em especial aos meus pais, Maria dos Milagres e Manoel Benjamim, e ao meu irmão Pedro Macêdo cujos sacrifícios, apoio incondicional e valores foram o alicerce fundamental para que eu pudesse trilhar este caminho. Agradeço pela compreensão diante das ausências e pelo incentivo constante que sempre me impulsionou a buscar a excelência.

Agradeço também a minha companheira, melhor amiga e futuramente esposa Ester Gomes de Figueirêdo, por sempre está comigo em todos os momentos nunca deixando de me apoiar e pela contribuição na construção desse trabalho.

Aos meus grandes amigos Adrielly Valeska, Fabiano Holanda, Leonardo Araujo, Luis Vinícios e Pedro Igor, agradeço pelo companheirismo recíproco e pela partilha de momentos que tornaram o percurso mais enriquecedor e memorável.

Ao Instituto Federal Campus Campina Grande, o corpo docente e a todo o quadro de funcionários da instituição de forma geral por proporcionar toda a educação necessária em minha formação contribuindo com valiosos ensinamentos, Agradeço também à banca examinadora, pela contribuição e disponibilidade, para tornar esse trabalho mais enriquecedor.

Finalmente, agradeço ao meu orientador Prof. Dr. Jonathas Jerônimo Barbosa, manifesto minha sincera admiração e gratidão pela condução brilhante, paciência generosa e pelo rigor científico partilhado, qualidades que foram indispensáveis para o amadurecimento e a consolidação deste trabalho e para minha formação. Obrigado por todos os ensinamentos.

De igual modo, estendo meus agradecimentos a todos os docentes e profissionais que contribuíram para a minha formação, bem como a todos que, de forma direta ou indireta, torceram por esta conquista. A todos, o meu mais sincero obrigado.

*“A beleza da Matemática está na sua capacidade de descrever e resolver problemas
profundos com simplicidade e elegância.”
(Djairo Guedes de Figueiredo)*

RESUMO

O ensino de Equações Diferenciais Ordinárias (EDOs) na formação inicial de professores de Matemática frequentemente enfrenta o desafio de superar abordagens puramente mecânicas, o que costuma ocultar sua relevância para a Educação Básica. Esta pesquisa propõe ressignificar esse cenário ao investigar a transição do tratamento analítico para a análise qualitativa e geométrica de sistemas lineares, demonstrando como as EDOs conferem um significado profundo a conceitos escolares sob a ótica da matemática avançada. O estudo defende uma visão integrada do conhecimento matemático, na qual as fronteiras entre álgebra, análise e geometria convergem entre si em favor de uma compreensão unificada. Como resultado prático, foram desenvolvidos dois ambientes virtuais interativos no software GeoGebra: um voltado à análise visual de autovalores e outro focado na simulação numérica de trajetórias temporais via Método de Euler, utilizando o sistema físico massa-mola como elo de ligação com tópicos do Ensino Médio. Conclui-se que essa abordagem integrada enriquece a intuição dos licenciandos para um ensino com mais significado e pavimenta o caminho para a continuidade da pesquisa em programas de pós-graduação.

Palavras-chave: Sistemas de Equações Diferenciais. Formação de Professores. Análise Qualitativa. GeoGebra.

ABSTRACT

The teaching of Ordinary Differential Equations (ODEs) in the initial training of Mathematics teachers frequently faces the challenge of overcoming purely mechanical approaches, which often obscure its relevance to Basic Education. This research aims to reframe this scenario by investigating the transition from analytical treatment to the qualitative and geometric analysis of linear systems, demonstrating how ODEs provide deep meaning to school concepts through the lens of advanced mathematics. This study advocates for an integrated view of mathematical knowledge, where the boundaries between algebra, analysis, and geometry converge toward a unified understanding. As a practical outcome, two interactive virtual environments were developed using the GeoGebra software: one focused on the visual analysis of eigenvalues and the other on the numerical simulation of temporal trajectories via Euler's Method, utilizing the mass-spring physical system as a link to High School mathematics topics. It is concluded that this integrated approach enriches pre-service teachers' intuition, fostering a more meaningful teaching practice and paving the way for the continuity of this research in graduate programs.

Keywords: Systems of Differential Equations. Teacher Training. Qualitative Analysis. GeoGebra.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1 – Isaac Newton	18
Figura 2 – Gottfried Wilhelm Leibniz	18
Figura 3 – Jakob Bernoulli à esquerda Johann Bernoulli à direita.	19
Figura 4 – Leonhard Euler	21
Figura 5 – Joseph-Louis Lagrange	22
Figura 6 – Pierre-Simon Laplace	22
Figura 7 – Jean-Baptiste Joseph Fourier	22
Figura 8 – Augustin-Louis Cauchy	22
Figura 9 – Henri Poincaré	25
Figura 10 – Campo de Direções	29
Figura 11 – Representação Geométrica da Estabilidade	33
Figura 12 – Representação Geométrica da Estabilidade Assintótica	34
Figura 13 – Nó Atrator	37
Figura 14 – Curvas em função do tempo	37
Figura 15 – Nó Fonte	38
Figura 16 – Curvas em função do tempo	38
Figura 17 – Ponto de Sela	40
Figura 18 – Curvas em função do tempo	40
Figura 19 – Ponto Estrela($0 < r_1 = r_2$); Dois Autovetores Independentes	44
Figura 20 – Curvas em função do tempo	44
Figura 21 – Nó Próprio ($r_1 = r_2 < 0$); Dois autovetores Independentes	45
Figura 22 – Curvas em função do tempo	45
Figura 23 – Ponto Degenerado ($r_1 = r_2 < 0$); Um autovetor Independente	46
Figura 24 – Ponto Degenerado ($0 < r_1 = r_2$); Um autovetor Independente	46
Figura 25 – Ponto Espiral ($\lambda < 0$)	48
Figura 26 – Curvas em função do tempo	48
Figura 27 – Ponto Espiral ($\lambda > 0$)	49
Figura 28 – Curvas em função do tempo	49
Figura 29 – Trajetórias do sistema (Centro)	51
Figura 30 – Curvas em função do tempo	51
Figura 31 – Etapa 1	54
Figura 32 – Etapa 2	55
Figura 33 – Etapa 3	56
Figura 34 – Etapa 4	57
Figura 35 – Etapa 5	57
Figura 36 – Etapa 1	59

Figura 37 – Etapa 2	59
-------------------------------	----

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Propriedades de estabilidade e classificação de pontos críticos.	52
---	----

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

IFPB	Instituto Federal de Educação Ciência e Tecnologia da Paraíba
EDO	Equações Diferenciais Ordinárias

LISTA DE SÍMBOLOS

t	Variável independente (Tempo)
y	Função incógnita ou variável dependente
$\vec{x}$	Vetor de estado do sistema
A	Matriz de coeficientes constantes do sistema linear
I	Matriz identidade
r	Autovalores da matriz A (ou raízes do polinômio característico)
ξ	Autovetores associados aos autovalores
$\det(A)$	Determinante da matriz A
$tr(A)$	Traço da matriz A
Δ	Discriminante da equação característica
λ	Parte real de um autovalor complexo
μ	Parte imaginária de um autovalor complexo
m	Massa do sistema mecânico
c	Coefficiente de amortecimento (viscosidade)
k	Constante elástica da mola
P_0	Ponto crítico ou de equilíbrio
ϵ	Raio do disco de vizinhança para estabilidade
δ	Raio do disco de controle inicial para estabilidade

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	15
2	UM BREVE RESUMO DA HISTÓRIA DAS EQUAÇÕES DIFERENCIAIS . .	17
2.1	O Despertar do Cálculo e a Formalização de Newton e Leibniz	17
2.2	A Família Bernoulli e o Desafio da Braquistócrona	19
2.3	Leonhard Euler: A Sistematização da Análise	20
2.4	O Século XIX e a Rigorização da Análise: A Gênese do Ensino Instrumental	21
2.5	A Barreira da Não-Linearidade e a Mudança de Paradigma	23
2.6	Henri Poincaré e o Nascimento da Análise Qualitativa	24
3	ELEMENTOS SOBRE AS EQUAÇÕES DIFERENCIAIS E TEOREMA DA EXISTÊNCIA E UNICIDADE	26
3.1	Equações diferenciais	26
3.1.1	Equações Diferenciais Ordinárias e Parciais	26
3.1.2	Ordem de uma EDO	27
3.1.3	Equações Lineares e Não Lineares	27
3.2	Teorema da Existência e Unicidade para Sistemas Lineares	27
3.3	Plano de fase e retrato de fase	28
3.4	Campos de Direções	28
3.5	Curvas e trajetórias	29
3.6	Teorema da Redução de Ordem (para Sistemas de Primeira Ordem)	30
4	SISTEMAS LINEARES DE EQUAÇÕES DIFERENCIAIS DE PRIMEIRA ORDEM	32
4.1	Estabilidade dos pontos de um sistema	33
4.1.1	Estabilidade:	33
4.1.2	Estabilidade Assintótica:	34
4.1.3	Instabilidade:	34
4.2	Sistemas de equações diferenciais lineares homogêneo de primeira ordem com coeficientes constantes	34
4.2.1	CASO 1: Autovalores Reais e Distintos de Mesmo Sinal	36
4.2.2	CASO 2: Autovalores Reais com Sinais Diferentes	38
4.2.3	CASO 3: Autovalores Iguais	41
4.2.4	CASO 4: Autovalores Complexos.	45
4.2.5	CASO 5: Autovalores Imaginários Puros	49
5	CONSTRUÇÃO DOS MODELOS NO GEOGEBRA	53
5.1	Construção do Modelo Geogebra de Análise Qualitativo de Sistemas de EDOs	53

5.2	Construção da Simulação Numérica de Trajetórias em Função do Tempo	
	Via Método de Euler	57
6	A DINÂMICA DO SISTEMA MASSA-MOLA: UMA ABORDAGEM QUALI-	
	TATIVA PARA A FORMAÇÃO DOCENTE	60
7	CONSIDERAÇÕES FINAIS	63
	REFERÊNCIAS	66

1 INTRODUÇÃO

O estudo das Equações Diferenciais Ordinárias (EDOs) representa um dos marcos mais profundos da intersecção entre a matemática pura e a modelagem da realidade. Historicamente, a necessidade de compreender fenômenos dinâmicos desde o movimento dos corpos celestes até a variação de populações impulsionou mentes como Isaac Newton, Gottfried Leibniz e a família Bernoulli a desenvolverem o cálculo diferencial e integral. Inicialmente, o foco debruçava-se quase inteiramente na busca por soluções analíticas, ou seja, fórmulas explícitas que descrevessem o comportamento de um sistema. Contudo, à medida que a ciência avançou em direção a sistemas complexos e não lineares, a barreira da insolubilidade analítica tornou-se evidente. Foi nesse cenário que emergiu a análise qualitativa, inaugurada por Henri Poincaré, transformando o paradigma da área: em vez de perguntar qual é a solução exata?”, passou-se a indagar como a solução se comporta globalmente?”.

No entanto, o valor da análise qualitativa de EDOs ultrapassa as fronteiras da matemática aplicada e ecoa fortemente no campo da Educação Matemática. No cenário atual da formação de professores, há uma busca incessante por metodologias que superem o ensino puramente instrumental, frequentemente engessado em técnicas repetitivas de integração e memorização de algoritmos. Ao trazer a abordagem qualitativa para o centro da discussão, este trabalho propõe uma vertente essencial para a constituição de uma docência de excelência: a construção de um conhecimento matemático com mais significado, representações, qualidade e com pontes entre a matemática do ensino básico e a do superior, principalmente ligados aos licenciandos.

Diante desse panorama, emergem questionamentos fundamentais que moldam esta pesquisa: como superar a visão que os estudantes têm do ensino de EDOs apenas como técnicas repetitivas de integração e memorização de algoritmos? Mais ainda, quando a busca por soluções exatas falha, como uma abordagem qualitativa pode transcender a barreira da insolubilidade e oferecer uma compreensão profunda do problema? Encontrar essas respostas é o primeiro passo para responder a outro desafio crucial: como conectar a matemática do ensino superior com a realidade da sala de aula na educação básica, transformando o futuro professor de um mero “replicador de fórmulas” em um profissional capaz de promover um ensino com profundidade teórica e relevância significativa?

Para responder a essas inquietações, este trabalho tem como objetivo geral propor a abordagem qualitativa dos sistemas de equações diferenciais ordinárias (EDOs) como uma estratégia para ressignificar a formação inicial de professores de matemática, superando o ensino puramente instrumental e estabelecendo conexões conceituais com conteúdos da educação básica. Para tanto, a pesquisa ramifica-se buscando explorar os conceitos de plano e retrato de fase, campos de direções e os critérios de estabilidade de Lyapunov

para sistemas de primeira ordem, avançando para a caracterização dos diferentes tipos de pontos críticos por meio do estudo de autovalores e autovetores. No campo das conexões curriculares, o trabalho propõe-se a demonstrar, via sistema massa-mola, como o discriminante (Δ) da equação quadrática do ensino básico define o comportamento físico e a estabilidade de sistemas complexos. Por fim, no âmbito tecnológico e pedagógico, busca-se criar simuladores interativos no GeoGebra para a visualização dinâmica de trajetórias, articulando múltiplas representações para favorecer a aprendizagem significativa. Compreender visualmente e conceitualmente o plano de fase e a estabilidade de um sistema confere ao futuro professor a capacidade de enxergar a matemática como um organismo vivo e dinâmico. Essa formação sólida e aprofundada o emancipa do papel de replicador de fórmulas, capacitando-o a entender como certos conteúdos da matemática básica podem ser base para uma matemática mais ampla e refinada, como pretende ser abordado neste trabalho na ênfase prestada às equações quadráticas além de conectar a abstração algébrica a assuntos da realidade.

Este trabalho não trata-se apenas de teoremas e modelos físicos, mas como um vislumbre de uma poderosa ferramenta de transformação pedagógica. Unindo um pouco do histórico, a elegância dos sistemas dinâmicos e o compromisso com uma prática docente reflexiva, esta pesquisa busca reforçar o questionamento e contribuir com caminhos sobre como a matemática avançada pode e deve dar novas perspectivas e profundidade à formação do professor ora sob a perspectiva algébrica, ora sob a geométrica com o intuito de associar as duas visões. Embora não seja o foco ampliar e aprofundar a discussão mas acredita-se ser importante citar que este trabalho contribui com ferramentas relativas à teoria das múltiplas representações ou registros de representação semiótica do autor (Duval; Moretti, 2012).

Além da atual seção, o presente trabalho traz no seu Capítulo 2 um breve resumo da história das equações diferenciais, abordando os contextos históricos do desenvolvimento do cálculo e a evolução da análise. Seguindo no Capítulo 3, são apresentados os elementos sobre as equações diferenciais e o teorema da existência e unicidade, detalhando suas classificações, conceitos de plano de fase, campos de direções e redução de ordem. Ademais, o Capítulo 4 aborda os sistemas lineares de equações diferenciais de primeira ordem, englobando o estudo da estabilidade dos pontos de um sistema e o detalhamento dos cinco casos principais que decorrem das soluções por autovalores, caracterizando a topologia no plano de fase. Continuando, no Capítulo 5 temos os passos e o detalhamento da construção dos modelos no software GeoGebra, descrevendo os ambientes virtuais utilizados para a análise qualitativa e a simulação numérica das trajetórias. No Capítulo 6, esses conceitos teóricos são aplicados à dinâmica do sistema massa-mola sob uma abordagem qualitativa voltada para a formação docente, demonstrando a transição entre a teoria abstrata e o comportamento mecânico. Por fim, o Capítulo 7 traz as considerações finais e a síntese sobre o trabalho, seguido das referências utilizadas.

2 UM BREVE RESUMO DA HISTÓRIA DAS EQUAÇÕES DIFERENCIAIS

Para fundamentar a discussão pedagógica e matemática pretendida neste trabalho, faz-se indispensável compreender as origens e as transformações metodológicas que acompanharam as Equações Diferenciais Ordinárias ao longo dos séculos. Este capítulo apresenta um recorte histórico focado nos principais marcos evolutivos da área. Inicia-se pelo desabrochar do cálculo com Newton e Leibniz, avança-se pelas aplicações físicas complexas propostas pela família Bernoulli e pela sistematização analítica de Euler. Em seguida, investiga-se o movimento de rigorização analítica do século XIX, período crucial no qual a busca pelo formalismo abstrato acabou por semear as bases do ensino instrumental que impera até hoje e culminando no esgotamento dos métodos algébricos tradicionais diante das equações não-lineares, cenário que propiciou o nascimento da abordagem qualitativa geométrica pelas mãos de Henri Poincaré.

2.1 O DESPERTAR DO CÁLCULO E A FORMALIZAÇÃO DE NEWTON E LEIBNIZ

O surgimento das equações diferenciais está diretamente ligado ao desenvolvimento do Cálculo Diferencial e Integral, motivado pela necessidade de descrever os fenômenos naturais associados ao movimento, a variação e a mudança. Nesse contexto, destacam-se os trabalhos independentes de Isaac Newton (1643-1727) e Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716), considerados os fundadores do cálculo moderno como afirma (Boyce; Di-Prima, 2015).

Isaac Newton desenvolveu suas ideias partindo de problemas físicos, especialmente relacionados à mecânica e à gravitação, introduzindo o conceito de fluxões, no qual as variáveis eram interpretadas como grandezas que fluem no tempo. De acordo com (Stewart, 2014)

Depois de Newton, os padrões matemáticos passaram a governar quase tudo no mundo físico: o movimento dos corpos terrestres e celeste, o fluxo do ar e da água, a transmissão de calor, luz e som e a força da gravidade

Como o autor afirma, todas as perspectivas de como a matemática relacionava as leis da natureza mudaram depois de criado o conceito de diferenciação, que logo se desenvolveria para algo maior chamada equações diferenciais.

Já Leibniz concebeu o cálculo sob uma perspectiva mais abstrata e simbólica, criando uma notação baseada em diferenciais, como dx e dy , que se mostrou mais eficiente do ponto de vista operacional e conceitual, isto porque mostra explicitamente a relação entre

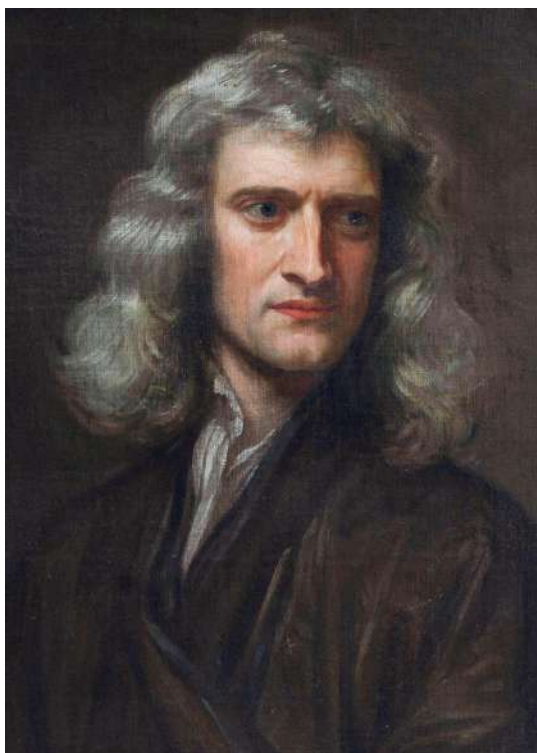
as duas variáveis, facilitando a compreensão em tópicos mais avançados do cálculo, e consequentemente, tornou-se mais aceita do que a criada pelo Inglês.

Segundo (Eves, 2011), Leibniz sempre teve um apreço para uma notação matemática que facilitasse os cálculos e isto contribuiu decisivamente para a disseminação e o amadurecimento da análise matemática na Europa continental. Conforme observa o autor, esse isolamento metodológico levou a um atraso significativo na produção matemática britânica, que ao manter-se fiel à notação de Newton ($\dot{y}$), apresentou menor evolução ao longo dos séculos seguintes.

Essa divergência histórica influenciou diretamente o desenvolvimento inicial das equações diferenciais ordinárias (EDOs), que passaram a ser tratadas essencialmente como problemas de integração, nos quais o objetivo principal era determinar expressões analíticas explícitas para as soluções.

Para o futuro professor de Matemática, compreender a divergência entre as abordagens de Newton e Leibniz vai muito além da curiosidade histórica; trata-se de reconhecer como a escolha de uma linguagem afeta diretamente a aprendizagem. Enquanto a visão física de Newton gerou uma notação que acabou isolando a matemática britânica, o rigor simbólico e a eficiência da notação de Leibniz abriram as portas para a expansão do Cálculo. Entender isso liberta o professor da reprodução mecânica de fórmulas, capacitando-o a mediar a matemática como uma linguagem em constante evolução.

Figura 1 – Isaac Newton



Fonte: Domínio público (2026)

Figura 2 – Gottfried Wilhelm Leibniz



Fonte: Domínio público (2026)

2.2 A FAMÍLIA BERNOULLI E O DESAFIO DA BRAQUISTÓCRONA

Se Newton e Leibniz foram os arquitetos do cálculo, a família Bernoulli foi responsável por testar a resistência dessa nova estrutura matemática. Em destaque para as equações diferenciais estão os irmãos Jakob (1654 - 1705) e Johann (1667 - 1748) Bernoulli, que transformaram o cálculo em uma ferramenta de resolução de problemas físicos reais. Um dos marcos mais significativo para as equações diferenciais foi o problema da *Braquistócrona*, proposto por Johann Bernoulli em 1696. O desafio consistia em encontrar a trajetória que minimizasse o tempo de queda de uma partícula sob a ação da gravidade. De acordo com Eves (2011), a solução do problema da braquistócrona demonstrou o poder das novas técnicas do cálculo diferencial e integral, evidenciando que a curva de menor tempo de descida sob a ação da gravidade era uma cicloide e não uma linha reta.

De acordo com (Boyer, 2012), Johann Bernoulli destacou-se pela aplicação do cálculo a problemas da mecânica e da física. Sua atuação foi decisiva para a consolidação das novas técnicas analíticas desenvolvidas após Newton e Leibniz. Paralelamente, sua trajetória foi marcada por uma intensa rivalidade intelectual com seu irmão Jakob Bernoulli, disputa que contribuiu para impulsionar avanços significativos no desenvolvimento do cálculo e das equações diferenciais. Essa competição, embora pessoal, foi extremamente produtiva para a ciência, resultando no desenvolvimento de métodos para resolver equações diferenciais de primeira ordem que hoje são fundamentais, como a conhecida *Equação de Bernoulli* ($y' + p(x)y = f(x)y^n$) a qual é uma EDO não linear de primeira ordem.

Figura 3 – Jakob Bernoulli à esquerda Johann Bernoulli à direita.



Fonte: Domínio público (2026)

2.3 LEONHARD EULER: A SISTEMATIZAÇÃO DA ANÁLISE

O aluno mais brilhante e pupilo preferido de Johann Bernoulli, segundo (D'Ambrosio, 2009), foi Leonhard Euler (1707–1783), matemático responsável por consolidar as equações diferenciais como um dos principais objetos de estudo da análise matemática.

Antes de Euler, a resolução de equações diferenciais baseava-se predominantemente em métodos *ad hoc*, isto é, técnicas desenvolvidas para problemas específicos, sem a existência de uma teoria geral que orientasse sua resolução. Euler foi fundamental para a sistematização desse campo, estabelecendo procedimentos gerais e ampliando significativamente suas aplicações. Sobre sua relevância para o desenvolvimento da matemática, (Roque, 2012) destaca que Euler desempenhou papel central na consolidação da análise matemática, sistematizando métodos de resolução de problemas e ampliando o alcance das equações diferenciais em aplicações físicas e mecânicas.

Entre suas inúmeras contribuições, Euler observou que as funções exponenciais desempenhavam um papel central na resolução de equações diferenciais lineares com coeficientes constantes, percepção que o conduziu ao desenvolvimento de métodos gerais para a obtenção de soluções dessas equações. Além disso, reconheceu que diversos problemas oriundos da mecânica e da física não admitiam soluções exatas em forma fechada. Essa constatação o levou a desenvolver procedimentos iterativos para aproximação de soluções, dando origem ao método numérico que posteriormente passou a ser conhecido como Método de Euler.

De acordo com (Boyce; DiPrima, 2006), as contribuições de Euler para a teoria das equações diferenciais incluem a identificação de condições para que equações diferenciais de primeira ordem do tipo exatas, o desenvolvimento da teoria dos fatores integrantes e a obtenção da solução geral para equações lineares homogêneas com coeficientes constantes.

As contribuições de Euler não se limitaram à resolução de equações diferenciais específicas. Seu trabalho estabeleceu a linguagem, a notação e um conjunto de métodos que influenciaram profundamente o desenvolvimento posterior da análise matemática, servindo de base para os avanços promovidos por matemáticos como Joseph-Louis Lagrange¹ (1736–1813), Pierre-Simon Laplace² (1749–1827), Jean-Baptiste Joseph Fourier³ (1768–1830) e Augustin-Louis Cauchy⁴ (1789–1857).

¹ Matemático, físico e astrônomo italiano e naturalizado francês, reconhecido como um dos maiores cientistas de sua época. Sua obra monumental, *Mécanique analytique* (1788), revolucionou a física ao transformar a mecânica newtoniana em um sistema baseado inteiramente na análise matemática, orgulhando-se de não utilizar um único diagrama em suas demonstrações. Lagrange foi um dos fundadores do cálculo de variações, criou o método dos multiplicadores de Lagrange para resolução de problemas com restrições e descobriu os pontos de equilíbrio orbital que hoje levam seu nome

² Matemático, astrônomo e físico francês, conhecido por sua obra monumental em cinco volumes, *Mécanique Céleste*, que converteu o estudo geométrico da mecânica de Newton em uma análise baseada no cálculo. Além de contribuições fundamentais como a transformada de Laplace e a equação de Laplace, ele foi pioneiro na teoria das probabilidades, formulou a hipótese nebular sobre a origem do sistema solar e foi um dos primeiros a postular a existência de buracos negros.

Figura 4 – Leonhard Euler



Fonte: Domínio público (2026)

Ao perceber que muitas equações não possuíam soluções exatas e, por isso, criar aproximações como o Método de Euler, o matemático legitimou o erro e a aproximação como caminhos válidos na ciência. Na formação inicial, discutir a sistematização e o pragmatismo de Euler dota o futuro professor de uma visão crítica sobre o próprio currículo escolar, onde a matemática não se restringe a encontrar a “resposta exata e única”. Compreender o papel das aproximações numéricas e das funções exponenciais na resolução de problemas capacita o docente a trabalhar o erro pedagógico de forma construtiva e a valorizar o pensamento algorítmico e estimativo na Educação Básica.

2.4 O SÉCULO XIX E A RIGORIZAÇÃO DA ANÁLISE: A GÊNESE DO ENSINO INSTRUMENTAL

À medida que o século XVIII avançava, o pragmatismo de Euler e dos Bernoulli que utilizavam o cálculo de forma intuitiva e voltada para a resolução de problemas físicos começou a ser questionado quanto às suas bases lógicas. O século XIX inaugurou o período do rigor matemático, no qual a prioridade mudou: antes de se buscar como resolver uma equação, era preciso provar matematicamente se a solução de fato existia e se era única.

Matemáticos como Lagrange, Laplace, Fourier e, fundamentalmente Cauchy reestruturaram a teoria das equações diferenciais sob o rigor analítico absoluto. Cauchy, por exemplo, formalizou o conceito de limite e estabeleceu as bases do que hoje conhecemos como o Problema de Valor Inicial (PVI), demonstrando os primeiros teoremas gerais de existência e unicidade de soluções para EDOs lineares, método este refinado posteriormente por Émile Picard e Rudolf Lipschitz.

De acordo com (Roque, 2012), esse movimento de rigorização afastou temporariamente a matemática das intuições geométricas e físicas que haviam motivado o seu nascimento, confinando as equações diferenciais a uma roupagem puramente abstrata, algébrica e

Figura 5 – Joseph-Louis Lagrange

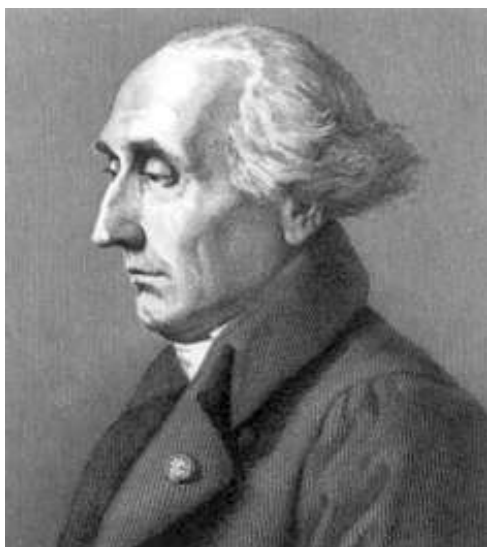


Figura 6 – Pierre-Simon Laplace



Figura 7 – Jean-Baptiste Joseph Fourier



Figura 8 – Augustin-Louis Cauchy



Fonte: Domínio público (2026)

dedutiva.

Essa transição histórica é fundamental para compreender a própria gênese das dificuldades pedagógicas debatidas na atualidade. O arcabouço teórico rigoroso e puramente analítico consolidado no século XIX foi o modelo transposto para os currículos universitários e que impera até os dias de hoje na formação de professores. Ao priorizar a memorização de algoritmos de integração e a validação formal de teoremas abstratos em detrimento da visualização geométrica, o ensino superior tendeu a cristalizar uma visão

instrumental das EDOs. Assim, o hiato entre a teoria abstrata herdada do século XIX e a realidade prática da sala de aula da educação básica começou a se desenhar justamente no momento em que a análise se desvinculou da geometria.

2.5 A BARREIRA DA NÃO-LINEARIDADE E A MUDANÇA DE PARADIGMA

Durante os séculos XVIII e início do XIX, prevaleceu entre os matemáticos a crença de que todos os fenômenos físicos poderiam, em princípio, ser descritos por equações diferenciais passíveis de solução analítica. Tal expectativa mostrou-se válida apenas para uma classe restrita de problemas, majoritariamente lineares.

A realidade física, no entanto, revelou-se fundamentalmente não-linear. Sistemas governados por equações não-lineares não obedecem ao princípio da superposição, o que inviabiliza a aplicação direta das técnicas desenvolvidas para equações lineares. Nesse sentido, (Boyce; DiPrima, 2006) afirmam:

Existem muitas equações diferenciais, especialmente não-lineares, que não são suscetíveis à solução analítica de algum modo razoavelmente conveniente.

Dessa forma, a obtenção de soluções explícitas tornou-se inviável para uma ampla classe de problemas. Como consequência, matemáticos e físicos passaram a recorrer a métodos numéricos e ao estudo qualitativo das soluções, buscando compreender propriedades fundamentais dos sistemas sem necessariamente determinar suas expressões analíticas.

Essa constatação marcou uma mudança profunda na teoria das equações diferenciais. A questão central deixou de ser exclusivamente a obtenção de fórmulas fechadas para as soluções e passou a concentrar-se na compreensão de características globais do sistema, tais como estabilidade, periodicidade e comportamento assintótico. Em outras palavras, enquanto Bernoulli, Euler e seus contemporâneos buscavam determinar a solução de uma equação diferencial, a crescente complexidade dos problemas não-lineares conduziu os matemáticos a investigar o comportamento das soluções. Segundo (Stewart, 2014), essa mudança de perspectiva foi fundamental para o desenvolvimento da matemática moderna, pois permitiu o surgimento de novas ferramentas voltadas à análise geométrica e qualitativa dos sistemas dinâmicos. Assim, o impasse provocado pelas equações não-lineares

³ Matemático e físico francês, conhecido por sua obra *Théorie analytique de la chaleur* (1822), na qual estabeleceu as bases da análise de Fourier e da análise harmônica ao demonstrar que funções podem ser expandidas em séries de senos e cossenos.

⁴ Matemático, engenheiro e físico francês, reconhecido como o principal responsável por introduzir o rigor na análise matemática moderna. Foi ele quem estabeleceu as definições contemporâneas de limite, continuidade e integral definida, além de ter sido um dos fundadores da teoria dos grupos finitos e da análise de funções complexas. Com uma produção monumental de 789 trabalhos científicos, seu nome está imortalizado em inúmeros conceitos, como as equações de Cauchy-Riemann, a sucessão de Cauchy e a desigualdade de Cauchy-Schwarz. Identificado como um prodígio ainda na infância por Laplace e Lagrange, Cauchy é um dos cientistas cujos nomes estão gravados na Torre Eiffel.

preparou o terreno para os trabalhos de Henri Poincaré, responsável por estabelecer os fundamentos da moderna análise qualitativa das equações diferenciais.

2.6 HENRI POINCARÉ E O NASCIMENTO DA ANÁLISE QUALITATIVA

A consolidação dessa nova perspectiva deve-se, em grande parte, aos trabalhos de Henri Poincaré (1854–1912). Ao investigar o problema dos três corpos na mecânica celeste, Poincaré demonstrou que a busca por soluções explícitas era, em muitos casos, impraticável e desnecessária para a compreensão do sistema. Em vez de concentrar seus esforços na obtenção de fórmulas fechadas, o matemático francês passou a investigar as propriedades globais das soluções e suas trajetórias ao longo do tempo.

Segundo (Boyce; DiPrima, 2006), os trabalhos de Poincaré inauguraram uma nova forma de estudar equações diferenciais ao direcionar a atenção para o comportamento geométrico das soluções. Nessa abordagem, as soluções passaram a ser interpretadas como curvas em um espaço de estados, permitindo a análise de propriedades como estabilidade, convergência e comportamento assintótico sem a necessidade de determinar expressões analíticas explícitas.

Entre suas contribuições mais importantes destacam-se os conceitos de retrato de fase, pontos críticos e órbitas periódicas, ferramentas que se tornaram fundamentais para a moderna teoria dos sistemas dinâmicos. Por meio desses conceitos, tornou-se possível compreender o comportamento qualitativo de sistemas complexos a partir da análise geométrica de suas trajetórias.

Além disso, ao estudar o problema dos três corpos, Poincaré identificou que pequenas variações nas condições iniciais poderiam produzir comportamentos significativamente distintos ao longo do tempo. Embora não tenha formulado a Teoria do Caos em seu sentido moderno, suas descobertas revelaram limitações fundamentais da previsibilidade em sistemas dinâmicos não-lineares. Conforme destaca (Strogatz, 2018), essas observações constituíram alguns dos primeiros indícios do fenômeno que, décadas mais tarde, seria reconhecido como sensibilidade às condições iniciais e se tornaria um dos pilares da Teoria do Caos.

Dessa forma, os trabalhos de Poincaré representam um marco na história das equações diferenciais, pois deslocaram o foco da obtenção de soluções explícitas para a compreensão do comportamento global dos sistemas. Essa mudança de paradigma estabeleceu os fundamentos da análise qualitativa, área que se tornaria essencial para o estudo de sistemas dinâmicos e para a compreensão de fenômenos complexos presentes na matemática, na física e em diversas outras áreas do conhecimento.

Os avanços inaugurados por Poincaré consolidaram a análise qualitativa como um campo vigoroso e fértil na matemática moderna. Longe de ser uma teoria estagnada,

Figura 9 – Henri Poincaré



Fonte: Domínio público (2026)

o estudo dos sistemas dinâmicos e de sua estabilidade continua a impulsionar pesquisas contemporâneas em diversas áreas da ciência. No entanto, o desafio atual reside em transpor a riqueza dessa evolução histórica e conceitual para o âmbito pedagógico, transformando ferramentas de pesquisa em instrumentos de mediação didática na formação de professores, conforme será discutido ao longo do trabalho.

3 ELEMENTOS SOBRE AS EQUAÇÕES DIFERENCIAIS E TEOREMA DA EXISTÊNCIA E UNICIDADE

A teoria apresentada nesse capítulo está de acordo com os conceitos apresentados em (Boyce; DiPrima, 2006) e (Kreyszig, 2009), onde serão apresentados os conceitos fundamentais e as ferramentas analíticas que constituem a base do estudo das equações diferenciais e dos sistemas dinâmicos. Partindo das definições clássicas de ordem, linearidade e classificação de equações diferenciais ordinárias e parciais, o texto evolui para a análise do comportamento de suas soluções.

A fim de contornar as limitações das soluções analíticas exatas, introduz-se uma perspectiva geométrica e qualitativa. Por meio do estudo de campos de direções, planos de fase e retratos de fase, torna-se possível prever a evolução temporal e a estabilidade de um sistema sem a necessidade de resolvê-lo explicitamente. Complementarmente, estabelecem-se os critérios rigorosos de existência e unicidade de soluções, além do Teorema da Redução de Ordem, que unifica o tratamento de EDOs de ordem superior sob a ótica dos sistemas de primeira ordem.

3.1 EQUAÇÕES DIFERENCIAIS

Por definição, uma equação diferencial configura-se como uma expressão matemática que relaciona uma função desconhecida às suas próprias derivadas. Diferenciando-se das equações algébricas convencionais, em que a incógnita é um valor numérico isolado, o objeto de busca neste contexto é uma função. A partir dessa definição basilar, as equações diferenciais podem ser classificadas quanto à sua natureza em **ordinárias** ou **parciais**, bem como em relação à sua **ordem** e à sua **linearidade**.

3.1.1 Equações Diferenciais Ordinárias e Parciais

Definição: Dada uma equação diferencial, se as funções incógnitas forem de somente uma variável ela é dita **equação diferencial ordinária**, caso possua mais de uma variável é chamada de **equação diferencial parcial**

Exemplo:

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \omega^2 y = 0 \quad \text{e} \quad \frac{\partial u}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

Onde a primeira equação é classificada como ordinária porque a função incógnita $y(x)$ depende de uma única variável independente (x) já a segunda a incógnita é a função $u(x, t)$.

3.1.2 Ordem de uma EDO

Definição: A derivada de maior ordem irá definir a ordem da equação.

Exemplo:

$$\frac{dy}{dx} + 5y = e^x \quad \text{e} \quad \frac{d^2y}{dx^2} - 3\frac{dy}{dx} + 2y = 0$$

A Primeira equação é classificada como de primeira ordem, visto que a função incógnita $y(x)$ é submetida apenas à primeira derivada já a outra configura-se como de segunda ordem, pois o termo derivativo de maior grau nela presente é uma segunda derivada.

3.1.3 Equações Lineares e Não Lineares

Uma das classificações fundamentais para as equações diferenciais é a sua linearidade ou a não linearidade. Então considere a equação diferencial ordinária¹

$$F\left(t, y, \frac{dy}{dt}, \frac{d^2y}{dt^2}, \dots, \frac{d^ny}{dt^n}\right) = 0$$

é dita **linear** se F é uma função linear das variáveis $y, \frac{dy}{dt}, \frac{d^2y}{dt^2}, \dots, \frac{d^ny}{dt^n}$. Assim, a equação diferencial ordinária linear geral de ordem n é

$$a_0(t)\frac{d^ny}{dt^n} + a_1(t)\frac{d^{n-1}y}{dt^{n-1}} + \dots + a_n(t)y = g(t).$$

Uma equação que não for dessa forma é dita **não linear**.

Exemplo:

$$\frac{dy}{dx} + x^2y = \sin(x) \quad \text{e} \quad \frac{dy}{dx} + y^2 = 0$$

Note que embora os termos (x^2 e $\sin(x)$) sejam não lineares, a equação permanece linear pois a incógnita y e sua derivada estão elevadas à primeira potência e não se multiplicam, ou seja, ela é linear. Já a outra equação é não linear devido à presença do termo y^2 , que viola a condição de potência unitária para a função incógnita.

3.2 TEOREMA DA EXISTÊNCIA E UNICIDADE PARA SISTEMAS LINEARES

Se as funções $a_{11}(t), a_{12}(t), \dots, a_{nn}(t)$ e $g_1(t), g_2(t), \dots, g_n(t)$ forem contínuas em um intervalo aberto $I : \alpha < t < \beta$ que contém o ponto t_0 , então existe uma única solução

$$x_1 = \phi_1(t), \quad x_2 = \phi_2(t), \quad \dots, \quad x_n = \phi_n(t)$$

¹ Uma definição análoga é feita para às equações diferenciais parciais.

do sistema de equações diferenciais:

$$\begin{aligned}\frac{dx_1}{dt} &= a_{11}(t)x_1 + a_{12}(t)x_2 + \cdots + a_{1n}(t)x_n + g_1(t), \\ \frac{dx_2}{dt} &= a_{21}(t)x_1 + a_{22}(t)x_2 + \cdots + a_{2n}(t)x_n + g_2(t), \\ &\vdots \\ \frac{dx_n}{dt} &= a_{n1}(t)x_1 + a_{n2}(t)x_2 + \cdots + a_{nn}(t)x_n + g_n(t),\end{aligned}$$

que também satisfaz as condições iniciais:

$$x_1(t_0) = c_1, \quad x_2(t_0) = c_2, \quad \dots, \quad x_n(t_0) = c_n$$

onde $c_1, c_2, \dots, c_n$ são números arbitrários especificados. Além disso, a solução existe em todo o intervalo I .

A demonstração para esse teorema pode ser encontrado no livro de (Boyce; DiPrima, 2006, p. 194), realizando uma analogia com o caso de existência e unicidade para uma equação linear. Neste trabalho iremos considerar todas as soluções garantidas pela existência e unicidade.

3.3 PLANO DE FASE E RETRATO DE FASE

Definição: Plano de Fase é o espaço geométrico definido pelas variáveis de estado do sistema.

Para um sistema de duas equações diferenciais de primeira ordem com duas variáveis dependentes (x_1 e x_2), o plano de fase é o plano cartesiano onde o eixo horizontal representa x_1 e o vertical representa x_2 . Onde, cada ponto (x_1, x_2) neste plano corresponde a um estado possível do sistema em um determinado instante.

Definição: Retrato de Fase é o conjunto representativo de várias trajetórias, obtidas a partir de diferentes condições iniciais, desenhadas sobre o mesmo plano de fase.

Ele oferece uma visão panorâmica e qualitativa da dinâmica global do sistema. Ao observar um retrato de fase, é possível identificar imediatamente comportamentos como estabilidade, instabilidade, pontos de equilíbrio, ciclos limites e entre outros tipos de comportamentos.

Ao longo deste trabalho, ilustraremos esses conceitos por meio de diversos exemplos. A configuração geométrica de um plano de fase e a dinâmica global de um retrato de fase podem ser observadas na seção 4.2.

3.4 CAMPOS DE DIREÇÕES

Considere a equação diferencial ordinária (EDO) de primeira ordem dada por:

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y)$$

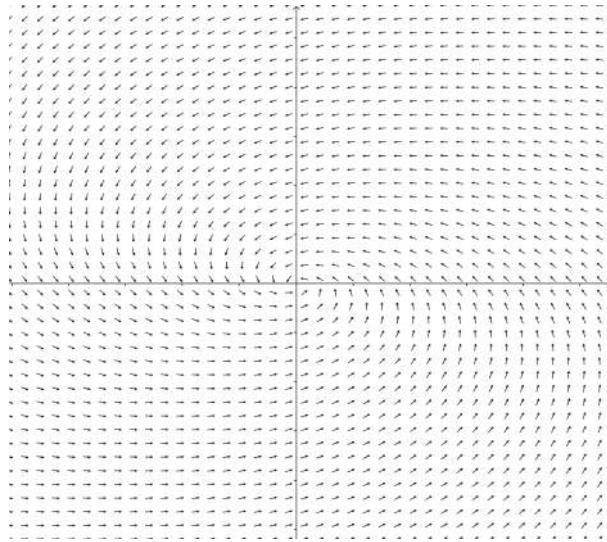
Geometricamente, esta igualdade estabelece que, em cada ponto (x, y) onde a função f é definida, o valor de $f(x, y)$ determina exatamente a inclinação da reta tangente à curva-solução $y(x)$ pois é uma derivada.

Dessa forma, se uma solução particular atravessa o ponto (x_0, y_0) , sua inclinação nesse ponto é dada por:

$$\left. \frac{dy}{dx} \right|_{(x_0, y_0)} = f(x_0, y_0)$$

Este conjunto de inclinações define o que chamamos de **campo de direções** Figura 10, fornecendo um esboço qualitativo do comportamento das soluções antes mesmo de resolvê-las analiticamente.

Figura 10 – Campo de Direções



Fonte: Autor

3.5 CURVAS E TRAJETÓRIAS

Ao analisarmos sistemas de Equações Diferenciais, temos uma sutil, porém essencial distinção entre curva e trajetória. Uma curva no plano de fase é o conjunto de pontos que satisfaz uma determinada relação geométrica, ou seja, é apenas um lugar geométrico. Ela não contém, por si só, a informação de “como” ou “com que rapidez” o sistema percorre esse caminho. Já as trajetórias é a curva dotada de orientação temporal e que possui uma direção que indica o sentido do movimento conforme t aumenta.

3.6 TEOREMA DA REDUÇÃO DE ORDEM (PARA SISTEMAS DE PRIMEIRA ORDEM)

Considere uma equação diferencial ordinária (EDO) de ordem n , expressa na forma explícita:

$$\frac{d^n y}{dx^n} = F\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \dots, \frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}\right) \quad (3.1)$$

É possível transformar esta EDO em um sistema de n equações de primeira ordem introduzindo um vetor de variáveis auxiliares $\vec{z} = [z_1, z_2, \dots, z_n]^T$. Definimos as novas variáveis como:

$$z_1 = y, \quad z_2 = \frac{dy}{dx}, \quad z_3 = \frac{d^2 y}{dx^2}, \quad \dots, \quad z_n = \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} \quad (3.2)$$

Sob essa mudança de variáveis, a EDO original (3.1) é equivalente ao seguinte sistema de primeira ordem:

$$\begin{cases} \frac{dz_1}{dx} = z_2 \\ \frac{dz_2}{dx} = z_3 \\ \vdots \\ \frac{dz_{n-1}}{dx} = z_n \\ \frac{dz_n}{dx} = F(x, z_1, z_2, \dots, z_n) \end{cases} \quad (3.3)$$

Demonstração

A validade desta representação fundamenta-se na consistência entre a definição das variáveis auxiliares e as derivadas sucessivas da função $y(x)$.

Análise as primeiras $n - 1$ equações, e veja que para cada índice i tal que $1 \leq i < n$, a definição de z_i em (3.2) é $z_i = \frac{d^{i-1} y}{dx^{i-1}}$. Ao derivarmos ambos os lados em relação a x , temos:

$$\frac{dz_i}{dx} = \frac{d}{dx} \left(\frac{d^{i-1} y}{dx^{i-1}} \right) = \frac{d^i y}{dx^i}.$$

Note que esta expressão corresponde exatamente à definição da variável subsequente, z_{i+1} . Portanto, $\frac{dz_i}{dx} = z_{i+1}$ para todo $i = 1, \dots, n - 1$.

Além disso, para a variável final $z_n = \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}}$, a sua derivada resulta na ordem mais alta da EDO:

$$\frac{dz_n}{dx} = \frac{d}{dx} \left(\frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} \right) = \frac{d^n y}{dx^n}$$

Substituindo a expressão original da EDO (3.1) e mapeando cada derivada de y para sua respectiva variável z_i conforme definido em (3.2), obtemos:

$$\frac{dz_n}{dx} = F(x, z_1, z_2, \dots, z_n)$$

Como todas as equações do sistema foram derivadas diretamente das propriedades de $y(x)$ e da EDO inicial, a equivalência está demonstrada. ■

Acabamos então de provar que uma EDO de n -ésima ordem pode ser convertida em um sistema de n EDOs de primeira ordem. Embora esse trabalho aborde apenas os sistemas de primeira ordem, é fundamental destacar que esse teorema se reveste de uma importância tanto prática quanto teórica. Importância prática porque permite o estudo e a solução de EDOs únicas através de métodos de sistemas e tem uma importância teórica porque possibilita a inclusão da teoria das EDOs de ordem superior na teoria dos sistemas de primeira ordem. Essa conversão é um outro motivo da importância dos sistemas, além de sua utilização como modelos em diversas aplicações básicas.

4 SISTEMAS LINEARES DE EQUAÇÕES DIFERENCIAIS DE PRIMEIRA ORDEM

Ao modelarmos fenômenos físicos, biológicos ou de engenharia, frequentemente nos deparamos com situações em que as variáveis dinâmicas interagem entre si, dependendo simultaneamente do comportamento mútuo. Nesses cenários, uma única equação diferencial torna-se insuficiente, exigindo a formulação de um conjunto de equações acopladas.

Portanto, estendendo o conceito de uma Equação Diferencial Ordinária (EDO) linear de primeira ordem, dizemos que um conjunto de n equações diferenciais simultâneas forma um **sistema linear de primeira ordem** se ele puder ser escrito na forma:

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt}_1 &= a_{11}(t)x_1 + a_{12}(t)x_2 + \cdots + a_{1n}(t)x_n + g_1(t), \\ \frac{dx}{dt}_2 &= a_{21}(t)x_1 + a_{22}(t)x_2 + \cdots + a_{2n}(t)x_n + g_2(t), \\ &\vdots \\ \frac{dx}{dt}_n &= a_{n1}(t)x_1 + a_{n2}(t)x_2 + \cdots + a_{nn}(t)x_n + g_n(t),\end{aligned}\tag{4.1}$$

onde os coeficientes $a_{ij}(t)$ e as funções $g_i(t)$ são funções contínuas em um determinado intervalo aberto I .

Utilizando a notação matricial, o sistema (4.1) pode ser expresso de maneira muito mais compacta. Definimos a matriz de coeficientes $\mathbf{A}$, o vetor de incógnitas $\vec{x}$ e o vetor de termos independentes $\mathbf{g}(t)$ como:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11}(t) & \cdots & a_{1n}(t) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}(t) & \cdots & a_{nn}(t) \end{pmatrix}, \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{g}(t) = \begin{pmatrix} g_1(t) \\ \vdots \\ g_n(t) \end{pmatrix}.$$

Dessa forma, o sistema (4.1) assume a forma vetorial:

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = \mathbf{A}\vec{x} + \mathbf{g}(t).\tag{4.2}$$

O sistema é denominado **homogêneo** se o vetor de termos independentes for identicamente nulo para todo t no intervalo I , ou seja, se $\mathbf{g}(t) = \mathbf{0}$. Nesse caso, a equação (4.2) simplifica-se para:

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = \mathbf{A}\vec{x}.\tag{4.3}$$

Caso contrário, se $\mathbf{g}(t) \neq \mathbf{0}$ para algum $t \in I$, o sistema é dito **não-homogêneo**.

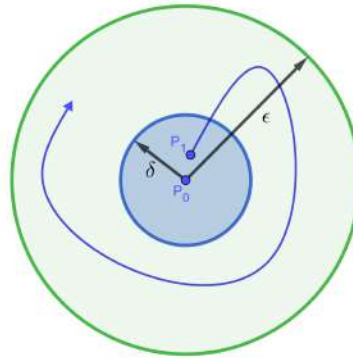
4.1 ESTABILIDADE DOS PONTOS DE UM SISTEMA

Os pontos críticos podem também ser classificados em termos de sua estabilidade¹. Os conceitos de estabilidade são de uma importância básica em engenharia e outras aplicações. De forma bem simples, podemos entender a estabilidade como pequenos distúrbios que um sistema pode ter em todos os instantes t futuros. Para os pontos críticos, é apropriado considerarmos as seguintes classificações:

4.1.1 Estabilidade:

Um ponto crítico P_0 de (4.3) é chamado de **estável** se, grosso modo, todas as trajetórias de (4.3) que em algum instante estejam próximas de P_0 permanecerem próximas de P_0 em todos os instantes futuros, de modo que, se, para qualquer disco D_ϵ de raio $\epsilon > 0$ com um centro em P_0 houver um disco D_δ de raio $\delta > 0$ de tal modo que toda trajetória de (4.3) que possua um ponto P_1 , correspondente a, digamos, $t = t_1$ em D_δ tenha todos os seus pontos correspondentes a $t \geq t_1$ em D_ϵ

Figura 11 – Representação Geométrica da Estabilidade



Fonte: Autor

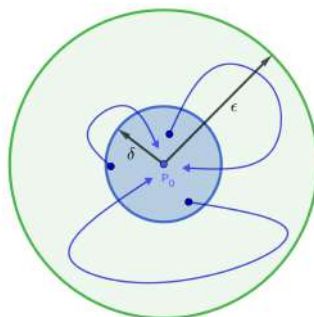
Ponto crítico estável P_0 . A trajetória começando em P_1 permanece no disco de raio ϵ

¹ Os conceitos de estabilidade apresentados serão no sentido dado pelo matemático russo Alexander Mikhailovich Lyapunov (1857-1918), cujo trabalho foi fundamental para a teoria da estabilidade nas EDOs. Esta talvez seja a definição mais apropriada de estabilidade (e a única que utilizaremos), embora também haja outras.

4.1.2 Estabilidade Assintótica:

P_0 é chamado de **assintoticamente estável** se P_0 for estável e toda trajetória que tiver um ponto em D_δ se aproximar de P_0 à medida que $t \rightarrow \infty$.

Figura 12 – Representação Geométrica da Estabilidade Assintótica



Fonte: Autor

4.1.3 Instabilidade:

P_0 é chamado de **instável** se P_0 não for estável, ou seja, a trajetória não permanece em D_ϵ .

4.2 SISTEMAS DE EQUAÇÕES DIFERENCIAIS LINEARES HOMOGÊNEO DE PRIMEIRA ORDEM COM COEFICIENTES CONSTANTES

Nesta parte iremos estender a discussão a sistemas de equações. Vamos trabalhar com um dos sistemas mais simples, a saber, um sistema linear homogêneo de primeira ordem com coeficientes constantes. Tal sistema já mencionado anteriormente tem a forma (4.3), na qual iremos considerar $\mathbf{A}$ como uma matriz constante 2×2 e $\vec{x}$ é um vetor 2×1 .

Para determinar a solução dessa equação iremos deduzi-la a partir de um caso mais simples, então considere

$$\frac{dy}{dt} = cy \quad (4.4)$$

onde $c \in \mathbb{R}$ e $y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

Resolvendo (4.4) segue os seguintes passos,

$$\begin{aligned}
 \frac{dy}{dt} &= cy \\
 \frac{1}{y} dy &= c dt \\
 \int \frac{1}{y} dy &= \int c dt \\
 \ln|y| + c_1 &= ct + c_2 \\
 \ln|y| &= ct + c_2 - c_1 \\
 \ln|y| &= ct + c_3 \\
 e^{\ln|y|} &= e^{ct+c_3} \\
 y &= e^{ct} \cdot e^{c_3}
 \end{aligned}$$

Veja que e^{c_3} corresponde a uma constante real. Assim, podemos escrever $e^{c_3} = c_4$. Portanto, obtemos como solução

$$y = c_4 e^{ct} \quad (4.5)$$

Perceba, que buscamos uma solução da forma (4.5). Dessa maneira, nossa solução para a equação diferencial (4.3) poderá ser expressa na forma

$$\vec{x} = \xi e^{rt} \quad (4.6)$$

Então substituindo (4.6) em (4.3) teremos,

$$r\xi e^{rt} = \mathbf{A}\xi e^{rt}$$

Como $e^{rt} \neq 0$ então dividiremos toda a equação por ele

$$\begin{aligned}
 r\xi &= \mathbf{A}\xi \\
 0 &= \mathbf{A}\xi - r\xi \\
 \mathbf{A}\xi - r\xi &= 0 \\
 (\mathbf{A} - r\mathbf{I})\xi &= 0
 \end{aligned} \quad (4.7)$$

Desconsiderando o caso trivial $\xi = 0$, concluímos que r tem que ser um autovalor da matriz $\mathbf{A}$ e ξ autovetor associado. E seus autovalores são as raízes da equação polinomial

$$\det(\mathbf{A} - r\mathbf{I}) = 0 \quad (4.8)$$

e os autovetores são determinados pela (4.7) a menos de uma constante multiplicativa.

Determinando, que para o sistema (4.3) os pontos em que $\mathbf{A}\vec{x} = 0$ correspondem a soluções de equilíbrio, chamadas de pontos críticos. Suponhamos que $\mathbf{A}$ seja invertível, isto é, $\det(\mathbf{A}) \neq 0$. Nesse caso, $\vec{x} = 0$ é o único ponto crítico do sistema (4.3).

Lembrando que as soluções desses sistemas podem ser descritas por uma função vetorial $\vec{x} = \phi(t)$, que satisfaz a equação diferencial. Essa função pode ser interpretada como uma representação paramétrica de uma curva no plano $\xi_1 \times \xi_2$. Portanto, para determinar a solução desses sistemas, basta encontrar seus autovalores e autovetores associados. Para isso, analisaremos cinco casos distintos.

4.2.1 CASO 1: Autovalores Reais e Distintos de Mesmo Sinal

Consideremos o caso em que $r_1 \neq r_2$, com $r_1 < r_2 < 0$ ou $0 > r_1 > r_2$. Ao resolver o polinômio característico, obtemos as raízes r_1 e r_2 , ambas reais e distintas, que correspondem aos autovalores da matriz $\mathbf{A}$.

Para cada autovalor, determinamos um autovetor associado, denotado por ξ_1 e ξ_2 . Como $r_1 \neq r_2$, pelo Teorema Fundamental da Álgebra Linear, os autovetores correspondentes são linearmente independentes. Assim, ξ_1 e ξ_2 formam uma base de $\mathbb{R}^2$.

Portanto, os pares (r_1, ξ_1) e (r_2, ξ_2) constituem soluções fundamentais do sistema, ou seja,

$$\vec{x}_1(t) = \xi_1 e^{r_1 t}, \quad \vec{x}_2(t) = \xi_2 e^{r_2 t} \quad (4.9)$$

Como $\vec{x}_1(t)$ e $\vec{x}_2(t)$ são soluções, pelo Princípio da Linearidade, qualquer combinação linear dessas soluções também é solução. Assim, a solução geral pode ser escrita como:

$$\mathbf{x}(t) = c_1 \vec{x}_1(t) + c_2 \vec{x}_2(t) \quad (4.10)$$

Substituindo (4.9) em (4.10), obtemos que a solução da equação (4.3) para este caso é dada por:

$$\boxed{\mathbf{x}(t) = c_1 \xi_1 e^{r_1 t} + c_2 \xi_2 e^{r_2 t}} \quad (4.11)$$

Iremos observar no exemplo a seguir a solução analítica e sua representação geométrica.

Exemplo: Considere o sistema linear (4.3) definido pela matriz de coeficientes A :

$$A = \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}.$$

O sistema de equações diferenciais é dado por:

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} \vec{x}.$$

Solução. Para determinar a solução geral, buscamos os autovalores e autovetores associados à matriz A . A equação característica é obtida pelo determinante:

$$\det(A - rI) = \begin{vmatrix} -3 - r & 1 \\ 1 & -3 - r \end{vmatrix} = r^2 + 6r + 8 = 0,$$

cujas raízes fornecem os autovalores $r_1 = -2$ e $r_2 = -4$.

i) *Autovalor* $r_1 = -2$: Substituindo r_1 na equação $(A - rI)\mathbf{v} = \mathbf{0}$, obtemos o sistema:

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

A partir da eliminação de Gauss, observa-se que as linhas são dependentes, resultando na equação $x_1 - x_2 = 0$, ou seja, $x_1 = x_2$. Escolhendo $x_2 = 1$, obtemos o autovetor associado:

$$\boldsymbol{\xi}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

ii) *Autovalor* $r_2 = -4$: De forma análoga, para $r_2 = -4$, temos:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

O sistema reduz-se à equação $x_1 + x_2 = 0$, implicando $x_1 = -x_2$. Tomando $x_2 = 1$, o autovetor correspondente é:

$$\boldsymbol{\xi}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Sendo assim, a solução geral desse problema será

$$\mathbf{x}(t) = c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} e^{-2t} + c_2 \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} e^{-4t} \quad (4.12)$$

Figura 13 – Nó Atrator

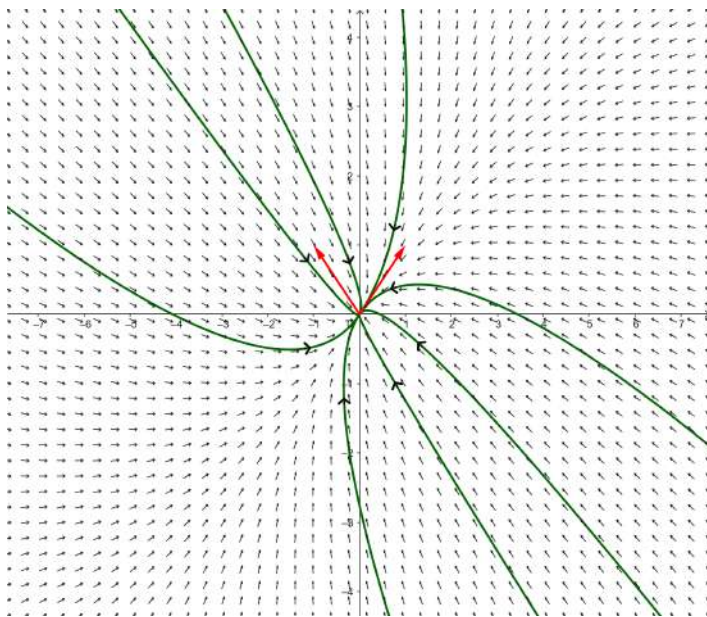
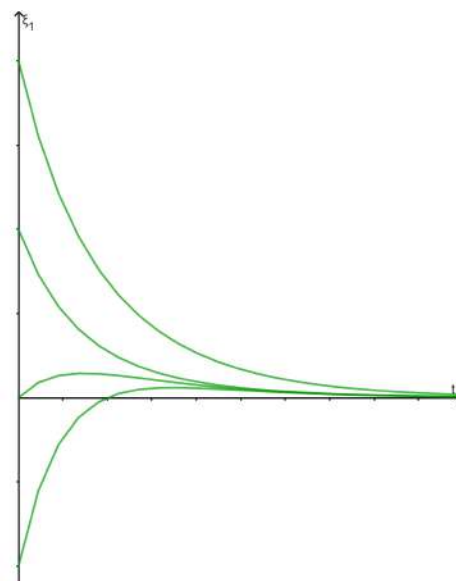


Figura 14 – Curvas em função do tempo



A dinâmica de sistemas lineares de primeira ordem, como caracterizada nesse exemplo, onde os autovalores reais, distintos e negativos ($r_1 < r_2 < 0$), define um estado de equilíbrio assintoticamente estável conhecido como nó atrator ou sorvedouro. Nesse cenário, todas as trajetórias no espaço de fase tendem à origem, independentemente das condições iniciais. Geometricamente, como ilustrado na Figura 13, o fluxo é direcionado ao ponto de equilíbrio. Observe que na Figura 14 à medida que o tempo progride, ou seja o tempo tende ao infinito ($t \rightarrow \infty$), o decaimento exponencial torna-se absoluto. O sistema demonstra uma transição suave e monótona para o estado de equilíbrio.

Quando os autovalores são reais, positivos e distintos ($0 < r_1 < r_2$), o ponto crítico é classificado como um Nó Instável (ou nó fonte) como podemos ver na Figura 15. Ao contrário do nó assintoticamente estável da Figura 13 onde as trajetórias convergem para a origem, aqui as trajetórias emergem da origem e divergem para o infinito conforme $t \rightarrow \infty$. Perceba que na Figura 16 devido a desigualdade entre os autovalores as curvas da solução tendem ao autovalor que cresce mais rápido, devido a solução geral ter um termo exponencial da solução geral.

Figura 15 – Nó Fonte

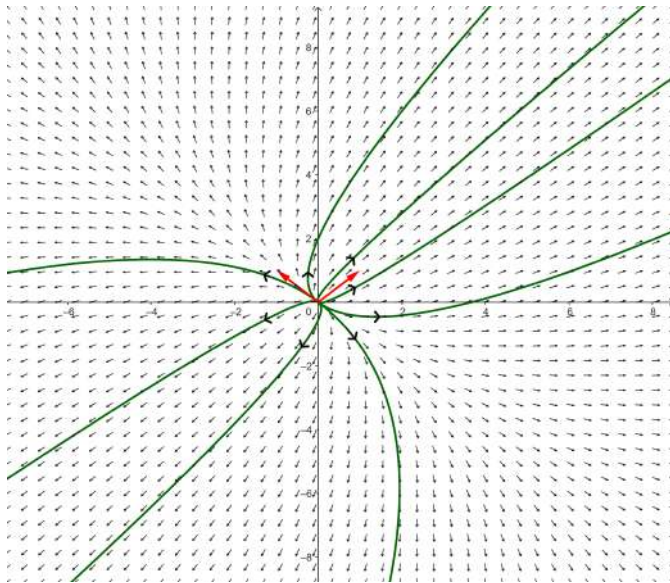
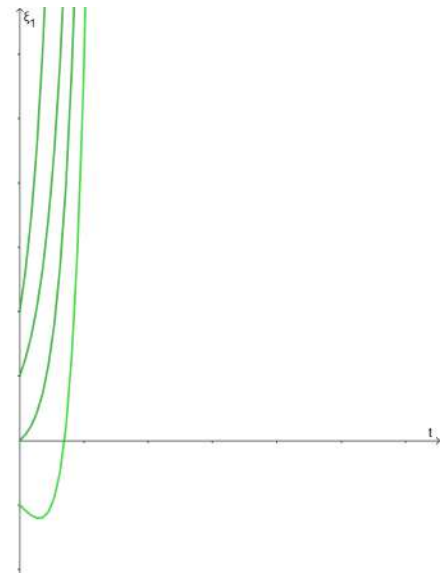


Figura 16 – Curvas em função do tempo



Fonte: Autor

4.2.2 CASO 2: Autovalores Reais com Sinais Diferentes

O segundo caso ocorre quando $r_1 \neq r_2$ e os autovalores possuem sinais distintos, ou seja $r_1 < 0 < r_2$. A dedução da solução é realizada de forma análoga ao caso anterior. Assim, a solução geral pode ser escrita como:

$$\mathbf{x}(t) = c_1 \boldsymbol{\xi}_1 e^{r_1 t} + c_2 \boldsymbol{\xi}_2 e^{r_2 t} \quad (4.13)$$

sendo que a única diferença está no comportamento das soluções, como pode ser observado no exemplo a seguir.

Exemplo: Seja o sistema linear (4.3) definido a partir da matriz de coeficientes A :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Dessa forma, o sistema de equações diferenciais assume a forma:

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \vec{x}.$$

Solução. O procedimento para encontrar a solução geral baseia-se na identificação dos autovalores e autovetores de A . Determinamos a equação característica por meio do determinante da matriz característica:

$$\det(A - rI) = \begin{vmatrix} 1-r & 0 \\ 0 & -1-r \end{vmatrix} = r^2 - 1 = 0.$$

As raízes desta equação fornecem os autovalores $r_1 = 1$ e $r_2 = -1$.

i) Autovalor $r_1 = 1$: Ao substituírmos r_1 na condição $(A - rI)\mathbf{v} = \mathbf{0}$, chegamos ao sistema:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

A análise da segunda linha indica que $-2x_2 = 0$, resultando em $x_2 = 0$, enquanto a variável x_1 permanece arbitrária. Ao fixarmos $x_1 = 1$, obtemos o autovetor:

$$\boldsymbol{\xi}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

ii) Autovalor $r_2 = -1$: De maneira análoga, para o autovalor $r_2 = -1$, o sistema torna-se:

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Neste cenário, a primeira linha impõe que $2x_1 = 0$, logo $x_1 = 0$, deixando x_2 como variável livre. Escolhendo $x_2 = 1$, definimos o autovetor correspondente:

$$\boldsymbol{\xi}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Dessa forma, a solução que teremos ao substituir os autovalores e autovetores respectivos em (4.13) é

$$\mathbf{x}(t) = c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} e^t + c_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} e^{-t} \quad (4.14)$$

Figura 17 – Ponto de Sela

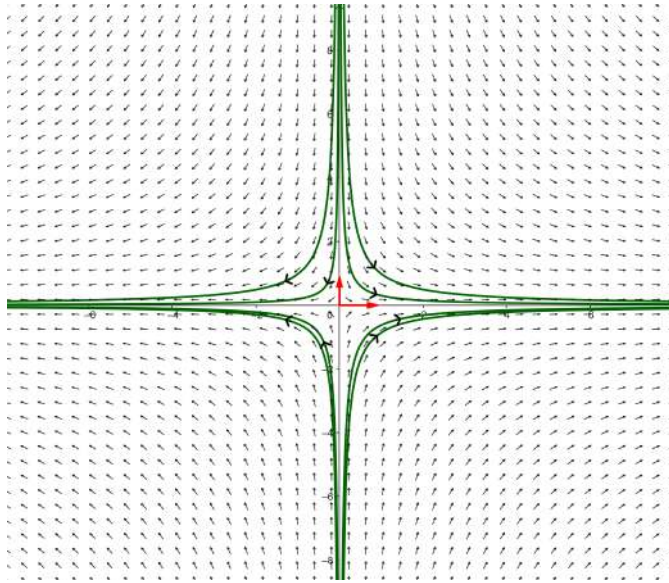
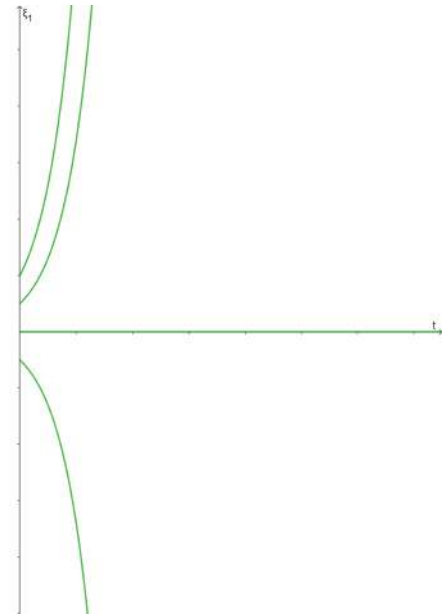


Figura 18 – Curvas em função do tempo



Fonte: Autor

A dinâmica do sistema linear apresentado pela solução (4.14) caracteriza um ponto crítico do tipo sela, no qual o comportamento é regido por autovalores de sinais opostos ($r_1 = 1$ e $r_2 = -1$). Pode-se observar as curvas de solução no plano de fase na Figura (17), veja que, essa configuração resulta em uma instabilidade estrutural onde o eixo horizontal, associado ao autovalor positivo, atua como uma direção de repulsão, enquanto o eixo vertical, associado ao autovalor negativo, atua como uma direção de atração. As trajetórias do sistema seguem padrões hiperbólicos, aproximando da origem ao longo da direção estável e, posteriormente, sendo desviadas para longe do ponto de equilíbrio, evidenciando que o ponto de sela atua como um divisor de fluxos dinâmicos no espaço de estados. Ao analisarmos a evolução temporal dessas trajetórias na Figura (18), percebemos que a influência de cada termo da solução geral depende inteiramente da magnitude do tempo t , isso significa que a trajetória, independentemente de sua origem, alinha-se assintoticamente com o autovetor associado ao autovalor positivo, resultando em um crescimento explosivo que se distancia do ponto de sela. Essa transição entre a aproximação assintótica e a divergência final ilustra a essência do ponto de sela, sendo um sistema que possui um caminho de entrada para o equilíbrio, mas que, sob qualquer perturbação ou com o passar do tempo, é inevitavelmente levado a um regime de instabilidade caracterizado pelo crescimento exponencial.

4.2.3 CASO 3: Autovalores Iguais

O terceiro caso ocorre quando os autovalores são iguais, isto é, $r_1 = r_2 = r$. Para analisar essa situação, dividimos em dois subcasos:

Subcaso 1: Dois autovetores linearmente independentes.

Se existirem dois autovetores independentes associados ao autovalor r , então teremos duas soluções fundamentais da forma:

$$\vec{x}_1(t) = \xi_1 e^{rt} \quad \text{e} \quad \vec{x}_2(t) = \xi_2 e^{rt} \quad (4.15)$$

Pelo Princípio da Linearidade, a solução geral será a combinação linear dessas soluções:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(t) &= c_1 \vec{x}_1(t) + c_2 \vec{x}_2(t) \\ \mathbf{x}(t) &= c_1 \xi_1 e^{rt} + c_2 \xi_2 e^{rt} \\ \mathbf{x}(t) &= e^{rt} (c_1 \xi_1 + c_2 \xi_2) \end{aligned} \quad (4.16)$$

Subcaso 2: Apenas um autovetor linearmente independente.

Se houver apenas um autovetor associado ao autovalor r , então a solução não pode ser obtida apenas por combinações lineares. Nesse caso, além da solução fundamental

$$\vec{x}_1(t) = \xi e^{rt}, \quad (4.17)$$

que é um autovetor linearmente independente $\xi \neq 0$, obtido através da equação $(\mathbf{A} - r\mathbf{I})\xi = 0$ precisamos encontrar uma segunda solução independente utilizando o método da **solução generalizada**.

Para isso, iremos supor a solução geral na forma:

$$\vec{x}(t) = \vec{v}(t) e^{rt}, \quad (4.18)$$

onde $\vec{v}(t)$ é uma função vetorial a determinar.

Derivando, obtemos:

$$\frac{d\vec{x}(t)}{dt} = \frac{d\vec{v}(t)}{dt} e^{rt} + r \vec{v}(t) e^{rt}.$$

Substituindo na equação diferencial $\frac{d\vec{x}}{dt} = \mathbf{A} \vec{x}$ (4.3):

$$\frac{d\vec{v}(t)}{dt} e^{rt} + r \vec{v}(t) e^{rt} = \mathbf{A} (\vec{v}(t) e^{rt}).$$

Cancelando o fator e^{rt} , resulta:

$$\frac{d\vec{v}(t)}{dt} + r \vec{v}(t) = \mathbf{A} (\vec{v}(t)),$$

ou equivalentemente:

$$\frac{d\vec{v}(t)}{dt} = (\mathbf{A} - r\mathbf{I}) \vec{v}(t). \quad (4.19)$$

Definindo $\mathbf{N} = \mathbf{A} - rI$, obtemos:

$$\frac{d\vec{v}(t)}{dt} = \mathbf{N}\vec{v}(t). \quad (4.20)$$

Como $(A - rI)\xi = 0$, temos:

$$N\xi = 0. \quad (4.21)$$

E, como há apenas um autovetor, existe um vetor η tal que:

$$N\eta = \xi. \quad (4.22)$$

Assim, $\{\xi, \eta\}$ forma uma base de $\mathbb{R}^2$, e por consequência podemos escrever:²

$$\vec{v}(t) = \vec{a}(t)\xi + \vec{b}(t)\eta. \quad (4.23)$$

Derivando, segue que

$$\frac{d\vec{v}(t)}{dt} = \frac{d\vec{a}(t)}{dt}\xi + \frac{d\vec{b}(t)}{dt}\eta. \quad (4.24)$$

Aplicando $\mathbf{N}$ em (4.23):

$$\begin{aligned} N\vec{v}(t) &= N(a(t)\xi + b(t)\eta) \\ &= a(t)N\xi + b(t)N\eta. \end{aligned}$$

Como

$$N\xi = 0 \qquad e \qquad N\eta = \xi,$$

segue que

$$\begin{aligned} N\vec{v}(t) &= a(t) \cdot 0 + b(t)\xi \\ &= b(t)\xi. \end{aligned}$$

Portanto,

$$N\vec{v}(t) = b(t)\xi. \quad (4.25)$$

e sabendo que $\frac{d\vec{v}(t)}{dt} = \mathbf{N}\vec{v}(t)$ igualamos as equações (4.24) e (4.25). Fazendo as comparações de seus coeficientes chegamos que,

$$\begin{cases} \frac{d\vec{a}(t)}{dt} = \vec{b}(t) \\ \frac{d\vec{b}(t)}{dt} = 0. \end{cases}$$

² Para mais informações sobre isto olhar as referências (Santos Silva, 2021) e (Anton; Rorres, 2012)

Resolvendo o sistema, surge da segunda equação,

$$\vec{b}(t) = c_2.$$

Substituindo na primeira,

$$\vec{a}(t) = c_2 t + c_1.$$

Sendo assim,

$$\vec{v}(t) = c_1 \xi + c_2 (t\xi + \eta).$$

Substituindo esse resultado em (4.18), obtemos assim a solução,

$$\begin{aligned} \vec{x}(t) &= \vec{v}(t)e^{rt} \\ &= (c_1 \xi + c_2 (t\xi + \eta)) e^{rt} \\ &= c_1 \xi e^{rt} + c_2 (t\xi e^{rt} + \eta e^{rt}). \end{aligned}$$

Concluimos então que a solução geral para o sistema, no caso de um autovalor real repetido r com apenas um autovetor linearmente independente ξ , é dada por,

$$\boxed{\vec{x}(t) = c_1 \xi e^{rt} + c_2 (t\xi e^{rt} + \eta e^{rt})}. \quad (4.26)$$

Que estar ligada diretamente a estrutura necessária para completar a base do espaço de soluções quando a multiplicidade geométrica é menor que a algébrica segundo (Santos Silva, 2021). A partir dela, identificamos o conjunto fundamental de soluções independentes,

$$\vec{x}_1(t) = \xi e^{rt} \quad \text{e} \quad \vec{x}_2(t) = (\eta + t\xi)e^{rt}.$$

Exemplo: Novamente, iremos partir como base o sistema linear (4.3) definido pela matriz de coeficientes A , que neste caso corresponde à matriz identidade:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

O sistema de equações diferenciais associado é expresso por:

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x}.$$

Solução. Para a obtenção da solução geral, procedemos da mesma forma que os casos anteriores, com a determinação dos autovalores da matriz A . A equação característica é definida pelo determinante da matriz característica $(A - rI)$:

$$\det(A - rI) = \begin{vmatrix} 1 - r & 0 \\ 0 & 1 - r \end{vmatrix} = (1 - r)^2 = 0.$$

Desta expressão, obtemos um autovalor real com multiplicidade algébrica igual a dois, dado por $r_1 = r_2 = 1$.

i) *Autovetores associados a $r = 1$* : Ao substituirmos o autovalor na condição matricial $(A - rI)\mathbf{v} = \mathbf{0}$, obtemos a matriz nula como resultado da subtração:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Este cenário implica que o sistema não impõe restrições às componentes do vetor $\mathbf{v}$, de modo que tanto x_1 quanto x_2 são variáveis livres. Consequentemente, o espaço próprio associado é o próprio $\mathbb{R}^2$. Para compor uma base para este espaço, selecionamos os vetores linearmente independentes:

$$\boldsymbol{\xi}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \boldsymbol{\xi}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Dessa forma, a solução geral é uma combinação linear das soluções fundamentais, ou seja,

$$\mathbf{x}(t) = e^t \left(c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right)$$

Do ponto de vista da análise qualitativa, este sistema caracteriza um ponto de equilíbrio do tipo **nó próprio** (ou estrela), devido à igualdade dos autovalores positivos e à existência de dois autovetores linearmente independentes, como pode ser visto na imagem.

Figura 19 – Ponto Estrela ($0 < r_1 = r_2$); Dois Autovetores Independentes

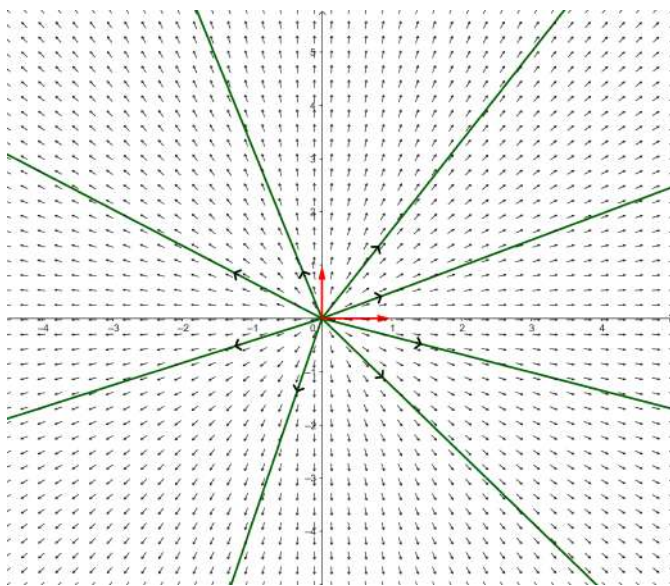
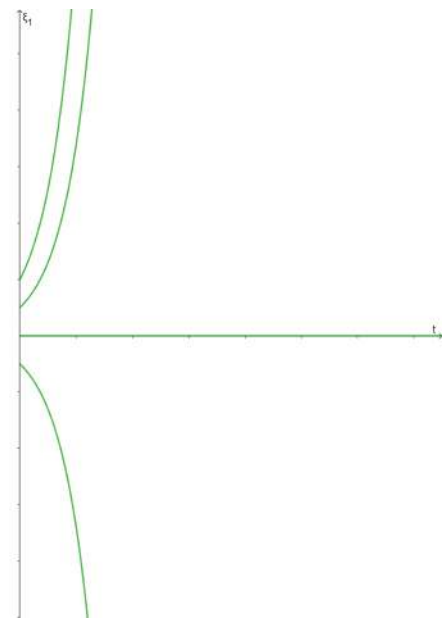


Figura 20 – Curvas em função do tempo



Fonte: Autor

Como os autovalores são positivos e iguais, não há “deformações” ou trajetórias curvas em direção a direções preferenciais, como visto na Figura (19) todas as trajetórias são,

essencialmente, retas que se originam no ponto de equilíbrio e se estendem para o infinito em todas as direções. O ponto crítico é, portanto, um repulsor global, ou seja, qualquer partícula que se encontre próximo à origem é inevitavelmente “empurrada” para longe dela com uma velocidade crescente.

Quando observamos a evolução das curvas em função do tempo, o comportamento é de divergência exponencial pura, e ele não apenas diverge, mas o faz de maneira “explosiva”. Nota-se, que tanto as curvas das Figuras 17 e 19 possuem comportamentos de instabilidade mas enquanto no ponto de sela, o sistema pode se aproximar da origem, mas qualquer componente fora dessa direção específica é inevitavelmente capturada pela direção de repulsão como se estivesse “selecionando” a direção de instabilidade, em contra partida, no nó próprio o ponto de equilíbrio atua como uma fonte universal, na qual o sistema é repellido da origem em todas as direções possíveis, sem restrições direcionais.

Figura 21 – Nó Próprio ($r_1 = r_2 < 0$); Dois autovetores Independentes

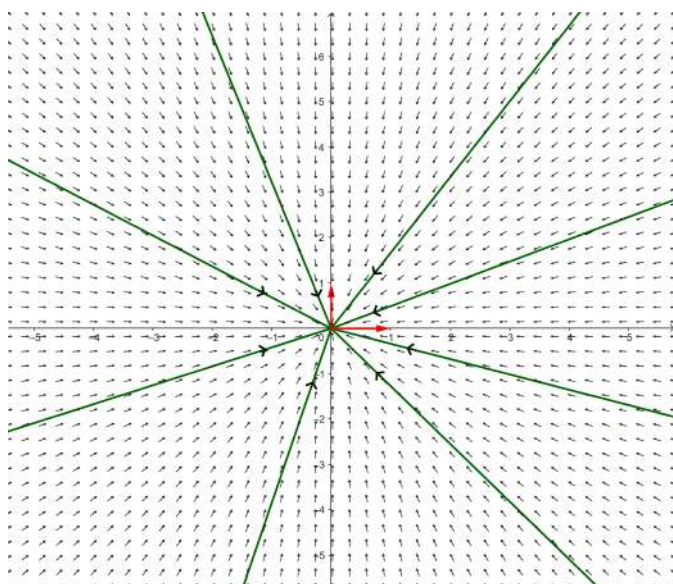
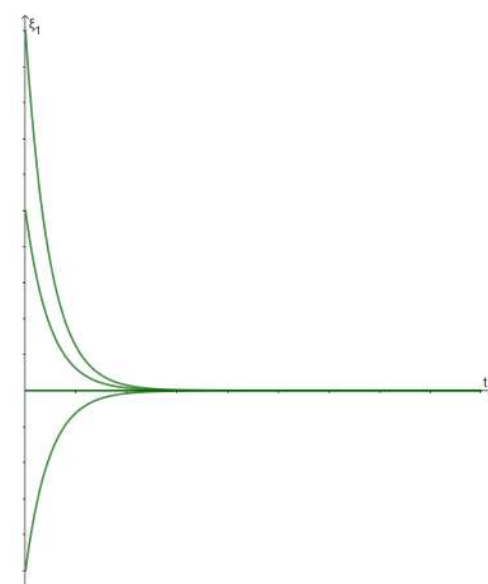


Figura 22 – Curvas em função do tempo

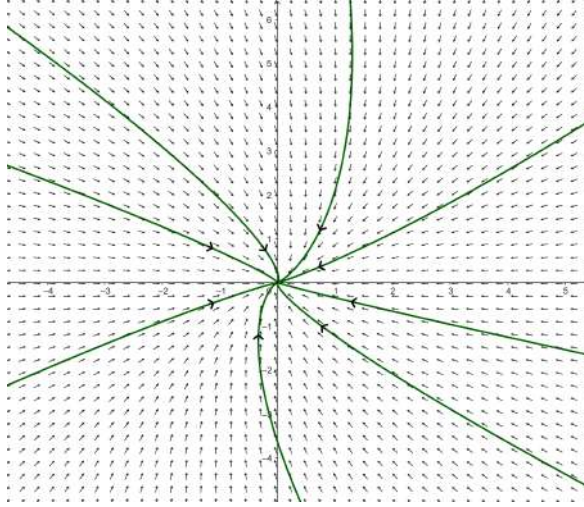
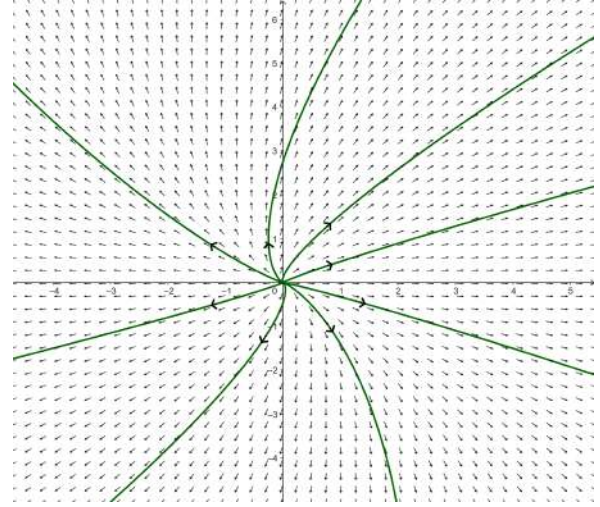


Fonte: Autor

Explorando o subcaso de matrizes nas quais o sistema apresenta um autovalor repetido com multiplicidade geométrica unitária, observamos a formação de um ponto crítico degenerado (ou nó impróprio), ilustrado nas Figuras 23 e 24. Diferentemente das trajetórias retilíneas observadas nas Figuras 19 e 21, nota-se que, neste caso, as trajetórias descrevem uma curva levemente, que se aproximam ou se afastam da origem tangenciando a direção do único autovetor existente.

4.2.4 CASO 4: Autovalores Complexos.

Novamente iremos considerar o sistema linear (4.3), que ao assumimos que o sistema admite soluções da forma $\mathbf{x}(t) = \boldsymbol{\xi}e^{rt}$. Ao substituir essa proposta na equação diferencial,

Figura 23 – Ponto Degenerado ($r_1 = r_2 < 0$);
Um autovetor Independente

 Figura 24 – Ponto Degenerado ($0 < r_1 = r_2$);
Um autovetor Independente


Fonte: Autor

recaímos no problema de autovalores e autovetores:

$$(A - rI)\boldsymbol{\xi} = 0$$

Para que existam soluções não triviais, o determinante de $(A - rI)$ deve ser nulo, confirmando que r deve ser um autovalor de A . Como A é uma matriz real, os autovalores gerados pela equação característica, terão que aparecer em pares conjugados. Logo, os autovalores serão,

$$r_1 = \lambda + i\mu \quad \text{e} \quad r_2 = \bar{r}_1 = \lambda - i\mu, \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}^*.$$

Que terão como autovetores associados $\boldsymbol{\xi}_1$ e $\bar{\boldsymbol{\xi}}_1$, respectivamente.

Então, as soluções

$$\vec{x}_1(t) = \boldsymbol{\xi}_1 e^{r_1 t}, \quad \vec{x}_2(t) = \bar{\boldsymbol{\xi}}_1 e^{\bar{r}_1 t} \quad (4.27)$$

da equação (4.3) são, então, complexas conjugadas uma da outra. Portanto, podemos encontrar duas soluções reais correspondente aos autovalores r_1 e r_2 escolhendo a parte real e a parte imaginária de $\vec{x}_1(t)$ ou de $\vec{x}_2(t)$. dadas por (4.27).

Seja o autovetor $\boldsymbol{\xi}_1$ decomposto em suas partes real e imaginária:

$$\boldsymbol{\xi}_1 = \mathbf{a} + i\mathbf{b}$$

A solução complexa correspondente é:

$$\mathbf{x}_1(t) = (\mathbf{a} + i\mathbf{b})e^{(\lambda + i\mu)t} = (\mathbf{a} + i\mathbf{b})e^{\lambda t}e^{i\mu t}$$

Aplicando a Fórmula de Euler³, expandimos a expressão:

$$\mathbf{x}_1(t) = e^{\lambda t}(\mathbf{a} + i\mathbf{b})(\cos \mu t + i \sin \mu t)$$

³ $e^{i\mu t} = \cos \mu t + i \sin \mu t$

Ao realizar a distribuição dos termos e agrupar os componentes reais e imaginários:

$$\mathbf{x}_1(t) = e^{\lambda t} \underbrace{(\mathbf{a} \cos \mu t - \mathbf{b} \sin \mu t)}_{\mathbf{u}(t)} + ie^{\lambda t} \underbrace{(\mathbf{a} \sin \mu t + \mathbf{b} \cos \mu t)}_{\mathbf{v}(t)}$$

Pelo Princípio da Superposição, as funções $\mathbf{u}(t)$ e $\mathbf{v}(t)$ são, individualmente, soluções reais e linearmente independentes do sistema.

Sendo assim, a solução geral do sistema é dada pela combinação linear das partes real e imaginária encontradas:

$$\mathbf{x}(t) = c_1 \mathbf{u}(t) + c_2 \mathbf{v}(t)$$

Fazendo as devidas substituições,

$$\boxed{\mathbf{x}(t) = e^{\lambda t} [c_1(\mathbf{a} \cos \mu t - \mathbf{b} \sin \mu t) + c_2(\mathbf{a} \sin \mu t + \mathbf{b} \cos \mu t)]} \quad (4.28)$$

Exemplo: Mais uma vez, seja (4.3) definido pela seguinte matriz de coeficientes A :

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}.$$

O sistema de equações diferenciais correspondente ficará na forma:

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \mathbf{x}.$$

Solução. Para obtermos a solução geral, seguimos os mesmos passos anteriores, então, buscamos os autovalores de A através de seu polinômio característico. O determinante da matriz característica é expresso por:

$$\det(A - rI) = \begin{vmatrix} -1-r & 1 \\ -1 & -1-r \end{vmatrix} = r^2 + 2r + 2 = 0.$$

Ao resolvermos esta equação quadrática, obtemos um par de autovalores complexos conjugados: $r = -1 \pm i$.

i) Autovalor $r_1 = -1 - i$: Substituindo r_1 na equação $(A - rI)\mathbf{v} = \mathbf{0}$, obtemos o sistema linear complexo:

$$\begin{bmatrix} i & 1 \\ -1 & i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

A partir da primeira linha, temos a relação $ix_1 + x_2 = 0$, o que implica $x_1 = ix_2$. Ao atribuímos o valor unitário a x_2 , determinamos o primeiro autovetor associado:

$$\boldsymbol{\xi}_1 = \begin{bmatrix} i \\ 1 \end{bmatrix}.$$

ii) Autovalor $r_2 = -1 + i$: De forma análoga, para o autovalor conjugado $r_2 = -1 + i$, o sistema resulta em:

$$\begin{bmatrix} -i & 1 \\ -1 & -i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Neste caso, a relação $-ix_1 + x_2 = 0$ nos fornece $x_1 = -ix_2$. Definindo $x_2 = 1$, obtemos o segundo autovetor:

$$\xi_2 = \begin{bmatrix} -i \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Portanto, a solução geral de acordo com (4.28) é da forma,

$$\mathbf{x}(t) = e^{-t} [c_1(\cos(-t) - \sin(-t)) + c_2(\sin t - \cos t)]$$

Figura 25 – Ponto Espiral ($\lambda < 0$)

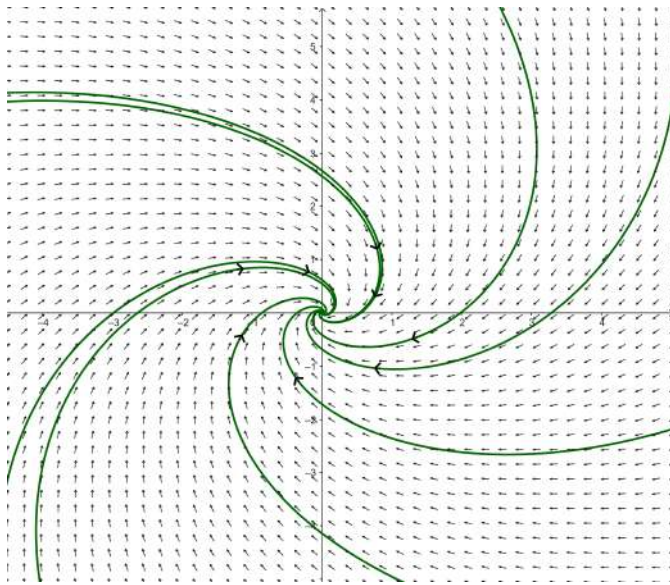
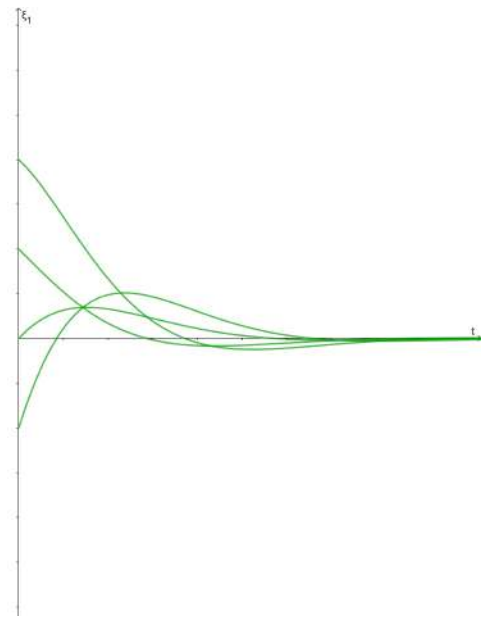


Figura 26 – Curvas em função do tempo



Fonte: Autor

Veja que a partir da solução desse exemplo, podemos observar que quando os autovalores de um sistema linear são números complexos conjugados com parte real negativa ($r = \lambda \pm i\mu$, com $\lambda < 0$), o sistema exibe um comportamento dinâmico distinto, configurando um ponto crítico denominado foco atrator ou espiral atratora. Nesse cenário, o sistema não apenas converge para o equilíbrio, mas o faz oscilando em torno dele, o que resulta em trajetórias que formam espirais convergindo assintoticamente para a origem conforme o tempo (t) tende ao infinito, como pode ser observado na Figura 25. Essa dinâmica é explicada pela interação entre a parte real e a parte imaginária dos autovalores. A parte real negativa ($\lambda < 0$) implica que o termo exponencial $e^{\lambda t}$ atua como um fator de amortecimento exponencial. Essa característica garante que, independentemente da magnitude das oscilações, o sistema dissipe energia continuamente, sendo conduzido ao repouso no ponto crítico. Por outro lado, a presença da parte imaginária (μ) introduz uma componente rotacional ao movimento, responsável pelas trajetórias espiraladas no plano de fase. No domínio do tempo, representada pela Figura 26, o gráfico das curvas de ξ_1 em

função de t fornece a assinatura visual de um sistema subamortecido, caracterizado pelo decaimento com oscilação. Nesse regime, as soluções exibem picos e vales sucessivos cuja amplitude diminui progressivamente à medida que o tempo progride. Esse padrão reflete a combinação das componentes senoidais e cossenoidais da solução geral, que oscilam sob uma frequência ditada por μ .

Figura 27 – Ponto Espiral ($\lambda > 0$)

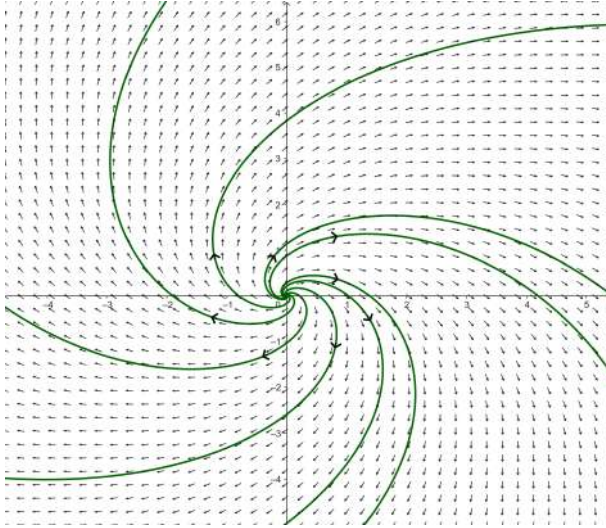
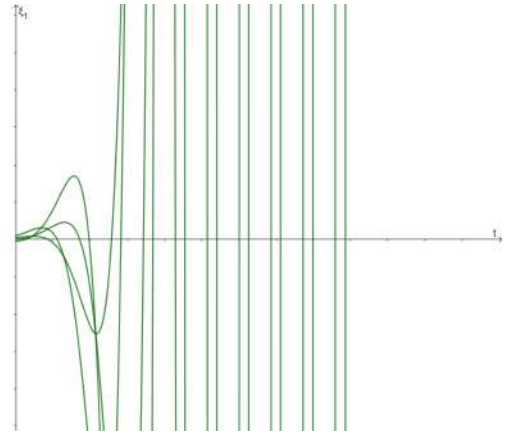


Figura 28 – Curvas em função do tempo



Fonte: Autor

Quando a parte real (λ) de um autovalor complexo é positiva ($\lambda > 0$), o sistema dinâmico apresenta um comportamento conhecido como Espiral Instável (ou repulsor) onde suas trajetórias exibem um movimento rotacional constante em torno do ponto crítico como visto na Figura 27. Contudo, como a parte real é positiva, o termo de crescimento exponencial ($e^{\lambda t}$) domina o comportamento temporal. O resultado é que as trajetórias “espiralam para fora”, afastando-se da origem à medida que o tempo progride ($t \rightarrow \infty$). Já na Figura 28, podemos observar que o gráfico apresentará oscilações senoidais cujas amplitudes crescem progressivamente. Diferente do sistema estável, que dissipa energia, este sistema é instável, onde qualquer perturbação inicial cresce exponencialmente ao longo do tempo.

4.2.5 CASO 5: Autovalores Imaginários Puros

Finalmente, consideramos o cenário em que os autovalores são puramente imaginários, ou seja, $\lambda = 0$:

$$r = \pm i\mu \quad (\mu \neq 0).$$

A solução geral é obtida da mesma forma que o caso anterior, resultando em:

$$\mathbf{x}(t) = e^{\lambda t} [c_1(\mathbf{a} \cos \mu t - \mathbf{b} \sin \mu t) + c_2(\mathbf{a} \sin \mu t + \mathbf{b} \cos \mu t)].$$

Visto que $\lambda = 0$, o termo exponencial torna-se unitário ($e^{0t} = 1$). Assim, a solução geral simplifica-se para:

$$\boxed{\mathbf{x}(t) = c_1(\mathbf{a} \cos \mu t - \mathbf{b} \sin \mu t) + c_2(\mathbf{a} \sin \mu t + \mathbf{b} \cos \mu t)} \quad (4.29)$$

Exemplo: Seja o sistema linear definido pela relação (4.3), cuja matriz de coeficientes A é dada por:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -4 & 0 \end{bmatrix}.$$

Dessa forma, o sistema é regido pela equação:

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -4 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}.$$

Solução. Repetindo processos anteriores, a investigação da solução geral requer os autovalores da matriz A . Para isto, formulamos o polinômio característico através do determinante da matriz característica:

$$\det(A - rI) = \begin{vmatrix} -r & 1 \\ -4 & -r \end{vmatrix} = r^2 + 4 = 0.$$

A resolução dessa equação algébrica no campo complexo fornece os autovalores puramente imaginários $r_1 = 2i$ e $r_2 = -2i$.

i) Autovetor associado a $r_1 = 2i$: Ao substituir r_1 no sistema homogêneo $(A - 2iI)\mathbf{v} = \mathbf{0}$, obtemos o seguinte equação matricial:

$$\begin{bmatrix} -2i & 1 \\ -4 & -2i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Da primeira linha, obtemos a relação fundamental $-2ix_1 + x_2 = 0$, que estabelece $x_1 = \frac{1}{2i}x_2 = -\frac{i}{2}x_2$. Definindo o parâmetro livre como $x_2 = 2$, obtemos o autovetor:

$$\boldsymbol{\xi}_1 = \begin{bmatrix} -i \\ 2 \end{bmatrix}.$$

ii) Autovetor associado a $r_2 = -2i$: De forma análoga, para o autovalor conjugado $r_2 = -2i$, o sistema assume a forma:

$$\begin{bmatrix} 2i & 1 \\ -4 & 2i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Neste caso, a condição linear imposta é $2ix_1 + x_2 = 0$, resultando em $x_1 = -\frac{i}{2}x_2$. Ao fixarmos $x_2 = 2$, o autovetor correspondente é:

$$\boldsymbol{\xi}_2 = \begin{bmatrix} i \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Figura 29 – Trajetórias do sistema (Centro)

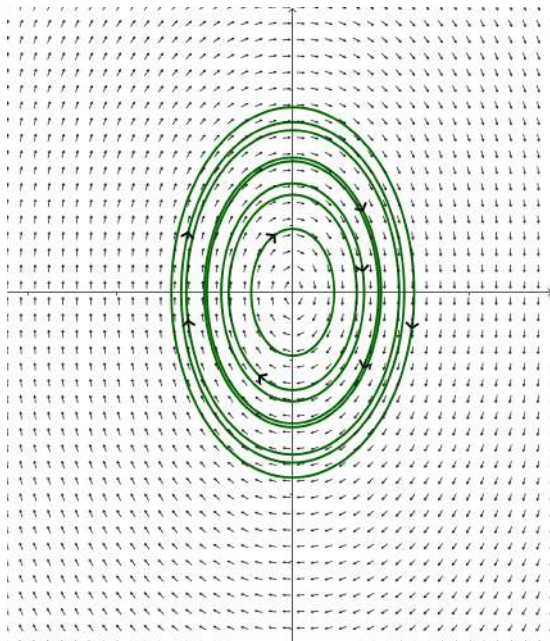
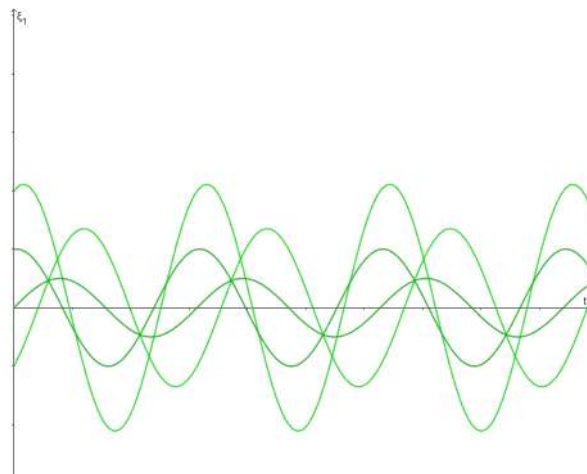


Figura 30 – Curvas em função do tempo



Fonte: Autor

Ao encontrarmos os autovalores e autovetores associados de A , substituímos em (4.29) e encontramos a solução geral,

$$\mathbf{x}(t) = c_1(2 \cos 2t + \sin 2t) + c_2(2 \sin 2t + \cos 2t)$$

Quando os autovalores de um sistema linear são puramente imaginários, o ponto crítico é classificado como um centro. No plano de fase, a ausência de uma parte real nos autovalores implica a inexistência de termos exponenciais de amortecimento ou crescimento já que $e^{0t} = 1$, o que caracteriza um sistema conservativo. As trajetórias do sistema formam ciclos fechados em torno da origem, que podem ser elipses ou círculos, dependendo das características da matriz. Esse comportamento indica que o sistema preserva uma forma de invariante, consequentemente, o estado do sistema orbita o ponto de equilíbrio de maneira perpétua, mantendo-se em um movimento cíclico sem jamais se aproximar da origem ou se afastar dela. Quanto à sua estabilidade, a origem é considerada um ponto de equilíbrio estável, uma vez que qualquer trajetória que inicie suficientemente próxima ao ponto crítico permanecerá confinada a uma vizinhança limitada para todo $t > 0$. Entretanto, é fundamental ressaltar a ausência de convergência assintótica: o sistema não “cai” na origem e não apresenta um estado de repouso final. Diferente dos focos ou nós atratores, onde o sistema dissipa energia até atingir o estado estacionário, no centro, a natureza oscilatória pura é sustentada indefinidamente, refletindo um regime de oscilação harmônica idealizada.

CLASSIFICAÇÃO DE ESTABILIDADE PARA SISTEMAS LINEARES

A Tabela 1 organiza os casos de estabilidade de forma explícita, utilizando uma estrutura de grade para facilitar a visualização comparativa:

Tabela 1 – Propriedades de estabilidade e classificação de pontos críticos.

Autovalores (r_1, r_2)	Tipo de Ponto Crítico	Estabilidade
$r_1 > r_2 > 0$	Nó	Instável
$r_1 < r_2 < 0$	Nó	Assintoticamente Estável
$r_2 < 0 < r_1$	Ponto de Sela	Instável
$r_1 = r_2 > 0$	Nó (Próprio ou Impróprio)	Instável
$r_1 = r_2 < 0$	Nó (Próprio ou Impróprio)	Assintoticamente Estável
Caso Complexo: $r = \lambda \pm i\mu$		
$r = \lambda \pm i\mu, \lambda > 0$	Ponto Espiral	Instável
$r = \lambda \pm i\mu, \lambda < 0$	Ponto Espiral	Assintoticamente Estável
$r = \pm i\mu$	Centro	Estável

Fonte: Autor

5 CONSTRUÇÃO DOS MODELOS NO GEOGEBRA

Este capítulo dedica-se à apresentação detalhada do desenvolvimento e da estrutura do material autoral desenvolvido para esta pesquisa. Com o objetivo de unir o rigor analítico à intuição geométrica na formação docente, concebeu-se um ecossistema digital interativo voltado ao estudo dos sistemas de EDOs. Cabe ressaltar que todas as figuras, gráficos e capturas de tela exibidos ao longo das próximas seções foram gerados a partir do próprio software construído no GeoGebra, funcionando como registros visuais diretos da ferramenta em operação. O percurso metodológico de programação e a lógica matemática que fundamentam o simulador são detalhados a seguir.

5.1 CONSTRUÇÃO DO MODELO GEOGEBRA DE ANÁLISE QUALITATIVO DE SISTEMAS DE EDOS

A implementação da simulação de sistemas de Equações Diferenciais Ordinárias (EDOs) lineares de primeira ordem, expressas pela forma matricial $\frac{d\vec{x}}{dt} = A\vec{x}$, buscou aliar o rigor da análise simbólica à flexibilidade da exploração visual. O ambiente foi construído no software GeoGebra, estruturado para permitir a observação contínua da evolução do estado do sistema em relação à variação de seus parâmetros.

Passos de construção:

A estrutura de dados foi iniciada através da criação de variáveis livres (a, b, c, d) , vinculadas a Caixas de Entrada (Input Boxes). Logo em seguida, definimos a matriz,

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

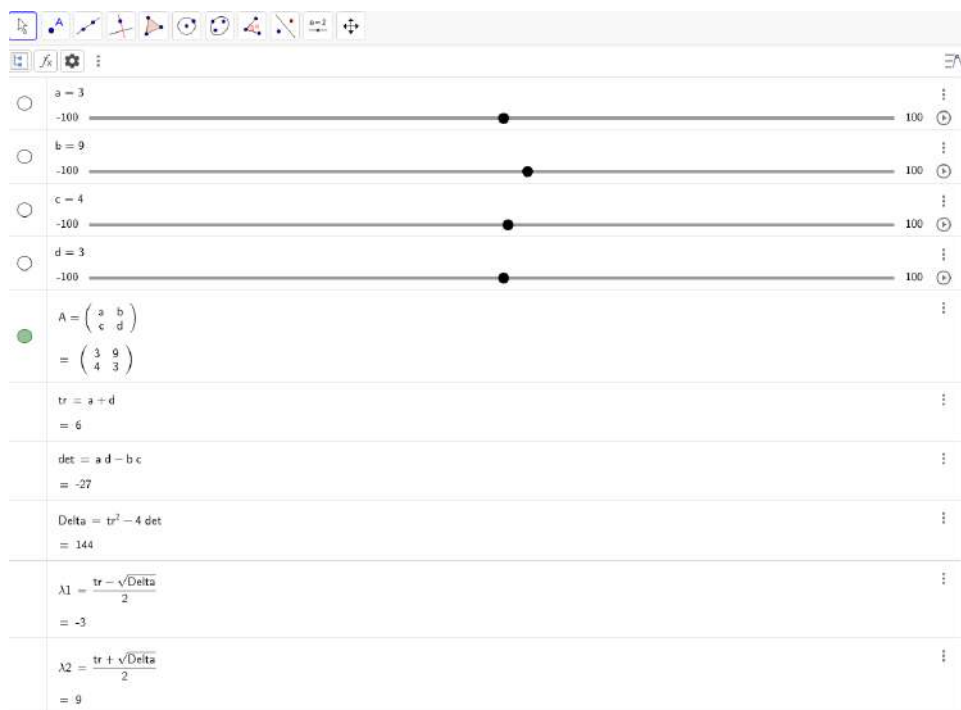
A partir desta estrutura, calcularam-se os invariantes,

- Traço: $\text{tr}(A) = a + d$.
- Determinante: $\det(A) = ad - bc$.
- Discriminante: $\Delta = \text{tr}(A)^2 - 4\det(A)$.
- Autovalores (λ_1, λ_2) , computados via fórmula quadrática: $\lambda = \frac{\text{tr}(A) \pm \sqrt{\Delta}}{2}$.

Esses passos podem ser observados na Figura 31

Para a análise do plano de fase, definimos as funções escalares: $f(x, y) = ax + by$ e $g(x, y) = cx + dy$ e a inclinação local $m(x, y) = \frac{g(x, y)}{f(x, y)}$, onde $m(x, y)$ determina a tendência

Figura 31 – Etapa 1



Fonte: Autor

das trajetórias. Ao definir $m(x, y)$, o modelo permite que o GeoGebra interprete a direção do fluxo vetorial em cada ponto (x, y) do plano cartesiano. Em seguida, foram plotados em tela 8 pontos livres (B, F, G, H, J, K, L, M) que serão uma espécie de condições iniciais. No campo de álgebra do software, esses elementos foram consolidados em uma lista indexada através do comando “ListP”.

Logo abaixo do comando “ListP”, como visto na Figura 32, temos o comando “ListP1” que calcula onde cada ponto estará um milésimo de segundo no futuro. No GeoGebra, essa automação foi construída para os 8 pontos simultaneamente através do uso do **Sequência**, configurado com um incremento de 0.001. Para compreender a sintaxe aninhada desse comando, o fluxo de execução pode ser segmentado em quatro etapas:

1. Varredura ($i, 1, 8$): O indexador i atua como um contador que varia de 1 a 8, aplicando a mesma regra matemática para cada um dos constituintes da lista original.
2. Extração de Coordenadas (Elemento): A função Elemento (ListP, i) isola o ponto correspondente à iteração atual, enquanto os operadores externos $x(\dots)$ e $y(\dots)$ decompõem o ponto em suas respectivas coordenadas cartesianas.
3. Mapeamento de $(f(x,y)$ e $g(x,y))$: O software avalia as funções do sistema na posição exata em que o ponto se encontra, determinando as componentes horizontal e vertical do vetor velocidade naquele instante.

4. Atualização de Posição: Multiplica-se a velocidade pelo passo escalar de 0.001 e soma-se ao valor anterior. O resultado gera um novo par ordenado para a lista “ListP1”.

Continuando, temos o “list1” que de fato irá plotar na janela de imagens as trajetórias do sistema (As trajetórias podem ser vistas na Figura 33), para isto, ele utiliza o comando LugarGeométrico do GeoGebra que resolve a equação de inclinação $\frac{g(x, y)}{f(x, y)}$ numericamente e desenha a curva contínua e suave (a trajetória inteira) que passa por um ponto. Como o comando está dentro de uma Sequência(..., i, 1, 8), o GeoGebra recebe a lei de inclinação e calcula a curva geométrica contínua que obrigatoriamente intersecta a condição inicial contida em Elemento(ListP, i) e que passa por cada uma dos 8 pontos de condições iniciais.

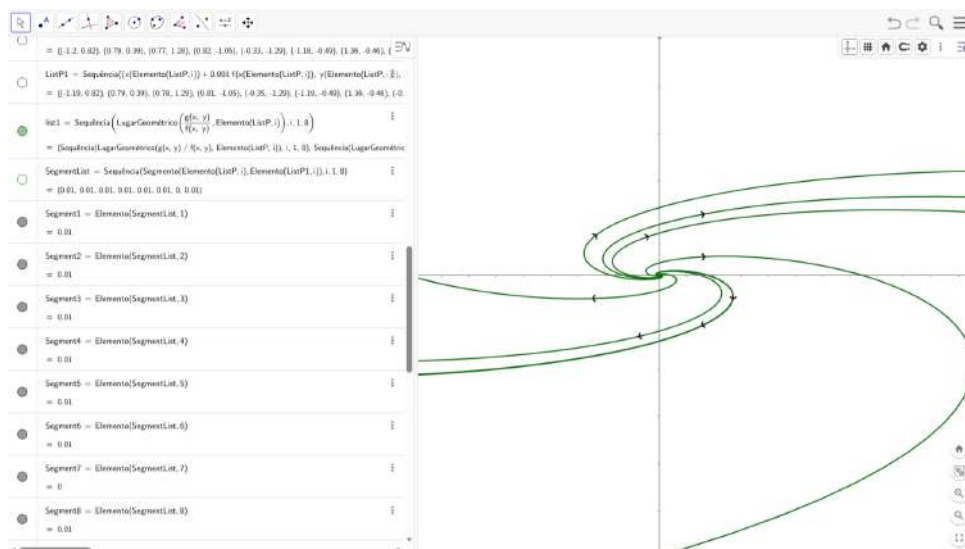
Figura 32 – Etapa 2



Fonte: Autor

Ademais, temos a criação da Lista (SegmentList) Na primeira linha, o comando “Sequência(Segmento(Elemento(ListP, i), Elemento(ListP1, i)), i, 1, 8)” realiza uma operação de repetição, ele percorre as listas ListP e ListP1 do índice 1 ao 8 e para cada índice i, ele cria um objeto do tipo Segmento ligando o i-ésimo ponto de ListP ao i-ésimo ponto de ListP1. Na Figura 33 pode-se observar esses passos e os valores mostrados (0, 0.01, 0.02...) indicam o comprimento de cada um desses segmentos resultantes. logo na sequência, é feita a extração dos Elementos (Segment1 até Segment8) através de comandos de seleção individual. E nesse bloco do código o comando Elemento(lista, n) extrai apenas o n-ésimo item de uma lista existente. Eles serão importantes pois mostrarão o sentido sentido das trajetórias, para isso, nas configurações foi mudado o estilo dos pontos para “setas”

Figura 33 – Etapa 3



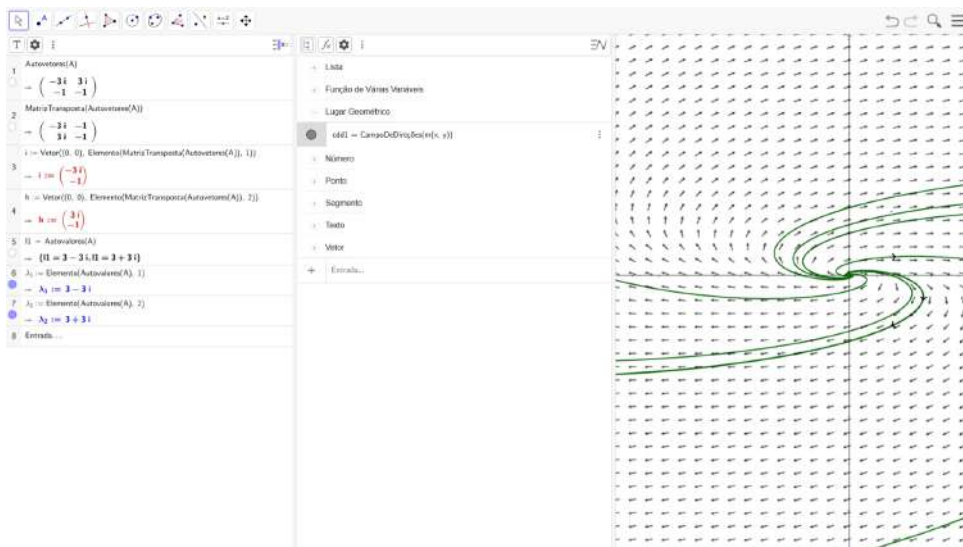
Fonte: Autor

Seguindo a construção do código, na aba *Computer Algebra System* (CAS) do GeoGebra foi construído os autovetores da matriz A e o software retorna uma matriz cujas colunas correspondem aos autovetores associados. Como o comando nativo “Elemento()” do GeoGebra extrai prioritariamente as linhas de uma estrutura matricial, aplicou-se a transposição da matriz de autovetores. Dessa forma, os autovetores coluna originais passaram a ocupar as linhas da nova matriz, facilitando seu isolamento individual, que são os vetores i e h . Determinamos também os autovalores de A e através do comando “Elemento()” definimos λ_1 e λ_2 , percebeu-se que embora já tenhamos calculado os autovalores, como visto na Figura 31 eles podem ser calculados de forma direta na aba CAS, mas como o objetivo desse código foi ser mais interativo para a visualização na janela de interação que vai ser mostrado no decorrer da descrição. Para concluir essa etapa, definimos então o campo de direções para a função $m(x, y)$. Todos os passos podem ser observados na Figura 34.

A última etapa do desenvolvimento computacional consistiu na criação de uma interface gráfica do usuário (*dashboard*), com o propósito de tornar a simulação autodidática. Como observado no painel verde à direita na Figura 35, os resultados da análise espectral são renderizados em tempo real utilizando a linguagem de marcação matemática LaTeX integrada a variáveis dinâmicas do GeoGebra mostrando o sistema de EDo's em sua forma matricial, o determinante e traço da matriz que são usados como parte da equação característica que determina os autovalores e os autovetores. A janela do usuário e de representação das trajetórias estão em janelas de visualizações distintas, pois o próprio programa do GeoGebra ao acessar as configurações do texto permite a escolha para qual das duas janelas vai ser apresentada o texto.

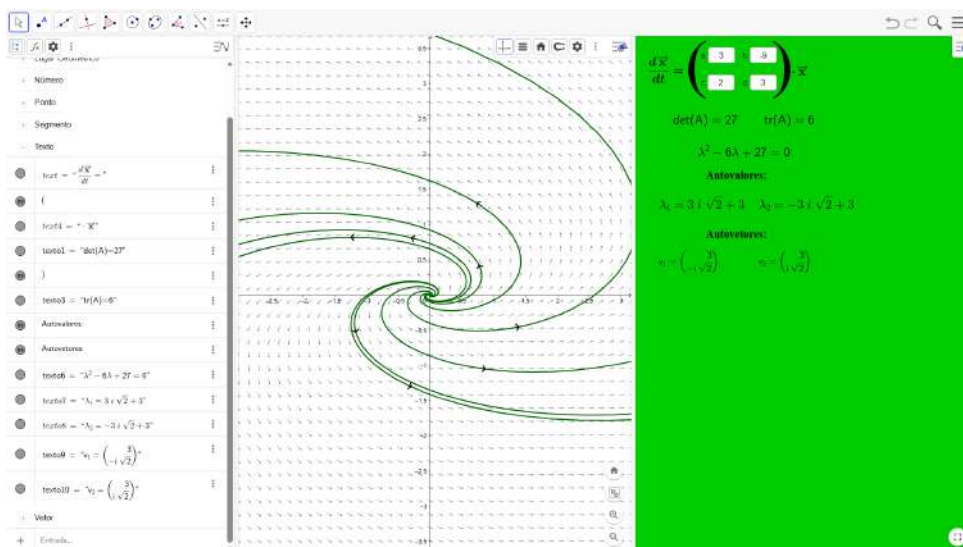
Para ter acesso ao código e poder utilizá-lo acesse o site <https://www.geogebra.org/>

Figura 34 – Etapa 4



Fonte: Autor

Figura 35 – Etapa 5



Fonte: Autor

m/u69w2gmh

5.2 CONSTRUÇÃO DA SIMULAÇÃO NUMÉRICA DE TRAJETÓRIAS EM FUNÇÃO DO TEMPO VIA MÉTODO DE EULER

Para a obtenção das trajetórias temporais do sistema dinâmico linear, adotou-se o Método de Euler para a integração numérica. Este procedimento consiste em discretizar o tempo em intervalos constantes h , aproximando a derivada pela razão incremental. A

evolução do sistema é, portanto, governada pela relação recursiva:

$$\mathbf{x}_{k+1} \approx (\mathbf{I} + h\mathbf{A})\mathbf{x}_k.$$

Onde $\mathbf{I}$ é a matriz identidade de dimensão 2, $\mathbf{A}$ é a matriz dos coeficientes do nosso sistema e $\mathbf{M} = (\mathbf{I} + h\mathbf{A})$ atua como o operador de evolução temporal discreta.

Passos de construção:

A primeira etapa para a construção desse código é a implementação algorítmica e discretização. No ambiente GeoGebra, começamos então construindo a matriz $\mathbf{A}$ que é definida a partir dos parâmetros de configuração (a, b, c, d) , logo após o passo temporal h (escolhido como 0.09 para garantir a estabilidade da aproximação) e por fim a matriz de evolução $\mathbf{M}$.

A segunda etapa é a determinação das condições iniciais, na qual definimos como $(X01, X02, X03, X04)$. Optamos por considerar apenas essas 4 condições, mas pode acrescentar quantas forem viáveis. Observe, na Figura 36 que essas condições são definidas como vetores e não pontos, isto porque como o seu objetivo é calcular a trajetória (usando a matriz $\mathbf{M}$ para “empurrar” o ponto para a próxima posição), o GeoGebra exige que você trate esse ponto como um vetor (matriz coluna).

A última etapa é a Construção da Curva Temporal, a visualização das curvas de estado $\xi_1(t)$ em função do tempo é construída através do comando “Caminho Poligonal”, que conecta os estados discretos calculados, para cada uma das condições iniciais, abaixo pode-se observar o caso para a primeira condição inicial:

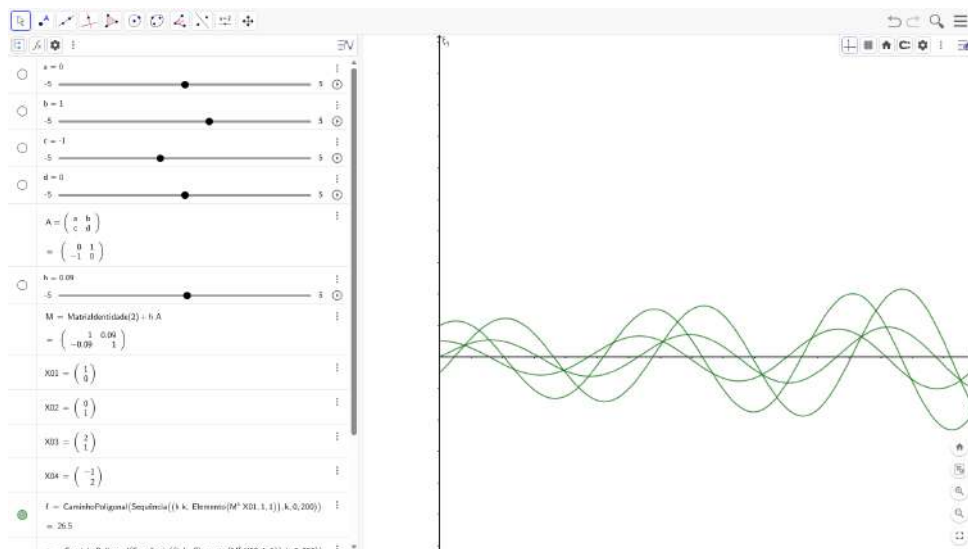
$$f = \text{CaminhoPoligonal}(\text{Sequência}((h \cdot k, \text{Elemento}(\mathbf{M}^k \cdot X01, 1, 1)), k, 0, 200))$$

A lógica de construção deste algoritmo compreende três etapas essenciais:

1. Iteração Temporal (Sequência): O parâmetro k varia de 0 a 200, definindo a extensão da simulação. A cada passo, calcula-se o tempo decorrido como $t = h \cdot k$.
2. Extração de Componentes (Elemento): A operação “ $\text{Elemento}(\mathbf{M}^k \cdot X01, 1, 1)$ ” isola a primeira coordenada do vetor de estado resultante após k passos, permitindo o mapeamento da trajetória de ξ_1 de forma independente.
3. Interpolação (CaminhoPoligonal): Ao conectar os pontos $(t, \xi_1(t))$ gerados pela sequência, obtém-se uma aproximação contínua da trajetória temporal, permitindo observar o regime de convergência, oscilação ou divergência do sistema.

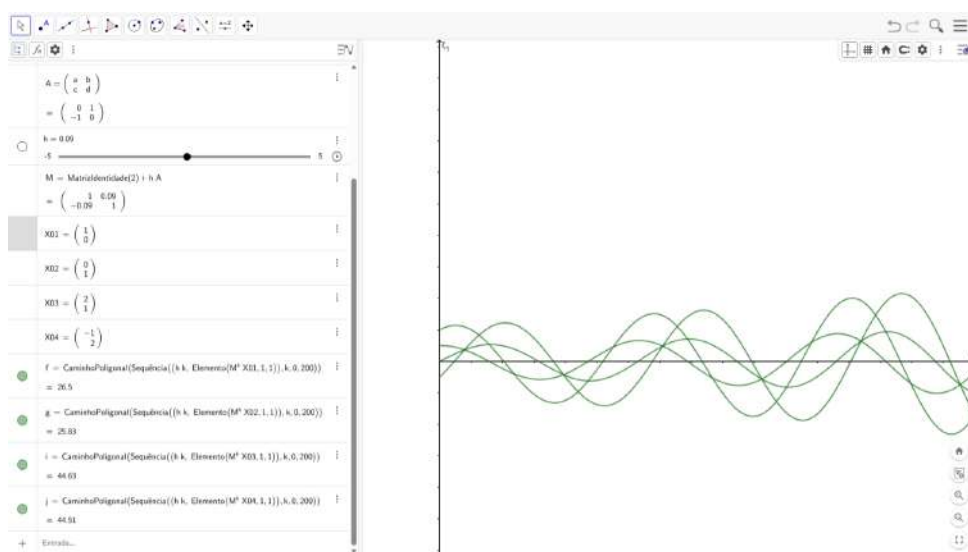
Todas as trajetórias que começam pelas suas respectivas condições iniciais tem essa estrutura de construção, como observado na Figura 37. A determinação do estado do sistema em qualquer instante futuro é obtida pela aplicação sucessiva deste operador, resultando na potência matricial $\mathbf{M}^k$, tal que o estado após k iterações é dado por $\mathbf{x}_k = \mathbf{M}^k \mathbf{x}_0$. Esse trabalho pode ser encontrado em <https://www.geogebra.org/m/mzq9ckn8>.

Figura 36 – Etapa 1



Fonte: Autor

Figura 37 – Etapa 2



Fonte: Autor

6 A DINÂMICA DO SISTEMA MASSA-MOLA: UMA ABORDAGEM QUALITATIVA PARA A FORMAÇÃO DOCENTE

Por fim, trazemos agora uma perspectiva de como o estudo qualitativo das Equações Diferenciais Ordinárias estabelece um campo significativo para ressignificar conteúdos da Educação Básica, distanciando o ensino da mera aplicação mecânica de algoritmos e o aproximando de uma matemática investigativa, integrada e com mais significado. Sob a perspectiva dos Registros de Representação Semiótica, a aprendizagem matemática torna-se mais significativa quando o estudante é capaz de relacionar diferentes representações de um mesmo objeto, atribuindo sentido aos conceitos por meio da articulação entre registros distintos (Duval; Moretti, 2012). Para ilustrar como a teoria dos sistemas dinâmicos dialoga diretamente com a álgebra escolar, analisamos o comportamento do movimento livre de uma massa presa a uma mola, modelado pela equação diferencial de segunda ordem:

$$m \frac{d^2 y}{dt^2} + c \frac{dy}{dt} + ky = 0$$

Onde m representa a massa, c a constante de amortecimento e k a constante elástica da mola.

Para efetuar a análise do sistema sob a ótica da Álgebra Linear, realizaremos uma pequena manipulação algébrica e uma mudança de variáveis $x_1 = y$ e $x_2 = \frac{dy}{dt}$, o que permite reescrever a equação diferencial de segunda ordem como um sistema de equações lineares de primeira ordem, como visto a seguir

$$\begin{aligned} m \frac{d^2 y}{dt^2} + c \frac{dy}{dt} + ky &= 0 \\ m \frac{d^2 y}{dt^2} &= -c \frac{dy}{dt} - ky \\ \frac{d^2 y}{dt^2} &= -\frac{c}{m} \frac{dy}{dt} - \frac{k}{m} y \end{aligned}$$

Realizando as mudanças de variáveis comentadas recaímos no seguinte sistema,

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} x_1 = x_2 \\ \frac{d}{dt} x_2 = -\frac{k}{m} x_1 - \frac{c}{m} x_2 \end{cases}$$

ou em sua forma matricial canônica que utilizamos:

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -k/m & -c/m \end{bmatrix} \vec{x}$$

A determinação da natureza do ponto crítico do sistema ocorre a partir do cálculo do polinômio característico da matriz de coeficientes $\mathbf{A}$, por meio do determinante $\det(\mathbf{A} - r\mathbf{I}) = 0$:

$$\det \begin{bmatrix} -r & 1 \\ -k/m & -c/m - r \end{bmatrix} = r^2 + \frac{c}{m}r + \frac{k}{m} = 0$$

A equação resultante é uma equação quadrática, cuja estrutura é idêntica àquela estudada nos anos finais do Ensino Fundamental e no Ensino Médio. Perceba que com base nos cinco casos mostrados, o comportamento das curvas está intimamente ligado a natureza de seus autovalores, que nada mais são, que as raízes do nosso polinômio característico do segundo grau. Logo, podemos definir os autovalores como:

$$r = \frac{-\frac{c}{m} \pm \sqrt{\Delta}}{2}$$

sendo o discriminante Δ igual a,

$$\Delta = \left(\frac{c}{m}\right)^2 - \frac{4k}{m}.$$

A partir do sinal desse discriminante Δ , emerge a beleza do estudo qualitativo. Tal interpretação ilustra o que (Duval; Moretti, 2012) denomina articulação entre registros de representação, uma vez que propriedades algébricas do polinômio característico são associadas a comportamentos geométricos observados no plano de fase e a fenômenos físicos do sistema massa-mola. Os casos que podem ser interpretados enquanto a natureza do discriminante podem ser observados a seguir:

1. **Sem Amortecimento:** Considerando $c = 0$ e $\frac{4k}{m} > 0$, consequentemente Δ será um número negativo e teremos autovalores imaginários puros. Podemos então ter um significado a mais do que apenas a “inexistência” de raízes reais, mas sim a presença de órbitas elípticas fechadas no plano de fase, representando um movimento oscilatório eterno e idealizado, onde uma possível interpretação para esse fenômeno seria que ao deslocar a massa da sua posição de repouso, ela oscilará para sempre dentro de uma vizinhança limitada, sem nunca tender para o infinito, o que seria instabilidade, mas também sem nunca retornar ao repouso na origem o que tratamos como estabilidade assintótica. Qualitativamente, o ponto crítico é classificado como um **centro** sendo então, classificado como estável.
2. **Subamortecimento:** Seja $c^2 < 4mk$, $-\frac{c}{m} < 0$ e $\frac{4k}{m} > 0$ acarreta em $\Delta < 0$. Os autovalores são complexos conjugados com parte real negativa. O futuro docente percebe que a presença da parte imaginária garante que o sistema continue oscilando passando por posições positivas e negativas, enquanto a parte real negativa atua como um fator de decaimento exponencial que amortece a amplitude a cada

ciclo, ou seja, toda e qualquer trajetória iniciada próxima à origem não apenas permanecerá próxima, mas tenderá ao ponto crítico a medida que o tempo tende ao infinito, modelando o declínio gradual das oscilações devido à resistência física. Geometricamente, o ponto crítico é um **ponto espiral estável e atrator**, considerado assintoticamente estável.

3. **Amortecimento Crítico:** Quando $c^2 = 4mk$, sendo $-\frac{c}{m} < 0$ e $\frac{4k}{m} > 0$, ocorre que $\Delta = 0$. Então, há uma raiz real dupla e negativa. No contexto escolar, a discussão clássica sobre o discriminante nulo indicar tangência da parábola expande-se: no sistema dinâmico, o $\Delta = 0$ representa o exato momento que o sistema retorna à posição de equilíbrio o mais rápido possível sem sofrer nenhuma oscilação, considerado o amortecimento perfeito para engenharia. O ponto crítico configura-se como um **nó estável e atrator** e é assintoticamente estável.
4. **Superamortecimento:** Sendo $c^2 > 4mk$, caracterizado por $-\frac{c}{m} < 0$, $\frac{4k}{m} > 0$, logo $\Delta > 0$, originando assim, dois autovalores reais, distintos e negativos. Isso faz com que as trajetórias sejam fortemente levadas na direção do autovetor associado antes de atingirem a origem. Ela não oscila, mas demora muito mais tempo para retornar à origem do que no amortecimento crítico, pois a força de atrito quase anula a força elástica da mola. No plano de fase, podemos observar que o ponto crítico é um **nó estável e atrator** e assintoticamente estável.

A resolução e análise desse exemplo desmistificam o questionamento comum de licenciandos sobre a utilidade do Cálculo e das EDOs para quem atuará na Educação Básica. Ao dominar a análise qualitativa permite ao professor abordar a equação quadrática não como um fim em si mesma, mas como uma ferramenta de previsão de fenômenos dinâmicos com enorme potencial para diversos campos da ciência, transcendendo a mera manipulação algébrica de variáveis. Além disso, ao utilizar tecnologias digitais como o GeoGebra para plotar os retratos de fase das espirais e dos nós, promove ao futuro docente mais recursos e representações para auxiliar na compreensão da transição dos coeficientes da equação quadrática, tornando sua futura prática pedagógica menos fragmentada, mais crítica e significativa.

7 CONSIDERAÇÕES FINAIS

O estudo qualitativo das Equações Diferenciais Ordinárias (EDOs), associado a conteúdos da Educação Básica, como equações, mais especificamente as equações quadráticas, estabelece uma importante possibilidade formativa para os professores de matemática, pois favorece uma compreensão mais ampla, investigativa e integrada dos conceitos matemáticos. Em vez de limitar o ensino à aplicação mecânica de fórmulas e algoritmos, essa abordagem permite compreender a matemática como uma linguagem para modelagem e interpretação de fenômenos, para análise de padrões e para representação de situações reais.

No ensino básico, as equações quadráticas geralmente são apresentadas por meio de técnicas operatórias, como fatoração, completamento de quadrados e aplicação da fórmula resolutiva da Equação Quadrática. Entretanto, uma abordagem qualitativa possibilita ampliar a compreensão dos estudantes ao explorar o significado geométrico e comportamental dessas equações. A análise do discriminante, por exemplo, permite discutir a natureza das raízes e relacionar algebricamente o comportamento da parábola com suas interseções no eixo x . Assim, o estudo que comumente tem sua ênfase algorítmica (processos de manipulação algébrica) são ampliados e passam a envolver interpretação gráfica, análise de variação e compreensão estrutural da função quadrática.

Nesse contexto, a formação do professor de matemática é enriquecida ao perceber que conceitos estudados nos níveis superiores, como estabilidade, comportamento assintótico e interpretação geométrica em EDOs, dialogam com ideias já presentes na Educação Básica. O estudo das raízes da equação quadrática, por exemplo, pode ser relacionado futuramente à análise dos autovalores de sistemas lineares de EDOs, em que o sinal e a natureza desses valores determinam o comportamento das soluções.

Ao estudar sistemas de EDOs, especialmente por meio da análise qualitativa, o futuro professor desenvolve uma compreensão mais profunda da matemática enquanto ciência das relações e dos comportamentos. Assim, conceitos como raízes reais distintas, raízes reais iguais e raízes complexas deixam de possuir apenas significado algébrico e significado geométrico limitado e passam a representar comportamentos dinâmicos observáveis geometricamente nos retratos de fase, determinando através da equação característica se o sistema apresenta oscilações, convergência ao equilíbrio ou instabilidade.

É comum encontrar muitos estudantes de licenciatura que muitas vezes se questionam, “Por que vou aprender EDO se não vou ensinar isso na escola?”, mas ao estudar a análise qualitativa de soluções o professor em formação passa a compreender que muitos conteúdos escolares possuem desdobramentos teóricos mais amplos, o que favorece uma prática pedagógica menos fragmentada e mais significativa. Note que, essa articulação entre conteúdos da Educação Básica e conteúdos do Ensino Superior contribui para uma

formação docente mais integrada.

Outro aspecto relevante refere-se à modelagem matemática e à relação entre matemática e fenômenos reais. Tanto as equações quadráticas, quanto os sistemas de EDOs podem ser associados a situações concretas. Enquanto funções quadráticas aparecem em problemas de lançamento de projéteis, áreas máximas e trajetórias parabólicas, as EDOs modelam fenômenos como crescimento populacional, circuitos elétricos, movimento de corpos, sistemas mecânicos amortecidos, dentre outras aplicações. Essa perspectiva contribui para que o futuro professor compreenda a matemática como instrumento de interpretação da realidade, fortalecendo práticas de ensino contextualizadas e investigativas.

Além disso, o estudo qualitativo favorece a integração entre diferentes áreas da matemática, como Álgebra, Geometria, Cálculo e Álgebra Linear. No caso das EDOs lineares, a análise dos autovalores conecta diretamente o estudo de matrizes e determinantes ao comportamento geométrico das soluções e a noção do campo de vetores que tangenciam a curva, fazem a conexão direta com o cálculo. Assim, o licenciando desenvolve uma visão menos compartimentalizada da matemática, percebendo relações entre conteúdos que frequentemente são ensinados de maneira isolada.

O uso de tecnologias digitais também se destaca nesse processo formativo. Softwares como o GeoGebra, que foi utilizado para o desenvolvimento de todas as curvas desse trabalho permite visualizar gráficos, campos de direção e retratos de fase, possibilitando ao futuro professor explorar diferentes representações matemáticas e construir abordagens pedagógicas mais dinâmicas. No estudo das equações quadráticas, por exemplo, as ferramentas computacionais permitem analisar dinamicamente a influência dos coeficientes sobre a parábola, já nas EDOs, possibilitam observar trajetórias e seus comportamentos assintóticos.

Dessa forma, o estudo qualitativo das equações diferenciais, articulado aos conteúdos da Educação Básica, contribui significativamente para a formação de professores de matemática ao promover compreensão conceitual, pensamento investigativo, interpretação geométrica, integração entre conteúdos e aproximação entre matemática e realidade. Mais do que resolver equações, essa abordagem possibilita compreender comportamentos, interpretar fenômenos e construir significados matemáticos, aspectos fundamentais para uma prática docente crítica, reflexiva e significativa.

Vale destacar que a escolha do tema deste TCC foi feita pensando em criar uma base sólida para dar continuidade aos estudos na pós-graduação. Assim, como propostas para trabalhos futuros, a ideia é expandir esse horizonte analítico e tecnológico para além dos sistemas lineares. O primeiro objetivo será incorporar as funções de Lyapunov como uma ferramenta geométrica e analítica para avaliar a estabilidade global de pontos críticos. Além disso, pretendo me aprofundar no estudo de sistemas não lineares e bifurcações usando modelos clássicos, como o de predador-presa (Lotka-Volterra) e o epidêmico (SIR), para investigar como pequenas alterações nos parâmetros podem gerar mudanças

qualitativas drásticas no comportamento geral das soluções.

REFERÊNCIAS

- ANTON, Howard; RORRES, Chris. **Álgebra Linear com Aplicações**. 10. ed. Porto Alegre: Bookman, 2012. Tradução técnica de Claus Ivo Doering.
- BOYCE, William E.; DIPRIMA, Richard C. **Equações Diferenciais Elementares e Problemas de Valores de Contorno**. 8. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2006. Tradução de Valéria de Magalhães Lorio.
- BOYCE, William E.; DIPRIMA, Richard C. **Equações Diferenciais Elementares e Problemas de Valores de Contorno**. 10. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2015. Tradução de Valéria de Magalhães Lorio.
- BOYER, Carl B. **História da Matemática**. 3. ed. São Paulo: Edgard Blücher, 2012.
- D'AMBROSIO, Ubiratan. Euler, um Matemático Multifacetado. **Revista Brasileira de História da Matemática**, v. 9, n. 17, p. 13–31, 2009. DOI: 10.47976/RBHM2009v9n17 13–31. Disponível em: <https://rbhm.org.br/index.php/RBHM/article/view/167>.
- DUVAL, Raymond; MORETTI, Méricles. Registros de representação semiótica e funcionamento cognitivo do pensamento. **Revemat: Revista Eletrônica de Educação Matemática**, v. 7, n. 2, p. 266–297, 2012. DOI: 10.5007/1981-1322.2012v7n2p266.
- EVES, Howard. **Introdução à História da Matemática**. Campinas: Editora da Unicamp, 2011.
- KREYSZIG, Erwin. **Matemática Superior para Engenharia**. 9. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2009. v. 1.
- ROQUE, Tatiana. **História da Matemática: uma visão crítica, desfazendo mitos e lendas**. Rio de Janeiro: Zahar, 2012.
- SANTOS SILVA, Joab dos. **Álgebra Linear**. 1. ed. Jundiaí: Paco Editorial, 2021.
- STEWART, Ian. **Em Busca do Infinito: uma história da matemática dos primeiros números à teoria do caos**. Rio de Janeiro: Zahar, 2014.
- STROGATZ, Stephen H. **Nonlinear Dynamics and Chaos: With Applications to Physics, Biology, Chemistry, and Engineering**. 2. ed. Boca Raton: CRC Press, 2018.

	INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA DA PARAÍBA
	Campus Campina Grande - Código INEP: 25137409
	R. Tranquilino Coelho Lemos, 671, Dinamérica, CEP 58432-300, Campina Grande (PB)
	CNPJ: 10.783.898/0003-37 - Telefone: (83) 2102.6200

Documento Digitalizado Ostensivo (Público)

TCC

Assunto:	TCC
Assinado por:	Manoel Macedo
Tipo do Documento:	Dissertação
Situação:	Finalizado
Nível de Acesso:	Ostensivo (Público)
Tipo do Conferência:	Cópia Simples

Documento assinado eletronicamente por:

- Manoel Vitor de Farias Macedo, DISCENTE (202211230008) DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA - CAMPINA GRANDE, em 09/07/2026 17:22:57.

Este documento foi armazenado no SUAP em 09/07/2026. Para comprovar sua integridade, faça a leitura do QRCode ao lado ou acesse <https://suap.ifpb.edu.br/verificar-documento-externo/> e forneça os dados abaixo:

Código Verificador: 1908582
Código de Autenticação: 6d7c88a2a0

