INSTITUTO FEDERAL DA PARAÍBA PRÓ REITORIA DE GRADUAÇÃO CAMPUS GUARABIRA CURSO SUPERIOR DE TECNOLOGIA EM GESTÃO COMERCIAL

LUCIANO DOS SANTOS ALVES

TAXA INTERNA DE RETORNO: UMA DEMONSTRAÇÃO MATEMÁTICA E SUA APLICAÇÃO EM MATEMÁTICA FINANCEIRA VIA INTERPOLAÇÃO POLINOMIAL

GUARABIRA - PB

2019

LUCIANO DOS SANTOS ALVES

TAXA INTERNA DE RETORNO: UMA DEMONSTRAÇÃO MATEMÁTICA E SUA APLICAÇÃO EM MATEMÁTICA FINANCEIRA VIA INTERPOLAÇÃO POLINOMIAL

Trabalho de conclusão de curso apresentado à Coordenação do Curso Superior de Tecnologia em Gestão Comercial do Instituto Federal da Paraíba – Campus Guarabira, como requisito obrigatório para a obtenção do título de tecnólogo em Gestão Comercial.

Orientador: Prof^{a} Ma. Nádia Pinheiro Nóbrega

GUARABIRA - PB

2019

FILHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA BIBLIOTECA DO IFPB - GUARABIRA

A474t Alves, Luciano dos Santos

Taxa Interna de Retorno: uma demonstração matemática e sua aplicação em matemática financeira via interpolação polinomial / Luciano dos Santos Alves. – Guarabira, 2019.

28 f.: il.;color.

Trabalho de Conclusão de Curso(Tecnólogo em Gestão Comercial) – Instituto Federal da Paraíba, Campus Guarabira, 2019.

“Orientação: Prof. MSc. Nádia Pinheiro Nóbrega.”

Referências:

1. Matemática Financeira. 2. Taxa Interna de Retorno. 3. Interpolação Polinomial. I.Título

CDU 51.336

TAXA INTERNA DE RETORNO: UMA DEMONSTRAÇÃO MATEMÁTICA E SUA APLICAÇÃO EM MATEMÁTICA FINANCEIRA VIA INTERPOLAÇÃO POLINOMIAL

Trabalho de conclusão de curso apresentado à Coordenação do Curso Superior de Tecnologia em Gestão Comercial do Instituto Federal da Paraíba – Campus Guarabira, como requisito obrigatório para a obtenção do título de tecnólogo em Gestão Comercial.

Defendida em: __09__ de __Dezembro__ de 2019.

Profª Ma. Nádia Pinheiro Nóbrega
Orientador

Profº Me. Jose Augusto Lopes Viana - IFPB
Avaliador Interno

Profº. Dr. Thiago Andrade Fernandes - IFPB
Avaliador Externo

GUARABIRA - PB
2019

Dedico este trabalho à minha mãe que sempre esteve ao meu lado e contribuiu para todo o meu aprendizado.

Resumo

A Taxa Interna de Retorno é uma taxa de juros que aplicada a um fluxo de caixa que faz com que o valor da despesa, quando trazido ao valor atual líquido, seja igual ao valor do retorno do investimento quando esse for trazido ao valor atual líquido. Tendo em vista que os autores em Matemática Financeira direcionam o leitor para o uso de uma Calculadora Financeira para resolução de problemas onde se deseja obter da Taxa Interna de Retorno ou, quando muito, apenas mencionam um método algébrico para sua obtenção, embora não demonstrem como de fato esses cálculos se processam, observou-se uma necessidade de se investigar os cálculos algébricos implícitos na obtenção da Taxa Interna de Retorno. O método de aproximação sugerido na literatura para a obtenção de solução de tal resultado é a Interpolação Polinomial em sua forma linear e, por meio dela, se justificam os cálculos necessários para se determinar a Taxa Interna de Retorno, sem o uso da calculadora financeira. Realizou-se, então, uma pesquisa qualitativa, com finalidade exploratória e descritiva onde se buscou analisar a obtenção da Taxa Interna de Retorno de forma algébrica com auxílio de softwares, trazendo uma resposta mais consistente em relação àquela fornecida por uma calculadora financeira e posteriormente foram analisados via Interpolação Polinomial os problemas de Matemática Financeira onde a Taxa Interna de Retorno é solicitada. Constatou-se que a resolução algébrica dos problemas, embora trabalhosa, traz um embasamento indispensável para que o gestor ou administrador tome suas decisões financeiras que envolvam a Taxa Interna de Retorno com maior clareza e precisão.

Palavras-chave: Matemática Financeira, Taxa Interna de Retorno, Interpolação Polinomial.

Abstract

The Internal Rate of Return is an interest rate that is applied to a cash flow that makes the amount of expense, when brought to net present value, equal the value of return on investment when it is brought to net present value. Given that the authors in Financial Mathematics direct the reader to use a Financial Calculator to solve problems where they want to get the Internal Rate of Return or, at most, just mention an algebraic method for obtaining them, although they do not show how In fact these calculations are processed, there was a need to investigate the algebraic calculations implicit in obtaining the Internal Rate of Return. The approximation method suggested in the literature for the solution of this result is the Polynomial Interpolation in its linear form and, through it, the calculations necessary to determine the Internal Rate of Return are justified, without using the financial calculator. Then, a qualitative, exploratory and descriptive research was conducted to analyze the obtaining of the Internal Rate of Return in algebraic form with the aid of software, bringing a more consistent answer compared to that provided by a financial calculator and subsequently Analyzed via Polynomial Interpolation the problems of Financial Mathematics where the Internal Rate of Return is requested. It was found that algebraic resolution of the problems, although laborious, provides an indispensable basis for the manager or administrator to make their financial decisions involving the Internal Rate of Return more clearly and accurately.

Keywords: Financial Mathematics, Internal Rate of Return, Polynomial Interpolation.

Sumário

1 INTRODUÇÃO

Em Neto (2016) o autor apresenta resoluções a fim de se obter a Taxa Interna de Retorno somente de polinômios de grau até 4 que, no caso, possuem fórmula padrão de resolução, mas não menciona como se obter tal taxa para polinômios com índice maior ou igual que 5.

Encontramos em Balarine (2003) que a Interpolação Linear seria uma forma possível para obtenção da Taxa Interna de Retorno, embora seja bastante trabalhosa sua obtenção exata, por isso na maioria das vezes consideramos um valor aproximado para a mesma.

Ainda sobre a interpolação linear, apontam Ruggiero e Lopes (1996) que ela é um método matemático que nos permite construir um agrupamento de dados a partir de um outro agrupamento de dados preexistentes.

Para o estudo do cálculo da Taxa Interna de Retorno vemos em Hazzan e Pompeo (2014) que para encontrarmos seu valor numérico é preciso resolver uma equação polinomial de grau n, porém nos casos onde n seja maior ou igual a 5, não há fórmula resolutiva por métodos clássicos, sendo necessário o uso da interpolação linear ou da calculadora financeira.

Alguns autores direcionam sua resolução para uma calculadora financeira, encontrando assim uma resposta simples, ou mencionam como método de obtenção a interpolação polinomial, porém sem estruturar uma devida análise de sua obtenção de forma algébrica.

Com isso, torna-se imprescindível o estudo do cálculo da Taxa Interna de Retorno utilizando a interpolação polinomial e observar como a função polinomial se comporta a fim de estar melhor capacitado para analisar a aplicabilidade da Taxa Interna de Retorno.

2 ASPECTOS TEÓRICOS

2.1 TAXA INTERNA DE RETORNO - IRR

O conhecimento da Taxa Interna de Retorno tem grande importância, tendo como exemplo o que encontramos em El−Tahir e El−Otaibi (2014), onde os autores mencionam que a Taxa Interna de Retorno de um investimento ou projeto é a taxa de desconto que faz com que o valor presente de todos os fluxos de caixa a partir de um determinado investimento seja igual ao investimento inicial.

Pereira e Almeida (2008) também cita que a Taxa Interna de Retorno é usada como método de análise de investimentos e acrescenta que se a Taxa Interna de Retorno for maior do que a taxa mínima de atratividade o investimento será considerado atraente.

Apesar de ser uma ferramenta útil, devemos considerar o que nos aponta Brown (2006) que apesar de mencionar sua validade também nos informa que a Taxa Interna de Retorno possui certas limitações que exigem uma melhor compreensão como, por exemplo, os problemas relacionados ao reinvestimento.

Também vemos uma limitação quando em Oliveira (1979), o autor nos alerta para o fato de que a Taxa Interna de Retorno não deve ser aplicada em problemas de fluxo de caixa que apresentem mais de uma inversão.

Como a Taxa Interna de Retorno corresponde ao zero de um polinômio, ela depende da existência de raiz para o dado polinômio, conforme nos aponta Faro (1976) que ainda nos diz que se a soma algébrica dos fluxos de caixa for positiva, é correto o conceito de Taxa Interna de Retorno e que além disso se faz necessário calcular o seu respectivo valor numérico, pois o polinômio deve ter uma raíz real.

Em Barbieri, Álvares e Machline (2007) vemos que a Taxa Interna de Retorno apresenta alguns pontos controversos e sujeitos a interpretações. Mas, apesar disso, nos casos onde ocorrem fluxos convencionais, ou seja, onde há um desembolso inicial e um recebimento final, a Taxa Interna de Retorno representaria de fato o retorno sobre o capital investido.

Segundo nos mostra (NETO, 2016), a Taxa Interna de Retorno possui inúmeras aplicações práticas e, com isso, ela é um dos mais importantes aspectos estudados na matemática financeira, pois ela não calcula tão somente o retorno, mas também o custo.

2.2 INTERPOLAÇÃO POLINOMIAL

O método de Interpolação de polinômios é bastante antigo conforme citado em Mazzini e Schettini (2009) onde os autores remontam as origens da Interpolação Polinomial situando-a ainda na antiga região da Mesopotâmia.

Conforme apontam Ruggiero e Lopes (1996), a Interpolação polinomial é um método matemático que nos permite construir um agrupamento de dados a partir de um outro agrupamento de dados preexistentes.

A importância desses polinômios algébricos reside no fato de eles uniformemente se aproximarem das funções contínuas segundo Burden e Faires (2013) e, desse modo, dada uma função definida e contínua em um intervalo fechado e limitado, existirá um polinômio tão próximo dessa função quanto se deseje.

Vemos em Souza et al. (2011) que os interpoladores possuem características próprias que os distinguem, podendo variar quanto à transição, quanto ao seu caráter e quanto à exatidão.

A Interpolação Polinomial é citada em Anton, Bivens e Davis (2014) como um método para resolução de equações de quinto grau ou maior exatamente por não haver fórmula resolutiva geral nesses casos.

3 METODOLOGIA

A presente pesquisa possui uma abordagem qualitativa, exploratória e descritiva onde se busca analisar a obtenção da Taxa Interna de Retorno de forma algébrica através da aplicação da Interpolação Polinomial em problemas presentes em textos de Matemática Financeira.

Para o comparativo das soluções obtidas será utilizada a calculadora Financeira, cuja solução serve como referencial para a definição de valores da taxa de juros i para os quais se obtém um valor negativo e outro positivo, necessários para a inicialização da Interpolação Polinomial.

A função também foi analisada de forma algébrica, na tentativa de se obter uma solução exata. Sendo utilizado um recurso computacional na ocorrência de valores elevados, pois a obtenção de uma simplificação para a equação ficou inviabilizada.

Para atingir esse fim, fez-se uma pesquisa teórica bibliográfica em artigos, livros, periódicos, dissertações, teses, trabalhos de conclusão de cursos, com enfoque em matemática pura e em matemática financeira que relacionassem o método de Interpolação Polinomial com a função abordada na presente pesquisa, cuja raiz, quando existir, é a taxa interna de retorno.

4 PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS

4.1 CONTEXTUALIZAÇÃO E DEFINIÇÃO

A Taxa Interna de Retorno é uma taxa de juros que, num mesmo período de tempo, iguala fluxos de entrada e de saída de caixa. De outra forma, a Taxa Interna de Retorno pode ser considerada uma taxa de desconto que torna o Valor Presente Líquido (VLP) igual a 0 (zero).

A Taxa Interna de Retorno tem apresentado várias aplicações e, com isso, tem demonstrado ser um dos mais importantes aparatos utilizados em matemática financeira e administração financeira. Sendo utilizada para calcular tanto a rentabilidade de um investimento quanto seu custo.

Como para a análise de investimentos de capital só interessam as taxas positivas somente essas taxas foram consideradas em nosso estudo. Além disso, consideramos como data de referência, a data de início do investimento ou aplicação, a qual chamamos de data 0 (zero).

Assim, a aceitação ou não de determinado investimento será baseada no comparativo entre Taxa Interna de Retorno e a Taxa de Mínima de Atratividade (TMA), requerida pela empresa para seus investimentos.

Outro ponto que deve ser levado em consideração é que a Taxa Interna de Retorno, assim como se apresenta, só tem sentido se os fluxos de caixa forem reaplicados no decorrer do período da operação, ou seja, para que a Taxa Interna de Retorno seja verdadeira, faz-se necessário que todos os fluxos de caixa intermediários sejam reinvestidos até o final do prazo da operação.

4.2 FORMULAÇÃO MATEMÁTICA DA TAXA INTERNA DE RETORNO

Iremos a agora analisar a fórmula para o cálculo da Taxa Interna de Retorno e a definição de cada variável presente na mesma. A Taxa Interna de Retorno é representada pela fórmula geral:

$$FC_0 = \frac{FC_1}{(1+i)^1} + \frac{FC_2}{(1+i)^2} + \frac{FC_3}{(1+i)^3} + ... + \frac{FC_n}{(1+i)^n} \tag{1}$$

Que também pode ser expressa como:

$$FC_0 = \sum_{j=1}^{n} \frac{FC_j}{(1+i)^j} \tag{2}$$

Onde:

$FC_0 =$ É o valor do Fluxo de Caixa no início do investimento ou momento 0 (zero).

$FC_j =$ É o valor do Fluxo de Caixa de entrada ou saída em cada período de tempo.

$i =$ É a Taxa Interna de Retorno.

Vale ressaltar que, conforme dito anteriormente, essa taxa torna o Valor Presente Líquido igual a 0 (zero), então temos:

$$-FC_0 + \frac{FC_1}{(1+i)^1} + \frac{FC_2}{(1+i)^2} + \frac{FC_3}{(1+i)^3} + ... + \frac{FC_n}{(1+i)^n} = 0 \tag{3}$$

Com isso, verificamos que, para encontrar a Taxa Interna de Retorno, é preciso resolver-se um polinômio de grau n definido em (3), denominado de $P(i)$. (HAZZAN; POMPEO, 2014)

$$P(i) = -FC_0 + \frac{FC_1}{(1+i)^1} + \frac{FC_2}{(1+i)^2} + \frac{FC_3}{(1+i)^3} + \ldots + \frac{FC_n}{(1+i)^n} \tag{4}$$

Em Hazzan e Pompeo (2014), são estabelecidas propriedades para a função $P(i)$ necessárias para que seja possível realizar a interpolação linear para encontrar uma solução i^* tal que $P(i^*) = 0$, onde o processo de aplicação do método de interpolação linear pode ser repetido até de obter uma boa aproximação da solução para a taxa interna de retorno i^*.

É importante destacar ainda que o polinômio (4) admite exatamente a existência de n raízes complexas, com $n \geq 1$. (FARO, 1976) (ALVES, 2015)

Propriedades do Polinômio $P(i)$:

Monotonia de $P(i)$: $P(i)$ é uma função estritamente decrescente, ou seja, é necessário provar que se $i_1 > i_2$ então $P(i_1) < P(i_2)$.

Primeiramente, é feita a seguir a demostração pelo Princípio de Indução Finita de que se $i_1 > i_2 > 0$ então $i_1^n > i_2^n$, $n \in \mathbb{N}$. (SANTOS, 2007)

$n = 1$: É verdadeira pela hipótese $i_1 > i_2$.

$i_1^{k+1} > i_2^{k+1}$, $k \in \mathbb{N}$: A Hipótese de Indução é que a afirmação é verdadeira para $n = k$, ou seja, $i_1^k > i_2^k$. Como $i_1 > 0$, multiplicando ambos os membros da desigualdade da hipótese de indução por i_1 tem-se:

$$i_1^k \cdot i_1 > i_2^k \cdot i_1.$$

Usando a hipótese inicial da afirmação, $i_1 > i_2$, tem-se que:

$$i_1^{k+1} > i_2^k \cdot i_1 > i_2^k \cdot i_2 \Rightarrow i_1^{k+1} > i_2^{k+1}.$$

Se no lugar de i_1 e de i_2 estiverem os termos $i_1 + 1$ e $i_2 + 1$ a desigualdade verificada acima pelo Princípio de Indução ainda é válido pois,

$$i_1 > i_2 \Rightarrow i_1 + 1 > i_2 + 1 > 0 \Rightarrow (i_1+1)^n > (i_2+1)^n$$

Assim, como $(i_1+1)^n > (i_2+1)^n$ tem-se que $\frac{1}{(i_1+1)^n} < \frac{1}{(i_2+1)^n}$. E, para cada parcela do polinômio $P(i)$ em (4):

$$\frac{FC_1}{(i_1+1)} < \frac{FC_1}{(i_2+1)}, \; \frac{FC_2}{(i_1+1)^2} < \frac{FC_2}{(i_2+1)^2}, \; \frac{FC_3}{(i_1+1)^3} < \frac{FC_3}{(i_2+1)^3}, \; \ldots, \; \frac{FC_n}{(i_1+1)^n} < \frac{FC_n}{(i_2+1)^n} \tag{5}$$

Somando, membro à membro, os termos das desigualdades em (5) obtém-se:

$$\frac{FC_1}{(i_1+1)}+\frac{FC_2}{(i_1+1)^2}+\ldots+\frac{FC_n}{(i_1+1)^n}<\frac{FC_1}{(i_2+1)}+\frac{FC_2}{(i_2+1)^2}+\ldots+\frac{FC_n}{(i_2+1)^n} \quad (6)$$

Subtraindo-se em ambos os membros de (6) o termo $-FC_0$ tem-se:

$$\sum_{j=1}^{n}\frac{FC_j}{(i_1+1)^j}-FC_0<\sum_{j=1}^{n}\frac{FC_j}{(i_2+1)^j}-FC_0 \quad (7)$$

O lado esquerdo da desigualdade (7) é igual à $P(i_1)$ e o lado direito igual à $P(i_2)$. Conclui-se, portanto, que a função $P(i)$ é estritamente decrescente ($P(i_1)<P(i_2)$).

Limite no Infinito de $P(i)$: Deve-se provar que

$$\lim_{i\to+\infty}\frac{FC_k}{(1+i)^k}=0 \quad (8)$$

Observa-se que o termo $FC_k>0$ é constante em relação ao limite. Assim,

$$\lim_{i\to+\infty}\frac{FC_k}{(1+i)^k}=FC_k\cdot\lim_{i\to+\infty}\frac{1}{(1+i)^k}$$

De fato, deve-se provar que $\forall\varepsilon>0$, $\exists\delta>0$, tal que $i\in A$, $i+1>\delta\Rightarrow\left|\frac{1}{(1+i)^k}-0\right|<\varepsilon$, onde $A=\mathbb{R}_+^*$.

Se for possível exibir $\delta>0$ tal que $i>\delta$. Então estará provado que o limite na afirmação (8) é verdadeiro como $i>0$, pela monotonicidade da adição $1+i>1$, e além disso, $(1+i)^k>1$. (LIMA, 2009)

$$\left|\frac{1}{(1+i)^k}-0\right|=\left|\frac{1}{(1+i)^k}\right|=\frac{1}{|(1+i)^k|}=\frac{1}{(1+i)^k}$$

Assim, $\frac{1}{(1+i)^k}<\varepsilon\Rightarrow(1+i)^k>\frac{1}{\varepsilon}\Rightarrow\sqrt[k]{(1+i)^k}>\sqrt[k]{\frac{1}{\varepsilon}}$.

Quando k é par ocorre que $\sqrt[k]{(1+i)^k}=|i+1|$. Mas como $1+i>0$, tem-se $|i+1|=1+i$. Portanto, $1+i>\frac{1}{\sqrt[k]{\varepsilon}}\Rightarrow i>\frac{1}{\sqrt[k]{\varepsilon}}-1$.

E considerando que $\delta=\frac{1}{\sqrt[k]{\varepsilon}}-1$, tem-se que $i>\delta$, provando que o limite é verdadeiro.

Como o limite da soma é igual a soma dos limites, desde que o limite das funções em cada parcela exista. (LIMA, 2009)

$$\lim_{i\to+\infty}P(i)=\lim_{i\to+\infty}\left[\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{FC_k}{(1+i)^k}\right)-FC_0\right]=\left[\sum_{k=1}^{n}\left(\lim_{i\to+\infty}\frac{FC_k}{(1+i)^k}\right)\right]-FC_0=-FC_0$$

Portanto, $\lim_{i\to+\infty}P(i)=FC_0$.

Interseção do Gráfico de $P(i)$ com o eixo das ordenadas: Como $P(i) = -FC_0 + \dfrac{FC_1}{(i+1)^1} + \dfrac{FC_2}{(i+1)^2} + \ldots + \dfrac{FC_n}{(i+1)^n}$.

Para $i = 0$ tem-se:

$$P(0) = -FC_0 + \frac{FC_1}{1} + \frac{FC_2}{1^2} + \ldots + \frac{FC_n}{1^n} \Rightarrow P(0) = -FC_0 + FC_1 + FC_2 + \ldots + FC_n$$

Supondo que $\sum_{k=1}^{n} FC_k > FC_0$ tem-se que:

$$\left[\sum_{k=1}^{n} FC_k\right] - FC_0 > FC_0 - FC_0 \Rightarrow \left[\sum_{k=1}^{n} FC_k\right] - FC_0 > 0$$

Portado, $P(0) > 0$. Graficamente, significa que a função $P(i)$ é uma função que intercepta o eixo vertical (das ordenadas) em um ponto que está acima da origem. A reta $y = -FC_0$ é uma assíntota horizontal para o gráfico da função $P(i)$, isto é, à medida que o valor de $i > 0$ cresce infinitamente, a distância entre o gráfico de $P(i)$ e a reta $y = -FC_0$ se aproxima de zero. O gráfico da função $P(i)$ se aproxima assintoticamente da reta $y = -FC_0$. (THOMAS; WEIR; HASS, 2012)

Continuidade de $P(i)$: A função (4) é uma função contínua de i, pois trata-se de uma função racional, para $i > 0$.

Para provar a continuidade da função $P(i) = -FC_0 + \sum_{k=1}^{n} \dfrac{FC_k}{(1+i)^k}$ quando $i \to i_0$, $i > 0$ e $i_0 > 0$ é preciso mostrar apenas que $\lim_{i \to i_0} P(i) = P(i_0)$.

Uma função $P(i)$ é dita contínua no ponto $i_0 > 0$ quando $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$ tal que $|i - i_0| < \delta \Rightarrow |P(i) - P(i_0)| < \varepsilon$.

Ao provar que uma parcela de $P(i)$ é contínua, quando $i \to i_0$ tem-se que a soma finita de funções contínuas é também contínua pelo de acordo com o Teorema 5.2.2 de Bartle e Sherbert (2011, p. 130).

$$\lim_{i \to i_0} p_k(i) = \lim_{i \to i_0} \frac{FC_k}{(1+i)^k} = FC_k \cdot \lim_{i \to i_0} \frac{FC_k}{(1+i)^k}$$

A abordagem para provar a continuidade da parcela $p_k(i) = \dfrac{1}{(1+i)^k}$ quando $i \to i_0$ é utilizar a que a composta de funções contínuas também é contínua de acordo com Teorema 5.2.7 de Bartle e Sherbert (2011, p. 132).

A demonstração da continuidade de $p_k(i)$ para $p_k(i_0)$ quando $i \to i_0$ será dividida em três fases.

Fase 1: Continuidade da função $f(i) = 1 + i$**,** $i > 0$

A prova, por meio da definição formal de continuidade de funções de uma variável real é a que será usada nessa fase. $\forall\varepsilon > 0$, $\exists\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ tal que $|i - i_0| < \delta \Rightarrow |f(i) - f(i_0)| < \varepsilon$.

De fato, $|f(i) - f(i_0)| = |(1+i) - (1+i_0)| = |i - i_0| < \varepsilon = \delta$, pois $\varepsilon > 0$ é dado.

Fase 2: Continuidade da função $g(i) = \dfrac{1}{i}$**,** $i > 0$

Definindo o conjunto $\widehat{I} := \{i \in \mathbb{R}\,|\, i > 0\} \subset \mathbb{R}$.

$$\left|\frac{1}{i} - \frac{1}{i_0}\right| = \left|\frac{-(i - i_0)}{i \cdot i_0}\right| \tag{9}$$

Sabe-se que $i_0 > 0$ e assim, $i_0 = |i_0|$ é um número real fixado. Defina $\delta := \min\left\{\frac{1}{2}|i_0|,\ \frac{1}{2}i_0^2\varepsilon\right\}$.
Assim, quando $\delta = \frac{1}{2}|i_0| = \frac{1}{2}i_0$ pois $i_0 > 0$ segue que: $|i - i_0| < \delta \Leftrightarrow i_0 - \delta < i < i_0 + \delta$.
E assim,

$$i_0 - \frac{1}{2}i_0 < i < i_0 + \frac{1}{2}i_0 \Rightarrow \frac{i_0}{2} < i < \frac{3i_0}{2} \tag{10}$$

Agora quando $\delta = \frac{1}{2}i_0^2\varepsilon$ tem-se que: $i_0 - \delta < i < i_0 + \delta \Rightarrow i_0 - \frac{1}{2}i_0^2\varepsilon < i < i_0 + \frac{1}{2}i_0^2\varepsilon$

$$\frac{2i_0 - i_0^2\varepsilon}{2} < i < \frac{2i_0 + i_0^2\varepsilon}{2}.$$

Observa-se ainda que da desigualdade (10) que: $0 < \frac{i_0}{2} < i \Rightarrow \frac{2}{i_0} > \frac{1}{i} \Rightarrow \frac{2}{|i_0|} > \frac{1}{|i|}$.
Assim,

$$\frac{1}{|i_0|\cdot|i|} = \frac{1}{|i_0|}\cdot\frac{1}{|i|} < \frac{1}{|i_0|}\cdot\frac{2}{|i_0|} = \frac{2}{|i_0|^2} = \frac{2}{(i_0)^2}.$$

Continuando com resolução da desigualdade em (9) segue que quando $\delta = \min\left\{\frac{1}{2}|i_0|,\ \frac{1}{2}i_0^2\varepsilon\right\} = \frac{1}{2}|i_0|$ ocorre a seguinte situação:

$$\left|\frac{-(i - i_0)}{i \cdot i_0}\right| = \frac{|-(i - i_0)|}{|i|\cdot|i_0|} < \frac{2}{(i_0)^2}\cdot|-(i - i_0)| < \frac{2}{(i_0)^2}\cdot\delta < \frac{2}{(i_0)^2}\cdot\frac{1}{2}i_0^2\varepsilon = \varepsilon$$

Agora se $\delta = \min\left\{\frac{1}{2}|i_0|,\ \frac{1}{2}i_0^2\varepsilon\right\} = \frac{1}{2}i_0^2\varepsilon$ tem-se a outra conclusão, ou seja,

$$\left|\frac{-(i - i_0)}{i \cdot i_0}\right| = \frac{|-(i - i_0)|}{|i|\cdot|i_0|} < \frac{2}{(i_0)^2}\cdot\delta = \frac{2}{(i_0)^2}\cdot\frac{i_0^2\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Fase 3: Continuidade da função $h(i) = i^k$**,** $i > 0$

Para mostrar a continuidade da função $h(i) = i^k$ é necessário provar a continuidade da função $r(i) = i$, com $i > 0$ em $i_0 > 0$.

De fato, dado $\varepsilon > 0$, $\exists \delta = \delta(\varepsilon, i_0) > 0$ tal que $|i - i_0| < \delta \Rightarrow |r(i) - r(i_0)| < \varepsilon$. Assim, como vale a desigualdade $|r(i) - r(i_0)| = |i - i_0| < \varepsilon$, tome $\delta = \varepsilon > 0$, concluindo a demonstração. E aplicando propriedade de limites obtém-se:

$$\lim_{i\to i_0} i^k = \lim_{i\to i_0} \underbrace{(i\cdot i\cdot i\cdot\ldots\cdot i)}_{n \text{ vezes}} = \underbrace{\left(\lim_{i\to i_0} i\right)\cdot\left(\lim_{i\to i_0} i\right)\cdot\ldots\cdot\left(\lim_{i\to i_0} i\right)}_{n \text{ vezes}} = \left(\lim_{i\to i_0} i\right)^k = i_0^k.$$

Aplicando a definição de composição de funções:

$$h\left(g\left(f(i)\right)\right) = \left[g\left(f(i)\right)\right]^k = \left(\frac{1}{f(i)}\right)^k = \left(\frac{1}{1+i}\right)^k = \frac{1}{(1+i)^k}.$$

Com demonstração da continuidade e da monotonia de $P(i)$ realizada para $i > 0$, tem-se também que $P(i)$ é contínua em um intervalo $I = [i_1, i_2] \subset \mathbb{R}$ e nesse caso, o Teorema da Localização de Raízes garante que se $P(i_2) < 0 < P(i_1)$ então existe $i^* \in (i_1, i_2)$ tal que $P(i^*) = 0$. (BARTLE; SHERBERT, 2011)

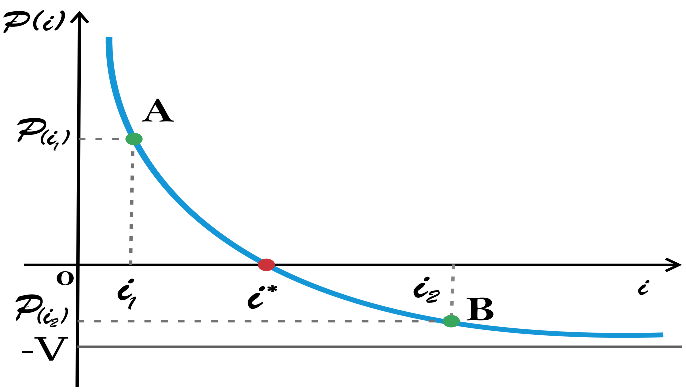

Figura 1 – Gráfio da função $P(i)$ em função da taxa de juros i, com assíntota horizontal em $P(0) = -V$.

4.3 INTERPOLAÇÃO POLINOMIAL: UMA ESTRATÉGIA PARA SOLUCIONAR A TAXA INTERNA DE RETORNO - IRR

A interpolação é um método algébrico utilizado para aproximar uma função $f(x)$ por uma função $g(x)$ que será escolhida dentro de uma classe de funções que sejam previamente definidas e que além disso satisfaçam determinadas propriedades. Com isso, a função $g(x)$ será usada como uma substituta da função $f(x)$. Essa função $g(x)$ é formada por um polinômio aproximador que é determinado ao se especificarem determinados pontos pelos quais o polinômio deve passar no plano.

Se tomarmos os pontos $(x_0, f(x_0))$, $(x_1, f(x_1))$, $\ldots$, $(x_n, f(x_n))$, teremos $(n+1)$ pontos. Para aproximarmos $f(x)$ por um polinômio $p_n(x)$, com grau menor ou igual a n, devemos ter:

$$f(x_k) = p_n(x_k), \quad k = 0, 1, 2, \ldots, n \tag{11}$$

Agora, devemos analisar se existe um polinômio que satisfaça essas condições (11) e, caso exista, se ele é único.

Admitindo que $p_n(x) = a_0 + a_1x_1 + a_2x_2 \ldots + a_nx_n$ Então, obtendo $p_n(x)$, teremos os coeficientes $a_0, a_1, \ldots, a_n$. Do exposto, podemos montar o sistema linear (12) seguinte.

$$\begin{cases} a_0 + a_1x_0 + a_2x_0^2 + \ldots + a_nx_0^n = f(x_0) \\ a_0 + a_1x_1 + a_2x_1^2 + \ldots + a_nx_1^n = f(x_1) \\ \vdots \\ a_0 + a_1x_n + a_2x_n^2 + \ldots + a_nx_n^n = f(x_n) \end{cases} \tag{12}$$

com $n+1$ equações e $n+1$ variáveis: $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$.

A matriz A dos coeficientes é:

$$\begin{pmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \cdots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^n \\ & & & \cdots & \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^n \end{pmatrix}$$

Tem-se que $\det(A) \neq 0$ desde que $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$ sejam pontos distintos. Nessas condições, o sistema linear (12) admite solução única. E com isso, demonstra-se que existe um único polinômio $p_n(x)$, de grau $\leq n$, tal que: $p_n(x_k) = f(x_k)$, $k = 0, 1, 2, \ldots, n$ desde que $x_k \neq x_j,\ j \neq k$.

x	-1	0	2
$f(x)$	4	1	-1

Temos que $p_2(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2$.

$$\begin{matrix} p_2(x_0) = f(x_0) \\ p_2(x_1) = f(x_1) \\ p_2(x_2) = f(x_2) \end{matrix} \Rightarrow \begin{cases} a_0 - a_1 + a_2 = 4 \\ a_0 = 1 \\ a_0 + 2a_1 + 4a_2 = -1 \end{cases}$$

Ao se resolver esse sistema linear, obtém-se $a_0 = 1, \quad a_1 = -\frac{7}{3}, \quad a_2 = \frac{2}{3}$. Assim, tem-se que $p_2(x) = 1 - \frac{7}{3}x + \frac{2}{3}x^2$ é o polinômio que interpolação $f(x)$ em $x_0 = -1$, $x_1 = 0$ e $x_2 = 2$.

4.4 FORMA SIMPLIFICADA BASEADA NA INTERPOLAÇÃO POLINOMIAL PARA A DETERMINAÇÃO DA TAXA INTERNA DE RETORNO

A forma mais simplificada é baseada em Hazzan e Pompeo (2014), que por meio de semelhança de triângulos e pela definição da tangente de ângulo pertencente a um vértice comum aos dois triângulos, expressa uma proporção que relaciona a taxa de juros que é solução do polinômio de grau 1, utilizado na Classe de polinômios de Interpolação Polinomial.

O método direcionou-se não para a determinação dos coeficientes do polinômio interpolador $p_1(x) = a_0 + a_1 x_1$, de modo encontrar os coeficientes a_0 e a_1 e sim em determinar direto a solução do mesmo. Uma alternativa não exclui a outra, uma vez que com os pontos A e B é determinada a equação de uma reta. A ênfase foi dada à necessidade maior de se determinar a raiz desse polinômio de grau 1, que é a taxa interna de retorno - IRR.

Na figura (2) é mostrado o gráfico desse polinômio de grau 1, uma reta, o qual surge do esboço do gráfico de $P(i)$ em (1).

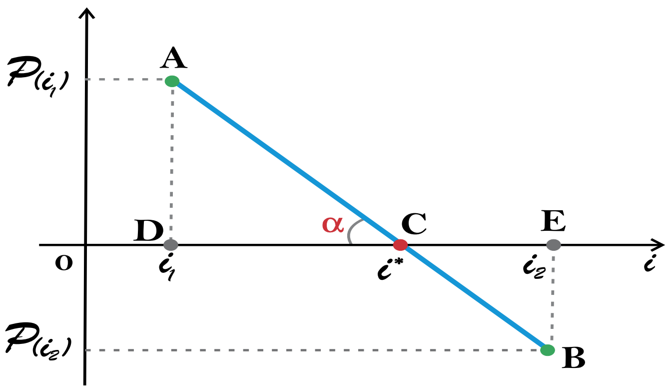

Figura 2 – Interpolação Linear de $P(i)$ para $P(i_2) < 0 < P(i_1)$.

Na figura (2) tem-se que os triângulos ACD e BCE são semelhantes e tem um ângulo oposto pelo vértice C igual ao ângulo α. Aplicando a definição da tangente de um ângulo por meio do quociente entre cateto oposto e cateto adjacente.

$$\operatorname{tg}\alpha = \left|\frac{\overline{AD}}{\overline{CD}}\right| \Rightarrow \operatorname{tg}\alpha = \frac{|\overline{AD}|}{|\overline{CD}|} \Rightarrow \operatorname{tg}\alpha = \frac{P(i_1)}{i^* - i_1} \quad \text{e} \quad \operatorname{tg}\alpha = \left|\frac{\overline{BE}}{\overline{CE}}\right| \Rightarrow \operatorname{tg}\alpha = \frac{|\overline{BE}|}{|\overline{CE}|} \Rightarrow \operatorname{tg}\alpha = \frac{P(i_2)}{i_2 - i^*} \tag{13}$$

Igualando as expressões das tangentes em (13) tem-se:

$$\frac{P(i_1)}{i^* - i_1} = \frac{P(i_2)}{i_2 - i^*} \tag{14}$$

Fazendo as simplificações na igualdade (14) obtém-se o valor para a taxa interna de retorno dada por:

$$i^* = \frac{P(i_1)i_2 + P(i_2)i_1}{P(i_2) + P(i_1)} \tag{15}$$

4.5 PROBLEMAS APLICADOS

Nos problemas a seguir, contidos em Neto (2016) e em Hazzan e Pompeo (2014) são discutidos as formas de determinação da Taxa Interna de Retorno, de modo algébrico exato feito manualmente (se for possível) e por meio da utilização do Máxima, um software que executa cálculos numéricos e simbólicos.

Problema 4.1. Para um empréstimo de $R\$$ $11.500,00$, um banco exige um pagamento de duas prestações mensais e consecutivas no valor de $R\$$ $6.000,00$ cada. Determine o curto mensal da operação financeira. (NETO, 2016)

Solução por Método Exato: O fluxo de caixa da figura , de acordo com Hazzan e Pompeo (2014) quando a situação financeira se trata de concessão de um empréstimo na data zero, e os pagamentos CF_1, CF_2 são efetuados na datas 1, 2, o valor do empréstimo E é definido como o valor atual e a taxa interna de retorno (IRR) é denominada de *custo do empréstimo*.

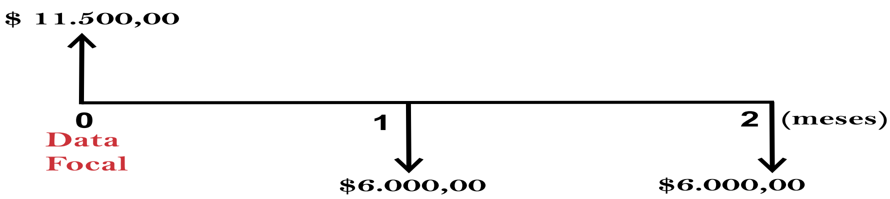

Figura 3 – Fluxo de caixa para determinação da Taxa Interna de Retorno na visão de um tomador de empréstimo.

Definindo $FC_0 = 11500$, $FC_1 = 6000$ e $FC_2 = 6000$. Substituindo esses valores numéricos na equação racional (1) tem-se:

$$11500 = \frac{6000}{(1+i)} + \frac{6000}{(1+i)^2} \tag{16}$$

Calculando o mínimo múltiplo comum dos denominadores e realizando as simplificações algébricas tem-se a equação do 2° grau dada por $115i^2 + 170i - 5 = 0$.

Calculando o discriminante obtém-se $\Delta = (170)^2 - 4(115)(-5) \Rightarrow \Delta = 31200$.

Usando a fórmula de Báskara para determinar os valores de $i = \dfrac{-85 \pm 10\sqrt{78}}{115}$ obtém-se duas raízes dadas por $i_1 = -1,5071$ e $i_2 = 0,02885$. A solução negativa não é considerada pois por hipótese a taxa interna de retorno deve ser positiva. E assim, na forma percentual, a taxa interna de retorno procurada é $i = 2,885\,\%$ ao mês.

Esse problema, em especial teve a solução obtida pelo método exato por ter $\Delta > 0$ e nesse caso, a equação polinomial tem duas raízes reais e distintas. Mas na situação de a equação polinomial ter $\Delta < 0$ não há raízes reais e nesse caso, o Método de aproximação, isto é, a Interpolação Polinomial, se faz necessário para determinar uma solução aproximada para a taxa interna de retorno.

Usando a Calculadora Financeira HP 12c Platinum, executando os comandos:

(1) Digite os valores 11500, 6000 e 6000 e aperte a tecla **CHS**, depois a tecla **g** e a tecla CF_0 na cor azul, realize essa operação para cada valor isoladamente.

(2) Aperte a tecla f, de cor laranja, e depois na tecla **IRR**, também de cor laranja.

A Taxa Interna de Retorno resultante da Calculadora Financeira é igual à $i^* = 2,885\ \%$.

Aplicando a Interpolação Linear

Com a aplicação de dois métodos, foi possível descobrir o valor da taxa interna de retorno - IRR $i^* = 2,88\,\%$ ao mês. Tal informação prévia é importante por eliminar as o processo de tentativa e erro na definição dos valores das taxas de juros para as quais os valores de $P(i)$ atenderão a hipótese do Teorema da Localização de Raízes de Bartle e Sherbert (2011, p. 137).

Considere os valores de $i_1 = 2,5\,\%$ e $i_2 = 3\%$ tem-se que os valores de $P(i_1)$ e $P(i_2)$ são dados, respectivamente, por $P(0,025) = 64,54$ e $P(0,03) = -19,18$.

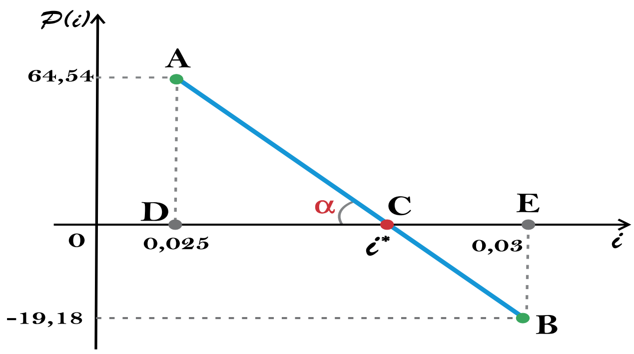

Figura 4 – Interpolação Linear de $P(i)$ no intervalo $[i_1,\ i_2]$

Na figura (2) tem-se por meio da igualdade das tangentes em (13) que

$$\frac{64,54}{i^* - 0,025} = \frac{|-19,18|}{0,03 - i^*} \Rightarrow i^* = 0,0289$$

. Conclui-se, portanto que os valores de $i_1 = 2,5\%$ e $i_2 = 3\%$ resultaram em uma boa aproximação da taxa interna de retorno pois nesse caso $i^* = 2,89\%$ ao mês em sua forma percentual.

O problema seguinte aborda o exercício **37** que faz parte da lista de exercícios propostos em Hazzan e Pompeo (2014, p. 162).

Problema 4.2. Um banco concede a uma empresa um empréstimo no valor de $R\$\ 600.000,00$ que deve ser pago em três prestações com vencimentos fixados nos próximos três anos consecutivos. As parcelas para os 1º, 2º e 3º anos são, respectivamente, iguais à $R\$\ 200.000,00$, $R\$\ 300.000,00$ e $R\$\ 400.000,00$. Qual é a taxa de juros desse empréstimo?

Solução por Método Exato: O fluxo de caixa na visão do tomador de empréstimo nesse problema é dado pela figura a (5) e tomando como data focal $n = 0$.

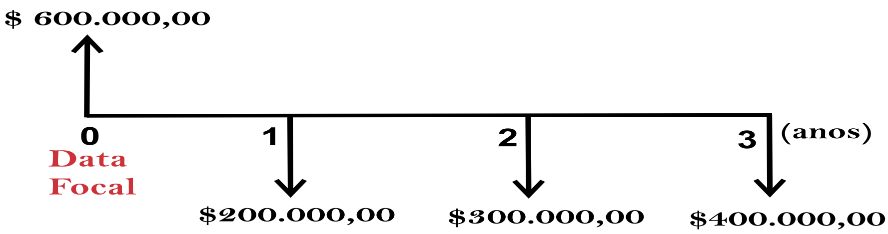

Figura 5 – Fluxo de caixa na visão de um tomador de empréstimo.

A equação de valor para esse problema é dada por:

$$\frac{2 \cdot 10^5}{(1+i)} + \frac{3 \cdot 10^5}{(1+i)^2} + \frac{4 \cdot 10^5}{(1+i)^3} = 6 \cdot 10^5 \tag{17}$$

A função polinomial, obtida de (17), é dada por:

$$P(i) = \frac{2}{(1+i)} + \frac{3}{(1+i)^2} + \frac{4}{(1+i)^3} - 6 \tag{18}$$

A forma algébrica simplificada da equação (17) é dada por:

$$-\frac{6 \cdot i^3 + 16 \cdot i^2 + 11 \cdot i - 3}{i^3 + 3 \cdot i^2 + 3 \cdot i + 1} = 0$$

As duas soluções complexas e uma real foram obtidas de (17) com o comando *solve(equação,x)*, ou seja,

$$\begin{aligned} x &= 0.2000094045172491 \cdot (0.8660254037844386 \cdot i - 0.5) + 0.8950196422567422 \\ &\quad \cdot (-0.8660254037844386 \cdot i - 0.5) - 0.8888888888888888, x \\ &= 0.8950196422567422 \cdot (0.8660254037844386 \cdot i - 0.5) + 0.2000094045172491 \\ &\quad \cdot (-0.8660254037844386 \cdot i - 0.5) - 0.8888888888888888, x \\ &= 0.2061401578851025 \end{aligned} \tag{19}$$

A Solução real é obtida pelo comando realroots(equação,$1e-10$), com $1e-1 = 10^{-10}$, isto é,

$$i^* = \frac{7082921893}{34359738368} \cong 0.2061401578851025$$

. Então a taxa interna de retorno, na forma percentual, é dada por $i^* = 20,61\,\%$ ao ano.

Usando a Calculadora Financeira HP 12c Platinum, executando os comandos:

(1) Digite o valor 600.000, aperte a tecla **CHS**, depois a tecla **g** e a tecla CF_0 na cor azul.

(2) Digite o valores 200.000, 300.000 e 400.000, aperte a tecla **g** e a tecla CF_j na cor azul, realize essa operação para cada valor isoladamente.

(3) Aperte a tecla f, de cor laranja, e depois na tecla **IRR**, também de cor laranja.

A Taxa Interna de Retorno resultante da Calculadora Financeira é igual à $i^* = 20,61$ % ao ano.

Para a aplicação da Interpolação por meio do wxMaxima, foram usados os comandos *subst(0.19, i, P(0.19))*, *ratsubst(0.19, i, P(0.19))*,*subst(0.22, i, P(0.22))*, *ratsubst(0.22, i, P(0.22))* de modo que $P(0.19) = \frac{291246}{1685159} = 0.1728299822153285$ e $P(0.22) = -\frac{32286}{226981} = -0.1422409805225984$, respectivamente.

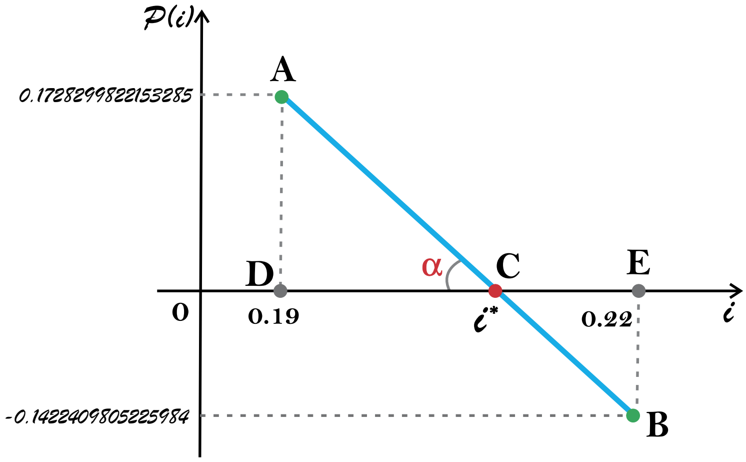

Figura 6 – Interpolação Linear de $P(i)$ no intervalo $[i_1,\ i_2]$

E usando novamente a semelhança entre os triângulos $\triangle ADC$ e $\triangle BCE$ e pela igualdade entre as tangentes do ângulo α e o seu oposto ao vértice C, tem-se que:

$$\frac{|P(0,19)|}{i^* - 0,19} = \frac{|P(0,22)|}{0,22 - i^*} \Rightarrow i^* = 0.2064562910571121$$

Na forma percentual, tem-se que a taxa interna de retorno é dada por: $i^* \cong 30,68\%$ ao ano.

Problema 4.3. Determine a Taxa Interna de Retorno - **IRR** para um projeto no qual é feito um investimento de $R\$70.000,00$, o que promove ao banco uma expectativa de benefícios de caixa os valores de $R\$\ 20.000,00$, $R\$\ 40.000,00$, $R\$\ 45.000,00$ e $R\$\ 30.000,00$ ao final dos quatros anos consecutivos seguintes, respectivamente. (NETO, 2016, p. 159)

Solução: Nesse problema observa-se que o investimento $FC_0 = 70.000$ e que $FC_0 < \sum_{k=1}^{4} FC_k$, onde $\sum_{k=1}^{4} FC_k = 135.000$

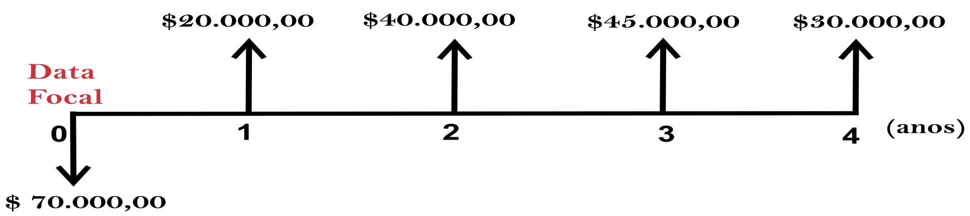

Figura 7 – Fluxo de caixa de um investimento convencional com quatro parcelas anuais consecutivas.

A equação de valor que está associado a esse fluxo de caixa é definida por:

$$\frac{2 \cdot 10^4}{(1+i)} + \frac{4 \cdot 10^4}{(1+i)^2} + \frac{4,5 \cdot 10^4}{(1+i)^3} + \frac{3 \cdot 10^4}{(1+i)^4} = 7 \cdot 10^4 \tag{20}$$

Colocando o número 10^4 em evidência, e dividindo ambos os membros da equação (20) por 10^4 tem-se:

$$\frac{2}{(1+i)} + \frac{4}{(1+i)^2} + \frac{9}{2 \cdot (1+i)^3} + \frac{3}{(1+i)^4} = 7 \tag{21}$$

O polinômio $P(i)$ associado à equação (21) é dado por:

$$P(i) = \frac{2}{(1+i)} + \frac{4}{(1+i)^2} + \frac{9}{2 \cdot (1+i)^3} + \frac{3}{(1+i)^4} - 7 \tag{22}$$

Para determinar, via resolução da equação $P(i) = 0$, uma solução direta e positiva é necessário o uso do software wxMáximam versão 19.11.0, que é um software gratuito com funcionalidades adequadas para resolver equações com expoentes de grau elevado. No wxMaxima, foram utilizados os comandos *ratsimp(equação)* para simplificar a expressão, o comando *solve(equação)* e *realroots(equação,*$1e-1$*)*, onde $1e-1 = 10^{-1}$ é o erro. (ANDRADE, 2015)

O wxMaxima fez uma simplificação na expressão (21):

$$\frac{4x^3+20x^2+37x+27}{2x^4+8x^3+12x^2+8x+2} = 7 \tag{23}$$

As soluções obtidas pelo wxMaxima com o comando *solve(equação)* são expressões complexas e o software apresentou limitação para gerar diretamente as soluções em sua forma simplificada. Mas utilizando o comando *float(solve(equação,x))* foi possível determinar as soluções na forma decimal de modo a identificar as duas raízes em $\mathbb{R}$ e as duas raízes complexas:

$$i_1 = -0.689912481447657\%i - 1.184083487000854$$

$$i_2 = 0.689912481447657\%i - 1.184083487000854$$

$$i_3 = -1.646428377445045,\ i_4 = 0.3003096371610393$$

Usando o comando *realroots(equação,*$1e-10$*)* foi possível obter as seguintes soluções reais:

$$i = -\frac{56570848291}{34359738368} \quad \text{e} \quad i = \frac{10318560563}{34359738368}.$$

A solução real positiva que atende as propriedades da obtenção da Taxa Interna de Retorno é dada em sua forma fracionária por $i = \dfrac{10318560563}{34359738368}$.

Usando a Calculadora Financeira HP 12c Platinum, executando os comandos:

(1) Digite o valor 70000, aperte a tecla **CHS**, depois a tecla **g** e a tecla CF_0 na cor azul.

(2) Digite o valor 20000, aperte a tecla **g** e a tecla CF_j na cor azul.

(3) Digite o valor 40000, aperte a tecla **g** e a tecla CF_j na cor azul.

(4) Digite o valor 45000, aperte a tecla **g** e a tecla CF_j na cor azul.

(5) Digite o valor 30000, aperte a tecla **g** e a tecla CF_j na cor azul.

(6) Aperte a tecla f, de cor laranja, e depois na tecla **IRR**, também de cor laranja.

A Taxa Interna de Retorno resultante da Calculadora Financeira é igual à $i^* = 30,031$ % ao ano.

Aplicando a interpolação linear considere os valores de $i_1 = 26\%$ ao ano e $i_2 = 35\%$ ao ano. Usando o comando *ratsubst(0.26, i, P(0.26))* e depois *ratsubst(0.35, i, P(0.35))* foram obtidos os valores:

$$P(0,26) = \frac{2870491}{5250987},\ P(0,35) = -\frac{104789}{177147}$$

O Gráfico da figura abaixo mostra a aproximação linear no intervalo $I = [i_1,\ i_2]$:

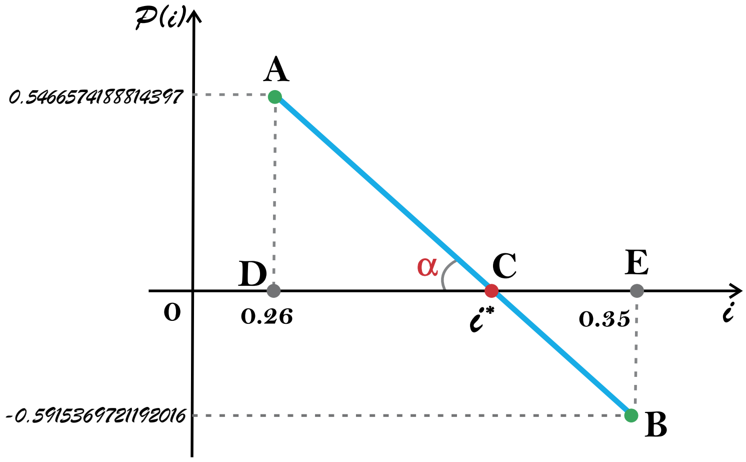

Figura 8 – Interpolação Linear de $P(i)$ no intervalo $[0.26,\ 0.35]$

E usando novamente a semelhança entre os triângulos $\triangle ADC$ e $\triangle BCE$ e pela igualdade entre as tangentes do ângulo α e o seu oposto ao vértice C, tem-se que:

$$\frac{|P(0,26)|}{i^* - 0,26} = \frac{|P(0,35)|}{0,35 - i^*} \Rightarrow i^* = 0.3067743716817333$$

Na forma percentual, tem-se que a taxa interna de retorno é dada por: $i^* \cong 30,68\%$ ao ano.

O que se observou considerando as três formas de se determinar a Taxa Interna de Retorno é que o método direto de obtenção das raízes do polinômio nem sempre é uma tarefa simples. O Problema (4.2.2) comprova essa afirmação, um polinômio de grau 3 que foi tratado algebricamente por meio de um software computacional, o wxMaxima. No problema onde havia quatro parcelas, ou seja, o problema (4.2.3) tem o grau de dificuldade de resolução manual associada às potências no denominador das parcelas, sendo necessário seu tratamento no wxMaxima para obtenção da expressão simplificada, resolução para obtenção de todas as raízes e busca por raízes reais. Quanto maior for o número de parcelas mais indispensável fica o uso de softwares mais robustos como o wxMaxima. Nos três problemas abordados, as soluções obtidas por meio do software foram fundamentais para eliminar as buscas por tentativas exaustivas de valores para duas taxas

$i_1 > i_2$ que verificassem na função $P(i)$ as desigualdades $P(i_2) < 0 < P(i_1)$, que é a etapa inicial de aplicação do Método de Interpolação linear.

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Nesse trabalho, buscou-se apresentar o conceito de Taxa Interna de Retorno, apresentar sua importância para a Matemática Financeira e apresentar as dificuldades para o cálculo da Taxa Interna de Retorno de forma algébrica onde os autores direcionam o leitor para o uso de uma calculadora financeira e por vezes somente mencionam uma forma de se obter tal taxa de juros de forma algébrica que é utilizando a Interpolação Polinomial, porém apenas introduzem o conceito sem demonstrar algebricamente como esse cálculo se processa de fato.

Procuramos dar uma fundamentação matemática bastante extensa ao conceito de Taxa Interna de Retorno onde se verificou que o mesmo tratamento matemático não era dado pelos autores na área. Além de também ter se demonstrado como esses cálculos se processam numa Calculadora Financeira.

Com esse trabalho, o leitor terá o embasamento necessário para aprimorar o seu conhecimento sobre a Taxa Interna de Retorno. E sua importância para o gestor consiste, além do já exposto, em aprimorar suas tomadas de decisão financeiras envolvendo a Taxa Interna de Retorno com maior clareza e precisão.

Esse trabalho difere-se dos demais por sua abordagem do problema do cálculo da Taxa Interna de Retorno sob a visão da Matemática Pura aliada a Matemática Financeira saindo assim do lugar-comum de se analisar a Taxa Interna de Retorno sob uma ótica mais voltada a Administração Financeira, o que de fato não foi o intuito nesse trabalho.

Para trabalhos futuros pretendemos que sejam utilizadas outras formas de Interpolação como podemos citar os métodos de interpolação de Lagrange, Bernstein e o de Newton a fim de se verificar qual método de aproximação é o mais adequado de fato para o cálculo da Taxa Interna de Retorno. Além disso, também podemos ampliar o trabalho inserindo outras taxas de juros para investimentos como o Valor Presente Líquido (VLP) e a Taxa Interna de Retorno Modificada (TIRM)

Referências

ALVES, A. de P. **Desmistificando o Teorema Fundamental da Álgebra**. Dissertação (mathesis) — Universidade Estadual de Campinas, Campinas, fev. 2015. 12

ANDRADE, L. N. de. **Maxima: um programa para as aulas de Matemática**. João Pessoa, 2015. Versão 1.5. 24

ANTON, H.; BIVENS, I.; DAVIS, S. **Cálculo**. 10. ed. Porto Alegre: Boorkman, 2014. v. 1. 10

BALARINE, O. F. O. Desvendando o cálculo da tir. **Revista de Administração da Universidade de São Paulo**, v. 38, n. 1, 2003. 8

BARBIERI, J. C.; ÁLVARES, A. C. T.; MACHLINE, C. Taxa interna de retorno: controvérsias e interpretações. **Revista Gestão da Produção Operações e Sistemas**, v. 5, out. 2007. 9

BARTLE, R. G.; SHERBERT, D. R. **Introduction to Real Analysis**. 4. ed. Illinois: John Wiley & Sons, 2011. 14, 16, 20

BROWN, R. Point of view sins of the irr. **Journal of Real Estate Portfolio Management**, v. 12, n. 9, p. 195–200, 2006. 9

BURDEN, R. L.; FAIRES, J. D. **Análise Numérica**. São Paulo: Cengage Learning, 2013. Tradução da 8ª edição note-americana. 9

EL−TAHIR, Y.; EL−OTAIBI, D. Internal rate of return: A suggested alternative formula and its macro−economics implications. **Journal of American Science**, v. 10, n. 11, p. 216–221, 2014. 8

FARO, C. d. O critério da taxa interna de retorno e o caso dos projetos do tipo investimento puro. **Revista de Administração de Empresas**, v. 16, n. 5, p. 57–63, 1976. 9, 12

HAZZAN, S.; POMPEO, J. N. **Matemática Financeira**. 7. ed. São Paulo: Saraiva, 2014. 8, 12, 18, 19, 21

LIMA, E. L. **Análise Real**. 9. ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2009. v. 1. (Coleção Matemática Universitária). 13

MAZZINI, P. L. F.; SCHETTINI, C. A. F. Avaliação de metodologias de interpolação espacial aplicadas a dados hidrográficos costeiros quasesinóticos. **Brazilian Journal of Aquatic Science and Technology**, v. 13, n. 1, p. 53–64, 2009. 9

NETO, A. A. **Matemática financeira e suas aplicações**. 13. ed. São Paulo: Atlas, 2016. 8, 9, 19, 23

OLIVEIRA, A. Método da taxa interna de retorno: caso de taxas múltiplas. **Revista de Administração de Empresas**, v. 19, n. 2, p. 87–90, 1979. 9

PEREIRA, W. A.; ALMEIDA, L. da S. Método manual para cálculo da taxa interna de retorno. **Revista Objetiva**, n. 4, 2008. 8

RUGGIERO, M. A. G.; LOPES, V. L. da R. **Cálculo Numérico**. 2. ed. São Paulo: Pearson Makron Books, 1996. 8, 9

SANTOS, J. P. de O. **Introdução à Teoria dos Números**. 3. ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2007. (Coleção Matemática universitária). 12

SOUZA, J. L. L. L. de et al. Avaliação de métodos de interpolação aplicados à espacialização das chuvas no território identidade portal do sertão/bahia. **Anais XV Simpósio Brasileiro de Sensoriamento Remoto−SBSR, INPE, Curitiba, PR**, p. 4295, 2011. 10

THOMAS, G. B.; WEIR, M. D.; HASS, J. **Cálculo**. 12. ed. São Paulo: Pearson Education do Brasil, 2012. v. 1. 14