INSTITUTO FEDERAL DA PARAÍBA
CURSO DE ESPECIALIZAÇÃO EM MATEMÁTICA

Francinaldo Pereira da Silva

Uma análise acerca do abastecimento de água na cidade de Nazarezinho-PB a partir da Dinâmica de Crescimento Populacional

Cajazeiras-PB
Dezembro de 2019

Uma análise acerca do abastecimento de água na cidade de Nazarezinho-PB a partir da Dinâmica de Crescimento Populacional

Trabalho de Conclusão de Curso submetido à Coordenação do Curso de Especialização em Matemática do Instituto Federal da Paraíba - Campus Cajazeiras, como parte dos requisitos para a obtenção do grau de Especialista em Matemática.

Orientador: Prof. Vinicius Martins Teodosio Rocha

Cajazeiras-PB
Dezembro de 2019

Campus Cajazeiras
Coordenação de Biblioteca
Biblioteca Prof. Ribamar da Silva
Catalogação na fonte: Daniel Andrade CRB-15/593

S586a

Silva, Francinaldo Pereira da

Uma análise acerca do abastecimento de água na cidade de Nazarezinho-PB a partir da dinâmica de crescimento populacional / Francinaldo Pereira da Silva; Orientador Vinicius Martins Teodosio Rocha.- Cajazeiras, 2020.

44 f.: il.

Orientador: Vinicius Martins Teodosio Rocha.

TCC (Especialização em Matemática) – Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia da Paraíba, Cajazeiras, 2020.

1 Água potável 2 Dinâmica populacional I. Título.

644.61(0.067)

Francinaldo Pereira da Silva

Uma análise acerca do abastecimento de água na cidade de Nazarezinho-PB a partir da Dinâmica de Crescimento Populacional

Trabalho de Conclusão de Curso submetido à Coordenação do Curso de Especialização em Matemática do Instituto Federal da Paraíba - Campus Cajazeiras, como parte dos requisitos para a obtenção do grau de Especialista em Matemática.

Aprovado em: 12/12/2019.

BANCA EXAMINADORA

Prof. Vinicius Martins Teodosio Rocha
Instituto Federal da Paraíba -(IFPB)

Prof. Francisco Aureliano Vidal
Instituto Federal da Paraíba -(IFPB)

Prof. Eva Maria Campos Pereira
Instituto Federal da Paraíba -(IFPB)

Cajazeiras-PB
Dezembro de 2019

Dedico este trabalho a Deus, pois é com a fé divina que conseguimos atingir nossos objetivos. A minha família, pois é nela que achei a inspiração para concluir este curso.

Agradecimentos

Antes de agradecer algo, é preciso refletir o que nos proporciona a conquista de um sonho. Para esta conquista é necessário encontrar uma base de sustentação que simplesmente é a família. Pois é na família que, independentemente de cor, raça e religião, encontramos o caminho dos ensinamentos com o nosso Deus.

Assim, é a Deus que devemos agradecer sempre em primeiro lugar.

Agradecer à minha esposa Ilana e minhas duas filhas, Abigail e Lourdes Maria, pois é nelas que encontro a inspiração para estar buscando a realização de mais uma conquista tão importante na minha vida.

Ao Professor Vinícius Martins, que como orientador tem me guiado na construção e desenvolvimento do presente trabalho.

Ao amigo de licenciatura Carlos Lisboa Duarte, pois ele contribuiu de forma significante para a evolução deste trabalho.

E por fim, ao IFPB. Este se encarregou de ser o orientador maior em me proporcionar uma visão ampla do conhecimento na licenciatura em matemática e agora, na pós-graduação.

Francinaldo Pereira da Silva

Resumo

O presente artigo tem como foco abordar a questão do abastecimento de água da cidade de Nazarezinho localizada no sertão do estado da Paraíba. Para isto, destaca-se a modelagem matemática como uma ferramenta de grande importância na construção deste trabalho. Esta, sendo a base que vem a determinar por meio dos modelos Matemáticos de crescimento populacional, especificamente os modelos de Malthus e Verhurst, qual será a quantidade de habitantes da referida cidade no ano de 2028, pois os modelos em questão sugerem um período curto de tempo, para assim a partir do cálculo da média de consumo de água por habitante, determinar uma estimativa da quantidade de água necessária para satisfazer o consumo de água da população atendida pelo abastecimento. Para isso foi realizada uma pesquisa do tipo levantamento de dados, com o intuito de coletar informações pertinentes a questão estudada junto ao IBGE, escritório local da cidade em estudo e ao Regional da CAGEPA. Este localizado em Sousa-Pb, sendo Nazarezinho uma das dez cidades atendidas pelo mesmo. Além disso, foram utilizadas fontes complementares de pesquisa tais como livros e materiais disponibilizados na internet, de modo a fundamentar as informações apresentadas. Contudo, dentre as informações levantadas no transcorrer da pesquisa, foi possível observar que um fato bastante relevante no que diz respeito a variável em estudo é a questão da escassez de água, provocada por um longo período de seca que aflige a região Nordeste do Brasil. Portanto, uma pesquisa desta natureza virá a contribuir de modo significativo, para se obter uma estimativa da quantidade de água que será necessária para abastecer a cidade de Nazarezinho no ano de 2028.
Palavras-Chave: Água potável. Dinâmica Populacional.

Abstract

This article focuses on addressing the issue of water supply in the city of Nazarezinho, located in the interior of Paraíba. For this, mathematical modeling stands out as a tool of great importance in the construction of this work. This being the basis that determines the mathematical models of population growth, specifically the models of Malthus and Verhurst, what will be the number of inhabitants of that city in the year 2028, because the models in question suggest a short period of time, so, from the calculation of the average water consumption per inhabitant, determine an estimate of the amount of water needed to satisfy the water consumption of the population served by the supply. For this, a survey of data type was carried out, with the objective of collecting information pertinent to the question studied with IBGE, the local city hall of the city under study and the Regional of CAGEPA. Located in Sousa-pb, Nazarezinho is one of the ten cities it serves. In addition, complementary research sources, such as books and materials made available on the internet, were used to support the information presented. However, among the information collected during the research, it was possible to observe that a very relevant fact in relation to the studied variable is the issue of water scarcity, caused by a long drought that affects the Northeast region of Brazil. Therefore, a survey of this nature will contribute significantly to obtain an estimate of the amount of water needed to supply the city of Nazarezinho in 2028.
KeyWords: Potable water. Population dynamics.

Sumário

Introdução

A escassez de água e sua correta distribuição são apenas alguns dos muitos problemas enfrentados pelas pessoas que vivem no sertão paraibano. Tendo em vista essa situação, o presente trabalho teve por objetivo investigar as variáveis que envolvem o abastecimento de água da cidade de Nazarezinho situada no sertão do estado da Paraíba, dando ênfase à utilização dos modelos Matemáticos de crescimento populacional de Malthus e Verhurst como ferramenta auxiliar de pesquisa, de modo a possibilitar uma estimativa da quantidade de água que será necessária diariamente para manter o abastecimento da referida cidade no ano de 2028. Modelos estes, que a partir dos resultados obtidos possam servir de embasamento no quesito prevensão da própria empresa.

Todavia, para que fosse possível alcançar o objetivo em questão foi desenvolvida uma pesquisa do tipo levantamento de dados, uma vez que ficou como principal fonte de informação os dados coletados junto ao escritório regional, localizado em Sousa-pb e o escritório local da Companhia de Água e Esgotos da Paraíba (CAGEPA) na cidade de Nazarezinho. Dessa forma, foi realizado um levantamento acerca dos dados sobre a quantidade de água que é necessária para abastecer a cidade, bem como informações a respeito da história da fundação da sede local da Cagepa e da captação. Esta sendo ponto de origem da água que é utilizada no abastecimento da cidade. Como também abordar o devido processo de tratamento da mesma.

Um ponto extremamente relevante que foi tratado a respeito da construção deste trabalho é a importância que existe na utilização da modelagem matemática enquanto ferramenta de pesquisa, já que a mesma proporciona uma orientação sistematizada de como se desenvolver as etapas de uma investigação e de como essa pode chegar a uma conjectura que descreva uma determinada situação real ([5]).

Nesse contexto, há que se compreender que a modelagem matemática é uma ferramenta de grande importância quando se pretende investigar e simular algo concreto em um determinado espaço, na tentativa de projetar e prever o comportamento dos mesmos. Essa modelagem em consonância com a dinâmica populacional, tem como finalidade explorar os fatores e fenômenos em equilíbrio nos ecossistemas.

Sendo assim, o eixo principal dessa pesquisa se constituiu a partir dos dados operacionais de distribuíção de água da cidade de Nazarezinho, tendo sido aplicados nos modelos matemáticos de crescimento populacional de Malthus e Verhurst, pois os mesmos têm como intuito estudar a variação da quantidade de indivíduos de uma determinada população. E assim, a partir desses dados populacionais, projeta-se a quantidade de água necessária para abastecer a referida cidade em um futuro próximo.

O presente trabalho foi estruturado em quatro capítulos, onde o primeiro traz a introdução. O segundo capítulo aborda a trajetória histórica da crise hídrica no sertão paraibano, seguida de um breve histórico da cidade de Nazarezinho, como também da CAGEPA, além de outras informações relevantes à pesquisa. O terceiro capítulo traz os dados operacionais e estatísticos a respeito do abastecimento de água da cidade de Nazarezinho. Além disso, foram descritas ainda no mesmo capítulo as funções envolvidas nas demonstrações dos modelos matemáticos, a exemplo das equações diferenciais ordinárias (EDO), e, consequentemente, os modelos matemáticos populacionais de Malthus e Verhurst. O quarto capítulo é destinado a aplicação dos dados, à metodologia empregada na construção da pesquisa e os resultados obtidos por meio da utilização dos modelos matemáticos estudados, além de tratar algumas considerações e perspectivas acerca do trabalho desenvolvido. E por fim, as conclusões e as perspectivas obtidas através dos modelos matemáticos envolvidos, além de constatar a importância da modelagem matemática.

2. Aspectos históricos da distribuição de água no sertão

Os rios sertanejos fazem parte da hidrografia do estado da Paraíba, por sua vez, seguem em direção ao norte em busca de terras baixas e deságuam no litoral do Rio Grande do Norte. O Rio Piranhas é o maior representante desse grupo, pois é através dele que grande parte das terras no sertão paraibano são irrigadas. Apesar de o estado contar com vários cursos de água no seu território, a mais forte característica dos rios paraibanos é o fato de, a maioria, serem temporários, diminuindo de volume ou mesmo secando nos períodos de estiagem, principalmente no sertão.

2.1.Histórico da seca do sertão, da CAGEPA e da cidade de Nazarezinho

O sertão nordestino brasileiro é uma área de clima semiárido. As temperaturas são elevadas o ano inteiro. Como chove apenas em alguns meses, os rios e riachos são intermitentes, ou seja, secam no período de estiagem. Fazendo parte desse contexto histórico do nordeste brasileiro, o sertão paraibano está situado em uma de suas sub-regiões. É uma extensa área de clima semiárido, conhecido como "Polígono das Secas", que compreende o centro da Região Nordeste e está presente em quase todos os estados. Essa sub-região nordestina possui o menor índice demográfico da região. Os índices de pluviosidade são baixos e irregulares, com a ocorrência periódica de secas. A vegetação típica é a caatinga.

A Paraíba possui atualmente uma população de 4,02 milhões de habitantes. Segundo estimativa do IBGE ([21]) para 2014, quantitativo 6,68% superior ao registrado no censo de 2010 (3,77 milhões de habitantes). Possui densidade demográfica de $66,70 hab/km^2$. As principais atividades econômicas do sertão paraibano são a agricultura e a pecuária, sendo a lavoura temporária predominante. Como é uma região de trabalhos temporários, o estado necessita de políticas públicas para o desenvolvimento socioeconômico no sertão paraibano, proporcionando qualidade de vida para sua população.

É comum nessa região a estiagem durante seis meses do ano, pois a distribuição das chuvas se concentra de dezembro a maio, período este conhecido como estação chuvosa do sertão nordestino. Como é uma estação chuvosa periódica, mas irregular, a falta de chuva pode afetar diretamente as atividades econômicas, consequentemente acarretando mais problemas sociais da região. Essas adversidades provocam o deslocamento de vários sertanejos para outras regiões do país com o intuito de encontrarem trabalho.

Atualmente o sertão paraibano vem sofrendo com uma severa estiagem. Esta, desde 2012, assola a região, não tendo assim um período chuvoso dentro da normalidade. Esse fato ocorre devido às condições oceânicas e atmosferas globais não apresentarem índices positivos para ocorrência de chuvas.

Neste ano de 2019 não foi diferente e as chuvas caídas durante o período invernoso continuaram de formas irregulares, isto é, chuva normal e acima do normal em algumas cidades e outras com chuvas abaixo da média. Isso já ficou evidenciado no início do ano com os prognósticos divulgados pelos institutos de meteorologia.

As previsões climáticas para 2019 já indicavam um quadro parecido com as previsões dos anos anteriores. Segundo as informações repassadas pela AESA ([2]), no início de 2019 as chuvas iriam variar de normal a abaixo da média e reforçava que:

> O semiárido nordestino tem como característica a alta variabilidade espacial e temporal dos índices pluviométricos. Com isto, a ocorrência de chuvas ficaria altamente dependente da formação de fenômenos meteorológicos transientes, os quais poderão influenciar quantitativamente na ocorrência das chuvas.

Ainda segundo o físico, meteorologista e mestre em meteorologia, Rodrigo Cézar Limeira ([22])

> A conjuntura indicava boas chuvas para o semiárido do Estado entre os dias 17 de fevereiro e 15 de março, ainda que de forma irregular devido à influência do fenômeno climático e oceânico El Niño de fraca intensidade, pontuava. O estudioso reafirmou na época, a perspectiva de chuvas variando de normais a abaixo da média durante a quadra chuvosa de fevereiro a maio do semiárido paraibano.

Ao confirmar essas precipitações negativas, a seca continua a castigar o sertão nordestino, trazendo assim sofrimento aos sertanejos que dependem da água para a sobrevivência, em especial para o consumo humano, pois, devido à escassez deste precioso líquido, vários municípios vêm ao longo desses anos tendo colapsos no seu abastecimento residencial. É nesse contexto que o presente trabalho abordará alguns dados de distribuição de água que chega até as residências. Entre elas o consumo de água *per capita* da cidade de Nazarezinho, localizada no sertão paraibano e que tem a CAGEPA como órgão responsável pelos serviços de abastecimento.

Com origem na Fazenda Picos do Senhor Francisco Lins de Albuquerque, considerado o seu fundador por ter loteado suas terras em meio às serras para construção de casas, Nazarezinho está situada a oeste na depressão do alto sertão do estado da Paraíba. Nascia ali um povoado, ao lado do famoso cartão postal da cidade. Este mais conhecido atualmente como serrote do pico, do qual originou o nome da cidade de Nazareth do Pico. O povoado cresceu e com o seu crescimento vem a necessidade da construção da Capela. O Sr. Joaquim José Gonçalves Braga doa o terreno para a construção da Capela, que teve como Padroeiro São Sebastião. A escolha deste santo para padroeiro da Capela fundamenta-se em um fato que a tradição fez chegar até a geração atual, tendo sido registrado no histórico do município. O Sr. Manoel Siqueira perde um filho menor de nome Sebastião, fatalmente vitimado por uma flecha numa brincadeira de matar lagartixas com outras crianças. E por esta razão, ele (Sr. Manoel Silqueira) pediu para que o Padroeiro da Capela construída se chamasse São Sebastião, também martirizado com flechas. O Povoado Nazareth do Pico passou a ser chamado Nazaré e pertenceu a Cajazeiras até a Lei Províncias de 28-08-1956, quando passou a pertencer a Sousa.

Fundada em 1961 e chamada atualmente por Nazarezinho, ainda se destaca por conservar algumas de suas tradições. A exemplo das histórias do cangaço, da produção da rapadura artesanal, da pesca e da agricultura. A cidade apresenta como território e ambiente os seguintes dados da tabela 2.1

Área de unidade territorial	$192,165km^2$
Esgotamento sanitário adequado (2010)	18,6%
Arborização de vias públicas (2010)	98%
Urbanização de vias públicas (2010)	0,4%
Bioma (2019)	Caatinga

Tabela 2.1: IBGE ([20])

Quando comparado com os outros municípios do estado com relação ao esgotamento sanitário adequado, arborização e urbanização de vias públicas, Nazarezinho fica na posição 147, 17 e 161 de 223 municípios, respectivamente. Já quando comparado a outras cidades do Brasil, sua posição é 3733, 390 e 4630 de 5570 municípios, respectivamente (IBGE ([20]).

A cidade é um dos 223 municípios paraibanos que sofrem com a seca que perdura há vários anos, consequência esta de invernos irregulares. A população sofre com a qualidade da água e a escassez da mesma. Diante disso, uma das suas maiores conquistas foi a chegada da Estação de Tratamento de Água (ETA), construída pela CAGEPA na década de 1980, através do Governo do estado. A partir daí a cidade passou a receber água tratada melhorando a qualidade de vida daquela população.

Inicialmente, porém, a água era captada de um poço e a população ainda não recebia a quantidade de água suficiente para seu consumo. Segundo Pedroza ([24]), mais antigo funcionário da CAGEPA de Nazarezinho, relatou que a água era captada de um poço da zona urbana, este não tinha água suficiente para abastecer a cidade, pois era preciso 24 horas para encher o reservatório e posteriormente distribuir para a população. Daí veio mais uma conquista. Foi construída a captação do Rio Piranhas, dando início ao abastecimento por completo da cidade.

Com a criação da ETA, o governo instalava ali um órgão estadual para comandar e ser responsável pela qualidade da água distribuída para a população de Nazarezinho e assim amenizar o sofrimento que se alongava há vários anos.

2.2.Um breve histórico do abastecimento público na Paraíba e a população abastecida em destaque

Foi a partir de 26 de julho de 1972 que a CAGEPA passou a conduzir o abastecimento público de distribuição de água em todo o estado da Paraíba. Sendo fundada a partir da incorporação das Companhias de saneamento da capital (Sanecab) e a Companhia de saneamento de campina Grande (Sanesa). A Sanesa foi criada em 4 de novembro de 1955. Por sua vez, em 30 de dezembro de 1966 foram constituídas com abrangência em todo o estado a Sanecab e a CAGEPA. Daí surgiu a unificação das mesmas em 1972, na qual passou a ser chamada de Companhia de Água e esgoto da Paraíba(CAGEPA). Esta, assumindo o compromisso de atender todas as cidades paraibanas. E, assim, a empresa se mantém na área de saneamento até os dias atuais. Entretanto, antes dessa união muitos fatores importantes aconteceram no decorrer da história para a criação da CAGEPA.

A CAGEPA ([15]) aborda em sua página institucional que:

> Alguns mananciais públicos e particulares foram criados até à primeira tentativa de disponibilizar água encanada para a população pessoense. Entre elas estão Bica do Tambiá; Cacimba do Povo; Bica de Maria Feia; Cacimba de Dr. Cícero e Cacimba de Maroca Estrela. O abastecimento de água em João Pessoa foi inaugurado no dia 21 de abril de 1912, durante o governo de João Lopes Machado. O primeiro projeto para a implantação de um sistema de esgotamento sanitário, na Paraíba, aconteceu em 26 de junho de 1922, quando foi autorizado empréstimo para a construção de uma rede de esgotos em João Pessoa. Outras experiências de implantação de sistemas de abastecimento foram implementadas em vários municípios paraibanos, embaladas pela criação das comissões municipais de abastecimento.

Vale ressaltar que para uma Empresa assumir a concessão de todos os municípios de um estado, é necessário passar por um processo de legalidade, assumindo responsabilidades através de suas leis estaduais. Assim, a CAGEPA ([15]) elenca que:

> A Companhia de Água e Esgotos da Paraíba é uma sociedade de economia mista por ações de capital autorizado, constituída mediante autorização da Lei Estadual n 3.459 de 31 de dezembro de 1966, alterada pela Lei Estadual n 3.702 de 11 de dezembro de 1972, vinculada à Secretária de Estado da Infraestrutura, dos Recursos Hídricos, do Meio Ambiente e da Ciência e Tecnologia – SEIRHMACT com sede e foro na cidade de João Pessoa, Estado da Paraíba, e jurisdição em todo o território do Estado, com prazo de duração indeterminado, que se rege pela da Lei das Sociedades por Ações, Lei n 6.404/76, de 15 de dezembro de 1976, a qual foi modificada pela Lei n 11.638, de 28 de dezembro de 2007, Lei 13.303, de 30 de Junho de 2016 e pelo seu Estatuto. Nosso capital total está distribuído em Ações Ordinárias, com direito a voto e Preferenciais, sem direito a voto, onde 99,98% das ações ordinárias pertencem ao Governo do Estado da Paraíba e 0,02% estão distribuídos entre 471 sócios entre pessoas físicas e jurídicas.

Ainda segundo a CAGEPA ([18]), o relacionamento com os clientes deve ser norteado pela satisfação destes, fornecendo respostas e soluções que atendam aos seus interesses e nos prazos estabelecidos, sempre em conformidade com os objetivos da Companhia, e sem prejudicá-los de forma direta e indireta.

É um fato nos depararmos atualmente com noticiários em relação as estatais no que se refere a saneamento no Brasil. Estas vêm passando por momentos críticos. Tanto quanto a sua administração, como à falta de água devido à estiagem, principalmente no Nordeste, estando, inclusive, algumas destas estatais em processo de privatizações. A CAGEPA não é diferente. A crise hídrica que assola o sertão, como também a falta de gestão durante muito tempo, tem dificultado bastante o crescimento da empresa. Mas, a partir de 2011, a perspectiva do novo governo de implementar mudanças radicais na empresa, sendo uma delas a troca de cargos políticos por técnicos, culminou num fator determinante para o crescimento da mesma. Atualmente a CAGEPA é reconhecida como uma das melhores empresas do Brasil. A CAGEPA aborda em sua página uma reportagem da revista Exame de 2018 escrevendo que:

> A Companhia de Água e Esgotos da Paraíba (Cagepa) está entre as 1.000 maiores empresas do Brasil, de acordo com a 45ª edição da Melhores e Maiores, da Revista Exame. A Cagepa figura na 772ª posição no ranking, subindo 24 posições em relação ao ano anterior e na 96ª posição entre as 100 maiores empresas do Norte/Nordeste. [...] As companhias foram analisadas pela Fipecafi, fundação ligada à Universidade de São Paulo. (CAGEPA ([17]))

E elenca ainda que:

> Mesmo enfrentando mais um ano de crise hídrica, a Companhia de Água e Esgotos da Paraíba (Cagepa) encerrou o ano de 2017 com um lucro contábil recorde de R$ 65,7 milhões. A receita dos serviços da companhia foi 18,10% superior à registrada em 2016. O superávit é resultado de um trabalho de administração do controle de gastos, combate a perdas, modernização dos processos, além de um investimento de R$ 79 milhões em obras de implantação e ampliação dos sistemas de abastecimento de água e de esgotamento sanitário em todo o Estado (CAGEPA ([16])).

Planejar, executar e operar serviços de saneamento básico em todo o território paraibano faz parte do principal objetivo da Companhia. Pois é através da captação, adução, tratamento e distribuição de água e coleta, tratamento e disposição final dos esgotos que a empresa comercializa esses serviços e os benefícios que direta ou indiretamente decorrerem de seus empreendimentos, bem como quaisquer outras atividades correlatas ou afins.

2.2.1. População abastecida pela CAGEPA e a crise hídrica em Nazarezinho

Segundo o último censo populacional do IBGE, em 2010 Nazarezinho contava com uma população de 7280 habitantes. Destas, 3184 viviam na zona urbana, sendo a mesma assistidas pela CAGEPA, - através do Regional do Rio do Peixe, localizado em Sousa- que fornece diariamente água tratada e encanada em suas residências. Atualmente Nazarezinho conta com 1.399 ligações de água em suas residências.

Com relação à crise hídrica local, é a partir de 2012 que a cidade passa a sofrer com uma das maiores secas já vista na região. A distribuição de água passou a ser a partir daí, uma incógnita. A população não tinha mais a certeza de quando chegaria água em suas torneiras. Segundo a Agência Executiva das Águas do estado da Paraíba (AESA), como o inverno de 2012 ficou muito abaixo da média, em 2013 o abastecimento ficou comprometido na sua totalidade, pois o Rio Piranhas, onde a captação era instalada, secara totalmente. Diante disso, a cidade ficou sem o precioso líquido por mais de um ano, sendo abastecida por carros pipas.

Segundo as previsões dos Institutos meteorológicos, as perspectivas de um bom inverno ficavam cada vez mais distantes. Sendo assim, em outubro de 2014 o governo do estado, através da CAGEPA, inaugurava ali, uma nova adutora emergencial, construída a 11 km da cidade de Nazarezinho, no açude de São Gonçalo, situado na cidade de Sousa. Daí, voltava a CAGEPA a distribuir água tratada a população.

No entanto, outros problemas surgiram devido essa situação, tais como: problemas de vazão da nova adutora. Esta, começou a funcionar com uma vazão de aproximadamente $26.000 l/h$. Entretanto, por problemas técnicos, houve uma queda brusca na sua vazão, passando a operar com apenas $11.000 l/h$. Assim, o abastecimento não teve uma regularidade constante, vindo a contribuir para um abastecimento deficitário da cidade. Para se ter uma idéia dessa oscilação negativa do abastecimento, basta observar, no capítulo seguinte, os dados da tabela 3.2. Além disso é possível constatar na tabela 2.2 os índices pluviométricos negativos do período de 2012 a 2019:

ANO	Observado mm	Normal mm	Desvio mm
2012	556,0	863,8	-307,8
2013	685,9	863,8	-177,9
2014	822,5	863,8	-41,3
2015	637,4	863,8	-226,4
2016	929,7	863,8	65,9
2017	799,3	863,8	-64,5
2018	906,9	863,8	43,1
2019	760,1	863,8	-103,7

Tabela 2.2: AESA ([1])

Observe que, os dados acima apresentados pela AESA mostram uma leve melhora nos índices pluviométricos a partir de 2016, isso devido à volta das chuvas na região de Nazarezinho. Com isso, o abastecimento veio a ser normalizado, pois além da captação do açude de São Gonçalo estar funcionando, a cidade voltou a receber água da captação do Rio Piranhas, diminuindo, assim, as irregularidades enfrentadas nos anos anteriores e, consequentemente, levando para a população uma melhor qualidade de vida.

Contudo, devido às constantes oscilações do abastecimento de água durante esses anos, serão abordados posteriormente dados anuais de distribuição a esta população inter-relacionado com tais modelos populacionais para que estes sirvam de instrumento para atender as necessidades de saneamento ambiental da população, contribuindo para a melhoria da qualidade de vida e da saúde pública dos nazarezinhenses.

2.3.Etapas do tratamento da água

Antes de expor os dados coletados na CAGEPA, serão descritas as principais fases de tratamento da ETA (estação de tratamento de água) de Nazarezinho, na qual serão detalhadas suas características.

O tratamento de água consiste em melhorar suas características organolépticas, físicas, químicas e bacteriológicas, a fim de que se torne adequada ao consumo humano. As águas de superfícies são as que mais necessitam de tratamento, pois se apresentam com qualidades físicas e bacteriológicas impróprias, com exceção das águas de nascentes que, com uma simples proteção das cabeceiras e cloração, podem ser, muitas vezes, consumidas sem perigo. As águas de grandes rios, embora não satisfazendo pelo seu aspecto físico, podem ser relativamente satisfatórias, sob os pontos de vista químico e bacteriológico, quando captadas ou colhidas em locais do rio menos sujeitos à contaminação.

A resolução CONAMA n° 20, de 18 de junho de 1986 destaca que:

> O Conselho Nacional do Meio Ambiente - CONAMA, no uso das atribuições que lhe confere o art. 7°, inciso lX, do Decreto 88.351, de 1° de junho de 1983, e o que estabelece a resolução CONAMA n° 003, de 5 de junho de 1984; Considerando ser a classificação das águas doces, salobras e salinas essencial à defesa de seus níveis de qualidade, avaliados por parâmetros e indicadores específicos, de modo a assegurar seus usos preponderantes (BRASIL ([8])).

A cidade de Nazarezinho é abastecida atualmente por dois mananciais. Um, captado no açude de São Gonçalo, o outro, captado no Rio Piranhas, tendo este o percurso por gravidade, através de comportas entre o açude de Engenheiro Avidos, localizado na região de cajazeiras e o açude de São Gonçalo na região de Sousa.

Manancial é o local onde a água se origina de maneira ininterrupta. Tem como objetivo principal o abastecimento humano e em segundo plano as atividades comerciais, industriais e agropecuárias. Vale ressaltar que quando é instalado um sistema de abastecimento nesses mananciais, é necessário que os responsáveis sigam normas nacionais, passando assim por um controle de qualidade.

A portaria N^o 2.914, de 12 de dezembro de 2011 estabelece em seu art. 40 que:

> Os responsáveis pelo controle da qualidade da água de sistemas ou soluções alternativas coletivas de abastecimento de água para consumo humano, supridos por manancial superficial e subterrâneo, devem coletar amostras semestrais da água bruta, no ponto de captação, para análise de acordo com os parâmetros exigidos nas legislações específicas, com a finalidade de avaliação de risco à saúde humana (BRASIL ([10])).

Atualmente, como foi destacada anteriormente, a água utilizada para o abastecimento da cidade de Nazarezinho è captada do Rio Piranhas e do açude de São Gonçalo. O primeiro dista 6 km da cidade de Nazarezinho, tendo esta como origem o açude de Engenheiro Avidos, a mesma transportada por meio de comportas e por gravidade até o açude de São Gonçalo. Desse percurso, fixou-se um ponto, onde se formou um manancial para captação da água para Nazarezinho através de bombeamento e uma adutora de 150 mm de diâmetro, a qual é tratada na estação construída na própria cidade. A segunda, a 10 km da ETA através de uma adutora emergencial. Vale ressaltar que atualmente a adutora de São Gonçalo funciona como principal meio de distribuição da cidade, trabalhando 24 horas diárias e a adutora do Rio Piranhas, antes funcionava como principal, opera hoje como complementar no abastecimento da cidade. Desde então, a população passou a receber água suficiente para seu consumo e de boa qualidade.

Entretanto, para que a água se torne propícia para o consumo humano, ela passa por várias etapas de tratamento, às quais serão descritas a seguir. A água é normalmente captada de um rio ou um lago, como mostrado na figura 2.1

Figura 2.1: Captação

Depois de captada até a ETA, a água passa pelo tratamento convencional que é composto das seguintes etapas: clarificação, desinfecção, cloro residual, armazenamento e distribuição. A clarificação, dependendo da ETA, ocorre em três etapas: coagulação,decantação e filtração.

A Portaria N^o 2.914 de 12 de Dezembro de 2011 define em seu capítulo II, Art. 5^o inciso V que Água tratada é toda água submetida a processos físicos, químicos ou combinação destes, visando atender ao padrão de potabilidade (BRASIL ([10])).

2.3.1.Clarificação

A clarificação tem como finalidade remover e eliminar as impurezas da água. Este é um processo primordial numa estação de tratamento, pois visa fornecer uma água limpa para seu consumidor. A clarificação é composta pela coagulação, decantação, e filtração. Estas abordadas a seguir.

2.3.1.1.Coagulação

A coagulação é feita pelo processo químico através de adição de sulfato de alumínio, pois as águas de represas e rios possuem um aspecto barrento. Após a chegada da água bruta, no canal de Parshall, como visto na figura 2.2 é realizada a adição do coagulante. Geralmente os reagentes são aplicados por via úmida, ou seja, o Sulfato de Alumínio é dissolvido em água e aplicado contando-se os ml/min. para se encontrar a floculação.

Figura 2.2: Canal de Parshall

A coagulação tem por objetivo transformar as impurezas que se encontram em suspensão fina, em estado coloidal, e algumas que se encontram dissolvida em partículas que possam ser removidas pela decantação e filtração.

2.3.1.2.Decantação

Na decantação se verifica a deposição de matéria em suspensão, pela ação da gravidade. Este processo consiste em tornar as águas que carregam materiais em suspensão, mais lentos, provocando a decantação. O decantador, geralmente, é um tanque retangular com pontos de descarga.

Vale ressaltar que na ETA de Nazarezinho não existe este processo de tratamento, pois como a água é captada de um rio corrente, praticamente em oito messes do ano a mesma já chega em boas condições. Sendo que durante quatro meses a água fica com o aspecto amarelado e barrento, exigindo assim um tratamento mais adequado. Isto devido às chuvas que caem na cabeceira do rio. Assim, depois de receber o tratamento químico (Coagulação), a água da ETA de Nazarezinho passa diretamente para o processo de filtração.

2.3.1.3.Filtração

A filtração consiste em fazer a água passar por substâncias porosas capazes de reter e remover algumas de suas impurezas. Como meio poroso, emprega-se em geral a areia sustentada por camadas de seixos, sob as quais existe um sistema de drenos, acarretando a remoção de materiais em suspensão e substâncias coloidais e redução de bactérias presentes.

No geral, em ETAs, os filtros são classificados de acordo com sua velocidade ou sua pressão. Na ETA de Nazarezinho se trabalha com um filtro de pressão. Este sendo de gravidade, como visto na figura 2.3

Figura 2.3: Filtro

Geralmente têm forma retangular e são usados para a filtração de grandes volumes de água previamente coaguladas.

2.3.2.Desinfecção

Depois de passar pelo processo de clarificação, vem a desinfecção, etapa feita através do Cloro. Este, sendo uma das etapas mais importante do processo, pois além de ser a função precípua do tratamento da água, exige de quem o opera cuidados especiais de segurança. Tem como objetivo a inativação dos microorganismos patogênicos.

A desinfecção é realizada por intermédio dos agentes físico ou químicos, agregado a remoção de partículas coloidais utilizando as operacões unitárias necessárias para cada performance que classifica a água captada. A desinfecção tem caráter corretivo e preventivo, pois durante o percurso da água até o consumo ela pode ser contaminada.

O Cloro ainda tem como função eliminar odores e sabores, diminuir a intensidade da cor, como também eliminar matérias orgânicas.

A Resolução de Diretoria Colegiada- RDC nº 91, de 30 de junho de 2016 elenca em seu Art. 17 que:

> No controle do processo de desinfecção da água por meio da cloração, cloraminação ou da aplicação de dióxido de cloro devem ser observados os tempos de contato e os valores de concentrações residuais de desinfetante na saída do tanque de contato expressos na Portaria do Ministério da Saúde nº. 2.914/2011 e suas atualizações. (BRASIL ([11]))

Na ETA de Nazarezinho esse processo é feito através de um aparelho dosador de cloro a gás, trazendo assim, uma dosagem segura e de acordo com a recomendação do ministério da saúde.

2.3.3.Distribuição

Antes de ser distribuída, a água é submetida à análise do cloro residual. Este processo visa garantir que a água se torne potável de acordo com as recomendações do Ministério da Saúde. O mesmo é realizado logo após a filtração e antes da água ser conduzida ao reservatório I, na caixa de correção.

A Portaria do Ministério da saúde nº 518/2004 define em seu art. 4º, inciso I que:

> Água potável, é a água para consumo humano cujos parâmetros microbiológicos, físicos, químicos e radioativos atendam ao padrão de potabilidade e que não ofereça riscos à saúde. (BRASIL ([12]))

Por fim, em Nazarezinho, a água tratada é encaminhada para um segundo reservatório, elevado e de grande capacidade, onde a mesma é distribuída para abastecer a cidade. Esta distribuição pode ser realizada por gravidade ou por bombeamento. Vale ressaltar que esses reservatórios têm capacidade de 90 e 150 metros cúbicos respectivamente e essa água é transferido de um reservatório para outro através de bombeamento a uma vazão de aproximadamente $50m^3/h$.

Contudo, diante do estudo realizado nesse período crítico de escassez de água no sertão paraibano, em especial a cidade de Nazarezinho, destaca-se a importância da modelagem matemática. A mesma é inserida nesse trabalho com intuito de contribuir para uma eventual melhora, na distribuição de água, após os dados finais estudados.

3. Modelagem matemática: modelos matemáticos, técnicas, dados estatísticos e análise dos resultados

A modelagem matemática é uma ferramenta de grande importância nos estudos de casos concretos da vida real, pois a mesma, associada aos dados estatísticos, possibilita estimar a confiabilidade dos métodos matemáticos utilizados para análises dos resultados.

3.1.Descrição dos dados estatísticos e modelagem matemática.

Atualmente, segundo o IBGE ([20]), Nazarezinho possui uma população estimada de 7.301 pessoas. Tendo sua densidade demográfica de $38,02 hab/km^2$. Em várias décadas, quase que exclusivamente, a cidade sempre se desenvolveu através da agricultura. Entretanto, com o passar dos anos e as consequências das secas, esse desenvolvimento se dividiu entre a agricultura e a renda do funcionalismo público, justamente devido à migração das pessoas da zona rural para a zona urbana, conforme serão mostrados pelos dados a seguir, apontando que Nazarezinho tem, ao longo dos anos, aumentado significativamente sua população urbana. Consequentemente o aumento pela demanda urbana de abastecimento de água.

3.1.1.Dados estatísticos da população de Nazarezinho/PB

Entre 2000 e 2010, a população de Nazarezinho apresentou um crescimento demográfico de 0,0011%, enquanto no Brasil foi de 12,3%, no mesmo período. Nesta década, a taxa de urbanização do município passou de 35,79% para 43,74%. Em 2010 viviam, no município, 7.280 pessoas. Já entre 1991 e 2000, a população do município total apresentou um crescimento de 0,039%. Na UF, esta taxa foi de 0,095%. Na década, a taxa de urbanização do município passou de 32,28% para 35,79%.(IBGE ([13]))

Entretanto, como serão analisados os dados de distribuição de água da zona urbana, será mostrado na tabela 3.1 os dados da população urbana entre 1991 e 2010.

Ano	População urbana	(% do total)
1991	2.259	32,28%
2000	2.727	35,79%
2010	3.184	43,74%

Tabela 3.1: Fonte: Atlas do Desenvolvimento Humano no Brasil([9])

Vale destacar que, a partir dos dados disponibilizados pelo Atlas do Desenvolvimento Humano no Brasil 2013, foi possível observar que, entre os anos de 1991 a 2010, a taxa total de crescimento urbano em Nazarezinho foi de $40,95\%$. Isto significa um crescimento populacional urbano de 925 habitantes no período analisado ou $48,68$ habitantes por ano.

É importante ressaltar que um crescimento populacional depende de alguns fatores, pois essa população pode aumentar, diminuir ou mesmo permanecer constante, tudo isto dependendo das taxas de natalidade e mortalidade. Sendo assim, para que os dados aplicados se tornem mais próximo da realidade, foi feita uma média entre a taxa de crescimento populacional encontrada através da média aritmética de 1991 a 2010 e a taxa obtida através do método geométrico dado por:

$$r = \left[\left(\sqrt[n]{\frac{P(t)}{P_0}} \right) - 1 \right] 100 \tag{3.1}$$

As estimativas de crescimento da população são realizadas pelo método geométrico. Em termos técnicos, para se obter a taxa de crescimento r, subtrai-se 1 da raiz enésima do quociente entre a população final $P(t)$ e a população no começo do período considerado $P(0)$, multiplicando-se o resultado por 100, sendo "n" igual ao número de anos no período.(Ripsa ([26]))

Assim, como o Atlas traz $P(1991) = P(0) = 2259$ e $P(2010) = P(t) = 3184$, num período de 19 anos, basta aplicar na equação 3.1 e obter a seguinte taxa anual:

$$r = \left[\left(\sqrt[19]{\frac{3184}{2259}} \right) - 1 \right] 100 = 1,82\% \tag{3.2}$$

Diante disso, foi possível observar que entre os anos de 1991 e 2010, a taxa de crescimento urbano pelo método geométrico em Nazarezinho foi de $1,82\%$ ao ano, como mostra a equação 3.2. Isto é, se aplicarmos essa taxa a $P(0) = 2259$, obtém um crescimento populacional urbano em Nazarezinho de 41,11 habitantes por ano. Dessa forma, basta calcular a média aritmética das referidas taxas encontradas em habitantes. Daí temos:

$$\frac{48,68 + 41,11}{2} = 44,895 \tag{3.3}$$

Logo, pode-se constatar na equação 3.3 que os dados apresentados proporciona uma média aritmética de crescimento populacional urbano de aproximadamente 45 habitantes por ano. Portanto, será este crescimento populacional que será estimado nos anos não registrados pelo Atlas do Desenvolvimento humano e utilizado posteriormente na Tabela 3.2 para o cálculo de consumo de água per capita de Nazarezinho.

3.1.2.Dados operacionais da CAGEPA e da População urbana de Nazarezinho

A seguir serão apresentadas algumas informações acerca do consumo de água per capita na cidade de Nazarezinho, num intervalo de 11 anos. Período este que teve em alguns anos influência negativa no seu abastecimento, causado por invernos irregulares. Para se obter o consumo "per capita"de uma população, divide-se o total do consumo diário pelo número total da população atendida pelo abastecimento. Diante disso, primeiramente foi realizada uma visita ao escrito local da CAGEPA onde foram coletados os referidos dados sobre o abastecimento, e então a partir do número estimado de habitantes da zona urbana do município, obtido por meio da equação 3.3, chegaram-se aos seguintes valores, como se pode observar na Tabela 3.2

Ano (n)	Consumo total L/dia	População Urbana (P_n)	Consumo Per Capita L/dia
2008	537.500	3.094	173,72
2009	537.500	3.139	171,23
2010	537.500	3.184	168,81
2011	587.900	3.229	182,07
2012	587.900	3.274	179,56
2013	293.967	3.319	88,57
2014	67.500	3.364	20,07
2015	288.000	3.409	84,48
2016	213.000	3.454	61,67
2017	445.333	3.499	127,27
2018	513.100	3.544	144,78

Tabela 3.2: Distribuição de água de Nazarezinho-Pb (CAGEPA)

Segundo SNIS 2018 ([27]) o brasileiro consome de forma direta, em média, 154 litros de água por dia. Isto significa que O montante é 44 litros maiores do que a quantidade que a Organização das Nações Unidas (ONU) considera necessária por pessoa, um total de 110 litros ao dia.

Entretanto, se analisar por estados, esse consumo per capita pode passar dos 200 l/hab./dia. Na Paraíba, por exemplo, em 2016 o consumo era de 139,13 l/hab./dia. Analisando a Tabela 3.2 observa-se que a cidade de Nazarezinho, em condições normais de abastecimento, chega a atigir a marca de 173 l/hab./dia.

Com relação ao abastecimento, vale ressaltar que a partir de 2013 a cidade passou a sofrer com a escassez de água devido à seca que até hoje permanece na região. Diante dessa situação, é possível observar na tabela 2.1 a queda brusca do abastecimento a partir do ano de 2013. Isso se deu ao fato de que o rio onde é captada parte da água utilizada no abastecimento ter secado, consequentemente acarretando em uma redução do volume de água necessário ao abastecimento. Sendo assim, a cidade passou a ser abastecida por carros pipas durante esse período. Apenas em outubro de 2014 é que foi construída uma adutora emergencial pela CAGEPA, voltando esta, mesmo que de forma irregular, a distribuir água tratada para a população.

Posteriormente, no presente trabalho, serão analisados os dados da tabela 2.1, juntamente com os modelos estudados. Mas antes, vale destacar a importância da modelagem matemática, da Equação Diferencial Ordinária, elencando especificamente o fator integrante e separação de variável. Estas, servirão de embasamento para resolução dos modelos em questão.

3.1.3.A modelagem matemática

A modelagem matemática tem como objetivo demonstrar, através do ensino da matemática, métodos de aplicação relacionados com o cotidiano da vida real e projetar o comportamento dos mesmos.

Bueno (2011) ([14]) ao mencionar Bean (2009) explana a modelagem matemática ao endossar que:

> A modelagem é uma atividade humana na qual uma parte da realidade está conceitualizada, de forma criativa, com algum objetivo em mente. O cerne da modelagem reside no recorte e na formulação de um isolado, ou seja, na conceitualização de um fenômeno com fundamento em premissas e pressupostos que remetem tanto ao fenômeno quanto aos objetivos do modelador (o aluno).

Ainda segundo Bassanezi ([6]), a importância do modelo matemático consiste em se ter uma linguagem concisa que expressa nossas idéias de maneira clara e sem ambigüidades, além de proporcionar um arsenal enorme de resultados (teoremas) que propiciam o uso de métodos computacionais para calcular suas soluções numéricas.

3.2.Equações Diferenciais Ordinárias

Muitos fenômenos das ciências naturais são modelados por equações, pois as mesmas sempre acabam sendo envolvidas por relações de algumas variáveis. Assim, destaque-se a importância das EDOs nas equações matemáticas que envolvem as derivadas de uma função desconhecida de uma variável. E no presente trabalho as EDOs serão de grande importância para o seu desenvolvimento, pois os modelos matemáticos aqui elencados necessitarão de métodos matemáticos para as suas resoluções. É o caso do Fator Integrante e as equações Separáveis.

Em termos matemáticos, quando se trabalha com uma equação que envolve as derivadas de uma função desconhecida de uma variável, esta é chamada de equaçao diferencial ordinária (EDO). Por exemplo, uma EDO linear é uma equação diferencial da forma

$$a_0(x)y + a_1(x)y' + \cdots + a_n(x)y^{(n)} = b(x) \tag{3.4}$$

onde $a_i(x)$ e $b(x)$ são funções diferenciáveis em certo domínio e $y', y'', \cdots y^{(n)}$ são as sucessivas derivadas da função desconhecida y com relação à variável x. Mas geralmente, dada uma função $F : A \subset \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}$, podemos considerar a equação

$$F(x, y, y', \cdots, y^{(n)}) = 0 \tag{3.5}$$

Considere uma equação da forma (3.5), com a condição de que o valor da função y procurada seja dada para determinado valor de x, isto é, dado um par $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$, procura-se uma solução $y : I \to \mathbb{R}$ para a referida equação, satisfazendo $y(x_0) = y_0$. Este problema é conhecido como Problema de Valor Inicial (PVI).

Existem diversos teoremas acerca da existência de soluções para EDOs. O presente trabalho elenca aqui em um teorema de existência e unicidade para problemas de valores iniciais que será suficiente para as aplicações: os modelos matemáticos Exponencial e Logístico. Aqui será enunciada uma versão de um teorema que trata da existência e unicidade de soluções para PVIs conhecida como Teorema de Picard-Lindelöf. Será omitida a demonstração, que foge dos objetivos desse texto, mas indica-se a referência [28] para o leitor interessado.

Teorema 3.1. *Seja f contínua e Lipschitziana com relação à segunda variável em $\Omega = I_a \times B_b$, onde $I_a = \{x; |x - x_0| \le a\}$, $B_b = \{y; |y - y_0| \le b\}$. se $|f| \le M$ em Ω, existe uma única solução de*

$$y' = f(x, y),\ y(x_0) = y_0$$

em I_α, onde $\alpha = min\{a, b/M\}$.

E a ordem de uma equação diferencial é a ordem da derivada mais alta que ocorre na equação. Dessa maneira, as equações diferenciais trabalhadas nesse texto são da forma

$$\frac{dP}{dt} = kP(t) \text{ e } \frac{dP}{dt} = kP(1 - \frac{P}{K}),$$

isto é, são de primeira ordem. Em ambas equações, usa-se a letra t para indicar a variável independente (ou seja, x na equação (3.5)) e P para indicar a variável dependente de t, isto é, a função desejada (ou seja, y na equação (3.5))

Por exemplo, ao resolver uma integral indefinida

$$\int f(x)\,dx,$$

na verdade resolve-se uma EDO simples, a saber

$$y' = f(x).$$

Exemplo 3.2. Sabe-se que a solução geral da equação diferencial $y' = x^2$ é dada por

$$y = \frac{x^3}{3} + C,$$

onde C é uma constante qualquer, pois

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{d(\frac{x^3}{3} + C)}{dx} = x^2,$$

dado um valor inicial, (x_0, y_0), deve-se ter

$$y_0 = y(x_0) = \frac{x_0^3}{3} + C$$

Logo, $C = y_0 - \frac{x_0^3}{3}$ e a função $y(x) = \frac{x^3}{3} + y_0 - \frac{x_0^3}{3}$ é, de acordo com o Torema 3.1, a única solução para a equação inicial desejada com valor inicial $y_0 = y(x_0)$.

Para resolver uma EDO existem várias técnicas de integração. No presente trabalho serão elencados dois métodos específicos. Fator Integrante e Separação de variáveis. Estes, de grande importância na demonstração dos modelos de crescimento populacional exponencial e logístico.

3.2.1.Fator Integrante

Uma equação diferencial linear de primeira ordem é aquela que pode ser escrita na forma

$$\frac{dy}{dt} + p(t)y = q(t). \tag{3.6}$$

onde P e Q são funções contínuas em um dado intervalo. Esse tipo de equação ocorre frequentemente em vários ramos da ciência.

Exemplo 3.3. Um exemplo de uma equação linear é $xy' + y = 6x$ porque, para $x \neq 0$, esta pode ser escrita na forma

$$y' + \frac{1}{x}y = 6. \tag{3.7}$$

Observe que essa equação diferencial não é separável, porque é impossível fatorar a expressão para y' como uma função de x vezes uma função de y. Mas ainda é possível resolver a equação observando que, pela Regra do Produto,

$$xy' + y = (xy)',$$

e assim escreve-se a equação como

$$(xy)' = 6x,$$

integrando-se ambos os lados dessa equação, obtém-se

$$xy = 3x^2 + c \text{ e } y = 3x + \frac{c}{x}.$$

De acordo com Stewart ([29]), se tivesse sido dada a equação diferencial na forma da Equação 3.7, seria necessário fazer uma etapa preliminar multiplicando cada lado da equação por x. Ocorre que toda equação diferencial linear de primeira ordem pode ser resolvida de uma maneira similar pela multiplicação de ambos os lados da Equação 3.6, por uma função adequada $I(x)$, chamada fator integrante. Tenta-se encontrar I de modo que o lado esquerdo da Equação 3.6, quando multiplicado por $I(x)$, torna-se a derivada do produto $I(x)y$:

$$I(x)(y' + P(x)y) = (I(x)y)' \tag{3.8}$$

Se for possível encontrar tal função I, a equação 3.6 ficará

$$(I(x)y)' = I(x)Q(x)$$

Integrando ambos os lados, tem-se

$$I(x)y = \int I(x)Q(x)dx + C$$

De modo que a solução será

$$y(x) = \frac{1}{x}\left[\int I(x)Q(x)dx + C\right] \tag{3.9}$$

Para encontrar esse I, expande-se a equação 3.8 e cancela os termos:

$$I(x)y' + I(x)P(x)y = (I(x)y)' = I'(x)y + I(x)y'$$

$$I(x) = P(x) = I'(x)$$

Esta é uma equação separável para I, que resolve-se como a seguir:

$$\int \frac{dI}{I} = \int P(x)dx$$

$$\ln|I| = \int P(x)dx$$

$$I = Ae^{\int P(x)dx}$$

onde $A = \pm e^c$. Procura-se um fator de integração particular, não o mais geral; assim tomamos $A = 1$ e usa-se

$$I(x) = e^{\int P(x)dx}$$

.

Para Stewart([29]), em vez de memorizar essa fórmula, contudo, apenas deve-se lembrar da forma do fator intregrante, isto é, multiplica-se ambos os lados da equação diferencial linear

$$y' + P(x)y = Q(x),$$

pelo fator integrante dado por

$$I(x) = e^{\int P(x)dx}$$

e integram-se ambos os lados.

Exemplo 3.4. Um exemplo simples de fator integrante é

$$\frac{dy}{dx} + 4x^3y = 8x^3.$$

A equação dada é linear porque ela tem a forma da equação 3.6 com $P(x) = 4x^3$ e $Q(x) = 8x^3$. Um fator integrante é

$$I(x) = e^{\int 4x^3 dx} = e^{x^4}$$

Multiplicando ambos os lados da equação diferencial por e^{x^4}, obtém-se

$$e^{x^4}\frac{dy}{dx} + 4x^3e^{x^4}y = 8x^3e^{x^4} \text{ ou } \frac{d}{dx}(e^{x^4}y) = 8x^3e^{x^4}.$$

Integrando ambos os lados, tem-se

$$e^{x^4}y = \int 8x^3e^{x^4}dx = 2e^{x^4} + C.$$

Logo,

$$y = 2 + Ce^{-x^4}.$$

Além do fator integrante, destaque-se também o método de equações separáveis. Este, de grande importância na demonstração do modelo populacional de Verhurst estudado no presente trabalho.

3.2.2.Equações Separáveis

Uma equação separável é uma equação diferencial de primeira ordem na qual a expressão para $\frac{dy}{dx}$ pode ser fatorada como uma função de x multiplicada por uma função de y. Em outras palavras, existem funções f e g tais que

$$\frac{dy}{dx} = g(x)f(y).$$

O nome separável vem do fato de que a expressão do lado direito pode ser "separada" em uma função de x e uma função de y. Da mesma forma, se $f(y) \neq 0$, pode-se escrever

$$\frac{dy}{dx} = \frac{g(x)}{h(y)}, \tag{3.10}$$

onde $h(y) = \frac{1}{f(y)}$. Para resolver essa equação, a reescreve-se na forma diferencial

$$h(y)dy = g(x)dx,$$

assim todos os y estão em um lado da equação e todos os x estão do outro lado. Então ambos os lados da equação são integrados

$$\int h(y)dy = \int g(x)dx. \tag{3.11}$$

A Equação 3.11 resulta em uma relação implicita entre y e x. Em alguns casos, no entanto, também é possível isolar y em termos de x.

Usamos a Regra da Cadeia para justificar este procedimento: Se h e t satisfazem 3.11 , então

$$\frac{d}{dx}\left(\int h(y)dy\right) = \frac{d}{dx}\left(\int g(x)dx\right).$$

Logo

$$\frac{d}{dy}\left(\int h(y)dy\right)\frac{dy}{dx} = g(x),$$

assim

$$h(y)\frac{dy}{dx} = g(x).$$

Portanto, a equação 3.10 é satisfeita.(Vide [29])

Stewart([29]) diz que a técnica para resolver as equações diferenciais separáveis foi primeiro usada por James Bernoulli (em 1690), para resolver um problema sobre pêndulos, e por Leibniz (em uma carta para Huygens, em 1691). John Bernoulli explicou o método geral em um artigo publicado em 1694.

Ainda segundo Stewart ([29]), uma aplicação prática que pode ser trabalhada com uma equação separável é o Problema de Mistura

> Um problema típico de mistura envolve um tanque de capacidade fixa preenchido com uma solução completamente misturada de alguma substância (digamos, sal). Uma solução de uma dada concentração entra no tanque a uma taxa fixa e a mistura, bem agitada, sai a uma taxa fixa, que pode ser diferente da taxa de entrada. Se $y(t)$ denota a quantidade de substância no tanque no instante t, então $y'(t)$ é a taxa na qual a substância está sendo adicionada menos a taxa na qual ela está sendo retirada. A descrição matemática da situação frequentemente leva a uma equação diferencial de primeira ordem separável. Podemos usar o mesmo tipo de raciocínio para modelar uma variedade de fenômenos: reações químicas, descarga de poluentes em um lago, injeção de medicamentos na corrente sanguínea, entre outros.([29])

Veja um exemplo:

Exemplo 3.5. Um tanque contém $20kg$ de sal dissolvido em $5000L$ de água. Água salgada com $0,03kg$ de sal por litro entra no tanque a uma taxa de $25L/min$. A solução é misturada completamente e sai do tanque à mesma taxa. Pode-se encontrar a quantidade de sal que permanece no tanque após um determinado tempo.

Seja $y(t)$ a quantidade de sal (em quilogramas) depois de t minutos. Foi dado que $y(0) = 20$ e queremos encontrar $y(30)$. Fazendo isso, encontran-se uma equação diferencial que seja satisfeita por $y(t)$. Observe que $\dfrac{dy}{dt}$ é a taxa de variação da quantidade de sal. Assim,

$$\frac{dy}{dx} = (\text{taxa de entrada}) - (\text{taxa de saída}) \tag{3.12}$$

onde (taxa de entrada) é a taxa na qual o sal entra no tanque e (taxa de saída) é a taxa na qual o sal deixa o tanque. Temos

$$(\text{taxa de entrada}) = \left(0,03\frac{kg}{L}\right)\left(25\frac{L}{min}\right) = 0,75\frac{k}{min}$$

O tempo sempre contém $5000L$ de líquido, então a concentração no tempo t é $\dfrac{y(t)}{5000}$ (medidas em quilogramas por litro). Como a água salgada sai a uma taxa de $25\frac{L}{min}$,obtém-se

$$\text{taxa de saída} = \left(\frac{y(t)}{5000}\frac{kg}{L}\right)\left(25\frac{L}{min}\right) = \frac{y(t)}{200}\frac{kg}{min}$$

Então da equação 3.12, tem-se

$$\frac{dy}{dt} = 0,75 - \frac{y(t)}{200} = \frac{150 - y(t)}{200}$$

Resolvendo essa equação diferencial separável, obtém-se

$$\int \frac{dy}{150 - y} = \int \frac{dt}{200}$$

$$-\ln|150 - y| = \frac{t}{200} + C$$

Uma vez que $y(0) = 20$, tem-se $-ln130 = C$, logo

$$-\ln|150 - y| = \frac{t}{200} - \ln 130.$$

Portanto,

$$|150 - y| = 130e^{\frac{-t}{200}}.$$

Como $y(t)$ é contínua, $y(0) = 20$ e o lado direito nunca é zero, deduzimos que $150 - y(t)$ é sempre positiva. Então, $|150 - y| = 150 - y$ e assim

$$y(t) = 150 - 130e^{\frac{-t}{200}}$$

Concluímos então que a quantidade de sal depois de 30 minutos é dada por

$$y(30) = 150 - 130e^{\frac{-30}{200}} \simeq 38,1kg$$

Similar ao exemplo 3.5, pode ser usado, ao invés do sal, o sulfato de alumínio. Este, sendo o produto utilizado nas estações de tratamento de água (ETA). Sendo assim, a importância de exemplificar no presente trabalho um problema de mistura.

3.3.Modelos de crescimento populacional

O estudo dos modelos de crescimento populacional tem como finalidade analisar um caso concreto diante da realidade do espaço estudado, além de buscar modelar e investigar um fenômeno através de termos matemáticos, em especial, as equações diferenciais ordinárias (EDO). Esta modelagem pode ser feita em um ambiente isolado, considerando os fatores dos fenômenos da natureza. É o caso dos modelos estudados no presente trabalho. Malthus ressalta que a população cresce proporcionalmente ao tamanho da população. Por sua vez, Verhurst supõe que a população cresce até um limite máximo de sua capacidade.

Bassanezi ([6]) elenca que:

O estudo da dinâmica populacional dá uma idéıa do processo de evolução dos modelos empregados. Os biossistemas são quase sempre constituídos de um grande número de populações inter-relacionadas. Assim, uma população raramente pode ser considerada isolada, a não ser em condições ideais de laboratório ou quando não é possível individualizar no biossistema outra população interagindo com a primeira. Mesmo na análise de populações isoladas, muitos fatores podem contribuir com sua dinâmica — fatores abióticos (temperatura, vento, umidade etc.) e fatores de auto-regulação (espaço, alimento, idade, guerra etc).

3.3.1.Dinâmica das populações

Dinâmica populacional é o conjunto de todos os indivíduos de uma mesma espécie que habita um determinado espaço, além de investigar o que ocorre nos ecossistemas em equilíbrio desse ambiente. No estudo da dinâmica populacional, há de se destacar os processos de de crescimento Natural e crescimento Horizontal. O primeiro se refere aos números de nascimentos e óbitos da população estudada e o outro ao número de imigrantes e emigrantes.

Segundo Bacaer([4]), dinâmica populacional é a área da ciência que tenta explicar, de uma maneira mecanicista simples, as variações temporais do tamanho e composição das populações biológicas, como os de seres humanos, animais, plantas ou microorganismos.

Além de terem suas características próprias, as populações podem ter sua medida determinada, isto é, sua capacidade de suporte máximo. O só Biologia ([19]) aborda que cada elemento de uma população pode nascer, crescer e morrer, mas somente uma população como um todo possui taxas de natalidade e de crescimento específicas, além de possuir um padrão de dispersão no tempo e no espaço.

Para medir o tamanho de uma população de um deteminado espaço, é necessário avaliar a sua dendisade. A densidade populacional pode sofrer algumas alterações. Se a área de distribuição permanecer fixa, a população entra em fase de crescimento devido a nascimentos e imigrações. Caso haja mortes ou emigrações, esta população entra em fase de decrescimento e se as taxas de natalidade e imigrações forem iguais as taxas de mortalidade e emigrações estas permanecerão em equilíbrio. Em suma, representado na Tabela 3.3 por N a taxa de natalidade, por M a taxa de mortalidade, por E e I as taxas de emigração e Imigração respectivamente, pode-se dizer que:

N+I>M+E	População em crescimento
N+I<M+E	População em decrescimento
N+I=M+E	População em equilíbrio

Tabela 3.3: Densidade Populacional

A revista Iberoamericana de Educacion matemática([3]), ao citar Almeida e Oliveira, elenca que:

> O rápido crescimento das principais cidades da Europa e o aumento da população pobre nas regiões urbanas a partir dos anos de 1950 contribuiu para o interesse em desenvolver métodos ou modelos capazes de estimar a população mundial. Neste contexto, estudiosos de diferentes áreas iniciaram seus estudos com a intenção de realizar estas estimativas. Embora houvesse ensaios de diferentes especialistas, alguns deles tiveram importância fundamental e os modelos por eles desenvolvidos sustentariam a análise do crescimento populacional por muitos e muitos anos: os ingleses Thomas Robert Malthus e o francês Pierre-François Verhulst.

Serão abordados agora os modelos matemáticos de Malthus e Verhurst. Estes, com o intuito de fornecer os dados populacionais da cidade de Nazarezinho-Pb para daqui a 10 anos e, consequentemente, obter uma estimativa da quantidade de água necessária para o consumo humano diário nesse período.

3.4.Modelo Malthusiano ou Exponencial

Os referidos modelos matemáticos aqui citados servem para analisar a progressão do crescimento de uma determinada população em um espaço isolado com todos os fenômenos que envolvem este meio.

Antes de trazer um pouco da história e a demonstração desses modelos, vale destacar uma comparação e o comportamento dos mesmos em um mesmo espaço de tempo. Enquanto Malthus supõe que a população cresce a uma taxa proporcional ao tamanho da população naquele instante, sem limitações aos fenômenos existentes do ambiente investigado, Verhurst supõe que esta população cresce nos estágios inicias, mas, ao atingir a capacidade de suporte deste ambiente, a população permanecerá constante, por ele supor que os recursos do espaço em análise são limitados. E, podendo ainda entrar em fase de decrescimento, se ultrapassar o limite de suporte do meio.

Stewart([29]) aborda uma comparação do Crescimento Natural com os Modelos Logísticos e diz:

> Na década de 1930, o biólogo G. F. Gause realizou uma experiência com o protozoário paramécio e usou uma equação logística para modelar seus dados. A tabela fornece suas contagens diárias da população de protozoários. Ele estimou a taxa relativa de crescimento inicial como 0,7944 e a capacidade de suporte como 64.

t(dias)	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
P(observados)	2	3	22	16	39	52	54	47	50	76	69	51	57	70	53	59	57

Tabela 3.4: Contagem diária da população de protozoários

Exemplo 3.6. Encontre os modelos exponencial e logístico para os dados de Gause. Compare os valores previstos com os valores observados e comente o ajuste. Solução: Dadas a taxa de crescimento relativo $k = 0,7944$ e a população inicial $P_0 = 2$, o modelo exponencial é

$$P(t) = P_0 e^{kt} = 2e^{0,7944t}.$$

Gause usou o mesmo valor de k para seu modelo logístico. [Isso é razoável porque $P_0 = 2$ é pequeno comparado com a capacidade de suporte $(M + 64)$. A equação

$$\frac{1}{P_0}\frac{dP}{dt}\Big|_{t=0} = k\left(1 - \frac{2}{64}\right) \approx k,$$

mostra que o valor de k para o modelo logístico está muito próximo do valor para o modelo exponencial.]

A seguir, a solução da equação logística fornece

$$P(t) = \frac{K}{1 + Ae^{-kt}} = \frac{64}{1 + Ae^{-0{,}7944t}},$$

onde

$$A = \frac{K - P_0}{P_0} = \frac{64 - 2}{2} = 31,$$

então

$$P(t) = \frac{64}{1 + 31e^{-0{,}7944t}}.$$

Usa-se essas equações para calcular os valores previstos (arredondados para o inteiro mais próximo) e os comparamos na tabela a seguir.

t(dias)	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
P(observados)	2	3	22	16	39	52	54	47	50	76	69	51	57	70	53	59	57
P(Modelo logístico)	2	4	9	17	28	40	51	57	61	62	63	64	64	64	64	64	64
P(Modelo exponencial)	2	4	10	22	48	106	...										

Tabela 3.5: Modelos logístico e exponencial na população de protozoários

Observa-se na Tabela 3.5 e no Gráfico 3.1 que, para os primeiros três ou quatro dias, o modelo exponencial fornece resultados comparáveis àqueles do método logístico mais sofisticado. Para $t \geq 5$, contudo, o modelo exponencial é muito impreciso, mas o modelo logístico se ajusta bem às observações.

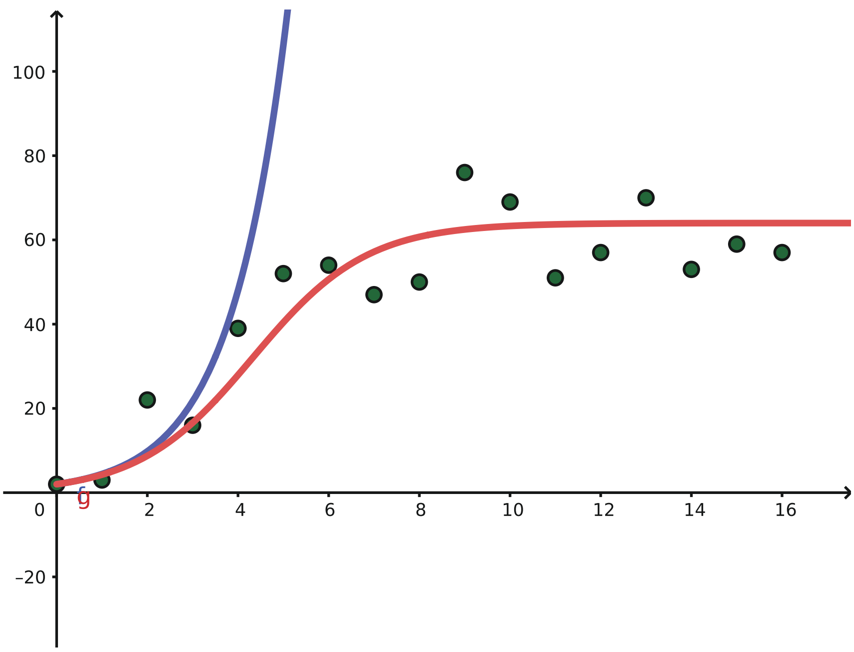

Figura 3.1: Modelos logísticos e exponencial para a população de paramécios

Percebe-se que o modelo exponencial é mais preciso num espaço curto de tempo, como já descrito no presente trabalho. E o modelo logístico segue um padrão mais aproximado dos dados observados até atingir o limite de suporte da popupação em análise. Agora é possível a conhecer um pouco da trajetória de Malthus e Verhurst e suas contribuições nos modelos de crescimento populacional.

Thomas Robert Malthus nasceu em 1766, perto de Londres, o sexto de sete filhos. Seu pai, amigo e admirador de Jean-Jacques Rousseau, foi seu primeiro professor. Em 1784, o jovem Malthus começou a estudar matemática na Universidade de Cambridge. Obteve o seu diploma em 1791, tornou-se membro do Colégio de Jesus em 1793 e de um sacerdote anglicano em 1797.

Em 1798, Malthus publicou anonimamente um livro intitulado Ensaio sobre o princípio da população, na medida em que afeta o futuro aperfeiçoamento da sociedade, com observações sobre as especulações de Godwin, Condorcet e outros escritores. Veio como uma reação contra o Inquérito de Godwin sobre a justiça política (1793) e o esboço de Condorcet para um retrato histórico do progresso da mente humana (1794).

Apesar dos momentos difíceis vividos durante a Revolução Francesa fez em nome do progresso, os dois autores afirmaram que o progresso da sociedade era inevitável. Malthus não compartilhou o mesmo otimismo. Ele também argumentou que as leis inglesas pobres, que ajudaram pobres famílias com muitos filhos, favoreceram o crescimento da população sem estimular um crescimento similar na produção de alimentos. Pareceu-lhe que essas leis realmente não aliviou os pobres; pelo contrário. Mais geralmente, a população tende para crescer sempre mais rápido que a produção de alimentos, parte da sociedade parecia ser condenado à miséria, fome ou epidemias: estes são os flagelos que retardam crescimento populacional e que, na opinião de Malthus, são os principais obstáculos à progresso da sociedade. Todas as teorias que prometem progresso seriam apenas utópicas. Estas idéias levaram Malthus a publicar seu livro em 1798. Aqui está como ele resumiu sua tese:

> [. . .] o poder da população é indefinidamente maior do que o poder na terra para produzir subsistência para o homem. População, quando desmarcada, aumenta em uma proporção geométrica. A subsistência aumenta apenas em uma razão aritmética. Um ligeiro conhecimento dos números mostre a imensidão do primeiro poder em comparação ao segundo. Por essa lei do nosso natureza que torna a comida necessária à vida do homem, os efeitos desses dois poderes desiguais devem ser mantidos iguais. Isto implica uma verificação forte e constantemente operacional da população da dificuldade de subsistência. Essa dificuldade deve cair em algum lugar; e deve necessariamente ser severamente sentida por uma grande parte da humanidade.([4])

De acordo com sua teoria, a população mundial cresce em progressão geométrica, enquanto a produção de alimentos em progressão aritmética. Estes cálculos eram feitos utilizando a Lei de Malthus, conjunto de fórmulas matemáticas que tinha como objetivo projetar o crescimento populacional no curto e médio prazo. A teoria malthusiana explicava, desta forma, a existência da fome, pobreza e miséria no mundo. Apontava como uma das principais soluções o controle da natalidade.

O modelo matemático idealizado por Thomas Robert Malthus é mais conhecido como modelo Malthusiano ou Exponencial. Este modelo assume que o crescimento de uma população é proporcional á população em cada instante (progressão geométrica ou crescimento exponencial), e desta forma, a população humana deveria crescer sem nenhuma inibição. Assim, o modelo de Malthus propõe um crescimento de vida otimizada, sem fome, guerra, epidemia ou qualquer catástrofe, onde todos os indivíduos são idênticos, com o mesmo comportamento.([6])

Deste modo pode-se considerar o seu modelo descrito da seguinte forma:

$$\frac{dP}{dt} = kP(t) \text{ e } P(0) = P_0$$

Considerando P um número de indivíduos em uma população qualquer, a solução do modelo Malthus se dá através do problema de valor inicial anterior, onde k é uma constante de crescimento intrínseco da população e $\frac{dP}{dt}$ é a taxa de crescimento. Daí, realizando os cálculos do modelo Malthusiano chega-se à solução do problema de valor inicial:

$$P(t) = P_0 e^{kt}$$

Entretanto, para se chegar a este modelo matemático simples, Malthus se utilizou de várias outras fórmulas matemáticas, das quais serão descritas a seguir. Pode-se reescrever $\frac{dp}{dt} = kP(t)$ como uma equação linear da seguinte forma:

$$\frac{dP}{dt} - kP(t) = 0 \tag{3.13}$$

Como solução, usa-se o método do fator integrante na equação (3.13):

$$\varphi(t) = e^{\int -kdt} = e^{-kt}.$$

Daí, multiplicando a equação 2.1 por $\varphi(t) = e^{-kt}$, tem-se:

$$e^{-kt}\frac{dP}{dt} - e^{-kt}kp(t) = 0$$

$$\int \left[e^{-kt}P(t)\right] = \int 0dt \tag{3.14}$$

Observe que,

$$\int \left[e^{-kt}P(t)\right] = ke^{-kt}P(t) + e^{-kt}\frac{dP}{dt}.$$

Integrando ambos os membros da equação 3.14, obtém-se

$$e^{-kt}P(t) = C \therefore P(t) = Ce^{kt}.$$

Substituindo $t = 0$ e $P = P_0$,

$$P_0 = Ce^{k.0} = C$$

ou seja, a solução do problema de valor inicial é:

$$P(t) = P_0 e^{kt}. \tag{3.15}$$

Este modelo da equação 3.15 conduz ao crescimento exponencial, pois define o crescimento de uma população sob condições perfeitas, isto é, com recursos ilimitados, ausências de predadores e imune a doenças.

Stewart ([29]) ao explanar a equação 3.15 diz que:

> É apropriada para a modelagem do crescimento populacional sob condições ideais, mas devemos reconhecer que um modelo mais realista deveria refletir o fato de que um dado ambiente tem recursos limitados. Muitas populações começam crescendo exponencialmente, porém o nível da população se estabiliza quando ela se aproxima de sua capacidade de suporte M (ou diminui em direção a M se ela excede o valor de M).

Este modelo realista ao qual Stewart (2013) se refere é o modelo logístico de Verhurst, o qual será abordado a seguir.

3.5.Modelo de Verhurst ou Logístico

Pierre-François Verhulst nasceu em 1804 em Bruxelas. Ele obteve um doutorado em matemática pela Universidade de Ghent em 1825. Ele também estava interessado em política. Enquanto na Itália, para conter sua tuberculose, ele implorou, sem sucesso, em favor de uma constituição para os Estados Papais. Após a revolução de 1830 e a independência da Bélgica, publicou um ensaio histórico sobre um patriota do século XVIII. Em 1835 ele se tornou professor de matemática na recém-criada Universidade Livre de Bruxelas.

Nesse mesmo ano de 1835, seu compatriota Adolphe Quetelet, estatístico e diretor do observatório em Bruxelas, publicou um Tratado sobre o Homem e o Desenvolvimento de suas faculdades. Quetelet sugeriu que as populações não poderiam crescer geometricamente um longo período de tempo porque os obstáculos mencionados por Malthus formavam uma espécie de "Resistência", que ele pensava (por analogia com a mecânica) era proporcional o quadrado da velocidade de crescimento populacional. Essa analogia não tinha base real, mas inspirou Verhulst.

De fato, Verhulst publicou em 1838 uma nota sobre a lei do crescimento populacional. Aqui são alguns extratos:

> Sabemos que o famoso Malthus mostrou o princípio de que a população humana tende a crescer numa progressão geométrica de modo a duplicar após um determinado período de tempo, por exemplo a cada vinte e cinco anos. Esta proposição é inquestionável se for feita abstração da dificuldade crescente para encontrar comida [. . .] O aumento virtual da população é, portanto, limitado pelo tamanho e pela fertilidade dos o países. Como resultado, a população fica cada vez mais próxima de um estado estável.([4])

O Modelo de Verhurst supõe que uma população, vivendo num determinado meio, deverá crescer até um limite máximo sustentável, isto é, ela tende a se estabilizar. A equação incorpora a queda de crescimento da população que deve estar sujeita a um fator inibidor de proporcionalidade. O modelo de Verhurst é, essencialmente, o modelo de Malthus modificado, considerando a taxa de crescimento como sendo proporcional à população em cada instante. (([6]), p. 334). Assim

$$\frac{dP}{dt} = \beta(P)P \tag{3.16}$$

com $\beta(P) = r(\frac{K-P}{K})$, $r > 0$ e K sendo o valor limite da população. Desta forma $\beta(P)$ tende a zero quando $P \to K$.

Explicitando $\beta(P)$ na equação 3.16, e supondo que $P(0) = P_0$ seja dado, tem-se o modelo clássico de Verhurst ou modelo logístico:

$$\begin{cases} \dfrac{dP}{dt} = rP\left(1 - \dfrac{P}{K}\right) \\ P(0) = P_0, r > 0 \end{cases} \tag{3.17}$$

Observamos que $P(t) = 0$ e $P(t) = K$ são soluções da equação diferencial dada em (2.5). Sua solução analítica é obtida por integração após a separação das variáveis, isto é,

$$\int \frac{dP}{P\left(1 - \dfrac{P}{K}\right)} = \int rdt.$$

Usando a técnica de frações parciais para resolver a integral do 1º menbro, obtém-se

$$\int \frac{dP}{P(1-\frac{P}{K})} = \int \left(\frac{1}{P} + \frac{\frac{1}{K}}{1-\frac{P}{K}}\right) dP = \ln|P| - \ln\left|1 - \frac{P}{K}\right|.$$

Logo,

$$\ln\left|\frac{P(t)}{1-\frac{P(t)}{K}}\right| = rt + c$$

Usando a condição inicial $P(0) = P_0$, pode-se determinar o valor da constante de integração c:

$$c = \ln\left|\frac{P_0}{1-\frac{P_0}{K}}\right| = \ln\left|\frac{P_0K}{K-P_0}\right|.$$

Portanto

$$\ln\left|\frac{P(t)K}{K-P(t)}\right| = rt + \ln\left|\frac{P_0K}{K-P_0}\right|,$$

ou seja,

$$\ln\left|\frac{P(K-P_0)}{P_0(K-P)}\right| = rt \Longrightarrow \frac{P}{K-P} = \frac{P_0}{K-P_0}e^{rt}.$$

Explicitando $P(t)$, obtém-se

$$P(t) = \frac{K}{(\frac{K}{P_0}-1)e^{-rt}+1}$$

$$P(t) = \frac{KP_0}{(K-P_0)e^{-rt}+P_0}. \tag{3.18}$$

A curva $P(t)$ é denominada logística e, de sua expressão (3.18), pode-se observar que:

a) Se $P_0 < K$ então $P_0 < P(t) < K$ e $P(t) \to K$, crescendo. Neste caso a equação 3.17 mostra claramente que $\dfrac{dP}{dt} > 0$; e

b) se $P_0 > K$ então $P(t) \to K$, decrescendo. Neste caso, $\dfrac{dP}{dt} < 0$.

Considerando $P_0 = 1$, analisamos $\beta(P)$ graficamente para $K > P_0, K = P_0$ e $K < P_0$ nas figuras 3.2, 3.3 e 3.4 respectivamente. Observa-se que o comportamento dos mesmos vão de acordo com os itens *a* e *b*, além de manter-se constante quando atingir o equilíbrio. Isto é, $P_0 = K$. Podendo ainda ser descrito por $N + I = M + E$, como mostra a tabela 3.3.

Portanto, o modelo de Malthus e o de Verhurst apresentado serão analisado posteriormente concomitantemente com os dados do Atlas de desenvolvimento Humano no Brasil. Estes, serão aplicados

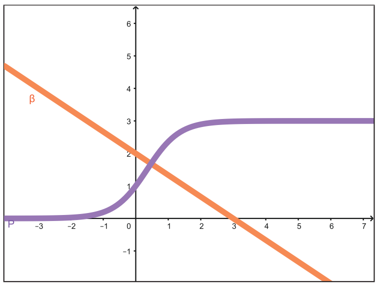

Figura 3.2: $K > P_0$

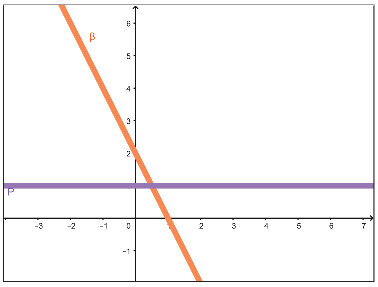

Figura 3.3: $K = P_0$

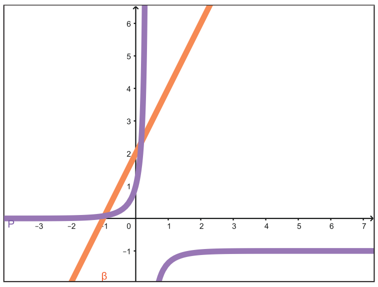

Figura 3.4: $K < P_0$

a população abastecida pela CAGEPA de Nazarezinho para se ter uma projeção da quantidade de água necessária para abastecer a população urbana no ano de 2028.

4. Aplicação dos dados observados e os resultados.

Nessa seção serão utilizados os modelos apresentados na população da cidade de Nazarezinho. E aliado a isto, será feito uma pequena comparação a respeito da população de Aguiar-Pb. Esta, parecida com a cidade analizada, da mesma região do alto sertão do estado e que sofre com as mesmas variações de chuvas irregulares durante os últimos anos, das quais já foram descritas no presente trabalho. Segundo o IBGE, Aguiar tem atualmente uma população estimada de 5.640 habitantes e fica há 69 Km da cidade de Nazarezinho. A mesma tem atualmente uma média diária de distribuição de água de aproximadamente $416,667m^3l/dia$ e aplicada a população urbana do mesmo ano, obtém-se uma média de consumo per capita de aproximadamente $134,54$ litros/dia. Os dados da referida cidade, foram obtidos de forma análoga aos dados da cidade de Nazarezinho.

4.1.Modelo de Malthus

Inicialmente serão mostrados na tabela 4.1 os dados disponibilizados pelo Atlas do Desenvolvimento Humano no Brasil 2013. Estes referentes a população urbana de Nazarezinho e Aguiar como também os dados estimados para os anos seguintes, obtidos a partir dos dados do IBGE, os quais serão analisados posteriormente.

Ano	Nazarezinho	Aguiar
2008	3.094	2.613
2013	3.319	2.833
2018	3.544	3.053
2023	3.769	3.273
2028	3.994	3.493

Tabela 4.1: População urbana de Nazarezinho e Aguiar Atlas/IBGE

Assim sendo, utilizando o modelo Malthusiano do problema valor inicial, serão mostrados os resultados populacionais obtidos a partir dos cálculos do modelo e comparados com os dados estimados pelo IBGE da cidade de Nazarezinho entre 2008 e 2028. Consequentemente será mostrado o quanto essa população se aproxima entre os resultados obtidos através dos modelos analisados. Esta análise será descrita num período de 05 em 05 anos. Pois, segundo Zill (([30]), p. 136), o modelo exponencial pode ser realístico para crescimento de algumas populações durante um intervalo de tempo relativamente curto.

Do modelo malthusiano vem:

$$P(t) = Ce^{kt} \tag{4.1}$$

Com os dados referentes a tabela 3.2, toma-se $P(0) = P_{2008} = 3.094$ e $t = 0$,daí segue que:

$$P(0) = Ce^{k.0}$$

Donde,

$$3.094 = C \therefore C = 3.094$$

.

Encontrando k: para $t = 5$, período de 05 em 05 anos, seguindo a tabela 3.2.

$$P(5) = P_{2013} = 3.319$$

$$3.319 = 3.094e^{5k}$$

$$e^{5k} = \frac{3.319}{3.094}$$

Da função logaritmica, tem-se,

$$5k = \ln\left(\frac{3.319}{3.094}\right)$$

então,

$$k = 0,014039756$$

Substituindo k na equação 4.1 para encontrar os intervalos de tempo analisados, temos:

$$P_{2008} = P(0) = C = 3.094$$

$$P_{2013} = P(5) = 3.094e^{5\times 0,014039756} = 3.319$$

$$P_{2018} = P(10) = 3.094e^{10\times 0,014039756} = 3.560$$

$$P_{2023} = P(15) = 3.094e^{15\times 0,014039756} = 3.819$$

$$P_{2028} = P(20) = 3.094e^{20\times 0,014039756} = 4.097$$

4.2.Modelo de Vehurst

Segundo Bassanezi ([6]), para usar a curva logística 3.18 como modelo de projeção de uma certa população deve-se estimar o valor de K.

Assim, supondo que daqui a vários anos a população urbana de Nazarezinho esteja limitada a 8.000 mil habitantes, sendo este valor populacional a capacidade total do meio em que estes indivíduos necessitam viver, levando em consideração todos os fatores e fenômenos ambientais, será calculado a taxa de crescimento populacional r.

Daí, Tomando como dados da tabela 3.2 $P(2008) = P(0) = 3.094$ e $P(t) = P(2013) = P(5) = 3.319$, basta aplicar na equação 3.18 para encontrar a taxa de crescimento populacional r.

Do modelo logístico de Verhurst, vem da equação 3.18:

$$P(t) = \frac{KP_0}{(K - P_0)e^{-rt} + P_0}$$

$$P(t) = \frac{8.000 \times 3.094}{(8.000 - 3.094)e^{-rt} + 3.094}$$

$$3.319 = \frac{24.752}{(4.906)e^{-5r} + 3.094}$$

Multiplicando meios pelos extremos, obtém-se

$$16.283014e^{-5r} + 10.268986 = 24.752$$

$$e^{-5r} = \frac{24.752 - 10.268986}{16.283014}$$

$$e^{-5r} = 0,8894553551$$

Utilizando as propriedades logarítmicas, tem-se

$$-5r = \ln(0,889455355)$$

Donde,

$$-5r = -0,117145964 \therefore r = 0,023429192$$

Logo, o modelo populacional logístico para encontrar o período de tempo analisado é dado por:

$$P(t) = \frac{24.752}{4.906e^{-0,023429192t} + 3.094} \tag{4.2}$$

Como $P(0)$ e $P(5)$ já foram usados para encontrar a taxa de crescimento populacional, basta calcular a partir do próximo período, pois se estes forem substituídos na equação 4.2 serão encontrados os mesmos valores da tabela 3.2.

Agora, sendo $P_{2018} = P(10)$ obtém-se

$$P(10) = \frac{24.752}{4.906e^{-10\times0,023429192} + 3.094} \therefore P(10) = 3.549$$

Da mesma forma para $P_{2023} = P(15)$,

$$P(15) = \frac{24.752}{4.906e^{-15\times0,023429192} + 3.094} \therefore P(15) = 3.781$$

Análogo também para $P_{2028} = P(20)$, donde

$$P(20) = \frac{24.752}{4.906e^{-20\times0,023429192} + 3.094} \therefore P(20) = 4.015$$

Diante dos dados observados através dos modelos de malthus e verhurst será mostrado na tabela 4.2 uma relação de proximidade entre os mesmos e uma média obtida entre esses modelos matemáticos com os dados populacionais estimados do IBGE. Sendo estes descritos num intervalo de tempo de 05 em 05 anos.

Período	IBGE	Malthus	Verhurst	IBGE/Malthus/Verhurst
2008	3.094	3.094	3.094	3.094
2013	3.319	3.319	3.319	3.319
2018	3.544	3.560	3.549	3.551
2023	3.769	3.819	3.781	3.790
2028	3.994	4.097	4.015	4.035

Tabela 4.2: Relação dos dados observados (O autor)

De forma análoga, os dados da população de Aguiar foram aplicados aos modelos de Malthus e Verhurst. E, assim, obtendo os seguintes resultados na tabela 4.3:

Período	IBGE	Malthus	Verhurst	IBGE/Malthus/Verhurst
2008	2.613	2.613	2.613	2.613
2013	2.833	2.833	2.833	2.833
2018	3.053	3.072	3.060	3.062
2023	3.273	3.330	3.295	3.299
2028	3.493	3.611	3.535	3.546

Tabela 4.3: Relação dos dados observados (O autor)

4.3.Metodologia

Do ponto de vista metodológico a pesquisa foi do tipo dados secundários, uma vez que a principal ferramenta de investigação da mesma foi o levantamento de informações junto ao escritório local da Cagepa na cidade de Nazarezinho-PB, com o objetivo de coletar dados acerca do abastecimento de água da cidade, além de informações sobre a história da fundação da Cagepa e da sede local na cidade entre outras.

Para a construção e elaboração da pesquisa, foram realizadas pesquisas bibliográficas e outros materiais disponíveis na internet acerca do assunto em questão, no intuito de proporcionar o arcabouço teórico necessário para o desenvolvimento deste trabalho. No que concerne às fontes utilizadas vale ressaltar autores como: Bassanezi ([6]) e Stewart ([29]), os quais serviram de suporte teórico para a realização da referida pesquisa.

4.4.Resultados

Sempre que se utiliza de uma fórmula ou mesmo de um modelo matemático, tem-se a finalidade de facilitar um determinado cálculo complexo, no qual servirá de embasamento para relacionar os dados analisados e conduzir a uma compreensão mais específica e próxima da realidade.

O presente trabalho não é diferente, pois se utiliza dos modelos exponencial e logístico para se fundamentar nos números populacionais futuros e aproximá-los da realidade de acordo com os dados do IBGE e, assim fazer uma projeção e relacioná-los com os dados estatísticos do abastecimento de água da cidade de Nazarezinho. Sendo estes dados positivos ou negativos, a empresa em questão, poderá se utilizar dessas informações para se adequar e se preparar para um melhor atendimento aos seus consumidores finais, ou seja, a população.

Diante das informações elencadas anteriormente, serão apresentados agora os resultados obtidos a partir do uso dos modelos de Malthus e Verhurst. Estes, com o intuito de fornecer os dados populacionais da cidade de Nazarezinho para daqui a 10 anos, e, consequentemente, obter uma estimativa da quantidade de água necessária para o consumo humano diário nesse período. Percebe-se ainda que na tabela 4.3 os dados obtidos são muito próximos dos dados estimados pelo IBGE.

Diante disso, ao analisar os dados populacionais obtidos através dos modelos exponencial e logístico, cabe agora compará-los com os dados dos anos de 2018 e 2028, como mostrado na tabela 4.4:

Ano	População	Média: Mal. Verh. IBGE	Consumo per capita	Consumo diário
2018	3.544	3.551	144,45	512.942
2028	3.994	4.035	144,45	582.856

Tabela 4.4: Elaborada pelo Autor

Verifica-se que na tabela 4.4, o consumo de água diário pela população urbana teve um crescimento de aproximadamente 69.914 l/dia, dados estes calculados pela média aritmética de Malthus, Verhurst e do IBGE. Entretanto, este acréscimo não trará prejuízo ou queda no abastecimento, pois a cidade de Nazarezinho atualmente dispõe de duas adutoras e vazão de água suficiente para esse abastecimento.

Ante o exposto, foi possível determinar uma estimativa da população de Nazarezinho para o ano de 2028 a partir dos modelos matemáticos estudados, e em seguida determinar a quantidade diária de água que será necessária para o abastecimento da cidade, no qual será de aproximadamente 582.856 litros de água por dia.

Em funções dessas projeções, tendo esse período estudado condições de invernos normais e o sistema de abastecimento operando normalmente e com a vazão atual, pode-se concluir que até o ano de 2028 a cidade de Nazarezinho não terá problemas em seu abastecimento de água. Isto, porque atualmente a cidade recebe água de duas captações, tendo assim, momentos em que é necessário desligar uma captação para não haver desperdício de água.

4.5.Conclusão

De acordo com os dados coletados na área de investigação do referido trabalho e com base na análise realizada, foi possível entender que o uso da modelagem matemática, através dos modelos matemáticos apresentados, só tem a contribuir e facilitar para se trabalhar com dados estatísticos e projetar as informações futuras que venha a contribuir para uma melhoria na vida da sociedade, no caso específico, a quantidade de água suficiente para abastecer a população da cidade de Nazarezinho. No qual fica evidente que através dos dados obtidos numa conjuntura de vários fatores da natureza, mesmo com algumas previsões de clima negativos, ainda sim fica viável uma tendência de água suficiente para esta referida população.

O desenvolvimento da presente pesquisa possibilita aos envolvidos o conhecimento e a experiência de se trabalhar com modelagem matemática aplicada a situações do cotidiano, como foi o caso abordado sobre a questão do abastecimento de água da cidade de Nazarezinho. Essa ferramenta de pesquisa permite não apenas estimar um determinado resultado para um problema, mas também faz com que o pesquisador busque conhecer as inúmeras variáveis que circundam o fato estudado, desde detalhes acerca do surgimento, funcionamento e finalidades da situação em estudo.

Diante da coleta de dados no escritório local da CAGEPA, pode constatar que entre 2013 e 2016 houve uma discrepância de mais de 50% na distribuição de água da cidade, consequência esta, dos invernos irregulares no período. Entretanto, com a construção da nova adutora o problema foi sanado, voltando assim, a população a receber o precioso líquido em suas residências fornecidas pela CAGEPA.

A partir dos dados de distribuição coletados, em um segundo momentos da pesquisa, foram relacionados e aplicados nos modelos matemáticos em questão. Daí pode-se explanar e projetar uma população futura da cidade de Nazarezinho e, consequentemente, chegar à finalidade do referido trabalho, o qual buscava a partir desses dados encontrar um método que viesse a contribuir num futuro próximo positivamente na distribuição de água da cidade. E, diante da realidade observada através das análises dos dados, ficou evidente que a modelagem matemática aqui aplicada foi de grande importância para este trabalho.

Em síntese, tratar da questão do abastecimento de água da cidade de Nazarezinho, tendo como suporte teórico os modelos Matemáticos de Malthus e Verhurst foi uma experiência bastante gratificante, pois durante o processo de realização desta pesquisa foi possível observar mais fortemente como a matemática pode se relacionar com situações do dia-a-dia. Dessa forma, fica evidente o potencial que existe de se trabalhar com modelagem matemática aplicada a educação básica, visto que se configura como um momento no qual o professor pode levar o conhecimento ao aluno de uma forma concreta, na qual o mesmo buscará não apenas utilizar um conhecimento matemático, mas também compreender como ele interaja com o mundo real.

Referências Bibliográficas

[1] AESA.(2019). *Agência Executiva das Águas do Estado da Paraíba,* ***Meteorologia-Chuvas****. Disponível em: http:// www.aesa.pb.gov.br/aesa-website/meteorologia-chuvas. Acesso em 18 de setembro de 2019*

[2] AESA.(2019). *Agência Executiva das Águas do Estado da Paraíba,* ***Prognóstico climático para o Estado da paraíba****, Campina Grande, 22 de Janeiro de 2019. Disponível em: https//www.aesa.pb.gov.br/aesa-website/wp-content/uploads/2019/01/previsão-climática-para-o-quadrimestre-FEVEREIRO-a-MAIO-de-2019-AESA.pdf. Acesso em 20 de maio de 2019.*

[3] ALMEIDA, Lourdes Maria Werle de; OLIVEIRA, Camila Fogaça de. ***REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACION MATEMÁTICA.*** *Edição 41, UNIÓN. Março de 2015, pág. 111.*

[4] BACAER, N.(2011) ***A short history of mathematical population dynamics****. New York: Springer.*

[5] BASSANEZI, Rodney Carlos. ***Ensino-aprendizagem com modelagem matemática****. 3ª ed. São Paulo: Editora Contexto, 2009.*

[6] BASSANEZI, Rodney Carlos. ***Ensino-aprendizagem com modelagem matemática: uma nova estratégia****. São Paulo; Contexto 2002.*

[7] Boyce, William E;1930- ***Equações diferenciiais elementares e problemas de valores de contorno****/William E; Boyce. Richard C. DiPrima; tradução e revisão Valéria de Magalhães Iório.- Rio de Janeiro: LTC, 2010.*

[8] BRASIL, *Resolução CONAMA nº20, de 18 de junho de 1986. Classificação das águas doces, salobras e salinas do território Nacional. Publicado no* ***Diário Oficial da União*** *de 30 de julho de 1986.*

[9] BRASIL, *Atlas do Desenvolvimento Humano no Brasil, 2013. Perfil do município de Nazarezinho. Disponível em: https://www.atlasbrasil.org.br/2013/pt/perfil-m/nazarezinho-pb. Acesso em: 25 de maio de 2019.*

[10] BRASIL, *Ministério da Saúde.* ***Portaria nº 2.914, de 12 de Dezembro de 2011****. Dispõe sobre os procedimentos de controle e vigilância da qualidade da água para o consumo humano e seu padrão de potabilidade. Brasília, Ministério da Saúde, 2011.*

[11] BRASIL, *Ministério da Saúde, ANVISA.* ***RDC nº 91****, de 30 de junho 2016. Dispõe sobre as boas práticas para o sistema de abastecimento de Água. Brasília, 30 de junho de 2016.*

[12] BRASIL, *Ministério da Saúde. Secretaria de Vigilância em Saúde. Coordenação-Geral de Vigilância em Saúde Ambiental.* ***Portaria MS nº518/2004****/Ministério da Saúde, Secretaria de Vigilância em Saúde, Coordenação-Geral de Vigilância em Saúde Ambiental - Brasília: Editora do Ministério da Saúde, 2005.*

[13] BRASIL, *Sinópise do Censo Demográfico 2010, Paraíba, Nazarezinho.* ***IBGE****. Acesso em 25 de maio de 2019. Disponível em:https://censo2010.ibge.gov.br/sinopse/index.php.*

[14] BUENO, Vilma Candida. ***MODELAGEM MATEMÁTICA: QUATRO MANEIRAS DE COMPREENDÊ-LA****. 2011, pág. 16.*

[15] CAGEPA– *Companhia de Água e Esgoto da Paraiba.* ***Apresentação e história da empresa****. Disponível em: https://www.cagepa.pb.gov.br/institucional/historia. Acesso em 25 de maio de 2019.*

[16] CAGEPA– *Companhia de Água e Esgoto da Paraiba.* ***Notícias****. Disponível em: https://www.cagepa.pb.gov.br/cagepa-fecha-ano-de-2017-com-superavit-recorde-de-r-65-milhoes/. Acesso em 25 de maio de 2019.*

[17] CAGEPA– *Companhia de Água e Esgoto da Paraiba.* ***Notícias****. Disponível em: https://www.cagepa.pb.gov.br/cagepa-e-uma-das-mil-maiores-empresas-do-pais/. Acesso em 25 de maio de 2019.*

[18] CAGEPA– *Companhia de Água e Esgoto da Paraiba.* ***Transparência, Código de Conduta e Integridade****. Disponível em: https://www.cagepa.pb.gov.br/codigo-de-conduta-e-integridade/. Acesso em 25 de maio de 2019.*

[19] "Dinâmica das populações"*em Só Biologia.* ***Virtuous Tecnologia da informação****, 2008-2019. Consultado em 06/11/2019 às 13:23. Disponível em: https://www.sobiologia.com.br/conteudos/bio-ecologia/ecologia16.php*

[20] IBGE– *INSTITUTO BRASILEIRO DE GEOGRAFIA E ESTATÍSTICA.* ***Panorama da cidade de Nazarezinho****. Disponível em: https://www.cidades.ibge.gov.br/brasil/pb/nazarezinho/panorama. acesso em 20 de maio de 2019*

[21] IBGE– *INSTITUTO BRASILEIRO DE GEOGRAFIA E ESTATÍSTICA.* ***Panorama do estado da Paraíba****. Disponível em: https://www.cidades.ibge.gov.br/brasil/pb/panorama. acesso em 25 de maio de 2019*

[22] LIMEIRA, Rodrigo. *Chuvas isoladas e início da estação chuvosa na PB.* ***Diario do Sertão****, Cajazeiras, 12 de fevereiro de 2019. Disponível em: https://www.diariodosertao.com.br/coluna/chuvas-isoladas-e-inicio-da-estacao-chuvosa-na-pb. Acesso em 20 de maio de 2019.*

[23] NAZAREZINHO– *Prefeitura Municipal de Nazarezinho.* ***Histórico de Nazarezinho****. Disponível em: https://www.nazarezinho.pb.gov.br/component/k2/item/5-nossa-historia.html. Acesso em 05 de março de 2019.*

[24] PEDROZA, Gilvan Vale. ***História da fundação da Cagepa de Nazarezinho-PB. Nazarezinho-PB****. Entrevista concedida a Francinaldo Pereira da Silva, 01 de dezembro de 2018.*

[25] Perfil socioeconômico da paraíba/ *Francisco José Araújo Bezerra...[et al.], Organizadores.– Fortaleza:* ***Banco do Nordeste do Brasil****, 2015.*

[26] RIPSA – *REDE INTERAGENCIAL DE INFORMAÇÕES PARA A SAÚDE.* ***Indicadores básicos para a saúde no brasil****: conceitos e aplicações. 2 ed. Brasília: Organização Pan-Americana de Saúde, 2008.*

[27] SNIS- *Sistema Nacional de informações sobre Saneamento.* ***Diagnóstico dos serviços de Água e Esgoto. Consumo per capita-2018.*** *Disponível em: http://www.snis.gov.br/downloads/diagnosticos/ae/2018/diagnosticos-SNIS-AE-2018-Capitulo-07.pdf.*

[28] SOTOMAYOR, Jorge. ***Equações Diferenciais Ordinárias****. São Paulo, novembro de 2009. Pág. 18. Acesso em: 29 de novembro de 2019.*

[29] Stewart, James. ***Cálculo****, volume 2 / James Stewart; tradução EZ2 Translate.– São Paulo: Cengage Learning, 2013.*

[30] ZILL, Dennis G. ***Equações diferenciais****, volume 1/Dennis G. Zill, Michael R. Cullen; tradução Antonio Zumpano, revisão técnica: Antonio pertence Jr. São Paulo: Pearson Makron Books, 2001.*