INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA DA PARAÍBA
ESPECIALIZAÇÃO EM ENSINO DE MATEMÁTICA

ROMÁRIO DA SILVA SANTOS

MODELAGEM MATEMÁTICA APLICADA A FENÔMENOS FÍSICOS NO QUE DIZ RESPEITO AOS MOVIMENTOS OSCILATÓRIOS PARA APLICAÇÕES NO ENSINO MÉDIO.

CAMPINA GRANDE - PB

2021

ROMÁRIO DA SILVA SANTOS

MODELAGEM MATEMÁTICA APLICADA A FENÔMENOS FÍSICOS NO QUE DIZ RESPEITO AOS MOVIMENTOS OSCILATÓRIOS PARA APLICAÇÕES NO ENSINO MÉDIO.

Trabalho de Conclusão de Curso realizado sob orientação do Prof. Me. Orlando Batista de Almeida, apresentado em complemetação aos requisitos para obtenção do título de Especialista em Ensino de Matemática.

Orientador: Professor Me. ORLANDO BATISTA DE ALMEIDA

CAMPINA GRANDE - PB

2021

S237m

Santos, Romário da Silva.
Modelagem matemática aplicada a fenômenos físicos no que diz respeito aos movimentos oscilatórios para aplicações no ensino médio. Romário da Silva Santos. 2021.
52 f.: il.
Monografia (Especialização em ensino de Matemática) - Instituto Federal da Paraíba, Campina Grande, 2021.
Orientador: Prof. Me. Orlando Batista de Almeida

1.Matemática. 2.Ensino Médio. 3.Movimento oscilatórios. I. Título.

CDU 51

ROMÁRIO DA SILVA SANTOS

MODELAGEM MATEMÁTICA APLICADOS À FENÔMENOS FÍSICOS, NO QUE DIZ RESPEITO AOS MOVIMENTOS OSCILATÓRIOS PARA APLICAÇÕES NO ENSINO MÉDIO.

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado no Curso de Especialização em Ensino de Matemática do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia da Paraíba (IFPB) – Campus Campina Grande, como requisito parcial para obtenção do título de Especialista em Ensino de Matemática.

Orientador: Prof. Ms. Orlando Batista de Almeida

Aprovado em: 27/05/2021.

BANCA EXAMINADORA

Orlando Batista de Almeida

Prof. Ms. Orlando Batista de Almeida
Orientador - Instituto Federal da Paraíba (IFPB)

Salomão Pereira de Almeida

Prof. Dr. Salomão Pereira de Almeida
Instituto Federal da Paraíba (IFPB)

Cicero da Silva Pereira

Prof. Ms. Cícero da Silva Pereira
Instituto Federal da Paraíba (IFPB)

À minha família

Agradecimentos

- Agradeço a Deus, Aquele que é o depósito de minha fé e me faz contemplar toda Sua bondade através das diversas formas de agir até esta etapa do meu viver.
- Ao meu professor e orientador, Me. Orlando Batista de Almeida, que com muita paciência, incentivos e conselhos me ajudaram de forma especial nesta etapa final de meu curso, tornando a relação professor-aluno tão estreita que virou uma grande amizade.
- Aos meus pais, Adenilson dos Santos e Marilene da Silva Santos, que com muito esforço trabalharam para formarem a pessoa que sou hoje e para que todos os meus desejos fossem realizados. Eles merecem o meu total reconhecimento por cada conquista que já alcancei e que ainda vou alcançar.
- À minha esposa, Gabriella Alves Araújo, que sempre me apoiou e deu carinho durante meu percurso acadêmico nas mais diversas horas, sendo companheira nas angústias e alegrias.
- E meus irmãos, Ramon da Silva Santos, Ravel Vinícius da Silva Santos e João Victor da Silva Santos, que têm em mim muito respeito e admiração e que são verdadeiros amigos para todos os momentos da minha vida.
- Aos colegas que foram frutos deste curso e que estiveram comigo nos vários momentos, bons ou ruins, neste período tão difícil para o mundo inteiro. Mesmo ficando distantes fisicamente durante muito tempo, sem vocês essa trajetória não teria sido tão prazerosa e gratificante.
- Aos professores do Curso de Especialização em Ensino de Matemática, que com experiência e profissionalismo me auxiliaram na construção do meu conhecimento e de meu caráter, nesta jornada que foi um salto exponencial para minha pessoa.
- Por fim, agradeço a todos que participaram de maneira direta e indireta para a realização de mais esta conquista para meu currículo e minha vida, a qual ficará para sempre em minha memória.

"Sê humilde para evitar o orgulho, mas voa alto para alcançar a sabedoria."
(Santo Agostinho)

Resumo

O ensino da matemática tem sido cada vez mais questionado já que, por muitas vezes, não se mostra significativo e real para a vida dos alunos. Este fato evidencia a dificuldade da aprendizagem pelos estudantes que, na maioria das vezes, servem como meros espectadores de temas que jamais serão observados de maneira crítica e concreta com a utilização da linguagem matemática. Nesta perspectiva, vêm surgindo cada vez mais pesquisas e práticas de aprendizagem significativa e palpável desta matéria. Dentro destas práticas, observamos a Modelagem Matemática, método que confere protagonismo ao estudante no processo de ensino-aprendizagem. Esse tipo de abordagem pode ser entendida como uma estratégia de ensino que possibilita ao estudante e ao professor trabalhar conteúdos da matemática partindo de fenômenos de sua realidade. Nela, o assunto é construído a partir da vivência de cada um de maneira prática e lúdica, incentivando o raciocínio, observação e investigação em conjunto. Essa é uma metodologia utilizada para se obter explicações e visões acerca de situações reais escolhidas para turma ou a partir dela. Neste trabalho, procuramos abordar o ensino de Funções Trigonométricas através da Modelagem Matemática partindo de um caso do movimento oscilatório, o movimento harmônico simples (MHS). Abordaremos um sistema que, se tirarmos de sua posição estável, ou seja, de seu repouso, ele irá realizar vários movimentos de maneira periódica até retornar ao estado inicial observado antes dessa perturbação provocada. Nosso intuito é o de tratar de maneira enfática o tema oscilações, que são fenômenos que se repetem várias vezes devido às forças restauradoras do movimento e estão presentes em alguns casos do cotidiano, regidos por funções de comportamento periódico. Pretendemos entender como é construído o formalismo desse fenômeno e repassá-lo em sala de aula de maneira que fique clara e objetificada na vida de cada um. Além de fazermos uma revisão acerca das Equações Diferenciais, essencial para o entendimento matemático do problema em questão, propomos uma transposição e uma sequência didática de abordagem desse assunto para ser trabalhado no Ensino Médio das turmas de Matemática.

Palavras-chave: Movimentos ondulatórios, funções trigonométricas, modelagem matemática, aprendizagem significativa.

Abstract

The teaching of mathematics has been increasingly questioned since, many times, it does not prove to be meaningful and real for the students' lives. This fact highlights the difficulty of learning by students who, in most cases, serve as mere spectators of themes that will never be observed in a critical and concrete way with the use of mathematical language. In this perspective, more and more researches and practices of meaningful and palpable learning of this matter are appearing. Within these practices, we observe Mathematical Modeling, a method that gives prominence to the student in the teaching-learning process. This type of approach can be understood as a teaching strategy that allows the student and the teacher to work on mathematical content based on phenomena in their reality. In it, the subject is constructed from the experience of each one in a practical and playful way, encouraging reasoning, observation and investigation together. This is a methodology used to obtain explanations and views about real situations chosen for or from the class. In this work, we try to approach the teaching of Trigonometric Functions through Mathematical Modeling starting from a case of oscillatory movement, the simple harmonic movement (MHS). We will approach a system that, if we take it out of its stable position, that is, from its rest, it will perform several movements periodically until it returns to the initial state observed before this disturbance caused. Our aim is to emphatically address the topic of oscillations, which are phenomena that are repeated several times due to the restorative forces of movement and are present in some cases of daily life, governed by functions of periodic behavior. We intend to understand how the formalism of this phenomenon is constructed and pass it on in the classroom in a way that is clear and objectified in each person's life. In addition to making a review about Differential Equations, essential for the mathematical understanding of the problem in question, we propose a transposition and a didactic sequence to approach this subject to be worked on in the High School of Mathematics classes.

Keywords: Wave movements, trigonometric functions, mathematical modeling, meaningful learning.

Lista de ilustrações

Lista de abreviaturas e siglas

IFPB	Instituto Federal da Paraíba
MHS	Movimento Harmônico Simples
PCN	Parâmetros Curriculares Nacionais
BNCC	Base Nacional Comum Curricular
ED	Equação Diferencial
EDO	Equação Diferencial Ordinária
EDP	Equação Diferencial Parcial

Lista de símbolos

ω	Letra grega Omega minúscula
π	Letra grega Pi minúscula
θ	Letra grega Téta minúscula
det	Determinante
sin	Representação da função Seno
cos	Representação da função Cosseno
tan	Representação da função Tangente
cot	Representação da função Cotangente
$\rightarrow$	Representação para uma unidade vetorial
$\hat{}$	Representação para um vetor unitário
$\frac{d}{dt}$	Representação da derivada de primeira ordem de um termo em relação ao tempo
$\frac{d^2}{d^2t}$	Representação da derivada de segunda ordem de um termo em relação ao tempo
e	Representação da função exponencial (constante de Euler)
º	Representação para indicar medida de um ângulo em graus
Z	Representação para um número complexo
i	Unidade imaginária de um número complexo
W	Representação do Wronskiano
$\mathbb{C}$	Conjunto dos números complexos

Sumário

1 Introdução

A matemática como área do conhecimento e disciplina escolar é essencial na resolução de diversas situações das práticas sociais, de outras áreas do conhecimento e da sua própria estrutura interna. É fácil ver que o conhecimento matemático é fundamental em muitas situações, como por exemplo, na análise de diversos fenômenos físicos, como instrumento para lidar com situações cotidianas, ou ainda, como forma de desenvolver habilidades de pensamento daqueles que a estudam.

Os conhecimentos aprendidos na disciplina de matemática muitas vezes são dissociados das práticas do cotidiano e de outras disciplinas, como a Física, por exemplo, que os alunos aprendem. Segundo pesquisas nas diferentes esferas do ensino, os estudantes apresentam dificuldades, principalmente, com relação aos conceitos matemáticos essenciais à resolução de problemas, seja da própria matemática ou de matérias que a utilizam seu formalismo em sua estrutura. Sobre essa perspectiva, (CALDEIRA et al., 2011) , consideram que na escola as atividades propostas têm, em geral, pouca ou nenhuma relação com a realidade. Esses autores nos provocam a refletir sobre o quanto estarmos acostumados, como docentes, a trabalhar as atividades na categoria de exercícios de reconhecimento, de repetição, de algoritmo e, eventualmente, problemas de aplicação.

A Educação Matemática surge com o intuito de dar mais significação aos saberes aprendidos e pode ser abordada por meio de tendências metodológicas que fundamentam a prática docente, entre as quais destacamos a Modelagem Matemática. Essa prática pode ser entendida como uma estratégia de ensino que possibilita ao estudante e ao professor a abordagem de conteúdos da matemática partindo de fenômenos da realidade. Em outras palavras, esse método tem como principal objetivo explicar matematicamente situações do cotidiano e das mais diferentes áreas da Ciência, com o propósito de educar matematicamente o individuo. Além disso, a Modelagem Matemática proporciona uma vinculação entre os conceitos matemáticos e a realidade, valorizando o pensamento crítico e reflexivo de quem a pratica e é isso que nos instiga a produzir este trabalho. Pretendemos estudar alguns problemas da Física a partir da Modelagem Matemática para que possamos mostrar uma relação destas disciplinas entre si e o mundo vivido pelos estudantes.

O pensar e o fazer se mobilizam e se desenvolvem quando o indivíduo está engajado ativamente no ato de resolver algo proposto que faça com que este seja desafiado de alguma forma. Nisso, a Modelagem Matemática é uma das inúmeras formas de trabalho possíveis na sala de aula onde ocorre uma diferenciação do que é tradicionalmente realizado. A Modelagem, como é por muitas vezes chamada, pode ser utilizada como importante recurso nos processos de ensino e de aprendizagem da Matemática uma vez que possibilita ao docente um tratamento de conteúdos matemáticos por meio da problematização e modelação de fenômenos reais e sociais vividos pelos alunos e suas famílias no cotidiano. Pretendemos estudar maneiras em que os estudantes sintam-se motivados ao estudo desta disciplina levando-o a pensar de forma diferente do que é normalmente feito em sala de aula. Basicamente temos uma forma de inverter o modelo tradicional de ensino, visto que por meio da modelagem selecionam-se primeiramente os problemas e deles emergem os conteúdos matemáticos, de modo a resolvê-los (BURAK et al., 1992).

Ao percebermos os estudantes motivados para aprender os conteúdos ensinados a partir de situações reais, possivelmente vivenciadas por eles, teremos melhores condições para decidir o que fazer no decorrer do processo de ensino e já que será possível visualizar melhor os aspectos qualitativos e quantitativos da situação inicial proposta e como ele vai se desenvolver. O entrelaçamento entre vários assuntos dentro da matemática permite uma interação e uma interdependência entre eles, de modo que um mesmo assunto pode ser aplicado em diferentes momentos e retomado sempre que necessário e aumentando a envergadura de conhecimento para outras áreas.

1.1 Objetivo Geral

Propor uma metodologia de ensino de funções trigonométricas a partir da modelagem matemática de um movimento harmônico simples.

1.2 Objetivos Específicos

- Escolher um sistema ou fenômeno físico e aplicar a modelagem matemática devida ao referido modelo;
- Revisar o arcabouço matemático necessário para o estudo deste caso;
- Identificar e controlar as variáveis destas soluções;
- Entender o sistema escolhido e suas consequências no cotidiano dos alunos;
- Procurar variações do modelo para ampliar a gama de entendimento;
- Usar ferramentas didáticas para ajudar no entendimento do estudante em sala de aula;
- Pensar em formas que aproveitem ao máximo aquilo o que foi abordado.

2 Modelagem Matemática

Muitas das capacidades intelectuais dos seres humanos estão fortemente ligadas na construção das competências que a Matemática pode proporcionar. Um déficit nesta formação poderá trazer algumas dificuldades para o desenvolvimento de algumas capacidades de interação com o ambiente social em que o mesmo pertença, além da comunicação, da resolução de problemas, na tomada de decisões que exijam uma análise mais detalhada e criteriosa, entre outros.

Na educação básica, principalmente no setor público, encontramos várias dificuldades no processo de ensino aprendizagem da Matemática e disciplinas correlacionadas a esta, como a Física. É comum a falta de atração entre a disciplina e os alunos, o que pode ser ocasionada por uma aula enfadonha e metódica que não desperte o interesse dos participantes já que as relações que envolvem o processo de ensino e aprendizagem são complexas e exigem um esforço contínuo por parte dos professores e do alunado.

É neste contexto que esta pesquisa se desenvolve, como contribuição para o trabalho docente, apresentando uma proposta metodológica baseada na Modelagem Matemática, a qual pode ser uma contribuição para melhorar a relação de ensino de uma Matemática mais real, inserida no cotidiano dos alunos, ajudando na organização do pensamento e sendo um instrumento de interpretação e entendimento para que o aluno exerça o seu papel de cidadão pensante e capaz de discutir os problemas da comunidade em que está inserido, além do fato de ser uma prática extremamente interdisciplinar.

No início do século XX, quando matemáticos dito como puros e aplicados discutiram métodos para ensinar Matemática, surge as primeiras aplicações de modelagem. Segundo (BORBA; VILLARREAL, 2006), elas surgem no Brasil a partir da difusão das ideias de Paulo Freire e Ubiratan D'Ambrosio entre as décadas de 1970 e 1980, valorizando os alunos em suas dimensões sociais. Ainda segundo (BELTRÃO et al., 2009), vários matemáticos brasileiros que participaram de congressos internacionais da área trouxeram a modelagem matemática no Brasil. O objetivo era fazer uso da modelagem em sala de aula como um meio de motivar o aluno para a aprendizagem.

Para (BASSANEZI, 2015), a Modelagem Matemática é uma metodologia utilizada para obtermos alguma explicação ou entendimento de determinadas situações reais. Assim, a seguinte proposta de trabalho de conclusão de curso visa abordar uma proposta para o ensino da matemática unindo-se com os conhecimentos da Física para buscar uma melhor estruturação de conhecimento e interesse para os alunos. Para isso, pretendemos fazer abordagens que envolvam aplicações destas disciplinas em conteúdos que possam ser modulados matematicamente e sirvam para tornar mais real o aprendizado dos assuntos destas disciplinas. Podemos ter como exemplos de aplicações desta metodologia assuntos como construções de imóveis e veículos, os quais podem trazer assuntos que sejam de aplicação real e visem ampliar a gama de conhecimentos dos estudantes da educação básica em conhecimentos das áreas exatas e por consequente tragam um maior interesse e preparação para os discentes adentrarem no campo das aplicações matemáticas.

Sabendo que na Matemática, uma das características essenciais é o uso da abstração de conceitos aprendidos em séries anteriores e que, quando não foram bem assimilados, podem se tornar distantes e irreais para os alunos, o professor se torna figura fundamental neste processo de ensino-aprendizagem. Como observa (SADOVSKY, 2007):

> [...] a Matemática, não só no Brasil, é apresentada sem vínculos com os problemas que fazem sentido na vida das crianças e dos adolescentes. Os aspectos mais interessantes da disciplina, como resolver problemas, discutir ideias, checar informações e ser desafiado, são pouco explorados na escola. O ensino se resume a regras mecânicas que ninguém sabe, nem o professor, para que servem. (SADOVSKY, 2007).

Nisto, vemos que o professor deve atuar como orientador do processo de ensino que deve estar centrado para os estudantes, selecionando e organizando as informações e elaborando hipóteses e problemas para criar meios de resolução e mobilização de conhecimentos já adquiridos para construir argumentos para expor suas "descobertas" no processo de ensino. No entender de (BASSANEZI, 2015), a maior dificuldade encontrada pelos professores que resolvem trabalhar com a modelagem matemática em suas práticas didáticas é a de romper a linha do "ensino tradicional" para uma forma um pouco mais criativa de ensino.

> No ensino tradicional, o objetivo de estudo se apresenta quase sempre bem delineado, obedecendo a uma sequencia predeterminada, com um objetivo final muito claro que, muitas vezes, nada mais é que "cumprir o programa da disciplina"! Ora, ensinar a pensar matematicamente é muito mais que isso. Portanto, é imprescindível mudar métodos e buscar processos alternativos para transmissão e aquisição de conhecimentos. (BASSANEZI, 2015).

O docente pode decidir como deve se iniciar a prática da Modelagem em seu projeto pedagógico, seja partindo dele ou perguntando a turma um tema de relevância que eles queiram trabalhar na disciplina. Definido o tema do problema, começa a busca informações sobre o assunto, em livros, revistas, entrevistas, vídeos e outras fontes diversas.

Quanto maior for o envolvimento e o aprofundamento com o tema por ambas as partes, maior será a facilidade em compreendê-lo. Nesta etapa, o professor deve promover a investigação do assunto por parte dos alunos no sentido de entender cada vez mais aquilo o que deve ser pesquisado. Movidos pela curiosidade, os alunos iniciam a matematização do fato, ou seja, o surgimento de perguntas decorrentes da análise dos dados coletados e das observações feitas diretamente no ambiente pesquisado para que sejam propostas fórmulas que descrevam o comportamento do referido fato a que esteja sendo estudado para que se possa descrever como ele ocorre ou acontecerá no futuro.

O envolvimento cultural dos alunos com o problema é importantíssimo para que sejam levados a momentos questionadores de resolução de situações que envolvam problematização matemática, e também física, e buscarem significação decorrente das relações inerentes do problema e, posteriormente, ter a possibilidade de buscar maneiras de solucioná-lo. Este momento é propício para o desenvolvimento, a formulação e a construção do pensar matemático através de um modelo matemático adequado para a resolução dos problemas levantados.

Neste trabalho, pretendemos utilizar o método de Modelagem matemática para auxiliar no estudo dos movimentos oscilatórios. Para isso, partiremos da descrição matemática de um caso específico deste fenômeno para entendermos como ele atua e suas implicações. Abordaremos seus conceitos mais amplos para depois significá-los para a prática docente. Assim, faremos uma breve revisão de alguns conceitos matemáticos necessários para embasamento e entendimento geral da modelagem matemática proposta.

3 Equações diferenciais

Neste capítulo iremos tratar do tema Equações Diferenciais. Achamos que o tema é essencial para um completo entendimento matemático do modelo que será trabalhado no nosso estudo. Assim, vamos tentar conceituar os principais tópicos a respeito do tema utilizando como base as referências (BOYCE; DIPRIMA, 1985) e (ZILL; CULLEN, 2001).

Definição: Equação Diferencial é toda equação que contém as derivadas ou diferenciais de uma ou mais variáveis dependentes em relação a uma ou mais variáveis independentes. Vejamos alguns exemplos:

1) Variável y dependente do t, que é a variável independente:

$$\frac{dy}{dt} - 4y = 3. \tag{3.1}$$

2) Variáveis u e v dependentes de x, que é a variável independente:

$$\frac{du}{dx} - \frac{dv}{dx} = x. \tag{3.2}$$

3) Variável y dependente de x, que é a variável independente:

$$(y - x)dx + 6xdy = 0. \tag{3.3}$$

4) Variável y dependente de x e t, que são as variáveis independentes:

$$\frac{d^2y}{dt^2} - 2\frac{dy}{dx} + 6y = 0. \tag{3.4}$$

3.1 Classificação das Equações Diferenciais (ED's)

As ED têm três principais formas de classificação. Vamos verificar como se dá essa classificação.

3.1.1 Quanto ao tipo

Quanto ao tipo, podemos ter dois tipos de ED's: as ordinárias e as parciais.

3.1.1.1 Equação Diferencial Ordinária (EDO)

Definição: É toda equação diferencial que contém somente derivadas ordinárias de uma ou mais variáveis dependentes com relação a uma única variável independente.

Exemplos:

1) Variável y dependente da variável independente x:

$$xdy + ydx = 0 \quad ou \quad \frac{dx}{dy} = \frac{-y}{x}. \tag{3.5}$$

2) Variável y dependente da variável independente t:

$$y'' - y' = 0 \quad ou \quad \frac{d^2y(t)}{dt^2} - \frac{dy(t)}{dt} = 0. \tag{3.6}$$

3) Variáveis u e v dependentes da variável independente x:

$$\frac{du}{dx} - \frac{dv}{dx} = x. \tag{3.7}$$

4) Podemos representar a equação de decaimento radioativo[1] com o tempo com a seguinte equação:

$$\frac{dR(t)}{dt} = -k.R(t), \tag{3.8}$$

onde k é uma constante.

3.1.1.2 Equação Diferencial Parcial (EDP)

Definição: é toda equação diferencial que envolve as derivadas parciais de uma ou mais variáveis dependentes de duas ou mais variáveis independentes.

Exemplos:

1) Derivada parcial de u em relação a y e derivada parcial de v em relação a x:

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}, \tag{3.9}$$

sendo $u = u(x, y)$, u e v variáveis dependentes e x e y variáveis independentes.

2) Derivadas parciais de u em relação a x:

$$x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial x} = u, \tag{3.10}$$

onde u é uma variável dependente e x e y variáveis independentes.

3) Derivadas parciais de u em relação a x e a t:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - 2\frac{\partial u}{\partial t}, \tag{3.11}$$

[1] Um decaimento radioativo ocorre quando isótopos instáveis têm seus núcleos rompidos em razão da instabilidade atômica. Com a proximidade dos prótons no núcleo do átomo, eles passam a se repelir na tentativa de tomar o maior espaço possível. Diante disso, o núcleo se rompe, por não conseguir comportar essas cargas repelentes. Podemos tomar como exemplo o isótopo Urânio (U - 238) é desintegrado quando seu núcleo se rompe.

onde u é uma variável dependente e x e y variáveis independentes.

4) Equação do potencial:

$$\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial y^2} = 0, \tag{3.12}$$

onde u é uma variável dependente e x e y variáveis independentes.

5) Equação da difusão ou equação do calor:

$$\alpha^2 \frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x^2} = \frac{\partial u(x,y)}{\partial t}, \tag{3.13}$$

onde u é uma variável dependente e x e y variáveis independentes.

6) Equação de onda[2]:

$$a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t). \tag{3.14}$$

3.1.2 Quanto a ordem

A segunda classificação das ED's diz respeito a sua ordem.

Definição: A ordem de uma equação diferencial é a maior ordem de derivada encontrada na equação.

Exemplos:

1) EDO de 2ª ordem:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + 5\left(\frac{dy}{dx}\right)^4 - 4y = 2e^x. \tag{3.15}$$

2) EDO de 1ª ordem:

$$(y-x)dx + 6xdy = 0 \quad ou \quad \frac{dy}{dx} = \frac{x-y}{6x} \tag{3.16}$$

3) EDP de 5ª ordem:

$$a^2 \frac{\partial^5 u}{\partial x^5} + \frac{\partial^3 u}{\partial t^3} = 0. \tag{3.17}$$

3.1.3 Quanto a Linearidade

Ainda podemos ter a classificação das Equações Diferenciais em relação a sua linearidade.

[2] Os exemplos 5 e 6 dessa seção são abordados de maneira mais enfática na Termodinâmica e na Física Moderna, ambos assuntos tratados principalmente na Física. Para um maior aprofundamento, recomendamos os livros da coleção (RESNICK; HALLIDAY; WALKER, 1988).

Definição: Uma equação diferencial é linear, quando as variáveis dependentes e todas as suas derivadas são de 1º grau e cada coeficiente dessas variáveis depende apenas das variáveis independentes.

Exemplos:

1) EDO de 1ª ordem linear:

$$xdy + ydx = 0. \tag{3.18}$$

2) EDO de 3ª ordem linear:

$$y''' - 2y' + 5y = 0. \tag{3.19}$$

3) EDO de 5ª ordem linear:

$$x^3\frac{d^5y}{dx^5} - x^2\frac{d^2y}{dx^2} + 3x\frac{dy}{dx} + 5y = e^x. \tag{3.20}$$

3.2 Solução de Equação Diferencial Linear

Em nosso trabalho, temos um maior interesse nas ED's lineares. Assim, vamos abordar mais aspectos sobre elas, começando por sua solução.

Definição: É uma família de funções de y definida em um intervalo aberto I, que quando substituída na equação diferencial reduz a mesma a uma identidade.

Exemplo: A Função $y = f(x) = xe^x$ é uma solução para equação diferencial ordinária linear de 2ª ordem $y'' + 2y' + y = 0$.

De fato: Temos que

$$y' = e^x + xe^x \quad e \quad y'' = 2e^x + xe^x. \tag{3.21}$$

Assim,

$$y'' - 2y' + y = (2e^x + xe^x) - 2(e^x + xe^x) + xe^x, \tag{3.22}$$

logo,

$$y'' - 2y' + y = 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}. \tag{3.23}$$

3.3 Equações Diferenciais Ordinárias Lineares de 2ª Ordem

Vamos falar das equações ordinárias lineares de ordem 2, as quais serão relevantes para o desenvolvimento do nosso trabalho.

Definição: é todo equação diferencial que pode ser escrita sob a forma:

$$a(x)\frac{d^2y}{dx^2} + b(x)\frac{dy}{dx} + c(x)y = d(x), \tag{3.24}$$

ou

$$a(x)y'' + b(x)y' + c(x)y = d(x). \tag{3.25}$$

Exemplos:

I) $y'' - 2y' + y = 0$;

II) $y'' + 16y = 0$;

III) $xy'' - 3xy' + 2y = 5$.

3.4 Equação Diferencial Ordinária Linear de 2ª Ordem Homogênea

Definição: É toda equação diferencial que pode ser escrita conforme 3.24 e 3.25 sob a forma

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0, \tag{3.26}$$

em que $d(x) = 0$, ou seja,

$$\frac{d^2y}{dx^2} + p(x)\frac{dy}{dx} + q(x)y = 0. \tag{3.27}$$

Exemplos:

1) $y'' + 3y' + 4y = 0$;

2) $y'' - 16y = 0$;

3) $\frac{d^2y}{dx^2} - 4x\frac{dy}{dx} - 5y = 0$.

3.5 Princípio da Superposição

Se $y_1(x)$ e $y_2(x)$ são soluções da equação dada em 3.26, então a função

$$y(x) = c_1y_1(x) + c_2y_2(x), \tag{3.28}$$

também é solução dessa equação, onde c_1 e c_2 são constantes arbitrárias. A solução dada por $y(x)$ em 3.28 é denominada de combinação linear das funções $y_1(x)$ e $y_2(x)$.

De fato: Sendo $y_1(x)$ e $y_2(x)$ soluções da equação diferencial ordinária linear homogênea de 2ª ordem

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0, \tag{3.29}$$

temos

$$y_1'' + p(x)y_1' + q(x)y_1 = 0, \tag{3.30}$$

e

$$y_2'' + p(x)y_2' + q(x)y_2 = 0. \tag{3.31}$$

Como,

$$y'(x) = c_1 y_1'(x) + c_2 y_2'(x), \tag{3.32}$$

e

$$y''(x) = c_1 y_1''(x) + c_2 y_2''(x), \tag{3.33}$$

temos com a substituição dessas derivadas da função $y(x)$ na equação 3.29, obtemos

$$\begin{aligned} y'' + p(x)y' + q(x)y &= (c_1 y_1'' + c_2 y_2'') + p(x)(c_1 y_1'(x) + c_2 y_2') + q(x)(c_1 y_1(x) + c_2 y_2), \\ &= c_1 y_1'' + c_2 y_2'' + c_1 p(x) y_1' + c_2 p(x) y_2' + c_1 q(x) y_1 + c_2 q(x) y_2, \\ &= c_1(y_1'' + p(x)y_1' + q(x)y_1) + q(x)(y_2'' + p(x)y_2' + q(x)y_2), \\ &= c_1 0 + c_2 0, \\ y'' + p(x)y' + q(x)y &= 0, \end{aligned} \tag{3.34}$$

o que comprova o princípio.

3.6 Soluções Fundamentais

Sejam $y_1(x)$ e $y_2(x)$ duas soluções para equação 3.26, tais que em um ponto $x_0 \in \mathbb{R}$, temos

$$W[y_1, y_2] = \det \begin{bmatrix} y_1(x_0) & y_2(x_0) \\ y_1'(x_0) & y_2'(x_0) \end{bmatrix} \neq 0. \tag{3.35}$$

Para todo par de condições (y_0, y_0') o problema de valor inicial

$$\begin{cases} y'' + p(x)y' + q(x)y = 0; \\ y(x_0) = y_0 \quad e \quad y'(x_0) = y_0', \end{cases}$$

tem uma única solução da forma

$$y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x), \tag{3.36}$$

onde c_1 e c_2 são constantes quaisquer[3].

[3] VIDE (BOYCE; DIPRIMA, 1985)

Importantes:

a) As soluções $y_1(x)$ e $y_2(x)$são denominadas de soluções fundamentais e o determinante $W[y_1, y_2]$ é denominado de "$Wronskiano$"[4] das funções $y_1(x)$ e $y_2(x)$ em x_0.
.

b) Se $y_1(x)$ e $y_2(x)$são soluções fundamentais da equação dada em 3.28, então a família de soluções

$$y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x), \tag{3.37}$$

é denominada de solução geral da equação dada em 3.26, onde c_1 e c_2 são constantes quaisquer.

Exemplo: Seja k um número real, não nulo. As funções $y_1(x) = \cos(kx)$ e $y_2(x) = \sin(kx)$ são soluções fundamentais da equação diferencial ordinária homogênea linear de 2ª ordem, dada por

$$y'' + k^2 y = 0. \tag{3.38}$$

A partir disso, temos que

$$\begin{aligned} y_1'(x) = -k\sin(kx) \qquad &e \qquad y_1''(x) = -k^2\cos(kx); \\ y_2'(x) = k\cos(kx) \qquad &e \qquad y_2''(x) = -k^2\sin(kx). \end{aligned}$$

veja que, y_1 e y_2 verifica a equação 3.28.

De fato: Temos

$$y_1''(x) + k^2 y_1 = -k^2\cos(kx) + k^2\cos(kx) = 0, \tag{3.39}$$

e

$$y_2''(x) + k^2 y_2 = -k^2\sin(kx) + k^2\sin(kx) = 0. \tag{3.40}$$

Note que,

$$\begin{aligned} W[y_1(x), y_2(x)] = \det\begin{bmatrix} y_1(x_0) & y_2(x_0) \\ y_1'(x_0) & y_2'(x_0) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \cos(kx) & \sin(kx) \\ -k\sin(kx) & k\cos(kx) \end{bmatrix}, \\ &= k\cos^2(kx) + k\sin^2(kx), \\ &= k[\cos^2(kx) + k\sin^2(kx)], \\ &= k.1, \\ \det\begin{bmatrix} y_1(x_0) & y_2(x_0) \\ y_1'(x_0) & y_2'(x_0) \end{bmatrix} &= k \neq 0, \end{aligned} \tag{3.41}$$

[4] O nome dessa função é uma homenagem ao matemático polonês Josef Maria Hoëné-Wronski, nascido Josef Hoëné (Wolsztyn, 23 de agosto de 1776 — Neuilly-sur-Seine, 9 de agosto de 1853), foi um filósofo e matemático franco-polonês. Wronski é mais conhecido pelo seu trabalho na matemática, a respeito de equações diferenciais e linearidade de funções, através do cálculo de determinantes de matrizes, que ficaram conhecidas como Wronskiano, nome este dado pelo matemático escocês Thomas Muir, em 1882, em homenagem a Wronski.

de acordo com o enunciado do problema.

Portanto: as funções $y_1(x) = \cos(kx)$ e $y_2(x) = \sin(kx)$ são soluções fundamentais da equação $y'' + k^2y = 0$, cuja solução é dada por

$$y(x) = c_1y_1(x) + c_2y_2(x), \tag{3.42}$$

ou seja

$$y(x) = c_1 \cos(kx) + c_2 \sin(kx), \tag{3.43}$$

onde c_1 e c_2 são constantes arbitrárias e k um número real não nulo.

3.7 Fórmula de Euler

Considere a função exponencial $y = f(x) = e^{zx}$ para números complexos $z = a + bi$, onde $a, b \in \mathbb{R}$ e $i = \sqrt{-1}$, que satisfaçam as seguintes propriedades:

1ª Propriedade:

$$e^{zx} = e^{(a+bi)x} = e^{ax}.e^{bxi}. \tag{3.44}$$

2ª Propriedade:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d(e^{zx})}{dx} = ze^{zx}. \tag{3.45}$$

Temos que a função $y_1 = f_1(x) = e^{ibx}$ é solução da equação $y'' + b^2y = 0$.

De fato: Temos que

$$y_1' = ibe^{ibx}, \tag{3.46}$$

e

$$\begin{aligned} y_1'' &= i^2b^2e^{ibx}, \\ y_1'' &= (-1)b^2e^{ibx}, \\ y_1'' &= -b^2y_1, \end{aligned} \tag{3.47}$$

logo,

$$y_1'' + b^2y_1 = -b^2y_1 + b^2y_1 = 0. \tag{3.48}$$

Desta forma, a função $y_1 = f_1(x) = e^{ibx}$ é solução do problema de valor inicial

$$\begin{cases} y_1'' + b^2y_1 = 0; \\ y(0) = 1 \quad e \quad y'(0) = ib. \end{cases}$$

Como verificamos no exemplo anterior ao trabalharmos a equação 3.38, vimos que as funções $y_1(x) = \cos(bx)$ e $y_2(x) = \sin(bx)$ são soluções fundamentais da equação

$$y'' + b^2 y = 0, \tag{3.49}$$

e existem constantes arbitrárias c_1 e c_2 em que

$$y_1(x) = e^{ibx} = c_1 \cos(bx) + c_2 \sin(bx), \tag{3.50}$$

é sua solução geral. Note que,

$$y_1'(x) = ibe^{ibx} = -bc_1 \sin(bx) + bc_2 \cos(bx). \tag{3.51}$$

Determinando as constantes c_1 e c_2, fazendo $x = 0$ na equação 3.50 e $x = 0$ na equação 3.51, obtemos

$$\begin{cases} e^{ib0} = c_1 \cos(b.0) + c_2 \sin(b.0); \\ ibe^{ib0} = -bc_1 \sin(b.0) + bc_2 \cos(b.0), \end{cases}$$

ou seja,

$$c_1 = 1 \quad e \quad ib = bc_2,$$

implicando $c_2 = i$, pois substituindo as constantes determinadas $c_1 = 1$ e $c_2 = i$ na equação 3.50, obtemos

$$e^{ibx} = \cos(bx) + i \sin(bx). \tag{3.52}$$

Portanto,

$$e^{(a+bi)x} = e^a x.e^{ibx} = e^{ax}.[\cos(bx) + i \sin(bx)]. \tag{3.53}$$

Fazendo $x = 1$ na equação 3.53, determinamos a equação conhecida como **Fórmula de Euler**[5], que é definida por:

$$e^{a+bi} = e^a.e^{ib} = e^a.[\cos b + i \sin b], \tag{3.54}$$

em particular, se $a = 0$ em 3.54, encontramos

$$e^{bi} = \cos b + i \sin b. \tag{3.55}$$

[5] Leonhard Paul Euler, foi um matemático e físico suíço de língua alemã que passou a maior parte de sua vida na Rússia e na Alemanha. Fez importantes descobertas em várias áreas da matemática, como o cálculo e a teoria dos grafos. Também introduziu muitas das terminologias da matemática moderna e da notação matemática, particularmente na análise, como também no conceito de função. É também reconhecido por seus trabalhos na mecânica, dinâmica de fluidos, óptica, astronomia e teoria da música.

Curiosidade: Se aplicarmos $b = \pi$ nesta última equação, encontramos

$$e^{\pi i} + 1 = 0, \tag{3.56}$$

que é a identidade de Euler, uma das mais belas identidades da matemática e será demonstrada em 3.61.

Exemplo: Utilizando a Fórmula de Euler, determinamos

1)

$$e^{i\pi} = \cos\pi + i\sin\pi = -1 + i.0 = -1. \tag{3.57}$$

2)

$$e^{i\frac{\pi}{2}} = \cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2} = 0 + i.1 = i. \tag{3.58}$$

3)

$$e^{ln2+\frac{\pi}{4}i} = e^{ln2}.e^{\frac{\pi}{4}i} = 2[\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}] = 2[\frac{\sqrt{2}}{2} + i] = \sqrt{2} + \sqrt{2}i. \tag{3.59}$$

A fórmula de Euler nos permite verificar a elegância da matemática em sua profunda beleza, apresentando as cinco mais importantes constantes encontradas na matemática. Quando fazemos $a = 0$ e $b = \pi$ na fórmula de Euler, encontramos:

$$e^{(a+bi)} = e^{a}.[\cos b + i\sin], \tag{3.60}$$

então

$$\begin{aligned} e^{0+\pi i} &= e^{0}[\cos\pi + i\sin\pi], \\ e^{\pi i} &= 1[-1 + i0], \\ e^{\pi i} &= -1, \\ e^{\pi i} + 1 &= 0. \end{aligned} \tag{3.61}$$

3.8 Equações Diferenciais Ordinárias Lineares de 2ª ordem com Coeficientes Constantes

Definição: É toda equação diferencial da forma

$$ay'' + by' + cy = 0, \tag{3.62}$$

ou

$$a\frac{d^2y}{dt^2} + b\frac{dy}{dt} + cy = 0, \tag{3.63}$$

com $a, b, c \in \mathbb{R}$ e $a \neq 0$. Exemplos:

1) $y'' - 2y' + 6y = 0$;

2) $y'' + 9y = 0$;

3) $y'' - 4y' = 0$;

4) $3y'' - 18 = 0$;

5) $3y'' + 12 = 0$.

Para a equação 3.62 existem valores constantes para z tais que a função $y(t) = e^{zt}$ é solução.

De fato: temos que

$$y'(t) = ze^{zt} \quad e \quad y''(t) = z^2e^{zt}. \tag{3.64}$$

Assim, substituindo na equação 3.62, obtemos:

$$az^2e^{zt} + bze^{zt} + ce^{zt} = 0, \tag{3.65}$$

ou seja

$$(az^2 + bz + c)e^{zt} = 0. \tag{3.66}$$

Pela propriedade do anulamento da multiplicação, concluímos que

$$(az^2 + bz + c) = 0, \tag{3.67}$$

já que

$$e^{zt} \neq 0, \quad \forall t \in \mathbb{R}. \tag{3.68}$$

Sendo, $y(t) = e^{zt}$ solução da equação 3.62, temos que z é solução da equação do 2º grau

$$az^2 + bz + c = 0, \tag{3.69}$$

que é denominada da equação característica da equação diferencial dada em 3.62.

As equações de 2º grau podem ter três tipos diferentes de soluções: duas raízes reais e distintas, duas raízes reais e iguais ou duas raízes complexas conjugadas. A partir dessa afirmação, vamos analisar os três casos separadamente afim de entender o que ocorre em cada situação.

1º caso: A equação tem duas raízes reais e distintas. Se a equação característica da equação 3.62 tem duas raízes reais e distintas z_1e z_2, então $y_1(t) = e^{z_1t}$ e $y_2(t) = e^{z_2t}$ são soluções fundamentais para a equação diferencial 3.62.

De fato:

$$\begin{aligned}
W[y_1, y_2] &= \det \begin{bmatrix} y_1(t) & y_2(t) \\ y_1'(t) & y_2'(t) \end{bmatrix}, \\
&= \det \begin{bmatrix} e^{z_1 t} & e^{z_2 t} \\ z_1 e^{z_1 t} & z_2 e^{z_2 t} \end{bmatrix}, \\
&= z_2 e^{z_1 t} e^{z_2 t} - z_1 e^{z_1 t} e^{z_2 t}, \\
&= z_2 e^{(z_1+z_2)t} - z_1 e^{(z_1+z_2)t}, \\
&= (z_1 + z_2) e^{(z_1+z_2)t}, \\
W[y_1, y_2] &\neq 0 \quad , pois z_1 \neq z_2.
\end{aligned}$$

Sendo assim, a solução da equação diferencial dada em 3.62 é dada por:

$$y(t) = c_1 e^{z_1 t} + c_2 e^{z_2 t}, \tag{3.70}$$

como vimos no princípio da superposição, com c_1 e c_2 constantes quaisquer.

Exemplo: Determinar a solução geral da equação diferencial $y'' - k^2 y = 0$ com k um número real positivo.

Solução: Temos que a equação característica da equação $y'' - k^2 y = 0$ é dada por

$$z^2 - k^2 = 0, \tag{3.71}$$

que tem como raízes

$$z_1 = -k \quad e \quad z_2 = k.$$

Portanto, a solução geral da equação $y'' - k^2 y = 0$ é definida por

$$y(t) = c_1 e^{-kt} + c_2 e^{-kt}, \tag{3.72}$$

com c_1 e c_2 constantes arbitrárias.

2º caso: A equação característica tem duas raízes reais e iguais.

Se $\Delta = b^2 - 4ac = 0$ na resolução da equação característica, $az^2 + bz + c = 0$, então, essa equação admite duas raízes reais e iguais $z_1 = z_2 = z = -\dfrac{b}{2a}$. Nesse caso, $y_1(t) = e^{zt}$ é uma solução e a outra é $y_2(t) = te^{zt}$ da equação 3.62 que são soluções fundamentais. De fato,

$$\begin{aligned}
W[y_1, y_2] &= \det \begin{bmatrix} e^{zt} & te^{zt} \\ te^{zt} & e^{zt} + t^2 e^{z_2 t} \end{bmatrix}, \\
&= e^{zt}(e^{zt} + t^2 e^{zt}) - te^{zt} e^{zt}, \\
&= e^{2zt} + t^2 e^{2zt} - t^2 e^{2zt}, \\
W[y_1, y_2] &= e^{2zt} \neq 0.
\end{aligned} \tag{3.73}$$

Portanto a solução geral da equação diferencial 3.62 é dada por:

$$y(t) = c_1 e^{zt} + c_2 t e^{zt}, \tag{3.74}$$

onde c_1 e c_2 são constantes quaisquer.

Exemplo: Determine a solução geral da equação $y'' + 2y' + y = 0$.

Solução: Temos que a equação característica da equação $y'' + 2y' + y = 0$ é a equação 2º grau $z^2 + 2z + 1 = 0$, que tem como raiz dupla $z = -1$. Portanto, a solução geral da equação $y'' + 2y' + y = 0$ é representada por

$$y(t) = c_1 e^{-t} + c_2 t e^{-t}, \tag{3.75}$$

com c_1 e c_2 constante quaisquer.

3º caso: A equação característica tem duas raízes complexas conjugadas

Se a equação característica da equação diferencial dada em 3.62 tem duas raízes complexas, então essas raízes são números complexos conjugados, isto é, sendo $z_1 = \alpha + \beta i$ uma raiz temos que outra raiz e $z_2 = \alpha - \beta i$ para equação característica $az^2 + bz + +c = 0$. Desta forma, pela fórmula de Euler temos:

$$y_1(t) = e^{z_1 t} = e^{(\alpha+\beta i)t} = e^{\alpha t}[\cos(\beta t) + i\sin(\beta t)], \tag{3.76}$$

e

$$y_2(t) = e^{z_2 t} = e^{(\alpha-\beta i)t} = e^{\alpha t}[\cos(\beta t) - i\sin(\beta t)], \tag{3.77}$$

são as soluções complexas fundamentais da equação diferencial dada em 3.62.

De fato: Temos que,

$$\begin{aligned}
W[y_1, y_2] &= \det \begin{bmatrix} y_1(t) & y_2(t) \\ y_1'(t) & y_2(t) \end{bmatrix}, \\
&= \det \begin{bmatrix} e^{z_1 t} & t e^{z_2 t} \\ z_1 e^{z_1 t} & z_2 e^{z_2 t} \end{bmatrix}, \\
&= z_2 e^{z_1 t} e^{z_2 t} - z_1 e^{z_1 t} e^{z_2 t}, \\
&= z_2 e^{(z_1+z_2)t} - z_1 e^{(z_1+z_2)t}, \\
&= (z_1 + z_2) e^{(z_1+z_2)t}, \\
&= [(\alpha - \beta i) - (\alpha + \beta i)] e^{[(\alpha+\beta i)+(\alpha-\beta i)]t}, \\
W[y_1, y_2] &= (-2\beta i) e^{2\alpha t} \neq 0, \forall t \in \mathbb{R}.
\end{aligned} \tag{3.78}$$

Portanto, a solução geral complexa da equação diferencial dada em 3.62 é determinada por

$$y(t) = c_1 e^{z_1 t} + c_2 e^{z_2 t}, \tag{3.79}$$

com $c_1, c_2 \in \mathbb{C}$.

Vamos determinar um conjunto fundamental de soluções reais para esse terceiro caso. A solução geral complexa pode ser escrita como:

$$y(t) = c_1 e^{(\alpha+\beta i)t} + c_2 e^{(\alpha-\beta i)t}, \tag{3.80}$$

ou seja,

$$y(t) = c_1 e^{\alpha t}[\cos(\beta t) + i\sin(\beta t)] + c_2 e^{\alpha t}[\cos(\beta t) - i\sin(\beta t)], \tag{3.81}$$

ou ainda

$$y(t) = (c_1 + c_2)e^{\alpha t}\cos(\beta t) + i(c_1 - c2)e^{\alpha t}\sin(\beta t), \tag{3.82}$$

Fazendo $c_1 = c_2 = \dfrac{1}{2}$ na função dada em 3.82, obtemos a solução real dada por:

$$u(t) = e^{\alpha t}\cos(\beta t), \tag{3.83}$$

e tomando $c_1 = \dfrac{1}{2i}$ e $c_2 = -\dfrac{1}{2i}$, encontramos a solução real determinada por

$$v(t) = e^{\alpha t}\sin(\beta t). \tag{3.84}$$

Sendo as raízes da equação característica números complexos temos que $u(t)$ e $v(t)$ são soluções fundamentais da equação diferencial dada em 3.62. De fato, temos que

$$\begin{aligned}
W[u,v] &= \det\begin{bmatrix} u(t) & v(t) \\ u'(t) & v(t) \end{bmatrix}, \\
&= \det\begin{bmatrix} e^{\alpha t}\cos(\beta t) & e^{\alpha t}\sin(\beta t) \\ e^{\alpha t}(\alpha\cos(\beta t) - \beta\sin(\beta t)) & e^{\alpha t}(\alpha\sin(\beta t) + \beta\cos(\beta t)) \end{bmatrix}, \\
&= e^{2\alpha t}\cos(\beta t)(\alpha\sin(\beta t) + \beta\cos(\beta t)) - e^{2\alpha t}\sin(\beta t)(\alpha\sin(\beta t) - \beta\cos(\beta t)), \\
&= e^{2\alpha t}[\alpha\sin(\beta t)\cos(\beta t) + \beta(\cos^2(\beta t) - \alpha\sin(\beta t)\cos(\beta t) + \beta(\cos^2(\beta t) + \sin^2(\beta t)], \\
&= e^{2\alpha t}\beta(\cos^2(\beta t) + \sin^2(\beta t)), \\
W[u,v] &= \beta e^{2\alpha t} \neq 0, \forall t \in \mathbb{R}.
\end{aligned} \tag{3.85}$$

Portanto, quando a equação característica tem duas raízes complexa $z_1 = \alpha + \beta i$ e $z_2 = \alpha - \beta i$, a equação diferencial definida em 3.62 tem solução dada por:

$$y(t) = c_1 u(t) + c_2 v(t), \tag{3.86}$$

ou seja

$$y(t) = c_1 e^{\alpha t}\cos(\beta t) + c_2 e^{\alpha t}\sin(\beta t), \tag{3.87}$$

com c_1 e c_2 constantes reais quaisquer.

Exemplo: Determinar a solução geral real da equação $y'' + k^2 y = 0$ com k um número real positivo.

Solução: Temos que a equação característica da equação diferencial $y'' + k^2 y = 0$ é a equação de 2º grau dada por

$$z^2 + k^2 = 0, \tag{3.88}$$

que tem como raízes os números complexos

$$z_1 = -ik \quad e \quad z_2 = ik. \tag{3.89}$$

Portanto, a solução geral real da equação $y'' + k^2 y = 0$ é dada por

$$y(t) = c_1 \cos(kt) + c_2 \sin(kt), \tag{3.90}$$

com c_1 e c_2 números reais quaisquer.

Após essa revisão matemática, vamos construir um modelo para aplicarmos a Modelagem Matemática coerente para a mesma. Nossa intenção é mostrar ao professor os aspectos mais amplos do fenômeno estudado para que o mesmo seja capaz de entendê-lo e abordá-lo de maneira particular em sala de aula.

4 Movimentos Oscilatórios

Nesta seção, vamos abordar um modelo que servirá de base para as discussões de como se fazer Modelagem Matemática e para que ela serve. Iremos tratar do tema oscilações, que são fenômenos que se repetem várias vezes devido às forças restauradoras do movimento em um sistema dinâmico e estão presentes em alguns casos do nosso cotidiano. Segundo (RESNICK; HALLIDAY; WALKER, 1988), todo movimento que se repete a intervalos regulares é chamado de movimento periódico ou movimento harmônico.

Escolhemos esse tema pois ele está presente em vários fenômenos físicos da natureza, como a pressão sanguínea do coração, o comportamento das marés em uma bacia marítima, a tensão e a corrente elétrica de uma rede, o campo eletromagnético gerado em um aparelho de micro-ondas, o movimento de um pêndulo qualquer, o movimento vibratório dos tímpanos, dentre outros que estão relacionados e são descritos pelas funções trigonométricas, o que vamos falar no próximo capítulo. Para auxiliar no entendimento deste assunto, tomaremos um caso particular, que consiste em um corpo preso a uma mola fixa. O entendimento da Modelagem Matemática acerca do fenômeno estudado nos permite conhecer o comportamento do passado, do presente e do futuro deste fenômeno, desde que possamos conhecer e “controlar“ os parâmetros inerentes a ele.

4.1 Sistema Massa-Mola

Ao selecionarmos um sistema e tirarmos de sua posição estável, ou seja, de seu repouso, ele terá vários movimentos periódicos até voltar o estado de repouso antes dessa perturbação. Esta série de movimentos são chamados movimento harmônico simples (MHS). Vamos analisar esse fenômeno observando o sistema conhecido como "massa-mola", que pode ser visualizado na figura 1.

Com o auxílio de uma força, o corpo tende a se deslocar, mas como está preso a uma mola, acaba sendo “obrigado“ a voltar ao estado inicial. Podemos ainda visualizar as forças que estão envolvidas neste caso através da decomposição das mesmas, como é descrito na figura 2.

A partir destas informações, podemos fazer um estudo mais detalhado a cerca das soluções deste sistema. De acordo com a segunda lei de Newton[1], temos que a força

[1] Sir Isaac Newton PRS (1642 — 1727) foi um matemático, físico, astrônomo e teólogo inglês (descrito na época como um "filósofo natural") reconhecido como um dos maiores cientistas de todos os tempos e figura-chave na Revolução Científica. Seu livro *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica* (Princípios Matemáticos da Filosofia Natural), publicado pela primeira vez em 1687, lançou as bases da mecânica clássica. Newton também fez contribuições à óptica e compartilha crédito com Gottfried Wilhelm Leibniz pelo desenvolvimento do cálculo infinitesimal.

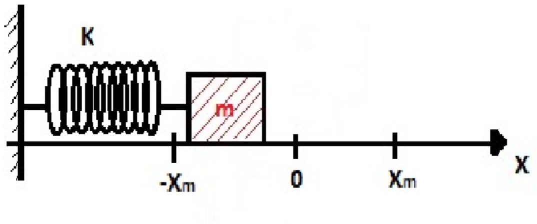

Figura 1 – Representação de um Sistema Massa-Mola

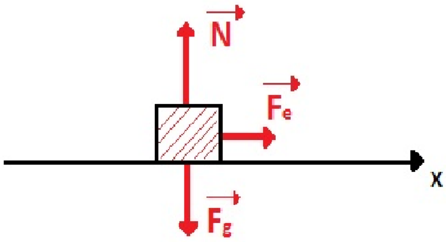

Figura 2 – Diagrama de forças do corpo estudado

resultante (F_R) do sistema é dada por:

$$\vec{F_R} = m\vec{a}. \tag{4.1}$$

e pela a lei de Hooke[2], temos que a força elástica é dada por

$$F_e = -kx. \tag{4.2}$$

De acordo com a distribuição de forças , conforme a figura 2, obtemos:

$$\vec{F_e} + \vec{N} + \vec{F_g} = m\vec{a}, \tag{4.3}$$

onde $\vec{F_e}$ é a força elástica devido à mola, $\vec{F_g}$ é a força gravitacional (Força peso) agindo no corpo e $\vec{N}$ é a força normal de contato. Analisando vetorialmente a equação 4.3, obteremos

$$-kx\hat{\imath} + N\hat{\jmath} - mg\hat{\jmath} = ma\hat{\imath}, \tag{4.4}$$

[2] Robert Hooke (1635 — 1703) foi um cientista experimental inglês do século XVII que teve como seu primeiro invento foi o relógio portátil de corda, em 1657, e criou a lei da elasticidade ou a lei de Hooke. Ele formulou também a teoria do movimento planetário, a primeira teoria sobre as propriedades elásticas da matéria, descreveu a estrutura celular da cortiça e publicou o livro *Micrographia* sobre suas descobertas realizando análises dos efeitos do prisma, esferas e lâminas com a utilização do microscópio.

onde m é a massa do corpo e a é a aceleração adquirida pelo corpo ao ser deslocado com o passar do tempo. Com isto, assumimos que não há movimento na direção vertical. Logo,

$$N\hat{j} - mg\hat{j} = 0, \tag{4.5}$$

e na horizontal

$$-kx\hat{i} = ma\hat{i}. \tag{4.6}$$

Como estamos buscando as soluções que este sistema vai nos proporcionar, vamos nos importar com as forças que atuam na direção horizontal. Assim, a partir de 4.6, vamos usar a equação

$$ma + kx = 0, \tag{4.7}$$

que também pode ser escrita por

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + kx = 0, \tag{4.8}$$

pois

$$a = \frac{d^2x}{dt^2}, \tag{4.9}$$

e t é o tempo. Para resolvermos isto, vamos utilizar o método de resolução de equações diferenciais homogêneas e lineares com coeficientes constantes. Elas são assim chamadas por terem resultado igual a *zero* e seus coeficientes dependem do problema físico e dos valores tomados no início do experimento. Temos da equação 3.28 que a solução geral de uma equação diferencial homogênea e linear de segunda ordem, para este nosso caso, será dada por

$$y(t) = c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t), \tag{4.10}$$

onde $y_1(t)$ e $y_2(t)$ são soluções independentes e c_1 e c_2 constantes arbitrárias, como vimos no capítulo anterior. Então, tomando uma equação diferencial de segunda ordem, linear e homogênea

$$a_2\frac{d^2y}{dt^2} + a_1\frac{dy}{dt} + a_0 y = 0, \tag{4.11}$$

para este caso, sempre existe uma solução da forma $x = e^{pt}$. Substituindo isso na equação 4.11, teremos

$$a_2\frac{d^2}{dt^2}(e^{pt}) + a_1\frac{d}{dt}(e^{pt}) + a_0 e^{pt} = 0, \tag{4.12}$$

que vai nos gerar

$$(a_2p^2 + a_1p + a_0)e^{pt} = 0, \tag{4.13}$$

ou ainda

$$a_2p^2 + a_1p + a_0 = 0, \tag{4.14}$$

pois

$$e^{pt} \neq 0, \forall t. \tag{4.15}$$

Se as raízes desta equação forem diferentes, a solução geral é dada como

$$x(t) = c_1e^{p_1t} + c_2e^{p_2t}, \tag{4.16}$$

mas se estas forem iguais, teremos como resultado

$$x(t) = c_1e^{pt} + c_2(te^{pt}). \tag{4.17}$$

Determinando a equação característica da equação 4.8, encontramos a seguinte equação

$$mp^2 + k = 0, \tag{4.18}$$

cuja a solução é dada por

$$p = \pm\sqrt{\frac{-k}{m}}, \tag{4.19}$$

ou ainda

$$\begin{aligned} p &= \pm\sqrt{\frac{k}{m}(-1)}, \\ &= \pm\sqrt{\frac{k}{m}}\sqrt{-1}, \\ p &= \pm iw_0, \end{aligned} \tag{4.20}$$

onde

$$w_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad e \quad i = \sqrt{-1}, \tag{4.21}$$

com solução geral

$$x(t) = c_1e^{iw_0t} + c_2e^{-iw_0t}, \tag{4.22}$$

onde c_1 e c_2 são constantes arbitrárias. Como $y(t)$ é real, partindo do que vimos no capítulo 2, temos um qualquer número complexo pode ser escrito como $z = re^{i\theta}$. Isto nos permite escrever 4.22 como sendo

$$x(t) = re^{i\theta}e^{iw_0t} + re^{-i\theta}e^{-iw_0t}, \tag{4.23}$$

ou ainda

$$x(t) = r(e^{i(w_0t+\theta)} + e^{-i(w_0t+\theta)}), \tag{4.24}$$

de onde concluímos que

$$x(t) = 2r\cos(w_0t+\theta), \tag{4.25}$$

e que pode ser escrita como

$$x(t) = A\cos(w_0t+\theta), \tag{4.26}$$

onde $A = 2r$. Com este resultado, podemos inferir de 4.26,

$$\begin{aligned} x_0 &= x(0) = A\cos(w_0 0+\theta), \\ x_0 &= A\cos\theta. \end{aligned} \tag{4.27}$$

Como a velocidade é a variação de espaço por determinado tempo, da equação 4.26 temos também

$$v = \frac{dy(t)}{dt} = -w_0 A\sin(w_0t+\theta), \tag{4.28}$$

que vai trazer

$$\begin{aligned} v_0 &= v(0) = -w_0 A\sin(w_0 0+\theta), \\ \frac{-v_0}{w_0} &= A\sin\theta. \end{aligned} \tag{4.29}$$

Dividindo 4.29 por 4.27, teremos

$$\frac{A\sin\theta}{A\cos\theta} = \frac{\frac{-v_0}{w_0}}{x_0}, \tag{4.30}$$

que é o mesmo que

$$\tan\theta = \frac{-v_0}{x_0w_0}, \tag{4.31}$$

ou também

$$\theta = \arctan\left(\frac{-v_0}{x_0w_0}\right), \tag{4.32}$$

que será o ângulo de oscilação deste sistema. Da trigonometria, temos a relação fundamental, $sen^2\theta + \cos^2\theta = 1$. Sendo assim, das equações 4.27 e 4.29, obtemos:

$$A^2sen^2\theta + A^2\cos^2\theta = \frac{v_0^2}{w_0^2} + x_0^2, \forall\theta \in \mathbb{R} \tag{4.33}$$

que pode ser escrita como

$$A^2(sen^2\theta + \cos^2\theta) = \frac{v_0^2}{w_0^2} + x_0^2, \tag{4.34}$$

ou ainda

$$\begin{aligned} A^2 &= \frac{v_0^2}{\omega_0^2} + x_0^2, \\ A &= \left(\frac{v_0^2}{w_0^2} + x_0^2\right)^{\frac{1}{2}}, \end{aligned} \tag{4.35}$$

implicando

$$A = \sqrt{\left(\frac{v_0}{\omega_0}\right)^2 + x_0^2}, \tag{4.36}$$

que é a amplitude do intervalo de oscilação do movimento oscilatório que estamos estudando. Como o período é o tempo de cada oscilação, temos que

$$T = \frac{2\pi}{w}, \tag{4.37}$$

e sendo

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}, \tag{4.38}$$

temos que esse período será dado por:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}, \tag{4.39}$$

e como a frequência é o inverso do período, temos que

$$f = \frac{1}{T} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}}. \tag{4.40}$$

A *priori*, pode parecer estranho esta apresentação neste trabalho, já que seu intuito é ser abordado no ensino médio. Porém, as diversas manipulações matemáticas, que não são simples, nos trazem resultados mais tangíveis para o fenômeno descrito. É papel do professor entender os passos abordados para que ele determine o que é mais relevante e propício para se trabalhar em sala de aula no ensino básico. Na próxima seção, discutiremos como isso pode ser feito focando nas funções que descrevem este tipo de comportamento desse fenômeno e são de máxima relevância para a modelagem, trazendo propostas de aplicação para professor do Ensino Médio.

5 Aplicação do Modelo para o Ensino Médio

Neste capítulo, iremos discutir como a Modelagem Matemática relacionada ao sistema massa-mola pode ser aplicada de maneira significativa no Ensino Médio. Nossa proposta é que o método seja abordado principalmente nos estudos de funções trigonométricas, as quais regem o comportamento dos movimentos oscilatórios.

5.1 Funções Trigonométricas

É possível definir a Trigonometria como a área de estudo da Matemática responsável pela relação existente entre os lados e os ângulos de um triângulo. Em sua episteme, vemos os termos *trigono*, equivalente a triângulo, e *metria*, ou medidas.Na observação dos triângulos retângulos, os quais possuem um de seus ângulos com 90º de amplitude, vemos as relações de seno, cosseno e tangente de maneira enfática. Elas partem dos ângulos chamados de notáveis, ou seja, 30º, 45º e 60º de abertura. Dentro desses assuntos encontramos as funções trigonométricas. Por isso, não se limitamos apenas em estudar o triângulo retângulo e suas consequências na Trigonometria, mas podemos tomá-la em proporções ampliadas, podendo ter utilidades em varias outras áreas, como os fenômenos periódicos, aqueles que se repetem em intervalos regulares e é o objetivo principal de discussão de nosso trabalho.

Os fenômenos periódicos, como o exemplo visto no capítulo 3, tendem a voltar ao seu estado natural, provocando oscilações frequentes. Eles podem ser encontrados na Música, na Acústica, Eletricidade, Mecânica, entre outras, e nessas áreas as funções trigonométricas são de grande aplicação. As imagens 3 e 4 mostram a representação dos comportamentos dessas funções de maneira mais didática. As figuras 5 e 6 também mostram outras funções trigonométricas.

Os PCN's de Matemática para o Ensino Médio propoem que "devemos observar que uma parte importante da Trigonometria diz respeito às funções trigonométricas e seus gráficos" (BRASIL, 2000). Neste documento também nos indicam que

> [...] outro tema que exemplifica a relação da aprendizagem de Matemática com o desenvolvimento de habilidades e competências é a Trigonometria, desde que seu estudo esteja ligado às aplicações, evitando-se o investimento excessivo no cálculo algébrico das identidades e equações para enfatizar os aspectos importantes das funções trigonométricas e da análise de seus gráficos. Especialmente para o indivíduo que não prosseguirá seus estudos nas carreiras ditas

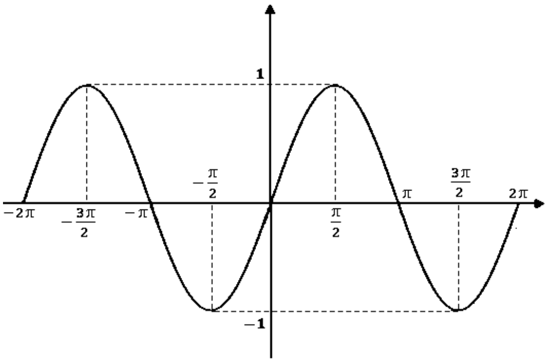

Figura 3 – Representação gráfica da função $f(x) = \sin x$.

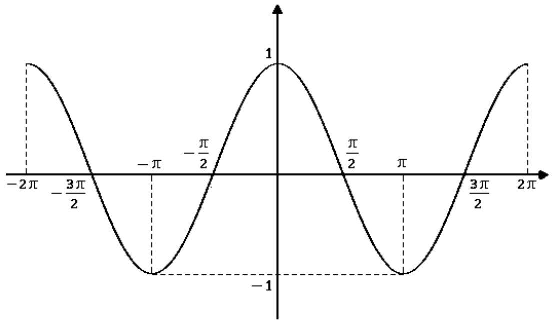

Figura 4 – Representação gráfica da função $f(x) = \cos x$.

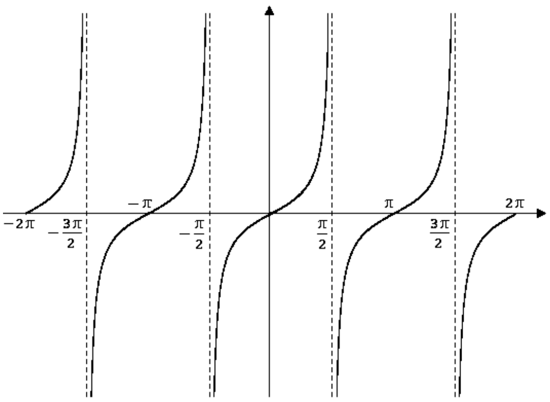

Figura 5 – Representação gráfica da função $f(x) = \tan x$.

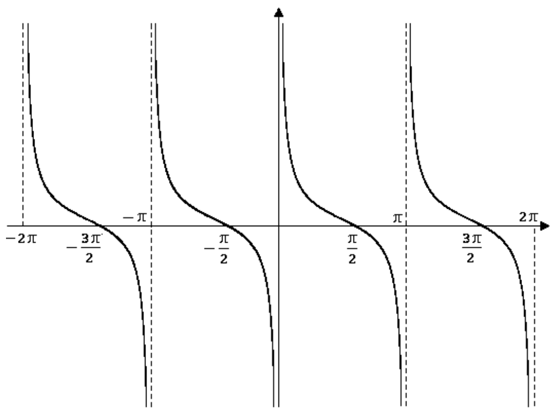

Figura 6 – Representação gráfica da função $f(x) = \cot x$.

> exatas, o que deve ser assegurado são as aplicações da Trigonometria na resolução de problemas que envolvem medições, em especial o cálculo de distâncias inacessíveis, e na construção de modelos que correspondem a fenômenos periódicos. Nesse sentido, um projeto envolvendo também a Física pode ser uma grande oportunidade de aprendizagem significativa. (BRASIL, 2000)

É possível observar facilmente a importância de se abordar o tema das funções trigonométricas e seus respectivos gráficos, trabalhando suas relações e aplicações como os movimentos periódicos. Além disso, a Base Nacional Comum Curricular (BNCC) intensifica essas recomendações ao se ensinar trigonometria:

> [...]identificar as características fundamentais das funções seno e cosseno (periodicidade, domínio, imagem), por meio da

> comparação das representações em ciclos trigonométricos e em planos cartesianos, com ou sem apoio de tecnologias digitais. (BRASIL, 2018)

O uso das tecnologias digitais pode contribuir de maneira ímpar nesses estudos ajudando a compreender periodicidade, domínio e imagem desse tipo de função em seus diversos ciclos (BRASIL, 2018). Na formalização matemática do capítulo 3, vimos a importância das funções seno e cosseno, as quais podem ser trabalhadas juntamente com um problema semelhante ao do sistema massa-mola que abordamos.

5.2 Relevância do Tema

Geralmente, na Educação básica, a trigonometria é abordada em dois momentos distintos. No primeiro, realizado no ensino fundamental, são introduzido os conceitos de triângulo retângulo, seno, cosseno e tangente. Na segunda abordagem, agora no ensino médio, são trazidos os temas arcos, ângulos, as unidades de medida correspondentes a eles (graus e radianos), a caracterização e análise do círculo trigonométrico, tanto nas equações trigonométricas como nas funções trigonométricas e sua representação gráfica.

Os conceitos trigonométricos são abordados em vários outros momentos na própria disciplina da Matemática, mas também podem ser revistos e abordados em outras disciplinas. O principal exemplo, talvez, seja na Física, onde vemos os conceitos das funções trigonométricas sendo abordados no estudo dos movimentos oscilatórios envolvendo classificação das ondas, velocidade, frequência, período e fase deste fenômeno.

Na maioria das práticas de ensino deste conteúdo, a abordagem das Funções Trigonométricas seno e cosseno se moldam nas construções de seus gráficos, onde é necessário realizar cálculos diversos a fim de completar uma tabela para os valores de "x" e "y", algo que pode ser difícil e demorado para a sequência didática. De acordo com (KRUSE, 2007), essa abordagem fica aquém do que pode ser feito, já que o objetivo da aula se resume ao simples traçar dos gráficos das funções, sem se preocupar com as variações deles, as quais ocorrem pelos parâmetros das funções senos e cossenos, também chamados de coeficientes e suas aplicabilidades.

Com esta perspectiva, enfatizamos a importância de se introduzir maneiras ativas de aprendizagem, dentre as quais, destacamos a Modelagem Matemática. Para (SILVA; FROTA, 2012), a inserção de práticas educativas nas aulas de matemática ajudam na construção de uma nova postura frente ao fazer e pensar matemáticos:

> Atividades de investigação podem conformar uma concepção de matemática como algo dinâmico, do conhecimento matemático

> como em construção, através do desenvolvimento de ideias e processos, constituintes do pensar e fazer matemáticos. (SILVA; FROTA, 2012)

Nessa vertente, as atividades de investigação, centrando a busca pelo entendimento no aluno, podem propiciar aos estudantes uma visão ampla de inúmeras situações que sejam necessárias a procura de padrões, semelhanças e irregularidades. Este jogo do saber se mostra desafiador e motivador ao discente, favorecendo a construção e assimilação de conceitos, dos mais simples aos mais abstratos, a partir dos assuntos abordados em aula. Cabe ao docente construir uma sequência didática em que a exploração de tópicos de Trigonometria, em nosso caso as Funções trigonométricas, em que se valorize o caráter investigativo do ensino.

Para este fim, é preciso passear por alguns tópicos metodológicos de ensino. Seriam eles a descrição dos objetivos específicos da atividade; os procedimentos metodológicos e as orientações para a execução da atividade; a leitura de breve texto referente aos conceitos e definições a serem tratados, para melhor compreensão da atividade; a construção dos conceitos com a utilização dos recursos pertinentes a cada atividade; o levantamento de conjecturas e validações; a generalização e a formalização.

Na próxima seção, iremos propor uma sequência de abordagem do ensino de Funções Trigonométricas aplicadas aos movimentos periódicos usando modelagem matemática.

5.3 Proposta de Abordagem no Ensino

Aqui, queremos apresentar uma proposta de sequência didática para aplicação da modelagem Matemática no Ensino Médio da Educação Básica na abordagem de movimentos oscilatórios. Temos como objetivo abordar este tema dentro do tema Funções Trigonométricas.

Em nossa proposta, o tema Funções Trigonométricas contempla os Subtemas Função Seno, Função Cosseno, Função Tangente, Função Cossecante, Função Secante, Função Cotangente, Domínio, Imagem e Período das Funções. Esses assuntos geralmente são trabalhados em 12 horas/aula, no 2º ano do Ensino Médio. Propomos que este tempo seja aumentado para no mínimo o dobro, 20 horas/aula, já que pretendemos trazer uma maior significação ao tema.

O conteúdo de trigonometria, mais especificadamente suas funções, nosso principal objeto de estudo, tem grande importância nas áreas das engenharias e nas tecnologias. Estes setores são fatores importantíssimos para o desenvolvimento local, regional e nacional. Podemos observar as funções trigonométricas descrevendo vários fenômenos periódicos do nosso dia-a-dia. Exemplos disso podem ser a variação da altura das marés, as fases lunares, a variação da pressão nas paredes dos vasos sanguíneos de um indivíduo, dentre outros, além, claro, de servir de base para vários conteúdos da matemática.

Segundo (LEVY, 2010), "os indivíduos toleram cada vez menos seguir cursos uniformes ou rígidos que não correspondem a suas necessidades reais e à especificidade de seu trajeto de vida". Sendo assim, faz-se necessário uma abordagem que seja apropriada para cada turma de maneira única. Logo, é interessante analisar os conhecimento prévios do alunado com o conteúdo de funções trigonométricas. A visão individual deste assunto e sua relação com mundo real e o cotidiano de cada um, podem ser observados com a aplicação de questionários com perguntas abertas e fechadas, que serão discutidas em sequência.

Esse procedimento obedece uma das etapas da modelagem matemática, a interação, que consiste em familiarizar o estudante com o tema escolhido para o processo de modelagem (BIEMBENGUT; HEIN, 2000). Aqui, é possível aplicar o modelo oscilatório, como o movimento harmônico simples (MHS) e suas proposições matemáticas para entender suas aplicações. Isto permitirá várias análises do comportamento das funções trigonométricas aplicadas ao fenômeno.

Disso, é possível expor oralmente, o processo de modelagem e sua aplicação no mundo real com vários exemplos e aplicações. Em nosso caso, escolhemos os movimentos oscilatórios para trabalhar as funções trigonométricas utilizando a MHS do sistema massa-mola como ponto inicial da discussão. Devemos, em primeiro lugar, discutir o assunto com a turma a fim de visualizar os conhecimentos prévios acerca do tema de oscilações. Em seguida, apresentamos o sistema massa-mola descrevendo o seu comportamento, o qual podemos observar nas figuras 7 e 8, e relacionando com outros fenômenos observados que tenham a mesma natureza que esse sistema, como o badalo de um sino, por exemplo.

Das figuras 7 e 8, já é possível perceber que o movimento descrito obedece a uma função do tipo Cosseno. Para que seja comprovável, o professor pode se basear nas descrições do capítulo anterior, mostrando a natureza matemática do fenômeno estudado tendo o devido cuidado na transposição didática para o alunado do Ensino Médio. A partir da equação 4.25, pode ser trabalhado as manipulações das funções trigonométricas, mostrando como é o comportamento de cada uma, enfatizando o fato de elas sempre "passearem" de um estado máximo a um mínimo de deslocamento e passando pelo repouso que se tinha antes do início do movimento.

É de extrema importância dar sempre voz ao estudante, observando suas reações em cada etapa deste processo e fazendo ele estar junto na construção do mesmo. É possível tomar exemplos com cálculos algébricos para fixar a matematização do estudo e pedir que sejam feitos gráficos para as funções envolvidas nessa Modelagem e outras que pertençam ao tema mas, por acaso, não entraram nesta etapa.

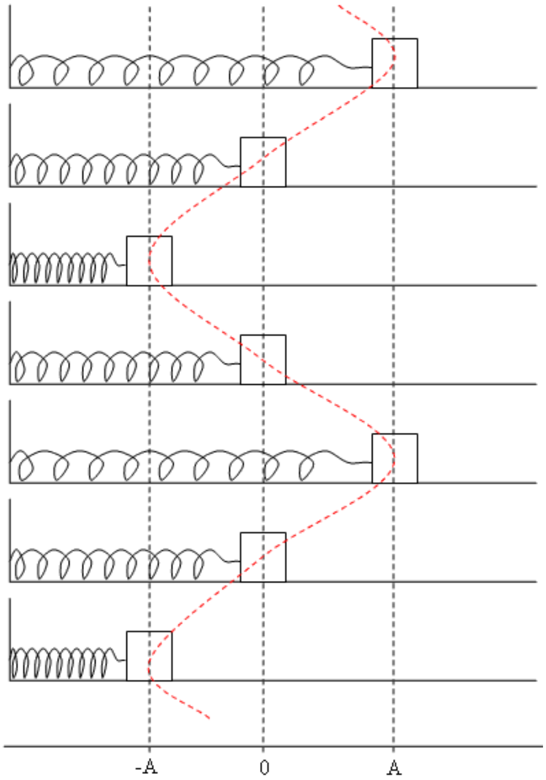

Figura 7 – Representação do comportamento de um Sistema Massa-Mola na horizontal.

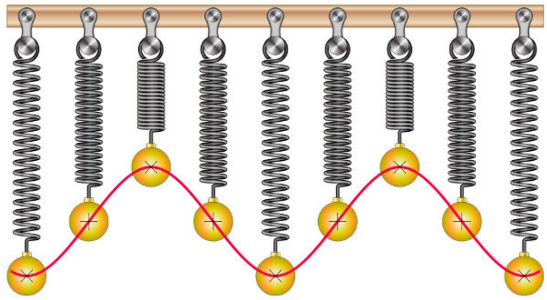

Figura 8 – Representação do comportamento de um Sistema Massa-Mola na vertical.

Pode-se construir diversas situações com modelagens visando solucionar questionamentos dos próprios alunos. Discussões da importância das funções trigonométricas no contexto dos fenômenos periódicos em nosso dia-a-dia e sua utilização em diversas áreas são importantes para fixar o conteúdo. Ainda pode-se incorporar nesta sequência exercícios de avaliação com as funções trigonométricas, levantando os conceitos e representações destas para o modelo físico apresentado de maneira mais aberta, buscando aplicações reais do assunto.

5.3.1 Exercícios Propostos

Nesta seção, propomos alguns exercícios de fixação de conteúdo com o intuito de mostrar como esta abordagem pode ser efetivada na prática do professor.

Exercício 1: Uma mola de constante elástica igual a 10 N/m é presa a uma massa de 100 g (0,1 kg). Quando comprimida, essa mola passa a oscilar, descrevendo um movimento harmônico simples. Determine a frequência de oscilação do conjunto.

Resolução:

Através da equação 4.40, dada por

$$f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}}$$

podemos substituir os dados da questão, chegando a

$$\begin{aligned}
f &= \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{10N/m}{0,1kg}} \\
f &= \frac{1}{2\pi}.10 \\
f &= \frac{5}{\pi}Hz
\end{aligned}$$

A unidade de frequência padronizada é o $Hertz$[1].

O professor pode verificar situações em que a massa é maior ou menor do que apresentada neste problema. Analogamente, pode-se usar isso para a constante da mola. Isso serve para que o aluno veja como será diferente a oscilação do conjunto.

Exercício 2: Prende-se uma mola de constante elástica igual a 1,6 N/m a uma massa de 0,025 kg. Após um estímulo, o conjunto passa a oscilar em movimento harmônico simples. Determine a velocidade angular do movimento.

Resolução:

Da mesma forma que o exercício anterior, vamos utilizar a equação dada em 4.38,

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}, \tag{5.1}$$

isso nos trará

$$\begin{aligned}
\omega &= \sqrt{\frac{1,6N/m}{0,025kg}} \\
\omega &= \sqrt{64} \\
\omega &= 8rad/s
\end{aligned}$$

Aqui também é possível fazer várias discussões do que é e como varia a velocidade de um corpo que está preso a uma mola.

Exercício 3: Observe a afirmação a seguir: No movimento descrito por um sistema massa-mola ideal, livre de quaisquer forças externas, a energia do fenômeno não se altera. Ela está certa ou errada? Explique.

[1] A unidade "Hertz"[Hz] é o mesmo que $\frac{1}{s}$ ou s^{-1} e é usada para quantificar a frequência. Como este trabalho está voltado para o âmbito do ensino de Matemática, não pretendemos fazer as discussões acerca das manipulações de unidades, já que isso é mais utilizado na Física.

Resolução:

Essa afirmativa é VERDADEIRA pois na medida que o corpo vai perdendo energia para realizar o máximo movimento, ele acaba aumentando ainda mais a força para fazer o movimento de volta.

Apesar de parecer uma discussão muito profunda, o professor pode mostrar experimentalmente, usando um pêndulo de um relógio por exemplo, que na medida que um objeto tenta se "soltar" da mola, ele acaba ganhando mais energia para poder voltar no movimento contrário. São inúmeras as abordagens que o docente pode fazer com sua turma utilizando movimentos periódicos do cotidiano.

Exercício 4: Um corpo de massa 8 kg está preso a uma mola de constante elástica 200 N/m. Quando ele é deslocado da sua posição de equilíbrio, passa a deslocar-se, executando o movimento harmônico simples e atingindo uma elongação máxima na posição 0,5 m. Determine a frequência e a amplitude desse movimento.

Resolução:

Primeiro, vamos encontrar a frequência através da equação 4.40. Substituindo os valores, teremos

$$\begin{aligned} f &= \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{200N/m}{8kg}} \\ f &= \frac{1}{2\pi}.5 \\ f &= \frac{5}{2\pi}Hz \end{aligned} \tag{5.2}$$

Para o problema da amplitude basta olharmos o enunciado, que diz que à posição máxima de elongação da mola é de 0,5 m. Portanto, a amplitude é 0,5 m.

Podemos fazer várias discussões acerca dos resultados encontrados, como mostrar matematicamente o valor da amplitude utilizando a equação 4.36 ao invés da analogia do enunciado.

Exercício 5: Suponha que o mesmo conjunto massa-mola do exercício anterior descreve em 9 segundos uma oscilação que varia 45º de seu eixo. Sabendo disso, qual seria a velocidade de oscilação desse conjunto.

Resolução: Do exercício anterior, sabemos que a amplitude é de 0,5 metros. Pelo enunciado desse quesito, o tempo decorrido é de 9 segundos e a oscilação varia em 45º. Podemos encontrar o a velocidade angular inicial através da relação já vista no capítulo anterior,

$$\begin{aligned} \omega_0 &= \sqrt{\frac{k}{m}} \\ \omega_0 &= \sqrt{\frac{200N/m}{8kg}} \\ \omega_0 &= \sqrt{25} \\ \omega_0 &= 5rad/s \end{aligned}$$

Com essas informações, podemos usar a equação 4.28 para encontrarmos a velocidade de oscilação do fenômeno estudado aqui. Logo,

$$\begin{aligned} v &= -w_0 A \sin(w_0 t + \theta) \\ v &= -5.0,5 \sin(5.9 + 45) \\ v &= -2,5 \sin(90) \\ v &= -2,5m/s \end{aligned}$$

Talvez esse seja a proposta de aplicação mais complexa até aqui. Decidimos colocá-la para mostrar ao professor que muitas discussões podem ser vistas em apenas uma questão. Podemos discorrer sobre o sinal negativo de velocidade, que significa que algo está tendendo a parar. Podemos falar sobre os valores de seno e cosseno e contextualizar com o ciclo trigonométrico. Ainda é possível mostrar como seria o gráfico dessa velocidade que é regida por uma função seno, entre várias outros assuntos matemáticos inclusos na discussão deste problema.

Exercício 6: Um sistema massa-mola tem um corpo com 2 kg e uma mola com constante elástica de 8 N/m. Calcule a velocidade angular desse sistema, bem como sua frequência e seu período. Sendo a amplitude máxima desse movimento de 80 centímetros em uma inclinação de 60º, qual deve ser sua velocidade depois de 15 segundos? Como poderíamos descrever o comportamento desse movimento?

Resolução:

Com tudo o que vimos até aqui, basta o professor aplicar as informações obtidas nas equações demonstradas no capítulo 4. Sendo assim, teremos:

$$\begin{aligned} \omega_0 &= \sqrt{\frac{k}{m}} \\ \omega_0 &= \sqrt{\frac{8N/m}{2kg}} \\ \omega_0 &= \sqrt{4} \\ \omega_0 &= 2rad/s \end{aligned}$$

com isso, podemos calcular a frequência,

$$\begin{aligned} f &= \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{8N/m}{2kg}} \\ f &= \frac{1}{2\pi}.2 \\ f &= \frac{1}{\pi}Hz \end{aligned} \tag{5.3}$$

e ainda o período, dado por,

$$\begin{aligned} T &= 2\pi\sqrt{\frac{2kg}{8N/m}} \\ T &= 2\pi.0,5 \\ T &= 1s \end{aligned} \tag{5.4}$$

Podemos usar estes dados para encontrarmos a velocidade de oscilação do fenômeno,

$$\begin{aligned} v &= -w_0 A\sin(w_0 t + \theta) \\ v &= -2.0,8\sin(2.15 + 60) \\ v &= -1,6\sin(90) \\ v &= -1,6m/s \end{aligned}$$

e por fim, encontrarmos a função que descreve a posição da oscilação com o passar do tempo

$$\begin{aligned} x(t) &= A\cos(\omega_0 t + \theta) \\ x(t) &= 0,8\cos(2t + 60) \end{aligned}$$

Essa equação nos permite encontrar a posição do corpo em movimento oscilatório em qualquer instante de tempo, basta substituirmos o valor desse tempo (em segundos) e efetuarmos os cálculos.

Esses exercícios servem apenas com base para o professor que pode ficar livre para trabalhar diversos assuntos matemáticos dentro deste tema. A intenção dos exercícios deve ser muito mais do que avaliar a aprendizagem através da prática pedagógica usada, mas de encorajar o aluno a desenvolver um caráter crítico e fundamentado daquilo que aprende em sala.

6 Conclusões

Tem se tornado cada vez mais comum as reclamações dos alunos em não conseguirem associar os conhecimentos aprendidos na disciplina de Matemática com outras disciplinas ou com o mundo real de seu cotidiano. Isto tem sido motivo de preocupação e inquietação de professores, pesquisadores e todos os que participam, de maneira direta ou indireta do atual estado de precária aprendizagem proporcionada pelo método tradicional de ensino, onde o professor é apenas um mero depositor de assuntos e o aluno o seu receptor, que recebe de maneira inata e sem significação os conteúdos.

Faz-se necessário vislumbrar a busca por métodos e práticas de ensino-aprendizagem que possam relacionar a Matemática com o dia-a-dia daqueles que a manipulam, fazendo dela útil e transformadora. Neste momento, entra a Educação Matemática, com o intuito de trazer uma maior significação aos saberes aprendidos. Ela pode ser trabalhada em diversos contextos e tendências metodológicas para auxiliarem a prática do professor. Neste trabalho, nos debruçamos sobre uma prática de ensino chamada Modelagem Matemática. Essa prática pode ser entendida como uma estratégia de ensino que possibilita ao estudante e ao professor a abordagem de conteúdos da matemática partindo de fenômenos de sua realidade. Isto permite uma melhor interpretação do mundo que nos cerca, trazendo o arcabouço matemático como a linguagem de entendimento e significação do fenômeno a ser estudado.

Como a Modelagem Matemática é uma metodologia utilizada para obtermos alguma explicação ou entendimento de determinadas situações reais, a proposta deste trabalho de conclusão de curso foi abordar uma proposta para o ensino da Matemática unindo-se com os conhecimentos da Física para buscar uma melhor estruturação de conhecimento e interesse para os alunos, que em nosso caso, foi o dos movimentos oscilatórios.

As oscilações são fenômenos que se repetem várias vezes devido às forças restauradoras do movimento e estão presentes em alguns casos do cotidiano. Este fato ocorre quando ao tomarmos um sistema qualquer e tirarmos de sua posição estável, ou seja, de seu repouso. Após isso, ele tem vários movimentos periódicos até voltar o estado que tinha antes dessa perturbação provocada. É possível relacionar fenômenos físicos de natureza periódica com vários momentos de nosso viver, desde a variação da pressão sanguínea do coração, o comportamento das marés em uma bacia marítima, a tensão e a corrente elétrica de uma rede, o campo eletromagnético gerado no aparelho de microondas, o movimento de um pêndulo qualquer, até o movimento vibratório dos tímpanos, dentre vários outros movimentos que são regidos pelas funções trigonométricas, as quais descrevem os movimentos periódicos.

Depois de entendermos o que é e para que serve a Modelagem Matemática e escolhermos o assunto a ser abordado, que pode ser de escolha do aluno ou do professor, é preciso desenvolver o formalismo matemático do modelo, observando toda sua descrição algébrica e geométrica. Tal passo foi contemplado no capítulo 4, onde se é possível notar um alto grau de elevação matemática. Então, pretendemos fazer abordagens que envolvam aplicações deste tema em conteúdos que possam ser modulados matematicamente e sirvam para tornar mais real o aprendizado dos assuntos na disciplina de matemática, trazendo uma proposta didática adequada para o nível de saber do alunado. O capítulo 3 serviu de arcabouço teórico para comprovar algumas definições matemáticas necessárias na resolução do problema em questão.

No capítulo 5, propomos uma abordagem que trabalhe o ensino das Funções Trigonométricas, a qual ocorre no Ensino Médio, e em seguida, a abordagem de nosso modelo de maneira mais simples, sem deixar de contemplar os aspectos físicos e matemáticos básicos de movimentos oscilatórios do exemplo abordado. Nosso principal intuito foi de mostrar a utilização da Modelagem Matemática como uma metodologia de ensino para as Funções Trigonométricas, fazendo os discentes compreenderem o comportamento dos parâmetros das funções que lhes são correlatas e fazer com que estabeleçam uma relação direta entre este conteúdo e os fenômenos periódicos do seu dia-a-dia. Esta metodologia pode ser aumentada e ainda abordada para inúmeros conteúdos matemáticos para trazer contextualização e significação para a matéria.

Acreditamos com este estudo, estar contribuindo com um fazer educativo que ofereça múltiplos caminhos e alternativas ao docente e ao aluno. Este pode ter outra visão do conteúdo de funções trigonométricas que faça-lhe sentido, uma vez que se conecta com sua realidade e seu cotidiano. O professor pode dinamizar seu trabalho ficando livre para lidar com exemplos de fenômenos que envolvam o assunto que deseja através da Modelagem Matemática. Temos como perspectivas futuras para este trabalho, aplicar a proposta dentro de sala de aula e observar os resultados da prática efetiva, observando as dificuldades do alunado quanto ao tema e buscar minimizar essas falhas com esta proposta de ensino, além de utilizar softwares como um recurso computacional que otimize o ensino-aprendizagem das funções abordadas aqui, como o Geogebra e simuladores de eventos físicos, como o site $PHET$.

Referências

BARBOSA, J. C.; CALDEIRA, A. D.; ARAÚJO, J. d. L. Modelagem matemática na educação matemática brasileira: pesquisas e práticas educacionais. *Recife: Sbem*, v. 3, 2007. Nenhuma citação no texto.

BASSANEZI, R. C. *Ensino-aprendizagem com modelagem matemática: uma nova estratégia*. [S.l.]: Editora Contexto, 2002. Nenhuma citação no texto.

BASSANEZI, R. C. Modelagem matemática: teoria e prática. *São Paulo: Contexto*, 2015. Citado 2 vezes nas páginas 15 e 16.

BELTRÃO, M. E. P. et al. Ensino de cálculo pela modelagem matemática e aplicações: teoria e prática. Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, 2009. Citado na página 15.

BIEMBENGUT, M. S.; HEIN, N. *Modelagem matemática no ensino*. [S.l.]: Editora Contexto, 2000. Citado na página 43.

BOLDRINI, J. L. et al. *Álgebra linear*. [S.l.]: Harper & Row, 1980. Nenhuma citação no texto.

BONJORNO, J. R.; GIOVANNI, J. R. Matemática completa. *São Paulo: FTD*, v. 1, 2005. Nenhuma citação no texto.

BORBA, M. C.; VILLARREAL, M. E. *Humans-with-media and the reorganization of mathematical thinking: Information and communication technologies, modeling, visualization and experimentation*. [S.l.]: Springer Science & Business Media, 2006. v. 39. Citado na página 15.

BORSSOI, A. H.; ALMEIDA, L. M. W. de. Modelagem matemática e aprendizagem significativa: uma proposta para o estudo de equações diferencias ordinárias. *Educação Matemática Pesquisa: Revista do Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática*, v. 6, n. 2, 2004. Nenhuma citação no texto.

BOYCE, W. E.; DIPRIMA, R. C. *Equações diferenciais elementares e problemas de valores de contorno*. [S.l.]: Guanabara Dois, 1985. Citado 2 vezes nas páginas 18 e 23.

BOYER, C. B.; MERZBACH, U. C. *História da matemática*. [S.l.]: Editora Blucher, 2019. Nenhuma citação no texto.

BRASIL. *Ministério da Educação. Secretaria de Educação Fundamental. Parâmetros Curriculares Nacionais – Ensino Médio. Parte III – Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias*. [S.l.]: Brasília: MEC/SEF, 2000. Citado 2 vezes nas páginas 39 e 40.

BRASIL. *Ministério da Educação. Secretaria de Educação Básica. Base Nacional Comum Curricular – Ensino Médio*. [S.l.]: Brasília: MEC/SEB, 2018. Citado na página 41.

BURAK, D. et al. Modelagem matemática: ações e interações no processo de ensino-aprendizagem. [sn], 1992. Citado na página 14.

CALDEIRA, A. D. et al. *Modelagem em Educação Matemática*. [S.l.]: Autêntica, 2011. Citado na página 13.

D'AMBRÓSIO, U. *Da realidade à ação: reflexões sobre educação e matemática*. [S.l.]: Grupo Editorial Summus, 1986. Nenhuma citação no texto.

KRUSE, F. Funções seno e cosseno: uma metodologia fácil, interessante e suas aplicações. *Encontro Nacional de Educação Matemática*, 2007. Citado na página 41.

LEVY, P. *Cibercultura*. [S.l.]: Editora 34, 2010. Citado na página 43.

RESNICK, R.; HALLIDAY, D.; WALKER, J. *Fundamentals of Physics, Vol. 1*. [S.l.]: John Wiley, 1988. Citado 2 vezes nas páginas 20 e 33.

SADOVSKY, P. Falta fundamentação didática no ensino da matemática. *Nova Escola. São Paulo, Ed. Abril*, 2007. Citado na página 16.

SILVA, M. F. da; FROTA, M. C. R. Explorando modelos matemáticos trigonométricos a partir de applets. *VIDYA*, v. 32, n. 2, p. 15, 2012. Citado 2 vezes nas páginas 41 e 42.

SMOLE, K. C. S. Diniz, maria ignez de souza vieira. *Matemática: Ensino Médio*, v. 2. Nenhuma citação no texto.

THOMAS, G. B. et al. *Cálculo, vol. 1*. [S.l.]: Addison Wesley, 2002. Nenhuma citação no texto.

ZILL, D. G.; CULLEN, M. R. *Equações Diferenciais. Volume 01. 3ª Edição*. [S.l.]: Pearson Education, 2001. Citado na página 18.

INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA DA PARAÍBA
Campus Campina Grande
R. Tranqüilino Coelho Lemos, 671 - Dinamérica, CEP 58432-300, Campina Grande (PB)
CNPJ: 10.783.898/0003-37 - Telefone: (83) 2102.6200

Documento Digitalizado Ostensivo (Público)

Entrega de Trabalho de Conclusão de Curso (Especialização)

Assunto:	Entrega de Trabalho de Conclusão de Curso (Especialização)
Assinado por:	Romário Santos
Tipo do Documento:	Anexo
Situação:	Finalizado
Nível de Acesso:	Ostensivo (Público)
Tipo do Conferência:	Cópia Simples

Documento assinado eletronicamente por:

- **Romário da Silva Santos**, **ALUNO (202011280013) DE ESPECIALIZAÇÃO EM ENSINO EM MATEMÁTICA - CAMPINA GRANDE**, em 15/06/2021 20:31:39.

Este documento foi armazenado no SUAP em 15/06/2021. Para comprovar sua integridade, faça a leitura do QRCode ao lado ou acesse https://suap.ifpb.edu.br/verificar-documento-externo/ e forneça os dados abaixo:

Código Verificador: 254116
Código de Autenticação: d7d6859ff0