



INSTITUTO FEDERAL DA PARAÍBA
CURSO DE ESPECIALIZAÇÃO EM MATEMÁTICA

Niwlandes de Farias Araújo

Uma reflexão quanto ao uso de fórmulas na Análise Combinatória

Cajazeiras-PB
Dezembro de 2019

Uma reflexão quanto ao uso de fórmulas na Análise Combinatória

Trabalho de Conclusão de Curso submetido à Coordenação do Curso de Especialização em Matemática do Instituto Federal da Paraíba - Campus Cajazeiras, como parte dos requisitos para a obtenção do grau de Especialista em Matemática.

Orientador: Prof. Me. Clebson Huan de Freitas

Niwlandes de Farias Araújo

Uma reflexão quanto ao uso de fórmulas na Análise Combinatória

Trabalho de Conclusão de Curso submetido à Coordenação do Curso de Especialização em Matemática do Instituto Federal da Paraíba - Campus Cajazeiras, como parte dos requisitos para a obtenção do grau de Especialista em Matemática.

Aprovado em: 12/12/2019.

BANCA EXAMINADORA

Prof. Me. Clebson Huan de Freitas
Instituto Federal da Paraíba -(IFPB)

Prof. Me. Leonardo Ferreira Soares
Instituto Federal da Paraíba -(IFPB)

Prof. Me. Marcio Alisson Leandro Costa
Instituto Federal do Amazonas -(IFAM)

Cajazeiras-PB
Dezembro de 2019

Dedico este trabalho à minha querida esposa Érica.

Agradecimentos

Agradeço a todos os professores que se dedicaram em tornar realidade o curso de Especialização em Matemática no Campus Cajazeiras e ao IFPB que já me proporcionou um curso de licenciatura e agora me proporciona uma especialização.

Ao meu orientador Me. Clebson Huan de Freitas pela enorme paciência, aos meus colegas pela ajuda durante essa jornada e a meu grande amigo Emanuel Messias Nogueira de Sousa pela ajuda com o presente trabalho.

Por fim quero agradecer a minha esposa Érica Paiva Araújo que sempre me apoia e incentiva em todos os momentos.

Resumo

A utilização de técnicas de contagem tem se mostrado de grande necessidade nos dias atuais principalmente pelo avanço populacional e tecnológico, porém muitas vezes seu ensino é negligenciado, o que torna necessário o desenvolvimento de estudos que venham a despertar o interesse de professores e alunos e aprofundar os conhecimentos acerca desse conteúdo. Dessa maneira, esse trabalho foi desenvolvido tendo como objetivo apresentar ao leitor a importância da Análise Combinatória, abordando para isso pontos como: seu desenvolvimento ao longo da história e sua aplicabilidade em outras áreas da matemática, para que desta maneira seja possível compreender a relevância que a mesma representa no currículo escolar. Ao mesmo tempo pretende-se proporcionar uma análise sobre o atual ensino da análise da combinatória, enfatizando principalmente quanto aos benefícios e malefícios da utilização de fórmulas para a resolução de problemas do referido conteúdo. Por fim, o presente trabalho apresenta uma proposta de sequência didática baseada no Princípio Fundamental da Contagem que possa vir a ser utilizada por professores da educação básica e contribuir de forma significativa no processo de ensino/aprendizagem da Análise Combinatória.

Palavras-Chave: Análise Combinatória, contagem, agrupamentos.

Abstract

The use of counting techniques has proved to be of great necessity these days mainly due to the population and technological advances, but often their teaching is neglected, which makes it necessary to develop studies that will arouse the interest of teachers and students and deepen knowledge about that content. Thus this work was developed aiming to present to the reader the importance of the Combinatorial Analysis, addressing for this the following points: its development throughout history and its applicability in other areas of mathematics, so that it is possible to understand the relevance that same represents in the school curriculum. At the same time, it is intended to provide an analysis of the current teaching of combinatorial analysis, emphasizing mainly the benefits and harms of using formulas to solve problems of such content. Finally, this paper presents a proposal for a didactic sequence based on the Fundamental Principle of Counting that can be used by teachers of basic education and contribute significantly to the teaching / learning process of Combinatorial Analysis.

KeyWords: Combinatorial Analysis, score, groupings.

Sumário

Introdução	8
1 Justificativa	9
2 Uma breve reflexão histórica da Análise Combinatória	11
3 Noções de conjuntos	14
3.1 Conjuntos: Teoria	14
3.2 Representação de um conjunto	14
3.3 Tipos de conjuntos	15
3.4 Igualdade de conjuntos	15
3.5 Subconjuntos	15
4 Análise Combinatória: definições	16
4.1 Princípio Fundamental da Contagem (P.F.C.) ou Princípio Multiplicativo	16
4.2 Fatorial	16
4.3 Permutação e arranjo simples	16
4.4 Combinação simples	16
4.5 Permutação, arranjo e combinação - com repetição	17
4.6 Permutação circular	17
5 Resolução de problemas	18
6 Pensamento dedutivo	22
7 Dedução de fórmulas	23
7.1 Permutação simples	23
7.2 Arranjo simples	23
7.3 Combinação simples	23
7.4 Permutação com repetição	24
7.5 Combinação com repetição	24
7.6 Arranjo com repetição	25
8 Aplicação das fórmulas	26
9 Considerações acerca dos capítulos 5 e 8	28
10 Resolução de questões	29
11 Considerações	35
Referências Bibliográficas	36

Introdução

A análise combinatória é basicamente o desenvolvimento de técnicas de contagem, onde é possível contar elementos de um conjunto sem a necessidade de enumerá-los e surge inicialmente com o interesse por jogos de azar, porém mesmo que o seu surgimento esteja ligado a algo tão trivial ganhou grande importância com o passar do tempo, sendo hoje o alicerce da teoria das probabilidades e de outras áreas do conhecimento.

Embora hoje sua importância seja algo inquestionável, muitos discentes e docentes apresentam certa dificuldade em entender seus conceitos e aplicá-los de forma correta na resolução de certos problemas, isso se dá em parte pela dificuldade de interpretar enunciados como também pela forma que o conteúdo é ensinado.

O ensino da combinatória acontece muitas vezes com a apresentação de fórmulas prontas que o aluno deve memorizar seguido da resolução de exercícios que posteriormente serão utilizados como exemplos para resolver novos exercícios que pouco exigem do aluno pelo fato de que a simples aplicação das fórmulas é suficiente para sua resolução. A princípio essa metodologia de ensino pode parecer algo promissor, mas isso transforma um conteúdo de grande importância no desenvolvimento do raciocínio lógico em algo mecanizado e sem sentido.

O ensino da análise combinatória deve exigir do discente a construção de um determinado raciocínio para a resolução de cada problema enfrentado, fazendo com que o referido conteúdo passe a ter sentido e que o mesmo perceba que não é refém de fórmulas, mas sim dono do seu próprio método de resolução. É importante ressaltar que o presente trabalho não defende a ideia que as fórmulas nunca devem ser utilizadas, o que se defende é que primeiro o aluno saiba resolver problemas para que assim as mesmas surjam como consequência do raciocínio desenvolvido.

Portanto o que se pretende com esse estudo é elaborar considerações sobre o atual ensino da análise combinatória recorrendo a análise documental e revisão bibliográfica, a primeira demonstrando de forma histórica a presença e importância do assunto abordado e a segunda referenciando o tema com base na literatura investigativa e informativa, para que a partir daí possa se construir uma metodologia que venha a contribuir no processo de ensino/aprendizagem da combinatória.

1. Justificativa

Ao longo da história a Análise Combinatória evoluiu devido a crescente necessidade do homem, principalmente na utilização de técnicas de contagem. E parte significativa dessa evolução é traduzida em forma de tecnologias.

Apesar de muitas vezes o senso comum relacioná-la com mais frequência ao mero uso em jogos de azar, esse ramo é essencial em diversas áreas da matemática: cálculo de probabilidades e estatística, teoria dos conjuntos, teorias da informação, teoria dos números, geometria, programação linear, dentre outras aplicações.

Um bom exemplo de sua aplicabilidade pode ser observada na teoria dos conjuntos, mais especificamente no cálculo do número de subconjuntos de um dado conjunto, que será explorado no decorrer do trabalho.

Pode se observar ainda aplicações da Combinatória na Geometria quanto ao desenvolvimento das fórmulas para o cálculo do número de diagonais de um polígono e soma dos ângulos internos.

Percebemos assim, que a Combinatória representa uma área de grande importância para a matemática e conseqüentemente para a sociedade e deve ser reconhecida. Acerca dessa importância, os parâmetros curriculares nacionais defendem que:

"A constatação da sua importância apoia-se no fato de que a Matemática desempenha papel decisivo, pois permite resolver problemas da vida cotidiana, tem muitas aplicações no mundo do trabalho e funciona como instrumento essencial para a construção de conhecimentos em outras áreas curriculares. Do mesmo modo, interfere fortemente na formação de capacidades intelectuais, na estruturação do pensamento e na agilização do raciocínio dedutivo do aluno."(BRASIL, 1997, p. 15)

Porém, mesmo com sua importância ressaltada em documentos oficiais como os PCN's (Parâmetros curriculares nacionais), o ensino da mesma na Educação Básica é negligenciado, sendo apresentada aos alunos de forma desvinculada da realidade e de maneira mecânica. Muitas das vezes resumidas por algumas fórmulas prontas, dadas em forma de exemplos e seguidas de questões que muito se assemelham aos expostos pelo professor.

[...] "ao longo dos anos que a ideia da combinatória tem sido apresentada aos alunos apenas de uma forma mecanizada, é colocada as fórmulas, alguns exercícios costumeiros e a matéria está totalmente concluída."(RODA, 2018, p. 12)

Ao ensinar Combinatória dessa maneira perde-se a essência matemática de estímulo ao raciocínio, transformando o aluno em um mero copiador de fórmulas de um conteúdo complicado, como afirma MORGADO:

[...] "se a aprendizagem destes conceitos se faz de maneira mecânica, limitando-se a empregá-los em situações padronizadas, sem procurar habituar o aluno com a análise cuidadosa de cada problema, cria-se a impressão de que a Análise Combinatória é somente um jogo de fórmulas complicadas."(MORGADO et. al. 1991, p. 2)

Encontramos ainda em documentos oficiais como os PNC's (pg.41, 2000) que a aprendizagem da matemática não pode ser limitada apenas a memorização de fórmulas, mas sim, estar vinculada ao saber fazer e pensar matemático. Seguindo a mesma linha, os PCNS+ defendem que:

"A Contagem, ao mesmo tempo que possibilita uma abordagem mais completa da probabilidade por si só, permite também o desenvolvimento de uma nova forma de pensar em Matemática denominada raciocínio combinatório. Ou seja, decidir sobre a forma mais adequada de organizar números ou informações para poder contar os casos possíveis não deve ser aprendido como uma lista de fórmulas, mas como um processo que exige a construção de um modelo simplificado e explicativo da situação". (BRASIL, 1999, p. 126).

É justificável que a simples utilização de fórmulas facilita a resolução de problemas e simplifica o ensino dos conteúdos, o que a princípio seria bom, mas admitir essa metodologia, que é trivial, traz como consequência uma limitação do raciocínio. A simplificação que facilita a aprendizagem pode acontecer por outros caminhos mais eficazes, um deles emerge da necessidade de primeiro resolver problemas para que a partir deles haja a percepção de padrões para enfim surgirem formas ou fórmulas de resoluções, como podemos verificar nos PCN+:

"As fórmulas devem ser consequência do raciocínio combinatório desenvolvido frente à resolução de problemas diversos e devem ter a função de simplificar cálculos quando a quantidade de dados é muito grande. Esses conteúdos devem ter maior espaço e empenho de trabalho no ensino médio, mantendo de perto a perspectiva da resolução de problemas aplicados para se evitar a teorização excessiva e estéril". (BRASIL, 2002, p.126-127).

Diante desta análise foi desenvolvido este trabalho com o objetivo de propor uma sequência didática para o ensino da Análise Combinatória na educação básica sem precisar inicialmente recorrer ao mero uso do "decoreba" de fórmulas, propiciando o desenvolvimento de estratégias para o aluno na manipulação do raciocínio combinatório, que futuramente resultará na descoberta das tão famosas e práticas fórmulas que encontramos na Combinatória.

2. Uma breve reflexão histórica da Análise Combinatória

As informações contidas nesse capítulo podem ser encontradas em [5], [9], [12] e [13].

A história da Análise Combinatória de forma mais conceitual começa basicamente a partir do século XVII com destaque para a atuação do matemático Blaise Pascal (1623 —1662) e posteriormente as contribuições de Pierre de Fermat (1601 – 1665) e Gottfried Wilhelm von Leibniz (1646 – 1716). E surge de maneira curiosa ao propor soluções de probabilidades em um jogo de azar.

Porém, bem anterior a essas contribuições vários problemas que requeriam um pensamento que envolvia os conceitos posteriormente desenvolvidos na combinatória estão registrados na história antiga, inclusive antes da era Cristã. Segundo Heinrick Wieleitner por volta de 2000 a.C uma proposição tratava da formação de quadrados mágicos denominados de Luo Shu.

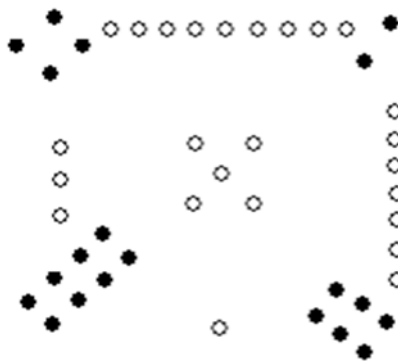


Figura 2.1: Quadrado mágico de Lu Shu

Um quadrado $n \times n$ é dito mágico se a soma dos números de cada linha, coluna ou diagonal for sempre constante, considerando ainda que para a construção do mesmo usaremos a sequência distinta $1, 2, \dots, n$.

Ao analisarmos o quadrado mágico mais afundo percebemos que o mesmo trata se de um arranjo. Abaixo podemos ver um exemplo:

4	9	2
3	5	7
8	1	6

Figura 2.2: Tradução do quadrado mágico de Lu Shu

A soma dos números das linhas, colunas e diagonais sempre resultam em 15. O quadrado passou

a ser usado como guia de um sistema agrícola eficiente, prevendo os solstícios das estações climáticas. O seu estudo compõe também uma abordagem matemática e numerológica na natureza e da mutação, deixando-o com um teor místico e de possibilidades de investigação científica.

Ainda, antes da era de Cristo, vale destacar o chamado quadrado de Stomachion, proposto supostamente por Arquimedes (287 a.C. – 212 a.C.). O mesmo trata-se da combinação de peças em um tabuleiro.

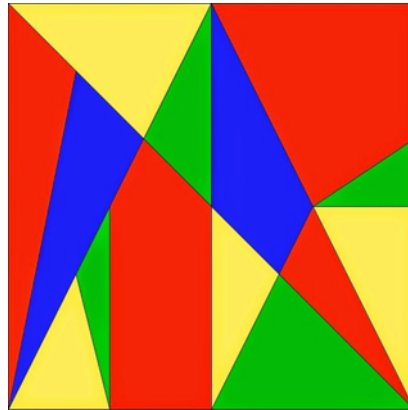


Figura 2.3: Stomachion

O jogo consistia em 14 peças planas de formas distintas que deviam ser organizadas de diferentes maneiras e formar um quadrado de lado 12.

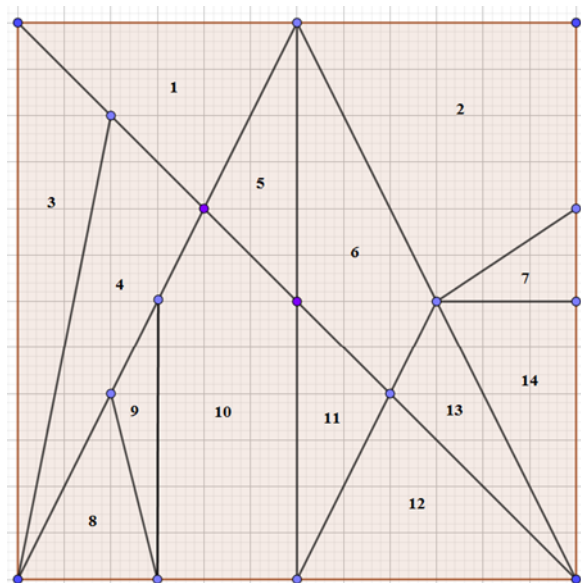


Figura 2.4: Stomachion enumerado

Para calcular a área de cada figura basta realizar a decomposição das mesmas em triângulos. A tabela abaixo apresenta a área de cada figura.

Tabela 2.1: Áreas do Stomachion

Figura	Área (u.a)
1	12
2	24
3	12
4	12
5	6
6	12
7	3
8	6
9	3
10	21
11	6
12	12
13	6
14	9
Total	144

Algo interessante para se observar é o fato de que todas as peças apresentam áreas comensuráveis com a área do quadrado, encaixados sob medida formando perfeitamente a área total de 144 u.a.

Outro interessante problema – chamado de problema 79 - que envolve a combinatória está no papiro de Rhind, este entendido pelo Princípio Multiplicativo ou Princípio Fundamental da Contagem, Ele indaga: Há sete casas, cada uma com sete gatos, cada gato mata sete ratos, cada rato teria comido sete safras de trigo, cada qual teria produzido sete hekat (um hekat corresponde a aproximadamente 4,9 litros) de grãos, quantos itens têm ao todo? Através deste problema, percebemos que desde a antiguidade, matemáticos já se interessavam em desenvolver técnicas de contagem.

Em uma poesia escrita por Leonardo de Fibonacci (1170 — 1250) segue o mesmo raciocínio do problema 79.

“Quando eu estava indo para St. Ives, Eu encontrei um homem com sete mulheres, cada mulher tem sete sacos, cada saco tem sete gatos, cada gato tem sete caixas. Caixas, gatos, sacos e mulheres, Quantos estavam indo para St. Ives? “Sete mulheres velhas estão indo para Roma; cada uma delas têm sete mulas; cada mula carrega sete sacos; cada saco contém sete pães; cada pão tem sete facas; e cada faca tem sete bainhas. Qual é o número total de coisas?”

Logo temos amostras que nos permite perceber que o ser humano já apresentava um certo fascínio sobre problemas de contagem.

Mesmo com problemas tão antigos a teoria combinatória só foi formalmente escrita e aceita como um ramo da ciência no século XVII, com os livros: *Traité du Triangle Arithmétique* escrito por Pascal em 1654 e publicado em 1655, *Dissertatio de Arte Combinatória* (1666) de Leibniz e *Ars Magna Sciendi Sive Combinatoria* (1669) do Matemático alemão Thanasius Kircher (1601 —1680).

Segundo Struik (1989) problemas dessa natureza tiveram um grande apelo de nobres da época, que se dedicavam aos constantes jogos de azar desenvolvidos, os matemáticos, pedindo a eles a iniciação de estudos que desvendasse esses eventos e resultados obtidos. Pascal decidiu expor as suas reflexões a Fermat e ambos formaram uma importante base para entendimentos futuros sobre as diversas conjunturas elaboradas.

3. Noções de conjuntos

Para uma melhor compreensão de definições e técnicas de resolução apresentadas posteriormente faz-se necessário uma breve introdução acerca de conjuntos. Portanto o propósito desse tópico é apresentar esses conceitos.

As informações contidas nesse capítulo podem ser encontradas em [6], [7] e [9].

3.1. Conjuntos: Teoria

Definição 3.1. Chama-se conjunto a reunião ou coleção de objetos que possuem uma característica em comum e esses objetos são chamados de elementos do conjunto.

Para designar conjuntos costuma-se utilizar letras maiúsculas do nosso alfabeto enquanto para representarmos elementos usa-se letras minúsculas.

3.2. Representação de um conjunto

Considere o conjunto A formado pelas vogais do nosso alfabeto. Sua representação pode ser feita de diferentes maneiras:

Enumerando os elementos entre chaves e separados por vírgula.

Exemplo 1. $A = \{a, e, i, o, u\}$.

Por uma propriedade que determina seus elementos.

Exemplo 2. $A = \{x \mid x \text{ é uma vogal}\}$.

Através do diagrama de Venn onde os elementos são escritos em uma região plana e delimitada por uma linha fechada e não entrelaçada.

Exemplo 3.



Figura 3.1: Diagrama de Venn

Para indicar que um elemento pertence a um determinado conjunto utilizamos o símbolo \in e para indicar o caso contrário utilizamos o símbolo \notin .

Exemplo 4. Dado o conjunto $A = \{a, e, i, o, u\}$, temos que:

O elemento e pertence ao conjunto A , isto é, $e \in A$.

O elemento b não pertence ao conjunto A , isto é, $b \notin A$.

3.3. Tipos de conjuntos

Definição 3.2. Um conjunto é dito finito se possuir uma quantidade finita de elementos.

Definição 3.3. Se um conjunto possui uma quantidade infinita de elementos chamamos o mesmo de conjunto infinito.

Definição 3.4. Um conjunto unitário é o conjunto que possui um único elemento.

Definição 3.5. Denomina-se conjunto vazio os conjuntos que não possuem nenhum elemento.

Definição 3.6. O conjunto que contém todos os elementos é chamado de conjunto universo e costuma-se representar pela letra U .

Definição 3.7. Chama-se complementar de A o conjunto que contém todos os elementos de U que não pertencem a A .

3.4. Igualdade de conjuntos

Definição 3.8. Dizemos que os conjuntos B e C são iguais se todo elemento de B pertencer a C e todo elemento de C pertencer a B .

Exemplo 5. Se $B = \{2, 3, 5\}$ e $C = \{5, 3, 2\}$ dizemos que $B = C$.

3.5. Subconjuntos

Definição 3.9. Um conjunto A é subconjunto de B se todo elemento de A pertencer a B .

Dessa maneira dizemos que A está contido em B e representamos por $A \subset B$ ou de forma equivalente dizemos que B contém A e escrevemos $B \supset A$. Para representarmos o contrário, ou seja, A não está contido em B ou B não contém A utilizamos respectivamente $A \not\subset B$ e $B \not\supset A$.

Proposição 3.10. Dado um conjunto $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ temos que a quantidade de subconjuntos do mesmo será dado por $P(A) = 2^n$.

Pelo fato de alguns conceitos ainda não terem sido apresentados, a demonstração dessa proposição será realizada por meio da resolução da questão 11 do capítulo 10.

4. Análise Combinatória: definições

Nesse capítulo serão apresentadas algumas definições de conceitos relacionados a análise combinatória fundamentando se em [6], [7], [9] e [11].

Definição 4.1. Chama-se Análise Combinatória as técnicas utilizadas para quantificar objetos de um dado conjunto sem a necessidade de listar ou enumerar todos os elementos.

4.1.Princípio Fundamental da Contagem (P.F.C.) ou Princípio Multiplicativo

Definição 4.2. Se uma decisão D_1 pode ser tomada de p modos e, qualquer que seja esta escolha, a decisão D_2 pode ser tomada de q modos, então o número de maneiras de se tomarem consecutivamente as decisões D_1 e D_2 é igual a $p.q$. Esse método de contagem é intitulado Princípio Fundamental da Contagem (P.F.C.) ou Princípio Multiplicativo.

A definição 4.1 é suficiente para resolver problemas sobre permutação, arranjo e combinação, definiremos esses conceitos neste trabalho, e com isso mostraremos como aplicá-la.

4.2.Fatorial

A ideia de fatorial é útil na combinatória, embora apenas com o intuito de simplificação e redução na escrita de algumas resoluções.

Definição 4.3. Seja n um número natural, representamos n fatorial por $n!$ e definimos o mesmo como: $n!$ é o produto de todos os números naturais de 1 ate n , para $n \geq 2$ ou $n! = 1$, para $n = 1$ ou $n = 0$.

4.3.Permutação e arranjo simples

Definição 4.4. Seja M um conjunto com m elementos, isto é $M = \{a_1, a_2, \dots, a_m\}$. Chamamos de arranjo simples dos m elementos tomados r a r ($1 \leq r \leq m$) a qualquer r-upla (seqüência de r elementos) formada com elementos de M todos distintos.

Definição 4.5. Seja M um conjunto com m elementos, isto é, $M = \{a_1, a_2, \dots, a_m\}$. Chamamos de permutação dos m elementos a todo arranjo em que $r = m$.

Logo fica evidente que a permutação trata-se tão somente de um caso singular de arranjo simples, sendo o número de termos escolhidos igual ao de termos disponíveis, apenas alternando posições.

4.4.Combinação simples

Definição 4.6. Uma combinação simples de n elementos (distintos), tomados p a p , é qualquer escolha de p elementos dentre os n elementos dados. Em uma combinação, apenas o conjunto dos elementos escolhidos é relevante, de modo que a ordem em que eles forem tomados não importa.

As definições apresentadas permitem então a diferenciação de um arranjo simples para uma combinação simples. O primeiro é trabalhado quando a ordem de escolha importa e o segundo quando a mesma não importa.

É preciso ressaltar que em muitas das vezes apenas essa diferenciação aliada a algumas fórmulas prontas são utilizadas quando se trata do ensino desse conteúdo em sala de aula, não só para discentes de nível médio, mas isso ocorre até no ensino superior, voltando então para abordagem central a que este trabalho se dispõe. Tal metodologia é simplista e reforça o estereótipo de uma combinatória mecanizada e sem sentido.

4.5. Permutação, arranjo e combinação - com repetição

Como as definições de permutação, arranjo e combinação já foram dadas, faremos apenas complementos para definirmos as mesmas considerando elementos repetidos.

Definição 4.7. Dados n objetos nem todos distintos chama-se permutação com repetição o número de maneiras de permutar esses objetos.

Definição 4.8. Dados n objetos nem todos distintos chama-se arranjo com repetição o número de maneiras de selecionar 1 ou 2 ou 3... ou $n - 1$ desses objetos considerando que a ordem importará.

Definição 4.9. Dados n objetos nem todos distintos chama-se combinação com repetição o número de maneiras de selecionar 1 ou 2 ou 3... ou n desses objetos considerando que a ordem não importa.

4.6. Permutação circular

Definição 4.10. chama-se permutação circular o número de maneiras de distribuir n elementos distintos em torno de um círculo, considerando equivalentes as disposições que possam coincidir por rotação.

5. Resolução de problemas

Observe que embora as definições de arranjo e combinação tenham sido apresentadas com um alto nível de formalidade matemática, nenhuma fórmula foi citada. Isso reforça nosso pensamento crítico ao modelo de decorar fórmulas que muitas vezes esquecemos e que nos afasta da essência matemática cujas bases estão no estímulo ao raciocínio. É importante salientar que o raciocínio entendido a partir das definições dos conceitos da Análise Combinatória pode-se desenvolver métodos e estratégias para resolvermos questões referentes à contagem de elementos.

Após a apresentação das definições conceituais, o aluno pode ser estimulado a aprender a utilizar o raciocínio lógico matemático ao seu favor para resolver diferentes problemas referentes à Combinatória.

Apresentaremos a seguir alguns problemas com intuito de trabalhar formas de pensar aplicando apenas o (P.F.C.) para sua resolução (sendo que este em si não tem base em fórmulas, mas sim em um raciocínio matemático). Os problemas se encontram em diferentes níveis de dificuldade.

Problema 1. Para ir da cidade A para a B existem três percursos e da cidade B até a C existem quatro, conforme a figura. Sabendo que José esta na cidade A, determine de quantas maneiras ele pode chegar até a C passando por B:

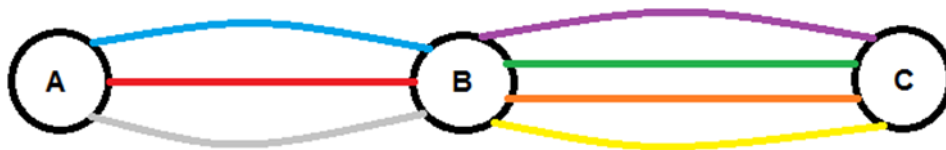


Figura 5.1: (P.F.C.)

Solução: Basta utilizarmos o Princípio Fundamental da Contagem que teríamos $3 \cdot 4 = 12$ possibilidades.

Problema 2. Uma corrida de rua conta com a participação de 12 atletas. Sabendo disso calcule de quantas maneiras podemos distribuir medalhas da 1^a a 12^a posição:

Solução:

Pensaremos da seguinte maneira, para ocupar a primeira posição temos 12 corredores disponíveis já que qualquer um pode chegar primeiro, após ocuparmos esta posição nos resta 11 atletas para a segunda posição, logicamente em seguida teríamos 10 pessoas para a terceira posição, já que os dois primeiros lugares já estão ocupados, e assim sucessivamente, utilizando o (P.F.C.) obtemos:

$$12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot \dots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 12! = 479001600 \text{ maneiras.}$$

Problema 3. Uma corrida de rua conta com a participação de 12 atletas. Sabendo disso calcule de quantas maneiras podemos entregar os troféus de 1, 2 e 3 lugar:

Solução:

O raciocínio utilizado para resolver esse problema é bastante semelhante ao utilizado no problema 2, observe que para ocupar a primeira posição existem 12 atletas possíveis, após esta posição estar ocupada

restam 11 atletas para a segunda posição e em seguida 10 corredores para a terceira posição, aplicando agora o (P.F.C.) obtemos:

$$12 \cdot 11 \cdot 10 = 1320 \text{ possibilidades}$$

Problema 4. Em uma sala de aula há vinte alunos dos quais três serão selecionados para representarem a escola em uma Olimpíada de Matemática. De quantas maneiras esses alunos podem ser selecionados

Solução:

Para resolver esse problema utilizaremos o raciocínio do problema 3, porém apenas até certo ponto. Observe que para a escolha do primeiro aluno temos toda a sala à disposição, ou seja, 20 alunos, porém para a escolha do segundo teremos 19 discentes, pois um já foi selecionado, e após a escolha dos dois primeiros teremos 18 possibilidades para escolha do terceiro, o que finaliza o grupo que representará a escola. Utilizando agora o (P.F.C.) teríamos que o número de possibilidades seria $20 \cdot 19 \cdot 18 = 6840$, mas é necessário um pouco mais de cautela, pois ao obtermos o valor 6840 estamos considerando que a ordem de escolha importa o que não está de acordo com o problema já que escolher José, Carlos e Ana é o mesmo que escolher Carlos, Ana e José, por exemplo. Para resolvermos esse impasse aplicaremos novamente o (P.F.C.) para calcular de quantas maneiras poderíamos permutar três alunos, o que teríamos $3 \cdot 2 \cdot 1$, basta agora realizarmos uma divisão simples para eliminarmos essas permutações, logo o resultado final será dado por:

$$\frac{20 \cdot 19 \cdot 18}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 1140.$$

Problema 5. Quantos são os anagramas da palavra “MATEMATICA”?

Solução:

Temos aqui um problema sobre permutação com repetição e para solucioná-lo iremos inicialmente calcular quantos anagramas seria possível formar com a palavra dada, mas sem considerar ainda que existem letras repetidas,

— — — — —
Temos 10 posições para distribuímos as letras $m, a, t, e, m, a, t, i, c$ e a , desta forma temos a disposição para ocupar a primeira posição 10 letras, para a segunda posição 9 letras, já que uma foi utilizada, seguindo o raciocínio até a última posição e aplicando o (P.F.C.), obtemos

$$10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot \dots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 10!$$

Para concluir devemos perceber que a permutação das duas letras m não geram anagramas diferentes e o mesmo acontece com as letras a e t , desta forma para retirarmos esses casos devemos realizar uma divisão simples,

$$10! / 2!2!3! = 151200 \text{ anagramas.}$$

Dividimos o $10!$ por $2!$, pois é o número de permutação das duas letras m , fizemos o mesmo para a letra a e t , por isso obtemos no denominador a multiplicação $2!2!3!$.

Problema 6. Considere uma faixa com 5 listras e que devem ser pintadas com 3 cores distintas, de quantas maneiras podemos fazer isso?

Solução:

Para pintar a primeira listra temos 3 opções, para a segunda listra também temos 3 opções, já que a repetição de cores é permitida, e assim sucessivamente, logo o total de possibilidades será

$$3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 243.$$

Problema 7. De quantos modos é possível comprar 4 sorvetes em uma loja que os oferece em 7 sabores.

Solução:

O problema em questão pode ser simplificado transformando o mesmo em uma equação linear, onde $S_1, S_2, S_3, S_4, S_5, S_6$ e S_7 são as quantidades de sorvete compradas respectivamente do sabor 1, sabor 2, ..., sabor 6 e sabor 7.

$$S_1 + S_2 + S_3 + \dots + S_7 = 4 \tag{5.1}$$

É importante observar ainda que os valores para S_1, S_2, \dots, S_6 e S_7 , devem ser todos inteiros não negativos, pois o problema determina isso. Utilizaremos um esquema para representarmos algumas soluções que são muito fáceis de determinar e a partir desse esquema conseguiremos determinar a quantidade de soluções da equação (5.1),

$$S_1 = 4, S_2 = S_3 = \dots = S_7 = 0 \rightarrow IIII + + + + + = 4$$

$$S_1 = 2, S_2 = 1, S_4 = 1, S_3 = S_5 = S_6 = S_7 = 0 \rightarrow II + I + I + + + + = 4$$

$$S_1 = S_2 = S_3 = 0, S_4 = S_5 = S_6 = S_7 = 1 \rightarrow + + + I + I + I + I = 4$$

Percebemos com esse esquema que podemos encontrar a quantidade de soluções da equação (5.1), calculando o número de permutações com o símbolos $IIII + + + + +$, pois cada permutação significa uma solução, para esse cálculo utilizamos o raciocínio empregado no exemplo 9, logo o número de permutações ou seja soluções será dado por

$$\frac{10!}{4!6!} = 210$$

Concluimos assim que podemos comprar os sorvetes de 210 maneiras diferentes.

Problema 8. De quantos modos podemos formar uma roda com 5 crianças?

Solução:

Para resolvermos esse problema observe inicialmente o esquema abaixo, considerando cada cor como uma criança:

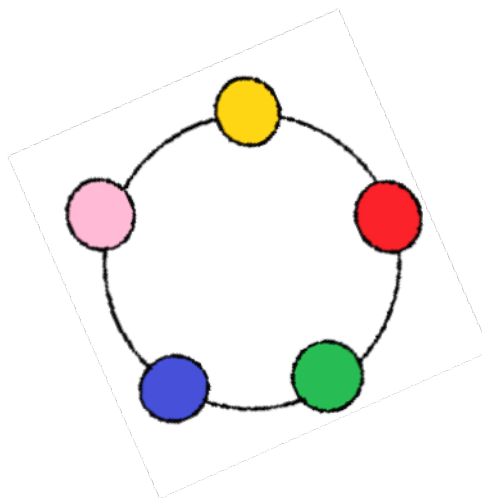


Figura 5.2: Roda de crianças

Para ocupar a primeira posição temos 5 crianças, para a segunda, 4 e assim sucessivamente até a última posição, com isso, pelo P.F.C temos que o número de possibilidades é $5!$, o que é um erro, pois ao realizarmos esse cálculo estamos contando a mesma roda 5 vezes, observe

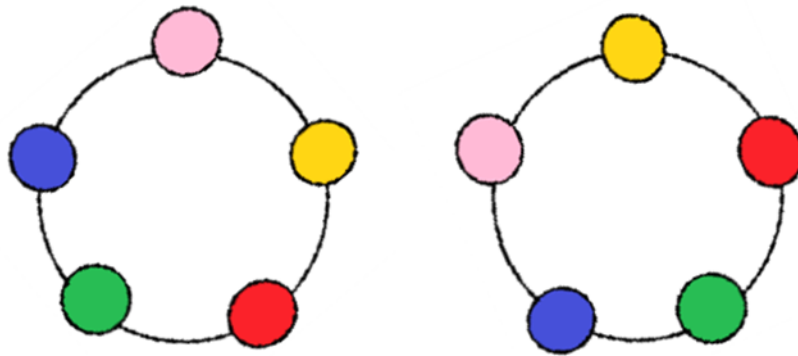


Figura 5.3: Rotação da roda de crianças

A roda apresentada nas duas figuras são iguais, pois o que torna uma diferente da outra não é o fato dela girar, mas sim a posição que as crianças se encontram em relação as demais. Devemos assim, dividir o valor encontrado inicialmente por 5. Daí temos, $\frac{120}{5} = 24$

6. Pensamento dedutivo

O conhecimento científico estruturou-se em técnicas e procedimentos para validação e verificação de suas hipóteses. Sobre isso, DEMO (1985) discorre que a ciência em sua busca por capturar a realidade, encontra no método utilizado o que precisa para atingir seus objetivos de pesquisa. Dois importantes métodos estão presentes no processo investigativo: o indutivo e o dedutivo.

Marconi e Lakatos (2010, p. 68) esclarecem a indução como sendo parte de um processo mental que considera dados particulares em um todo, suficientemente constatados e disso comensura-se uma verdade geral ou universal, não contida nas partes examinadas.

Em um exemplo: "Cobre conduz energia. Zinco conduz energia. Cobalto conduz energia. Ora, cobre, zinco e cobalto são metais. Logo, (todo) metal conduz energia".

Já a dedução, foco maior deste tópico, procura conhecer o total para além do fenômeno observado, utilizando-se assim da razão como o caminho que permite inferir à certeza sobre a verdade do fenômeno investigado.

René Descartes (1596 –1650) contribuiu muito para sistematização desses métodos. A obra *Discurso do Método*, confere ao método dedutivo o status de caminho para o conhecimento. Ele inicia-se a partir das teorias e leis já existentes e consideradas gerais para explicar a ocorrência de fenômenos particulares. O exercício metódico da dedução parte de enunciados gerais (leis universais) que supostos constituem as premissas do pensamento racional e deduzidas chegam a conclusões. O exercício do pensamento pela razão cria uma operação na qual são formuladas premissas e as regras de conclusão que se denominam demonstração. Veja-se o exercício metódico da dedução, com o exemplo clássico.

Recorreremos novamente a LAKATOS e MARCONI (2010, p. 68) em outro exemplo, dessa vez para compreender um exercício metódico dedutivo: "Todo mamífero tem um coração. Ora, todos os cães são mamíferos. Logo, todos os cães têm um coração."

Neste exemplo, os argumentos são apresentados por premissas com valor verdadeiro para que a conclusão seja considerada verdadeira, ou em outras palavras, a verdade das premissas expõe a verdade que a conclusão tem em sua essência. Sendo a condição de que basta apenas uma das premissas ser falsa para falsificar a conclusão, o método de fato se baseia em fatos universalmente aceitos como verdade se a intenção for validar o que se pretende investigar.

Após as definições de ambos os métodos, traremos o dedutivo especificamente para Análise Combinatória, assumindo tal método como intrínseco à Matemática. A dedução por ser sistematizada, ou seja, já parte de conhecimentos universais, estrutura um pensamento formal, encadeando outras asserções lógicas conclusivas.

Oliveira (2008) reforça a importância da dedução da resolução matemática ao afirmar que se a cadeia de asserções advindas das deduções esteja isenta de erros, "o raciocínio dedutivo produz conclusões que são necessariamente válidas". Logo, pode-se concluir que temos um caminho seguro para explorar. A combinatória nos permite isso ao certificarmos que cientes de seus conceitos, podemos solucionar vários problemas propostos sem a "decoreba" de fórmulas. Se solidificarmos as definições, entenderemos que as ditas fórmulas são frutos de um processo que pode ser dedutivo.

7. Dedução de fórmulas

Nesse capítulo serão demonstrados uma série de teoremas e para tal utilizaremos problemas genéricos e o raciocínio aplicado na resolução de cada problema resolvido no capítulo 5 para deduzirmos e conseqüentemente demonstrarmos a validade das fórmulas que são constantemente aplicadas na Análise Combinatória.

7.1. Permutação simples

Teorema 7.1. Chamamos de $p_n = n!$ o total de permutações possíveis para n elementos.

Demonstração:

Para ocupar a primeira posição temos a disposição n elementos, para ocupar a segunda temos $n - 1$ elementos, já que um deles ocupou a primeira posição, seguindo esse raciocínio temos que

$$p_n = n \cdot (n - 1) \cdot (n - 2) \cdot \dots \cdot 1 = n!$$

■

7.2. Arranjo simples

Teorema 7.2. Chamamos de $A_{n,p} = \frac{n!}{(n-p)!}$ o total de arranjos de n elementos tomados p a p , com $p < n$.

Demonstração:

Para ocupar a primeira posição podemos escolher entre n elementos, para a segunda $n - 1$ elementos até chegarmos a escolha do p -ésimo elemento onde temos $n - (p - 1)$, pois já havíamos escolhido $p - 1$ elementos para ocupar as posições anteriores, logo temos que o total de possibilidades será

$$A_{n,p} = n \cdot (n - 1) \cdot (n - 2) \dots (n - (p - 1)) = n \cdot (n - 1) \dots (n - p + 1)$$

Multiplicando a expressão por $\frac{(n-p)!}{(n-p)!}$, obtemos

$$A_{n,p} = \frac{n \cdot (n - 1) \cdot (n - 2) \dots (n - p + 1) \cdot (n - p)!}{(n - p)!} = \frac{n!}{(n - p)!}$$

■

7.3. Combinação simples

Teorema 7.3. Chamamos de $C_{n,p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$, a combinação de n elementos distintos tomados p a p , com $p \leq n$.

Demonstração:

Se a ordem importasse poderíamos utilizar a fórmula anterior para calcular, donde teríamos $A_{n,p} = \frac{n!}{(n-p)!}$. Como a ordem não importa devemos inicialmente pensar de quantas formas diferentes

poderíamos permutar p elementos, para isso recorremos a fórmula de permutação simples daí $p_p = p!$

Devemos agora realizar a seguinte divisão

$$\frac{A_{n,p}}{p_p} = \frac{\frac{n!}{(n-p)!}}{p!} = \frac{n!}{p!(n-p)!} = C_{n,p}$$

■

7.4. Permutação com repetição

Teorema 7.4. Chamamos de $p_n^{r_1, r_2, \dots, r_z} = \frac{n!}{r_1! r_2! \dots r_z!}$ o total de permutação de n objetos, onde elementos se repetem r_1, r_2, \dots, r_z vezes.

Demonstração:

Considere os elementos a_1, a_2, \dots, a_z onde o elemento a_1 se repete r_1 vezes, o elemento a_2 se repete r_2 até o elemento a_z que se repete r_z vezes e ao somarmos $r_1 + r_2 + \dots + r_z = n$, ou seja, temos n elementos. Podemos permutar os n elementos de $p_n = n!$ maneiras, mas repare que o elemento a_1 pode ser permutado de $p_{r_1} = r_1!$ maneiras, porém isso não gera novas permutações, o mesmo ocorre com os demais elementos repetidos, portanto para deixarmos de contar essas “falsas” permutações devemos realizar a seguinte divisão

$$\frac{n!}{r_1! r_2! \dots r_z!} = p_n^{r_1, r_2, \dots, r_z}$$

■

7.5. Combinação com repetição

Teorema 7.5. Chamamos de $CR_{n,p} = C_{p+n-1,p}$ a combinação com repetição de n elementos distintos tomados p a p , distintos ou não.

Demonstração:

Demonstrar esse teorema é o mesmo que demonstrar que o número de soluções inteiras não negativas da equação ... é $CR_{n,p}$, onde x_n representa a quantidade de vezes que o n -ésimo elemento foi tomado.

$$x_1 + x_2 + \dots + x_n = p \tag{7.1}$$

Utilizando o raciocínio do problema 6, teríamos com base na equação 7.1, p sinais (I) e $n-1$ sinais ($+$), logo o número de soluções da equação será igual o número de permutações dos sinais (I) e ($+$), recaímos assim em uma permutação com repetição onde o número de elementos é $p+n-1$ sendo que destes temos dois elementos que se repetem p e $n-1$ vezes, daí

$$p_{p+n-1}^{p, n-1} = \frac{(p+n-1)!}{p!(n-1)!} = \frac{(p+n-1)!}{p!(p+n-1-p)!} = C_{p+n-1,p} = CR_{n,p}$$

■

Teorema 7.6. Chamamos de $PC_n = (n-1)!$ o total de permutações circulares de n elementos distintos.

Demonstração:

Podemos permutar os elementos a_1, a_2, \dots, a_n de $p_n = n!$ maneiras, mas é necessário observar que por se tratar de um círculo poderíamos girar o mesmo n vezes sem gerar novas permutações, observe a figura 2.4.

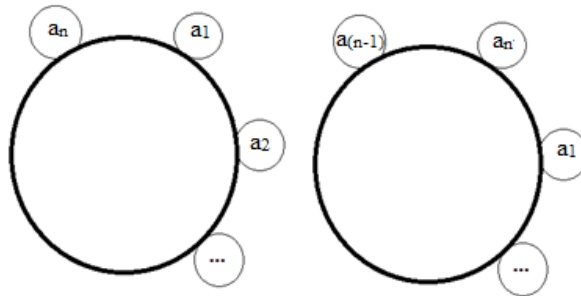


Figura 7.1: Permutação circular de n elementos.

Quando giramos o círculo fazendo o elemento a_1 tomar a posição do elemento a_2 não estamos gerando novas permutações. Portanto o número de permutações será

$$\frac{n!}{n} = \frac{n(n-1)!}{n} = (n-1)! = PC_n.$$

■

7.6. Arranjo com repetição

Teorema 7.7. Chamamos de $AR_{n,p} = n^p$ o número de arranjos com repetição de n elementos tomados p a p .

Demonstração:

Para a primeira posição do arranjo temos a disposição n elementos, para a escolha do segundo contamos ainda com n elementos, pois podemos repetir a primeira escolha, seguindo com esse raciocínio temos que para escolha do p -ésimo elemento também teremos n elementos disponíveis. Aplicando o P.F.C temos que o número de arranjos possíveis será

$$n^p = AR_{n,p}.$$

■

8. Aplicação das fórmulas

Nesse capítulo resolveremos os mesmos problemas do capítulo 5, porém agora apenas aplicando a fórmula correspondente, para que assim seja possível uma comparação quanto a facilidade e ao desenvolvimento do raciocínio para a resolução de cada uma.

Problema 1. Para ir da cidade A para a B existem três percursos e da cidade B até a C existem quatro, conforme a figura. Sabendo que José está na cidade A, determine de quantas maneiras ele pode chegar até a C passando por B:

Solução:

Trata-se basicamente do (P.F.C.).

Problema 2. Uma corrida de rua conta com a participação de 12 atletas. Sabendo disso calcule de quantas maneiras podemos distribuir medalhas da 1^a a 12^a posição:

Solução:

Temos uma permutação de 12 elementos, logo o número de possibilidades será, $p_{12} = 12! = 479001600$.

Problema 3. Uma corrida de rua conta com a participação de 12 atletas. Sabendo disso calcule de quantas maneiras podemos entregar os troféus de 1^o, 2^o e 3^o lugar:

Solução:

A ordem importa, portanto trata-se de um arranjo de 12 elementos tomados 3 a 3. Aplicando a fórmula obtemos, $A_{12,3} = \frac{12!}{(12-3)!} = \frac{12!}{9!} = 1320$ possibilidades.

Problema 4. Em uma sala de aula há vinte alunos dos quais três serão selecionados para representarem a escola em uma Olimpíada de Matemática. De quantas maneiras esses alunos podem ser selecionados

Solução:

Como a ordem de escolha não importa temos um problema de combinação de 20 elementos tomados 3 a 3. Aplicando a fórmula obtemos, $C_{20,3} = \frac{20!}{3!(20-3)!} = \frac{20!}{3!17!} = 1140$ possibilidades.

Problema 5. Quantos são os anagramas da palavra “MATEMATICA”?

Solução:

Devemos permutar as letras da dada palavra sendo que algumas se repetem, portanto trata-se de uma permutação com repetição. Seguindo a fórmula concluímos que existem $p_{10}^{2,2,3} = \frac{10!}{2!2!3!} = 151200$ anagramas.

Problema 6. Considere uma faixa com 5 listras e que devem ser pintadas com 3 cores distintas, de quantas maneiras podemos fazer isso?

Solução:

Devemos pintar cinco listras com 3 cores o que significa que deve-se utilizar uma cor mais de uma vez. Como a ordem de pintura representa faixas diferentes, temos aqui um problema de arranjo com repetição. De acordo com a fórmula temos $AR_{3,5} = 3^5 = 243$ maneiras de pintarmos a bandeira.

Problema 7. De quantos modos é possível comprar 4 sorvetes em uma loja que os oferece em 7 sabores.

Solução: A ordem de escolha não importa, porém um mesmo sabor pode ser escolhido mais de uma vez, desta maneira uma combinação com repetição, daí concluímos que existem $CR_{7,4} = C_{7+4-1,4} = C_{10,4} = \frac{10!}{4!(10-4)!} = \frac{10!}{4!6!} = 210$ possibilidades.

Problema 8. De quantos modos podemos formar uma roda com 5 crianças?

Solução: As crianças devem ser permutadas em torno de um círculo o que caracteriza como permutação circular onde o número de permutações será dado por $PC_5 = (5-1)! = 4! = 24$

9. Considerações acerca dos capítulos 5 e 8

Ao realizar a leitura dos capítulos 5 e 8 é possível perceber a facilidade e praticidade que a utilização de fórmulas pode proporcionar, porém em contrapartida faz indispensável decorar as mesmas e a necessidade de raciocínio é reduzida podendo vir a tornar-se algo mecanizado.

Pinto (2011, apud Roda, 2018) defende em sua obra que a Matemática tem como principal objetivo desenvolver o raciocínio e a habilidade para resolver problemas, partindo para isso de um senso crítico e reflexivo.

Portanto, percebemos assim que a utilização de fórmulas deve ser utilizada com cautela, fazendo inicialmente os alunos compreenderem e desenvolverem seus próprios métodos de resolução para que a partir daí os mesmos sejam capazes de deduzir essas fórmulas ou ao menos compreenderem sua aplicação não se tornando assim meros aplicadores de fórmulas.

10. Resolução de questões

Neste tópico, serão resolvidas uma série de questões de livros didáticos, olimpíadas e vestibulares que envolvem ideias interessantes sobre a Análise Combinatória o que possibilita a construção de novas técnicas de resolução e conseqüentemente a ampliação da capacidade de abstração e raciocínio.

Questão 1. OBMEP 2019. A rã Zinza quer ir da pedra 1 até a pedra 10 em cinco pulos, pulando de uma pedra para a seguinte ou por cima de uma ou de duas pedras. De quantas maneiras diferentes Zinza pode fazer isso?



Figura 10.1: Rã Zinza

Solução:

Para chegar até a última pedra a rã deve realizar cinco saltos tocando assim 4 pedras entre 1 e 10. Outra forma de pensar é que ela deve saltar por cima de 4 pedras, já que entre 1 e 10 há 8 pedras. Devemos pensar agora de quantas maneiras ela pode saltar por cima de 4 pedras?

Zinza pode realizar três tipos de salto: De uma para a seguinte que indicaremos por 0, já que não saltou por cima de nenhuma pedra. Passando por cima de uma que indicaremos por 1. Passando por cima de duas que indicaremos por 2.

Dessa forma ela pode realizar os seguintes saltos:

2, 2, 0, 0, 0 que podemos permutar de $p_5^{2,3} = 10$ maneiras;

1, 1, 1, 1, 0 que podemos permutar de $p_5^4 = 5$ maneiras;

2, 1, 1, 0, 0 que podemos permutar de $p_5^{2,2} = 30$ maneiras.

Perceba que cada um dos casos trata-se uma permutação com repetição. Portanto o total de maneiras será $10 + 5 + 30 = 45$.

Questão 2. OBMEP 2016. O símbolo proposto para os Jogos Escolares de Quixajuba é formado por seis anéis entrelaçados como na figura. Cada um dos anéis deve ser pintado com uma das três cores da bandeira da cidade (azul, verde ou rosa), de modo que quaisquer dois anéis entrelaçados tenham cores diferentes. Quantas são as maneiras de pintar esse símbolo?

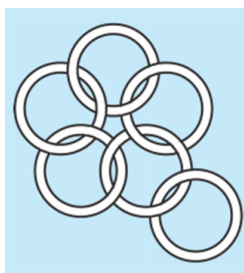


Figura 10.2: Símbolo dos jogos escolares de Quixajuba

Solução:

Para uma melhor compreensão iremos representar essa situação com o seguinte esquema:

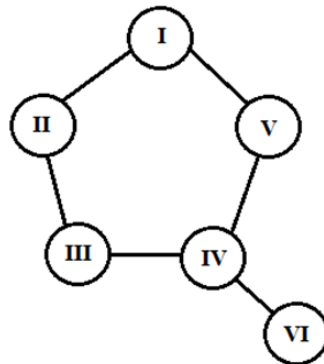


Figura 10.3: Diagrama

De acordo com o enunciado da questão dois círculos ligados por um segmento de reta não devem ser pintados com a mesma cor.

Para pintar o círculo I temos 3 opções de cores, para o II restam 2 opções.

Dividiremos o problema agora em três situações:

1ª situação: o círculo IV tem uma cor diferente de I e II.

Se isso acontece resta apenas uma única opção para o círculo III e V e para o círculo VI há 2 opções. Pelo princípio multiplicativo teremos $3 \cdot 2 \cdot 2 = 12$ possibilidades.

2ª situação: o círculo IV tem uma cor diferente de I.

Se isso acontece temos 2 possibilidades para o círculo V e apenas 1 possibilidade para o círculo III visto que II e IV tem cores diferentes, já para o círculo VI há 2 opções. Logo pelo (P.F.C.) temos $3 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 24$ possibilidades.

3ª situação: o círculo IV tem uma cor diferente de II.

Pelo mesmo raciocínio da situação 2 temos 24 possibilidades.

Portanto o total será $12 + 24 + 24 = 60$ possibilidades.

Questão 3. OCZM 2016. Joãozinho quer distribuir 6 presentes entre seus 4 melhores amigos, Fulano, Beltrano, Sicrano e Pedrinho, de modo que cada um receba pelo menos um presente e todos os presentes sejam distribuídos. Supondo que todos os presentes são iguais, de quantos modos ele pode fazer essa distribuição?

Solução:

Inicialmente distribuimos um presente para cada amigo, já que de acordo com o problema todos devem receber ao menos um presente. Dessa maneira sobraram agora 2 presentes que podem ser distribuídos para qualquer um dos seus amigos.

Observe ainda que Joãozinho pode dar os dois para um único amigo ou dividir o total para dois amigos, portanto o problema se resume agora em quantas maneiras podemos escolher um amigo ou dois amigos para receberem os presentes, como a ordem de escolha não importa temos uma combinação simples, portanto o total de possibilidades será,

$$C_{4,1} + C_{4,2} = \frac{4!}{1!(4-1)!} + \frac{4!}{2!(4-2)!} = 4 + 6 = 10.$$

Questão 4. OCZM 2017. Um grupo de 15 servidores do IFPB pretende formar três times de futsal, composto por um goleiro e quatro jogadores de linha. Sabe-se que três servidores são goleiros e devem ficar em times diferentes. Outros três servidores jogam muito bem e também devem ficar em times separados. De quantas maneiras é possível organizar os três times?

Solução:

Vamos considerar três times que se diferenciam pelo seu goleiro. Temos 3 jogadores que jogam muito bem e podem ser permutados entre esses três times de $3! = 6$ maneiras. Para completar cada time faltam 3 jogadores de linha que podem ser escolhidos entre $15 - 3 - 3 = 9$ servidores.

Perceba que a ordem de escolha dos jogadores não importa, portanto pode se selecionar 3 jogadores de 9 de $C_{9,3} = 84$ maneiras, restando assim 6 jogadores para o segundo time, esses por sua vez podem ser escolhidos de $C_{6,3} = 20$ maneiras. Restam agora 3 jogadores que significa uma única escolha para o terceiro time.

Observe agora que o primeiro time pode ser escolhido de $6 \cdot 84$ maneiras pelo (P.F.C.) e para cada uma dessas escolhas o segundo time pode ser escolhido de 20 maneiras e o terceiro de 1 maneira. Portanto pelo (P.F.C.) temos um total de $6 \cdot 84 \cdot 20 \cdot 1 = 10080$ possibilidades.

Questão 5. ITA 2014 Determine quantos paralelepípedos retângulos diferentes podem ser construídos de tal maneira que a medida de cada uma de suas arestas seja um número inteiro positivo que não exceda 10.

Solução:

Em um paralelepípedo há 3 medidas das arestas que podem ser iguais ou não. Como as arestas devem ser números inteiros que não excedam 10 podemos considerar as mesmas como elementos do seguinte conjunto $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$. O problema se resume assim na quantidade de maneiras que podemos escolher 3 elementos de A , repetidos ou não, considerando ainda que a ordem de escolha não importa. Temos assim uma combinação com repetição, logo o número de possibilidades será,

$$CR_{10,3} = C_{10+3-1,3} = C_{12,3} = \frac{12!}{3!9!} = 220.$$

Questão 6. ITA 2013 Quantos tetraedros regulares de mesma dimensão podemos distinguir usando 4 cores distintas para pintar todas as suas faces? Cada face só pode ser pintada com uma única cor.

Solução:

Sabemos que um tetraedro possui 4 faces, podemos pintá-las das seguintes maneiras:

1º utilizando uma única cor.

Como temos 4 cores implica em 4 possibilidades.

2º utilizando duas cores.

Pode se pintar uma face de uma cor e as três de outra, como a quantidade de faces difere podemos considerar como um arranjo. Daí, $A_{4,2} = 12$ possibilidades. Outra forma seria pintar duas de uma cor e as outras duas de outra, portanto devemos escolher duas cores entre 4, como o número de faces é igual podemos considerar como uma combinação, logo $C_{4,2} = 6$ possibilidades.

Temos assim um total de $12 + 6 = 18$ possibilidades.

3º utilizando três cores.

Devemos assim pintar duas faces de uma mesma cor e outras duas de cores distintas. Para pintar as duas faces há 4 possibilidades e para a escolha das outras duas cores há $C_{3,2} = 3$ possibilidades. Pelo (P.F.C.) temos $4 \cdot 3 = 12$ possibilidades.

4º utilizando quatro cores.
 Observe a figura 10.2.

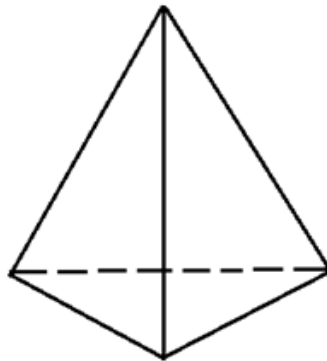


Figura 10.4: Tetraedro

Para uma melhor compreensão considere as cores: C_1, C_2, C_3 e C_4 .

Poderíamos assim pintar a face da esquerda de C_1 , a da direita de C_2 , a de baixo de C_3 e a face posterior de C_4 . Agora perceba que sempre será possível observar o tetraedro como na figura e enxergar as cores C_1 e C_2 , pois para isso basta girar a mesma até a posição desejada. Porém, se permutarmos as cores da face de baixo e da posterior gerariamos um novo tetraedro já que não é possível rotacionar o mesmo até coincidir com o primeiro exemplo. Desta maneira temos duas configurações possíveis.

Concluimos assim que existem $4 + 18 + 12 + 2 = 36$ possibilidades.

Questão 7. OBMEP 2018 Um estacionamento tem 10 vagas, uma ao lado da outra, inicialmente todas livres. Um carro preto e um carro rosa chegam a esse estacionamento. De quantas maneiras diferentes esses carros podem ocupar duas vagas de forma que haja pelo menos uma vaga livre entre eles?



Figura 10.5: Estacionamento

Solução:

Para uma melhor compreensão vamos numerar as vagas.

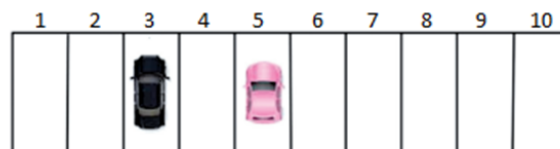


Figura 10.6: Estacionamento enumerado

É importante observar que queremos calcular de quantas maneiras duas vagas podem ser ocupadas sendo que a ordem dos carros não importa.

Vamos considerar as seguintes situações:

Se um carro ocupar a vaga 1 ou 10, temos 8 possibilidades para o segundo carro, pelo (P.F.C.) temos $2 \cdot 8 = 16$ possibilidades.

Se um carro ocupa qualquer uma das vagas de 2 a 9 sobram 7 vagas disponíveis, temos assim pelo (P.F.C.) $8 \cdot 7 = 56$ possibilidades.

Somando assim $16 + 56 = 72$ possibilidades.

Questão 8 (ENA 2019). Em um estacionamento ha 5 vagas exclusivamente para carros e 7 vagas mais estreitas exclusivamente para motos. De quantas formas e possível estacionar 3 carros e 4 motos nessas vagas?

Solução:

Para estacionar o primeiro carro temos a disposição 5 vagas, para estacionar o segundo 4, já que uma foi ocupada, e para o terceiro 3 opções. Pelo (P.F.C.) temos $5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$ formas de estacionar os carros.

Utilizando o mesmo raciocínio temos $7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 = 840$ formas de estacionar as motos.

Para cada forma de estacionar os carros temos 840 para as motos, portanto pelo (P.F.C.) temos $60 \cdot 840 = 50400$ formas de estacionar carros e motos.

Questão 9. ENA 2019 Duas peças distintas devem ser dispostas em um tabuleiro 6×6 , de forma que não ocupem a mesma casa ou casas adjacentes, isto é, casas com um lado ou vértice em comum. Como exemplo, a figura abaixo mostra quatro situações que não são admitidas.

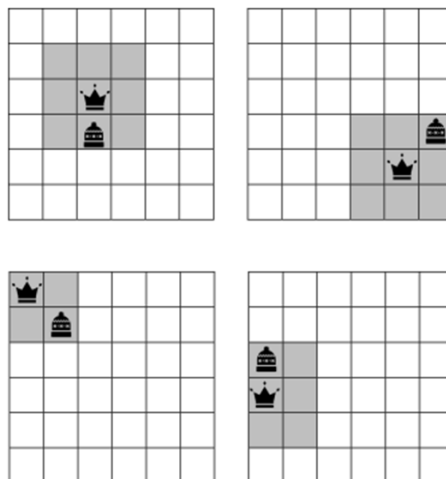


Figura 10.7: Tabuleiro

Observamos que, em cada uma das figuras acima, uma vez posicionada a peça com a coroa, as casas marcadas em cinza são todas aquelas onde a outra peça não poderia estar. De quantas formas distintas é possível dispor as duas peças segundo as regras acima?

Solução:

Devemos considerar três casos.

Fixando uma peça em uma das 16 posições centrais do tabuleiro restariam $36 - 9 = 27$ posições disponíveis para segunda peça, portanto pelo (P.F.C.) temos $16 \cdot 27 = 432$ possibilidades.

Fixando uma peça em um dos 4 cantos do tabuleiro restariam $36 - 4 = 32$ posições para serem ocupadas. Pelo (P.F.C.) há $4 \cdot 32 = 128$ possibilidades.

Por fim fixando uma peça em um dos 16 lugares não considerados ainda restam $36 - 6 = 30$ possibilidades, aplicando novamente o (P.F.C.) temos $16 \cdot 30 = 480$ possibilidades.

Portanto temos assim $432 + 128 + 480 = 1040$ formas distintas de distribuir essas duas peças sobre esse tabuleiro.

Questão 10. Quantos números de 5 algarismos podem ser formados usando apenas os algarismos 1, 1, 1, 2 e 3?

Solução:

Inicialmente iremos calcular os números que apresentam apenas os algarismo 1 e 2. Para isso basta pensarmos que para colocar o número 2 temos 5 possibilidades e o espaços que sobram são preenchidos com o algarismo 1. Portanto, temos assim 5 números.

Em seguida, calculamos quantos números podemos formar usando agora apenas os algarismos 1 e 3, pelo mesmo raciocínio temos 5 números.

Por fim, devemos determinar quantos números podemos formar usando obrigatoriamente os algarismos 2 e o 3. Desta maneira para colocarmos o número 2 temos cinco possibilidades e para o 3 quatro possibilidades, já que uma foi preenchida, os demais espaços são preenchidos com os algarismos 1, agora pelo (P.F.C.) temos, $5 \cdot 4 = 20$ números

Somando agora os casos encontrados obtemos $5 + 5 + 20 = 30$.

Questão 11. Qual o número de subconjuntos do conjunto $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$.

Solução:

Observe que podemos formar um subconjunto de A com ou sem o elemento a_1 e o mesmo se aplica para o elemento a_2 e assim sucessivamente até o n-ésimo elemento. Desta maneira temos que para cada elemento do conjunto A existe duas opções: pertencer ou não a um subconjunto qualquer de A. Aplicando agora o (P.F.C.), obtemos,

$$P(A) = 2 \cdot 2 \cdot 2 \dots 2 = 2^n.$$

11. Considerações

Como já fora dito aqui, em muitos casos, a Análise Combinatória pelo senso comum está limitada a análise de possibilidades em jogos de azar. Além do que, essa limitação está presente nos livros didáticos e por consequência essa visão distorcida e restrita da combinatória é refletida em sala de aula, mas com o desenvolvimento deste trabalho é possível compreender um pouco mais sobre o que é a Análise Combinatória bem como compreender que seu desenvolvimento ao longo dos anos fez se necessário a partir da necessidade e curiosidade do homem, mostrando com isso sua importância desde sua origem até os dias atuais.

O presente estudo possibilitou ainda entender como acontece o ensino da combinatória nos dias atuais e como esse processo é muitas vezes negligenciado, fazendo com que muitos alunos sejam dependentes de fórmulas e não compreendam a mesma como algo lógico e racional, mas sim como um conteúdo onde é necessário decorar fórmulas que por algum motivo servem para resolver determinadas situações.

Romper com essa postura já enraizada em nosso sistema de educação não é um processo simples, porém não é impossível e através da leitura desse trabalho é possível realizar uma profunda reflexão sobre a metodologia de ensino utilizada atualmente, propondo ainda uma sequência didática com base no princípio fundamental da contagem que possa vir a ser utilizada por docentes que se preocupam e queiram melhorar o entendimento dos discente a cerca da análise combinatória.

Com a sequência didática aqui apresentada pretende se que o aluno possa desenvolver seu próprio método de resolução e a partir do mesmo seja capaz de compreender a origem das várias fórmulas para que assim as mesmas tornem-se uma alternativa que venha a facilitar a resolução de questões, mas ao mesmo tempo o aluno seja capaz de entender porque essas fórmulas funcionam não se tornando um mero refém das mesmas, ou seja, por mais que em algum momento ele não consiga lembrá-las, poderá utilizar seu raciocínio para resolver o problema proposto evitando assim que a combinatória se torne um processo mecânico, mas sim um conteúdo lógico e racional e que exige o mesmo do seu aplicador.

Referências Bibliográficas

- [1] BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Média e Tecnológica. **Parâmetros Curriculares Nacionais: Ensino Médio: Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias**. Brasília: MEC, 1999.
- [2] BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros curriculares nacionais: matemática** / Secretaria de Educação Fundamental. Brasília : MEC/SEF, 1997.
- [3] BRASIL. Secretaria de Educação Média e Tecnológica. **PCN+ Ensino Médio: Orientações Educacionais Complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais**. Brasília: MEC, 2002.
- [4] DEMO, Pedro. **Introdução à metodologia da ciência**. 2. Ed. São Paulo: Atlas, 1985.
- [5] GONÇALVES, Rafaela Ramos Soares. **Uma abordagem alternativa para o ensino de análise combinatória no ensino médio**. 2014. Disponível em: <https://impa.br/wp-content/uploads/2016/12/rafaelagoncalves.pdf>. Acesso em 05/08/2019.
- [6] HAZZAN, Samuel. **Fundamentos de Matemática Elementar 5: Combinatória e Probabilidade**. São Paulo: Atual Editora, 2004.
- [7] IEZZI, Gelson et al. **Matemática: ciências e aplicações: ensino médio**. v. 1. 9 ed..São Paulo: Saraiva, 2016.
- [8] MARCONI, Marina de Andrade; LAKATOS, Eva Maria. **Metodologia científica**. 5. Ed. 4. São Paulo: Atlas, 2010.
- [9] MORGADO, Augusto César de Oliveira et al. **Análise Combinatória e Probabilidade**. 9. ed. Rio de Janeiro: Graftex, 1991.
- [10] OLIVEIRA, Maria Marly de. **Como fazer pesquisa qualitativa**.3. Ed. Petrópolis: Vozes, 2008.
- [11] RODA, Thiago Miguel. **Análise Combinatória: Uma abordagem sem a utilização de fórmulas**. 2018. Disponível em: https://sca.profmtat-sbm.org.br/sca_v2/get_cc3.php?id=150590606. Acesso em 05/08/2019.
- [12] VAZQUEZ, Cristiane Maria Roque; NOGUTI, Fabiane Cristina Hopner. **Análise Combinatória: alguns aspectos históricos e uma abordagem pedagógica**. Disponível em: <http://www.sbem.com.br/files/viii/pdf/05/1MC17572744800.pdf>. Acesso em 12/08/2019.
- [13] WIELEITNER, Heinrich. **História de la Matematica**.Barcelona: Labor. 1932.