INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA
CAMPUS CAJAZEIRAS
CURSO DE ESPECIALIZAÇÃO EM MATEMÁTICA

MARIA SUÊNIA CRISPIM BRITO

QUADRILÁTEROS NOTÁVEIS: ANÁLISE DO DESENVOLVIMENTO DO PENSAMENTO GEOMÉTRICO DE ALUNOS DO 9º ANO DO ENSINO FUNDAMENTAL À LUZ DA TEORIA VANHIELIANA

CAJAZEIRAS-PB
2021

MARIA SUÊNIA CRISPIM BRITO

QUADRILÁTEROS NOTÁVEIS: ANÁLISE DO DESENVOLVIMENTO DO PENSAMENTO GEOMÉTRICO DE ALUNOS DO 9º DO ENSINO FUNDAMENTAL À LUZ DA TEORIA VANHIELIANA

Monografia apresentada ao **Curso de Especialização em Matemática** do Instituto Federal da Paraíba (IFPB), como requisito à obtenção do título de **Especialista em Matemática.**

Orientador(a):

Prof(a). Dr(a). Fernanda Andréa Fernandes Silva

CAJAZEIRAS-PB

2021

B862q

Brito, Maria Suênia Crispim

Quadriláteros notáveis: análise do desenvolvimento do pensamento geométrico de alunos do 9º ano do ensino fundamental à luz da Teoria Vanhieliana / Maria Suênia Crispim Brito; orientadora Fernanda Andréa Fernandes Silva.- 2021.
61 f.: il.

Orientadora: Fernanda Andréa Fernandes Silva.
TCC (Especialização em Matemática) – Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia da Paraíba, Cajazeiras, 2021.

1. Quadriláteros notáveis 2. Níveis de Van Hiele 3. Geometria I. Título

CDU 514(0.067)

MARIA SUÊNIA CRISPIM BRITO

QUADRILÁTEROS NOTÁVEIS: ANÁLISE DO DESENVOLVIMENTO DO PENSAMENTO GEOMÉTRICO DE ALUNOS DO 9º ANO DO ENSINO FUNDAMENTAL À LUZ DA TEORIA VANHIELIANA

Monografia apresentada ao programa de Especialização em Matemática do Instituto Federal da Paraíba (IFPB), como requisito à obtenção do título de Especialista em Matemática.

Data de aprovação: 31/08/2021

Banca Examinadora:

Fernanda Andréa F. Silva

Prof(a). Dr(a). Fernanda Andréa Fernandes Silva
Instituto Federal da Paraíba – IFPB

Prof. Me. Geraldo Herbetet de Lacerda
Instituição de Ensino – IFPB

Marlon Tardelly Morais Cavalcante

Prof. Me. Marlon Tardelly Morais Cavalcante
Instituição de Ensino – UEPB

Dedico este trabalho ao meu pai *(in memoriam)* que sem dizer uma palavra sempre me motivou com gestos e atitudes me dando forças para lutar por todos os meus sonhos.

AGRADECIMENTOS

À Deus, por me permitir chegar até aqui.

Ao meu pai Chico de Cezário *(in memoriam)* que com sua humildade me mostrou o caminho certo a seguir.

À minha mãe Socorro, que com todo seu amor e alegria me mostra a verdadeira riqueza da vida.

Ao meu filho Nicolas, meu amor e minha fortaleza.

Ao meu esposo Nailson, por sempre me incentivar a ir além.

Aos meus irmãos João Franco, Francisco Filho, Carlos Antônio, Edicalio e minhas irmãs Salene, Suelânia, Macilene, Salete e Karlene por sempre me fazerem acreditar em mim. Amo vocês!

À minha orientadora, Drª Fernanda pelos ensinamentos e por disponibilizar seu tempo na construção desse trabalho.

À todos os meus professores do IFPB-CZ que durante esse curso contribuíram para meu crescimento profissional e pessoal.

Se a educação sozinha não pode
transformar a sociedade, sem ela,
tampouco, a sociedade muda.

Paulo Freire

RESUMO

O presente Trabalho de Conclusão de Curso (TCC), trata-se de uma pesquisa de abordagem qualitativa e exploratório e teve por objetivo investigar o nível de desenvolvimento do pensamento geométrico de alunos do 9º ano de uma escola da rede municipal de ensino da Cidade de Cachoeira dos Índios/PB em relação aos quadriláteros notáveis. Como referencial teórico, utilizamos o modelo desenvolvido por Van Hiele para análise do nível de desenvolvimento do pensamento geométrico. A metodologia de pesquisa contou com aplicação de um teste como instrumento de pesquisa composto de cinco questões de construção e classificação de quadriláteros notáveis. A partir dos resultados obtidos, pudemos observar que o ensino da geometria está muito aquém do esperado, tendo em vista que, nenhum dos alunos participantes da pesquisa se encontraram no nível esperado de desenvolvimento do pensamento geométrico para os quadriláteros notáveis que seria o nível 2 (dedução informal) do modelo Van Hiele.

Palavras-chave: Quadriláteros notáveis. Níveis de Van Hiele. Geometria.

ABSTRACT

This Course Completion Paper (TCC) is a qualitative and exploratory research and aimed to investigate the level of development of geometric thinking in 9th grade students of a school in the municipal education system of the City of Cachoeira dos Índios/PB in relation to the remarkable quadrilaterals. As a theoretical framework, we use the model developed by Van Hiele to analyze the level of development of geometric thinking. The research methodology included the application of a test as a research instrument composed of five questions of construction and classification of remarkable quadrilaterals. From the results obtained, we could observe that the teaching of geometry is far below expectations, considering that none of the students participating in the research were at the expected level of development of geometric thinking for the remarkable quadrilaterals that would be level 2 (informal deduction) of the Van Hiele model.

Keywords: Remarkable quadrangles. Van Hiele levels. Geometry.

LISTA DE FIGURAS

Figura 01 - Extrato do primeiro momento da primeira questão do teste 30
Figura 02 - Extrato do segundo momento da primeira questão do teste 30
Figura 03 - Quadriláteros notáveis apresentados na segunda questão 31
Figura 04 - Quadro para a classificação dos quadriláteros notáveis 31
Figura 05 - Extrato da primeira etapa da terceira questão do teste 32
Figura 06 - Extrato da segunda etapa da terceira questão do teste 33
Figura 07 - Extrato da primeira etapa da quarta questão do teste 33
Figura 08 - Segunda etapa da quarta questão do teste 34
Figura 09 - Extrato da quinta questão do teste 35
Figura 10 - Justificativa do aluno A39A sobre a primeira figura na esfera pragmática 39
Figura 11 - Justificativa da aluna A79A da primeira produção no nível aplicativo 39
Figura 12 - Justificativa do aluno A39A para a construção do não retângulo da primeira questão do teste na esfera pragmática 40
Figura 13 - Justificativa do aluno A191B para a segunda construção da primeira questão do teste na esfera aplicativa 41
Figura 14 - Justificativa da aluna A79B para a segunda construção da primeira questão do teste na esfera aplicativa 41
Figura 15 - Extrato da primeira parte da terceira questão da aluna A49A 47
Figura 16 - Extrato da primeira parte da terceira questão da aluna A119A 47
Figura 17 - Extrato da primeira parte da terceira questão da aluna A139A 47
Figura 18 - Justificativa da aluna A49A da terceira questão 48
Figura 19 - Justificativa da aluna A119A da terceira questão 48
Figura 20 - Justificativa da aluna A139A para a construção do trapézio como sendo um quadrado 49
Figura 21 - Extrato da questão três da aluna A79B 49
Figura 22 - Extrato da questão quatro da aluna A119A na esfera perceptiva 51
Figura 23 - Extrato da questão quatro da aluna A89A na esfera aplicativa 51
Figura 24 - Extrato da questão quatro do aluno A39A na esfera divergente 52
Figura 25 - Extrato da questão cinco do aluno A19B 53
Figura 26 - Extrato da questão cinco do aluno A39A 54

LISTA DE TABELAS

Tabela 01 - Relações dos níveis de Van Hiele com os quadriláteros notáveis 36
Tabela 02 - Figuras geométricas consideradas como não retângulos 37
Tabela 03 - Categorização das justificativas da primeira construção........................38
Tabela 04 - Categorização em relação a segunda construção da primeira questão do teste..40
Tabela 05 - Figuras classificadas como retângulos..42
Tabela 06 - Figuras classificadas como trapézios..43
Tabela 07 - Classificação das figuras como quadriláteros 43
Tabela 08 - Classificação das figuras como quadrados 44
Tabela 09 - Figuras classificadas como paralelogramos..45
Tabela 10 - Figuras classificadas como losangos 46
Tabela 11 - Quadriláteros escolhidos para segunda figura (terceira questão do teste) 46
Tabela 12 - Categorização das justificativas da terceira questão do teste 48
Tabela 13 - Categorização das construções do losango pelos estudantes na quarta questão do teste 50
Tabela 14 - Respostas dos estudantes em relação à possibilidade de reconstrução do losango apagado na quinta questão 52
Tabela 15 - Tipos de justificativas dos estudantes que confirmaram a possibilidade de reconstrução do losango 53

SUMÁRIO

1. INTRODUÇÃO 12
2. REVISÃO BIBLIOGRÁFICA 14
3. FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA 23
3.1 O MODELO DE VAN HIELE 23
3.1.1 Propriedades do modelo 25
3**.1.2 Fases de aprendizagem propostas pelo casal Van Hiele 26**
4. METODOLOGIA 28
4.1 CARACTERIZAÇÃO DA PESQUISA 28
4.2 SUJEITOS DA PESQUISA 28
4.3 INSTRUMENTO DE COLETA DE DADOS 28
4.3.1 Primeira questão do teste 29
4.3.2 Segunda questão do teste 31
4.3.3 Terceira questão do teste 32
4.3.4 Quarta questão do teste 33
4.3.5 Quinta questão do teste 34
4.4 RELAÇÕES DE ANÁLISES DOS NIVEIS DE VAN HIELE COM OS QUADRILÁTEROS NOTÁVEIS 35
5 ANÁLISE DOS DADOS 37
5.1 PRIMEIRA QUESTÃO 37
5.2 SEGUNDA QUESTÃO 42
5.3 TERCEIRA QUESTÃO 46
5.4 QUARTA QUESTÃO 49
5.5 QUINTA QUESTÃO 52
6. CONSIDERAÇÕES FINAIS 54
REFERÊNCIAS 56

1. INTRODUÇÃO

A geometria é parte da Matemática e desde cedo nos deparamos com ela. Seja no formato dos objetos, nas embalagens dos produtos em plantas de casas etc. Na sala de aula é onde somos apresentados à Geometria como conteúdo escolar. Aprendemos nomenclaturas conceitos e propriedades das figuras geométricas e suas aplicações.

Entretanto, pesquisadores como Câmara dos Santos (2009) *apud* Costa (2016) mostram que o ensino da geometria está aquém do esperado nas aulas de Matemática. Segundo o pesquisador, dentre os fatores que influenciam para esse resultado, podemos mencionar os problemas com a formação de professores de Matemática, tendo em vista que os docentes, enquanto licenciandos, tiveram pouca vivência com a Geometria. Da mesma forma, Lorenzato (1995) e Barbosa (2011) *apud* Costa (2016), afirmam que os professores tem dificuldade em escolher ensinar a geometria ou deixar seus conteúdos de lado. Muitas vezes, escolhem deixar seus conteúdos de lado, dando preferência ao estudo da Álgebra.

Dessa forma, a Geometria vai ficando de lado nas aulas de matemática, fazendo com que o processo de ensino e aprendizagem da mesma fique prejudicado.

Assim, a ideia da realização desse trabalho, surgiu ao nos interrogarmos a respeito do ensino da geometria nas escolas públicas. Pois, durante nossa formação enquanto professores da educação básica muito é discutido sobre a importância do ensino da geometria e que ainda não está sendo trabalhada adequadamente nas aulas de Matemática.

Segundo o modelo de desenvolvimento do pensamento geométrico de Van Hiele (1973), *apud* Costa (2016) o progresso da aprendizagem da geometria se dá através de níveis que verificam a evolução dessa aprendizagem independente do grau de escolaridade e idade do sujeito. Segundo Costa (2016), o modelo de Van Hiele, vêm sendo ao longo do tempo estudado e apontado como sendo uma ferramenta para auxiliar o processo de ensino da Geometria, tendo em vista que, cada aluno tem um “tempo” de aprendizagem e aplicar metodologias de acordo com cada fase é muito importante para uma aprendizagem significativa.

Nesse estudo nos deteremos aos quadriláteros notáveis[1] que são trabalhados na Educação Básica tanto nos níveis iniciais quanto nos níveis finais do ensino fundamental, de acordo com a Base Nacional Comum Curricular – BNCC (BRASIL, 2018) pois, segundo Costa (2016), o estudo dos quadriláteros notáveis propicia aos alunos oportunidades de resolver situações problemas do dia a dia, já que essas figuras estão presentes no nosso cotidiano.

Dessa forma, temos como problemática, como identificar as dificuldades dos alunos na compreensão e apropriação dos conceitos básicos de geometria, no caso dos quadriláteros notáveis? Quais os níveis de desenvolvimento do pensamento geométrico de alunos das séries finais da educação básica quanto aos quadriláteros notáveis?

Assim, o objetivo geral da nossa pesquisa é analisar o nível de desenvolvimento do pensamento geométrico em relação aos quadriláteros notáveis dos alunos do 9º ano do Ensino Fundamental de uma escola da rede municipal de ensino da Cidade de Cachoeira dos Índios – PB. Temos como Fundamentação Teórica a Teoria de Van Hiele. E como objetivos específicos, compreender os conhecimentos dos alunos em relação aos quadriláteros notáveis e identificar o nível de desenvolvimento do pensamento geométricos desses alunos em relação aos quadriláteros notáveis com base na teoria vanhieliana.

O presente trabalho está estruturado em seis capítulos. No primeiro capítulo, discorremos sobre o tema, a problemática e os objetivos Geral e específicos da pesquisa. No segundo capítulo, apresentamos um levantamento bibliográfico a respeito do tema trazendo pesquisas relevantes sobre o tema abordado. No terceiro capítulo, discutiremos o referencial teórico base dessa pesquisa: O modelo de Van Hiele para analisar o desenvolvimento do pensamento geométrico dos alunos.

Enquanto que no quarto capítulo, apresentamos a trajetória metodológica da pesquisa, os sujeitos e o instrumento de coleta de dados. No quinto capitulo, estão a apresentação e discussão dos dados. No sexto e último capítulo, faremos as considerações finais e apontaremos sugestões metodológicas como possíveis estratégias para a abordagem dos quadriláteros notáveis nas aulas de Matemática.

---

[1] Quadriláteros notáveis: São polígonos formados por 4 lados com características e propriedades importantes para resolver problemas matemáticos. São eles: quadrados, retângulos, paralelogramos, trapézios e losangos.

2. REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

O desenvolvimento do pensamento geométrico de alunos e professores veem ao longo do tempo, sendo motivo de pesquisas no meio acadêmico. Isso porque é um tema relevante no que diz respeito ao processo de ensino e aprendizagem da geometria.

Distintos trabalhos foram desenvolvidos no sentido de averiguar como o pensamento geométrico evolui ao longo da etapa escolar e como o desenvolvimento de propostas metodológicas baseadas nos níveis do pensamento geométrico de Van Hiele podem auxiliar nesse processo.

Cargnin, Guerra e Leivas (2016) investigaram como alunos do 5° ano do Ensino Fundamental de uma escola pública de Santa Maria/RS identificam e classificam as figuras geométricas. Para isso tiveram como fundamentação teórica a Teoria de Van Hiele. Tendo como metodologia de ensino a investigação geométrica. Os autores acreditam que o ensino de Geometria tem papel fundamental no desenvolvimento de habilidades e competências para a aquisição e construção do conhecimento matemático, ao mesmo tempo em que indicam algumas problemáticas, como a falta de preparo do professor, a importância exagerada dada aos livros didáticos e dos conhecimentos algébricos.

Participaram dessa pesquisa de caráter qualitativo, 14 alunos e para a coleta de dados foram utilizados os instrumentos: observação participante, diário de campo e análise dos registros dos alunos. Foram propostas seis atividades desenvolvidas em grupos, tendo como objetivo a identificação, classificação e caracterização de figuras geométricas planas.

Em cada atividade houve a intervenção pedagógica dos pesquisadores no sentido de auxiliar no desenvolvimento da aprendizagem dos alunos e os mesmos foram instigados pelos pesquisadores estimulando-os a observarem e explorarem as figuras geométricas dispostas, a estabelecerem conexões do mundo escolar com o dia a dia dos mesmos de forma a construírem seus conhecimentos a cerca dessas figuras.

Segundo os autores nas duas primeiras atividades, os alunos identificaram e classificaram as figuras de acordo com sua aparência global, classificando-as de maneira intuitiva, sem apropriação conceitual e reconhecimento de propriedades envolvidas, o que corresponde ao primeiro nível da teoria de Van Hiele, denominado de nível básico ou de reconhecimento.

No entanto, a partir da atividade 3, os autores afirmam que os alunos identificaram e analisaram as figuras não somente em seu aspecto global, mas também pelos seus componentes e algumas relações entre eles. Evidenciando, assim, um progresso no raciocínio geométrico desses alunos, passando da classificação intuitiva das figuras geométricas até a análise mais aprofundada, o que equivale ao segundo nível do modelo dos Van Hiele.

Os autores concluíram que os alunos se apresentaram entusiasmados durante a realização das atividades, demostrando interesse no desenvolvimento dessas. Os mesmos acreditam que, os questionamentos realizados, impulsionaram os alunos a observar e analisar as particularidades das figuras geométricas.

Costa e Câmara dos Santos (2015) abordam aspectos do pensamento geométrico demostrados por 300 estudantes do Ensino Médio, sendo 100 estudantes de cada ano escolar, de cinco escolas diferentes em três cidades do estado do Pernambuco: Cabo de Santo Agostinho, Limoeiro e Recife. Para isso, foi aplicado um problema envolvendo as propriedades de quadriláteros, tendo como pressupostos teóricos o modelo de Van Hiele.

A questão analisada e desenvolvida em duas etapas. Na primeira, os estudantes foram orientados a construírem um retângulo e, depois, uma figura que não fosse um retângulo. Posteriormente, foi pedido que eles explicitassem suas produções.

Os resultados mostram que a maior parte dos estudantes do Ensino Médio, 61% em média, considera a figura geométrica quadrado como um não retângulo, ou seja, quase dois terços dos alunos pesquisados não reconhecem o quadrado como sendo um retângulo, sendo observado em 77% do total de alunos do 1º ano, 47% entre os do 2º ano e 60% para os do 3º ano do Ensino Médio, segundo os pesquisadores.

Os resultados mostram que 61% dos estudantes do ensino médio consideram o quadrado como sendo um não retângulo, 77% do total de alunos do 1º ano, 47% entre os do 2º ano e 60% para os do 3º ano do Ensino Médio também consideraram o quadrado como não retângulo, segundo os pesquisadores.

A figura que mais apareceu como um não retângulo foi o próprio retângulo, porém, em posição não prototípica. No 1º ano, ocorreram em 15% das escolhas e

16% do 2º ano e 14% do 3º ano. Os autores acreditam que os alunos tiveram dificuldades por não serem habituados a analisar figuras em diferentes posições.

De acordo com os pesquisadores, o losango foi reconhecido como um não retângulo por 5% dos alunos do 1º ano,13% do 2º ano e 9% do 3º ano, os autores afirmam que tal fato, aponta para a necessidade de pesquisas e estudos que busquem compreender as construções dos alunos. Para analisar as justificativas dos alunos, apresentadas na segunda etapa da primeira questão, os autores utilizaram a categorização estabelecida por Câmara dos Santos (2001) ao realizar uma pesquisa parecida numa escola da rede pública de Recife – PE com alunos do sexto ano do ensino fundamental

De acordo com essa categorização, os autores classificaram as respostas dos alunos em três esferas: pragmática, aplicativa e relacional. Na esfera pragmática os alunos utilizam a aparência e forma das figuras nas justificativas, por exemplo, o aluno pode diferenciar o quadrado do retângulo afirmando que que um é mais largo que o outro.

Já na esfera aplicativa, os estudantes utilizaram as definições das figuras nas explicações, por exemplo, para diferenciar um retângulo de um losango, ele pode afirmar que o retângulo possui os quatro ângulos iguais a 90° e o losango possui os quatro lados congruentes. Na relacional, os alunos utilizam as propriedades das figuras produzidas nas explicações a exemplo de construir um quadrado e um losango e diferencia-los a partir de suas diagonais ao afirmar que as diagonais do quadrado são concorrentes e as diagonais do losango são perpendiculares entre si.

Foi observado pelos autores que, 63% dos alunos encontram-se na esfera pragmática, ou seja, utilizam a aparência física da figura para justificá-la como uma figura diferente de um retângulo, que é uma característica do nível básico de Van Hiele. Dos alunos pesquisados que ocorreram nessa categoria, 70% são do 1º ano, 53% do 2º ano e 66% do 3º ano do Ensino Médio. Na esfera aplicativa, foi observado a ocorrência de 22,66% dos alunos pesquisados, os quais usaram a definição da figura para explicar suas produções. Segundo os autores, nenhum aluno foi classificado na esfera relacional, ou seja, nenhum deles foi capaz de relacionar as propriedades das figuras em suas justificativas, o que seria uma característica própria do segundo Nivel de Van Hiele.

Fonseca e Leivas (2018) com o objetivo de examinar como alunos, ingressantes no curso de Licenciatura em matemática do Instituto Federal

Farroupilha/RS identificam, definem e classificam triângulos, elaboraram e aplicaram para alunos do segundo semestre desse curso, atividades com base nos dois primeiros níveis de desenvolvimento propostos pelo casal Van Hiele: visualização ou reconhecimento (nível 1) e análise (nível 2).

O desenvolvimento da pesquisa se deu a partir de módulos de atividades. Atividades essas que foram desenvolvidas em forma de oficinas por meio de um projeto de ensino com carga horária de 20h/a divididas em cinco encontros semanais e contou com a participação de 10 alunos.

As atividades, para o desenvolvimento do nível 1, consistiram na identificação de triângulos a partir de diferentes composições de figuras geométricas. Nas atividades do nível 2, os alunos deveriam conceituar triângulo e realizar a classificação de um grupo de diferentes triângulos recortados, de acordo com características e/ou propriedades em comum, formando diferentes classes.

Segundo os autores os participantes ainda não tinham cursado a disciplina de Geometria Plana e seus conhecimentos sobre o assunto eram oriundos do Ensino Médio. Além disso, afirmaram que as oficinas possibilitaram a análise do conhecimento dos discentes sobre triângulos. Em relação ao desenvolvimento do pensamento geométrico desses, conforme os níveis de Van Hiele, a maioria apresentou resultados de transição entre os níveis 1 e 2. O que é apontado pelos pesquisadores como um resultado preocupante que demonstra a fragilidade do ensino de Geometria oferecido na Educação Básica.

Em sua pesquisa de mestrado, Costa (2016) analisou os impactos de uma intervenção didática nos estudos dos quadriláteros notáveis usando o *softwere* Geogebra como recurso didático. A pesquisa foi desenvolvida numa escola da rede pública de Recife – PE contendo como sujeitos de pesquisa, uma turma de alunos do 6º ano do ensino fundamental. Como embasamento teórico, utilizou a teoria de Van Hiele, para analisar a evolução do pensamento geométrico desses alunos. E, como instrumento de coleta de dados, utilizou um teste desenvolvido por Câmara dos Santos (2001)

Inicialmente o autor aplicou o pré-teste, que verificou que os 30 alunos estavam no Nivel 1, da Teoria de Van Hiele, ou seja, reconheciam os quadriláteros notáveis somente pelo seu aspecto visual. No segundo momento, houve a intervenção didática e posteriormente foi aplicado o pós -teste. Em relação aos resultados, o autor constatou que houve um avanço no nível de desenvolvimento do pensamento geométrico desses alunos, sendo observado que 17% conseguiram evoluir para o nível seguinte. O autor também destaca que, alguns alunos não conseguiram mudar de nível, mas que avançaram dentro do próprio nível. Esse fato foi constatado em 43% dos alunos.

Em sua tese de doutorado, Costa (2019) desenvolveu um modelo que possibilita a identificação de níveis de desenvolvimento do pensamento geométrico de estudantes do ensino básico ao resolverem atividades que abordem os quadriláteros notáveis. O autor usou uma abordagem qualitativa e quantitativa e segundo o mesmo, por se tratar de uma construção de um modelo especifico, a pesquisa também se enquadra como um estudo de caso.

O diferencial desse modelo geométrico está no fato de ele ser aplicado somente no caso dos quadriláteros notáveis e que além da classificação de níveis há também a classificação de sub níveis no processo de desenvolvimento do pensamento geométrico. Fato observado na pesquisa de mestrado do autor.

A etapa metodológica do desenvolvimento dessa pesquisa se deu em duas fases. A primeira fase constou de uma pesquisa bibliográfica. Na segunda fase foi desenvolvido o modelo e sua posterior validação.

Para a etapa de validação, participaram 297 estudantes do ensino básico, dos anos finais do ensino fundamental (do 6º ano ao 9ºano) distribuídos da seguinte forma: 67 alunos do 6º ano; 76 estudantes do 7º ano; 89 discentes do 8º ano e 65 alunos do 9º ano.

Os instrumentos de coletas de dados utilizados pelo autor foram teste diagnóstico e entrevista de explicitação. As categorias e critérios de análise dos dados são articuladas com a abstração geométrica que o participante utiliza na resolução dos problemas. Dessa forma, a estratégia aplicada aponta o tipo de abstração adotada e a abstração sinaliza o nível de pensamento geométrico, segundo Costa (2019).

Ao final de todo processo de construção, a priori, e validação do modelo, o autor apresenta a versão final do modelo que é dividido em três níveis que se correlacionam com os níveis de Van Hiele. O modelo é composto pelos níveis ***n*****,** ***n+1*** e ***n+2***. O nível ***n*** representa o nível da abstração geométrica perceptiva e é subdividido em ***na*** e ***nb***. O nível ***n+1*** representa o nível de abstração geométrica analítica e é subdividido em ***(n+1)a*** e ***(n+1)b***. E, o terceiro nível ***n+2*** refere-se ao nível da abstração geométrica descritiva e é subdividido em ***(n+2)a*** e ***(n+2)b***.

Assim, de acordo com o autor o aluno que se encontra no nível ***n*** considera o quadrilátero notável a partir de seu aspecto global. Sendo enquadrado no nível ***na***, se por exemplo, considera o quadrilátero a partir de sua visualização e pela sua forma. Por exemplo, o aluno que trabalha nesse nível é capaz de diferenciar um quadrado de um círculo e/ou um triangulo pela sua forma arredondada ou pela quantidade de lados. Dessa forma, ainda não é capaz de diferenciar figuras de uma mesma família.

No nível ***nb*** o quadrilátero é considerado como um todo excluído suas propriedades. Ele sabe diferenciar um quadrado de um retângulo pelo seu aspecto visual. O quadrado lembra um dado e o retângulo lembra uma porta. Assim, utiliza percepções do mundo físico para distinguir as duas figuras.

Enquanto que no nível ***n+1*** encontram-se os alunos que percebem o quadrilátero notável por seus elementos constituintes e suas propriedades. Em seus sub níveis ***(n+1)a,*** os que percebem pela definição e ***(n+1)b*** os que percebem pelas propriedades mas sem realizar inclusão de classes.

E por fim os que se encontram no nível ***n+2*** percebem os quadriláteros notáveis a partir de implicações entre suas propriedades, sendo classificados nos sub níveis ***(n+2)a*** os que realizam inclusão de classe parcial e no sub nível ***(n+2)b*** os que relacionam as propriedades dos quadriláteros notáveis.

Segundo o autor, esse modelo de níveis de pensamento geométrico pode ser considerado um modelo semiocognitivo, visto que foi criado a partir de representações semióticas apresentadas pelos estudantes, diferentemente do modelo Van Hiele, que é um modelo cognitivo.

Os resultados obtidos por Costa (2019) do seu modelo para quadriláteros, notáveis apontou que no nível ***n*** apresentou a maior concentração de alunos, pois 76,8% do total de discentes atuava nesse nível, o que corresponde a 228 dos 297 participantes da investigação. Isto significa que no período do estudo, esses alunos utilizaram a estratégia identificar os quadriláteros notáveis a partir de um subconjunto das características visuais ou por meio do aspecto global.

Em relação aos subníveis do nível ***n***, o autor verificou que a maioria dos estudantes que trabalhavam nesse nível, se encontrava no segundo subnível, o ***nb***, 44,1% dos 76,8%. Dessa forma, a estratégia mobilizada pelos alunos foi reconhecer os quadriláteros notáveis por meio de seu aspecto visual, desconsiderando suas definições suas propriedades.

Em comparação com o estudo empírico, segundo o autor, o subnível ***nb*** apresentou um aumento percentual relativo, passando de 34,9% para 44,1%. Já o primeiro subnível na apresentou um significativo aumento de 3,4% para 32,7% do total. Com relação ao nível ***n+1***, ele observou uma redução significativa, passando de 45,7%, relativo ao estudo empírico, para 13,5%, referente à etapa experimental.

No que se refere aos subníveis desse nível, houve uma inversão do domínio sobre a maior concentração de alunos. Assim, segundo o pesquisador, o subnível ***(n+1)a*** caiu de 39,4% para 6,1% e o subnível ***(n+1)b*** aumentou 1,1 pontos percentuais deslocando de 6,3% para 7,4%.

Em relação ao nível ***n+2***, segundo o autor, houve um relativo decrescimento quando se compara a etapa empírica com a experimental passando assim de 16% para 9,7%. Em se tratando dos subníveis, houve também uma mudança na liderança relativa à concentração de estudantes.

No subnível ***(n+2)a*** houve uma queda de 13,1% para 4,7% e no ***(n+2)b*** houve um aumento saindo de 2,9% para 5% segundo Costa(2019). Por fim, o autor traz indagações acerca do ensino de geometria em sala de aula como possíveis explicações para tais resultados. Relata ainda que o modelo desenvolvido por ele pode ser adequado e produtivo tanto para os professores de Matemática, em efetivo exercício na sala de aula da escola básica, fornecendo um banco de dados sobre o pensamento geométrico dos seus alunos, como também para o desenvolvimento de novas pesquisas em Educação Matemática.

Longato e Oliveira (2016) desenvolveram um projeto que faz parte do PDE (Programa de Desenvolvimento Educacional) que será implementado na Escola Estadual Constantino Marochi na cidade de Campo Largo PR, para os alunos do 6º ano do Ensino Fundamental. O projeto tem como objetivo a elaboração e aplicação de atividades em consonância com os níveis de raciocínio geométrico, no ensino dos quadriláteros e triângulos, pautada na Teoria de Van Hiele.

A Produção Didática- Pedagógica no formato de Unidade Didática, utilizou-se de uma metodologia qualitativa de caráter investigativa, usando dados quantitativos a partir de pré testes e pós testes apenas para subsidiar e verificar em quais níveis do raciocínio geométrico os alunos encontram-se e se houve evolução de um nível para outro.

As atividades foram embasadas na resolução de problemas, jogos, construção de sólidos geométricos, estabelecendo relações entre as propriedades das figuras planas e não planas, envolvendo conceitos geométricos dos quadriláteros e triângulos. Essas atividades elaboradas estão centradas no nível 1(Reconhecimento) e nível 2(Análise) da Teoria de Van Hiele, pois de acordo com os autores os alunos chegam ao segundo ciclo do Ensino Fundamental com uma grande defasagem na aquisição de conceitos básicos de geometria.

Silva e Gayeski (2018) com objetivo de apresentar e analisar os resultados de uma sequência de atividades desenvolvidas no software GeoGebra, com alunos do ensino médio, trouxeram uma reflexão de como a tecnologia pode potencializar e auxiliar o professor no ensino da Geometria.

Os autores tiveram como fundamentação teórica a Teoria de Van Hiele no desenvolvimento das atividades. Participaram da pesquisa 15 estudantes do primeiro ano do ensino médio da Escola de Ensino Médio Rainha da Paz, localizada no município de Serafina Corrêa, RS. A metodologia se baseou num pré teste de sondagem para verificar os conhecimentos prévios dos alunos, no qual os pesquisadores verificaram que 80% dos participes encontravam-se no nível 1 do modelo de Van Hiele.

Em seguida, foi aplicada uma sequência de atividades a serem desenvolvidas no software sobre polígonos e suas propriedades. Após essa sequência, foi realizado um pós teste para verificar se houve evolução em relação ao desenvolvimento do pensamento geométrico desses alunos. Os autores constataram que houve um avanço nos níveis no decorrer das atividades e que cerca de 90% dos alunos conseguiram atingir o nível 3 do modelo de Van Hiele. Os mesmos afirmam que a ferramenta tecnológica foi crucial nesse momento de aprendizagem.

Costa e Santos (2016) desenvolveram uma pesquisa com o objetivo de analisar o desenvolvimento do pensamento geométrico de 300 alunos do ensino médio sendo 100 alunos de cada ano de cinco escolas públicas de três cidades do estado do Pernambuco, a saber: Cabo de Santo Agostinho, Limoeiro e Recife. O instrumento de coleta foi um teste de sondagem contendo cinco questões referentes ao conceito de quadriláteros notáveis com finalidade de verificar o nível de pensamento geométrico dos alunos.

Os pesquisadores destacam que os dados desta pesquisa foram analisados pelos itens 02,03,04 e 05 do teste. Os resultados do item 01 foram relatados em Costa e Santos (2015) apresentados anteriormente. A segunda questão do teste apresentou onze quadriláteros notáveis de diferentes formatos e posições. Os estudantes foram orientados a realizar a categorização desses quadriláteros em diferentes famílias: quadrados, retângulos, losangos, paralelogramos e trapézios.

A finalidade dessa questão foi averiguar se na classificação dos quadriláteros notáveis, os estudantes eram capazes de reconhecê-los por meio de grupos de famílias. A terceira questão solicitou aos alunos que produzissem dois quadrados diferentes com o objetivo de observar os critérios que eles consideraram na diferenciação entre as duas figuras.

O quarto item solicitou aos estudantes que, a partir de dois pontos estabelecidos A e B, produzissem um losango ABCD. Esses pontos (A e B) estavam representados por dois nós, colocados em uma malha quadriculada. A quinta questão perguntou aos alunos se era viável reconstruir um losango dado ABCD, que teve uma parte apagada.

A partir da análise dessas questões, os pesquisadores concluíram que a maior parte desses alunos investigados ainda se encontravam no primeiro nível do modelo de Van Hiele, isto é, reconhecem os quadriláteros notáveis apenas pela sua aparência física, desconsiderando, assim, tais figuras geométricas como detentoras de propriedades, não realizando também a ordenação delas. Segundo os autores, isso foi verificado nas respostas dos discentes quando, por exemplo, ao construírem um losango por meio da malha quadriculada (quarta questão do teste), 40% deles fizeram uso apenas da aparência física desse quadrilátero notável, não mobilizando, assim, suas diagonais.

A partir dessas análises ficou evidenciada a importância de pesquisar sobre os níveis de pensamento geométrico dos alunos tanto da educação básica, como discentes de licenciatura em Matemática, pois os resultados de tais pesquisas funcionam como uma bússola norteadora para uma aprendizagem significativa da geometria nas aulas de Matemática.

3. FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

Nesse capítulo iremos discorrer sobre a Teoria de Van Hiele que define um modelo com níveis de desenvolvimento do pensamento geométrico.

3.1 O MODELO DE VAN HIELE

Dentre vários modelos, teorias e observações sobre o ensino da geometria, tem-se o modelo de Dina Van Hiele Geldof e Pierre Marie Van Hiele, que despontou os trabalhos que surgiram dos estudos sobre o ensino da geometria, realizados pelo casal na tese de doutorado. Sendo assim, o modelo Van Hiele, é a fundamentação e um referencial teórico para esta pesquisa.

O modelo Van Hiele é estruturado em níveis de desenvolvimento do pensamento geométrico. Para os referidos pesquisadores, a construção do conhecimento pelos alunos apresenta níveis diferenciados de pensamento, que podem ser utilizados para orientar a formação, bem como para avaliar corretamente habilidades. Para o casal, é possível identificar e estruturar esses níveis, e, também, desenvolver uma didática e metodologia para possibilitar que os alunos atinjam um nível mais elevado, considerando sua maturidade do pensamento geométrico.

As análises de Van Hiele apóiam-se em estudos realizados em sala de aula, considerando seus conhecimentos e a experiência com os alunos. Para eles, os avanços do pensamento geométrico poderiam ser colocados em níveis e fases que priorizassem a construção de conceitos, ou seja a estruturação mental do desenvolvimento geométrico, e assim fizeram seus estudos e estabeleceram níveis, acreditando nas possibilidades de compreensão dos conceitos e não somente na aquisição mecânica dos mesmos.

A teoria dos Van Hiele teve origem nas respectivas teses de doutorado de Dina Van Hiele-Geldof e de seu marido, Pierre van Hiele, na Universidade de Utrecht, Holanda, em 1957. Dina, infelizmente, morreu logo após concluir sua tese e Pierre foi quem, mais tarde, desenvolveu e disseminou a teoria em publicações posteriores. Enquanto a tese de Pierre tentava, principalmente, explicar o porquê os alunos tinham problemas ao aprender geometria, a tese de Dina tratava sobre um experimento educacional e, sob tal aspecto, é mais prescritiva com relação à ordenação do conteúdo de geometria e atividades de aprendizado dos alunos.

A principal característica da teoria é a distinção de cinco diferentes níveis de pensamentos com relação ao desenvolvimento da compreensão dos alunos acerca da geometria. Quatro características importantes da teoria são resumidas da seguinte maneira por Usiskin (1982 *apud* Villiers 2010):

- **ordem fixa:** A ordem na qual os alunos progridem por meio dos níveis de pensamento não varia. Em outras palavras, um aluno não pode estar no nível n sem ter passado pelo nível n-1.
- **adjacência:** Em cada nível de pensamento que era intrínseco no nível anterior se torna extrínseco no nível atual.
- **distinção:** Cada nível possui seus próprios símbolos linguísticos e sua própria rede de relacionamentos que conecta tais símbolos.
- **separação**: Duas pessoas com raciocínio em níveis diferentes não podem entender uma à outra.

Os Van Hiele atribuíram a principal razão da falha do currículo de geometria tradicional ao fato de que o currículo era apresentado em um nível mais alto do que o dos alunos, ou seja, eles não conseguiam entender o professor e o professor não conseguia entender o porquê eles não conseguiam entender. Essa é a questão que motiva o desenvolvimento desta pesquisa e os seus resultados servirão para melhorar essa comunicação entre aluno e professor no ensino e aprendizagem da geometria em relação aos quadriláteros notáveis.

Ao iniciar suas pesquisas, os Van Hieles desenvolveram um modelo para estudar os níveis de pensamento, com o objetivo de ajudar o aluno a desenvolver *insight* em geometria. Segundo Kaleff (1994), o casal define *insight* em geometria se o aluno desenvolve essas etapas: (1) é capaz de resolver uma situação não comum pra ele; (2) desenvolve a situação da maneira adequada; (3) desenvolve um método que resolva a situação de forma deliberada. Para terem *insight* os alunos têm consciência do que estão fazendo, entendem o motivo de suas ações, e quando o fazem. Eles aplicam seu conhecimento de maneira ordenada para resolver as situações problemas.

O Nível 0 de Van Hiele é o da visualização ou reconhecimento. Os alunos que atuam nesse nível inicial, utilizam basicamente o aspecto visual para raciocinar. A aparência física das figuras se sobrepõe as suas propriedades.

Dessa forma, figuras geométricas são reconhecidas pela aparência global, ou seja, eles reconhecem quadrados, retângulos, mas não reconhecem as propriedades de identificação das mesmas. Geralmente ele usa objetos de seu cotidiano para comparar com figuras geométricas. Por exemplo, reconhece o retângulo ao comparar sua aparência com uma porta. O aluno desse nível, é capaz de aprender as nomenclaturas geométricas, reproduzir figuras.

O Nível 1 é o da Análise. Nesse nível, os alunos já são capazes de raciocinar em relação as propriedades das figuras geométricas. Conseguem analisar os componentes e resolver problemas utilizando essas propriedades. Um quadrado, por exemplo é reconhecido como uma figura de quatro lados iguais, opostos e paralelos que possui quatro ângulos retos. Porém, ainda não fazem interrelações entre figuras ou propriedades.

No Nível 2, da Dedução informal ou Ordenação, os alunos conseguem ordenar as propriedades logicamente podendo, assim, interrelacionar as propriedades nas figuras. O quadrado, por exemplo, é reconhecido como uma figura de quatro lados iguais e que possui quatro ângulos retos. Nesse nível, os alunos fazem inclusão de classe, de forma parcial. Um quadrado, por exemplo já é compreendido como sendo um retângulo. Os alunos podem acompanhar provas formais, mas, não percebem como construir uma prova, partindo-se de premissas diferentes.

O Nível 3, da Dedução Formal, os alunos já apresentam um domínio em fazer deduções e demonstrações formais sem memoriza-las e ainda percebe novas maneiras para fazer tais demonstrações. Teoremas e postulados também já são compreendidos nesse nível. É, por exemplo capaz de demostrar propriedades dos quadriláteros usando a congruência de triângulos.

No Nível 4 que é o do Rigor, os alunos conseguem estabelecer e comparar teoremas e axiomas. Analisam profundamente propriedades de um sistema dedutivo, como consistência, independência e completude dos axiomas.

Nessa pesquisa, ao tratar-se de alunos oriundos dos anos finais do ensino fundamental, trataremos apenas dos três primeiros níveis propostos pelo casal Van Hiele, compreendidos pelos Níveis 0, 1 e 2.

3.1.1 Propriedades do modelo

Para que o aluno adquira *o insight*, os Van Hiele propuseram algumas generalizações que caracterizam seu modelo, sendo assim, um roteiro a ser seguido quanto à metodologia a ser aplicada: (1) o aluno só será capaz de avançar para o nível seguinte se conseguir alcançar (através de experiências e aprendizagem adequada) as estratégias requeridas no nível anterior; (2) o desenvolvimento do pensamento geométrico depende dos conhecimentos adquiridos na etapa escolar, independente de idade; (3) no mecanismo entre os níveis, os objetos de estudos próprios de um nível, passam a ser objetos do nível seguinte; (4) cada nível tem sua própria simbologia, linguagem e sua própria norma de relações conectando esses símbolos.

Dessa forma, as relações aceitas em um nível podem ser mudadas em outro nível. Por exemplo, na relação das inclusões de classes, um quadrado pode ser considerado um retângulo e um losango quadrado, entretanto, num nível inferior essas figuras são tratadas de forma excludente.

3.1.2 Fases de aprendizagem proposta pelo casal Van Hiele

Os Van Hieles propõem cinco fases de aprendizagem de ensino que buscam facilitar a evolução nos níveis de determinado conteúdo da geometria.

• FASE 1 - QUESTIONAMENTO ou INFORMAÇÃO: Nessa fase, o professor e o aluno debatem sobre o objeto de estudo do nível. O professor faz um levantamento dos conhecimentos prévios do aluno e decide qual direção tomar.

• FASE 2 – ORIENTAÇÃO DIRETA: Os alunos exploram o conteúdo através de materiais escolhidos pelo professor. As atividades são de caráter objetivo e de respostas diretas.

• FASE 3 - EXPLICITAÇÃO: A partir de suas experiências anteriores, os alunos se expressam sobre o que foi observado. Nessa fase, o professor atua de maneira a interferir o mínimo possível, deixando os alunos livres para buscar a formação do sistema de relações em estudo.

• FASE 4 - ORIENTAÇÃO LIVRE: Nesta fase, as atividades se tornam mais difíceis e com mais passos. O aluno busca sua própria maneira de resolver as tarefas, tornando mais claras as relações entre os objetos de estudos.

• FASE 5 – INTEGRAÇÃO: Esta fase é a fase da síntese e da análise. O aluno analisa e sintetiza o que aprendeu com o objetivo de integrar globalmente os objetos e relações unificando um novo modelo de pensamento. Ao concluir essas sequências de fases o aluno deverá ter alcançado o nível seguinte, no qual passará novamente por essas cinco fases.

Desta forma, os níveis e a teoria dos Van Hiele, apresentam-se como um guia prático para o ensino e aprendizagem da geometria, no qual o professor pode utilizá-lo em sua prática de ensino como propõe sua pesquisa.

4. METODOLOGIA

Neste capitulo apresentamos os procedimentos metodológicos traçados para o desenvolvimento dessa pesquisa.

4.1 CARACTERIZAÇÃO DA PESQUISA

A metodologia da pesquisa utilizada, foi uma pesquisa investigativa de natureza qualitativa do tipo exploratória denominada de estudo de caso. Nesse tipo de metodologia, o pesquisador faz uma investigação com o intuito de constatar se sua hipótese é válida ou não.

De acordo com Fiorentini e Lorenzato (2012) o estudo de caso é recomendável para a construção de hipóteses, para confirmação ou reformulação do problema e, sobretudo quando se quer estudar algo singular. Em relação à natureza da pesquisa, Fiorentini e Lorenzato (2012, p. 110) afirmam que “a abordagem qualitativa busca investigar e interpretar um caso como todo orgânico, uma unidade em ação com dinâmica própria, mas que guarda forte relação com seu entorno ou contexto sociocultural”.

Tratando-se do tipo exploratório, o instrumento de coleta de dados foi um teste composto por cinco questões envolvendo construção e classificação dos quadriláteros notáveis que apresentamos no item 3.3.

4.2 SUJEITOS DA PESQUISA

Esta pesquisa contou com a participação de 62 estudantes do 9º ano do ensino fundamental da Escola Municipal de ensino Infantil e fundamental Maria Candido de Oliveira, na cidade de Cachoeira dos Índios, PB. É importante ressaltar que, desses 62 alunos, apenas 36 devolveram o instrumento de pesquisa.

A escolha dessa turma se deu pelo objeto de estudo deste trabalho que é o desenvolvimento do pensamento geométrico em relação aos quadriláteros notáveis. Tendo em vista que este é um conteúdo visto na série anterior e nessa.

4.3 INSTRUMENTO DE COLETA DOS DADOS

O instrumento de coleta de dados foi um teste de sondagem replicado de Câmara dos Santos (2009) *apud* Costa (2016) que foi aplicado em seus estudos realizados em Pernambuco em suas pesquisas acerca do desenvolvimento do pensamento geométrico de alunos de uma escola pública na cidade de Recife. Era composto por cinco questões envolvendo construção e classificação dos quadriláteros notáveis, tendo como foco os níveis iniciais do pensamento geométrico de Van Hiele (1957). Assim, o objetivo do teste foi de identificar o nível de desenvolvimento do pensamento geométrico desses alunos.

O teste foi aplicado de forma *on-line* pelo aplicativo *Google Classroom*. Os estudantes foram orientados a responderem as questões a partir de seus conhecimentos a respeito dos quadriláteros sem solicitar ajuda de terceiros. O prazo para a devolutiva do teste foi de um dia e maioria dos alunos conseguiu devolver no prazo estipulado.

Para Van Hiele, o aluno ao concluir o ensino fundamental, deveria estar no nível 2 (contados a partir do nível 0), que é o nível da *dedução informal* de sua teoria. Logo, estudantes que atuam neste nível, devem ser capazes de ordenar as propriedades de objetos geométricos, construir definições abstratas, distinguir as propriedades necessárias e as propriedades suficientes para determinar um conceito e entender deduções simples.

A seguir, apresentamos cada questão do teste e o que cada uma delas tem por finalidade.

4.3.1 Primeira questão do teste

A primeira questão do teste refere-se a uma questão de construção e é dividida em dois momentos: no primeiro momento o aluno é instruído a desenhar um retângulo num determinado espaço denominado “SUA FIGURA”. Em seguida, ele deverá construir uma figura que não é um retângulo no espaço denominado “A FIGURA DE SEU COLEGA”, como na Figura 1.

Figura 1: Extrato da primeira questão do teste

Q01) Você desenhou um retângulo. Seu colega desenhou uma figura de quatro lados que não é um retângulo. Nos espaços abaixo, desenhe como poderia ser a sua figura e a figura de seu colega:

SUA FIGURA:	FIGURA DE SEU COLEGA:

Fonte: Câmara dos Santos (2009) *apud* Costa (2019, p.208)

O segundo momento é a fase em que o aluno deverá justificar suas produções, ou seja, no espaço “sua figura é um retângulo” ele irá explicar o motivo de sua figura ser um retângulo. Enquanto que, na região “a de seu colega não é um retângulo” deverá explicitar o porquê de a figura de seu colega não ser um retângulo, de acordo com a Figura 2.

Figura 2: Extrato do segundo momento da primeira questão do teste

Justifique por quê:

Sua figura é um retângulo:	A de seu colega não é um retângulo:

Fonte: Câmara dos Santos *apud* Costa (2019, p. 208)

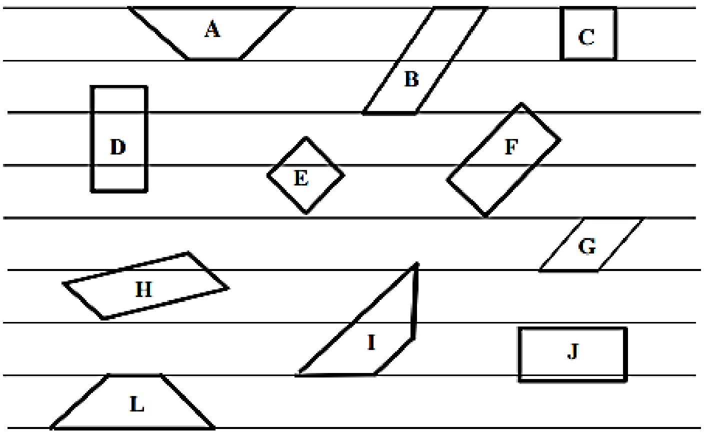
Assim, esse item tinha por finalidade analisar se, na construção do não retângulo, o estudante considerou as características da figura geométrica.

Para analisar as justificativas dos estudantes referentes a essas produções, utilizamos a categorização elaborada por Câmara dos Santos (1992;2001) apud Costa (2016), que classifica as justificativas em três esferas distintas: a) *pragmática*: o aluno faz menção ao aspecto global e visual da figura; b) aplicativa: a definição usual das figuras é utilizada na resposta; c) *relacional*: o aluno menciona as propriedades das figuras produzidas.

4.3.2 Segunda questão do teste

A segunda questão do teste consiste em uma situação de classificação. É composta por uma única etapa. Nesse item é apresentada ao aluno uma relação formada por onze quadriláteros notáveis diferentes e em posições distintas, como na Figura 3.

Figura 3: Quadriláteros notáveis apresentados na segunda questão.



Fonte: Câmara dos Santos *apud* Costa (2019, p. 209)

O objetivo dessa questão é verificar se os alunos são capazes de classificar os quadriláteros notáveis (retângulos, trapézios, quadriláteros, quadrados, paralelogramos e losangos) em famílias, conforme a Figura 4.

Figura 4: Quadro para a classificação dos quadriláteros notáveis.

Tente separar por famílias, as figuras da folha de caderno:

	FIGURAS
Retângulos:	
Trapézios:	
Quadriláteros:	
Quadrados:	
Paralelogramos:	
Losangos:	

Fonte: Câmara dos SanStos (2009) *apud* Costa (2019, p.210)

Ao realizar a classificação, o aluno deverá colocar na segunda coluna denominada “FIGURAS” a letra correspondente a cada quadrilátero designado na coluna 1.

Nesse item, definimos os seguintes critérios de análise dos dados:

• Classificação dos quadrados – Estarão nesse grupo as figuras C e E;

• Classificação dos retângulos – Figuras C, D, E, F e J;

•Classificação dos losangos – Figuras C e E.

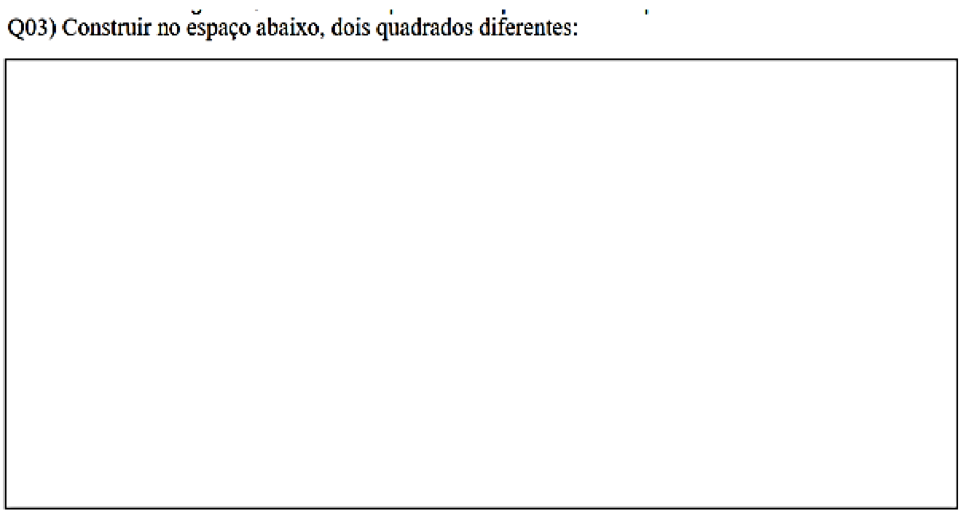
• Classificação dos paralelogramos – Figuras B, C, D, E, F, G, H e J.

• Classificação dos trapézios – Figuras A, I e L

4.3.3 Terceira questão do teste

A terceira questão é também uma questão de construção. É constituída de duas etapas. Na primeira etapa é solicitada ao aluno que desenhe dois quadrados diferentes, como mostra a Figura 5. O objetivo da questão é verificar quais os critérios utilizados pelos alunos da diferenciação de dois quadrados.

Figura 5: Extrato da primeira etapa da terceira questão do teste


Q03) Construir no espaço abaixo, dois quadrados diferentes:

Fonte: Câmara dos Santos (2009) *apud* Costa (2019, p.210)

A segunda etapa é um acréscimo feito por Costa (2019) em sua pesquisa de doutorado. Nesta etapa, os alunos deverão explicar com suas palavras o motivo pelo qual as figuras desenhadas são diferentes como mostra a Figura 6.

Figura 6: Extrato da segunda etapa da terceira questão do teste

Por que os dois quadrados que você construiu são diferentes?

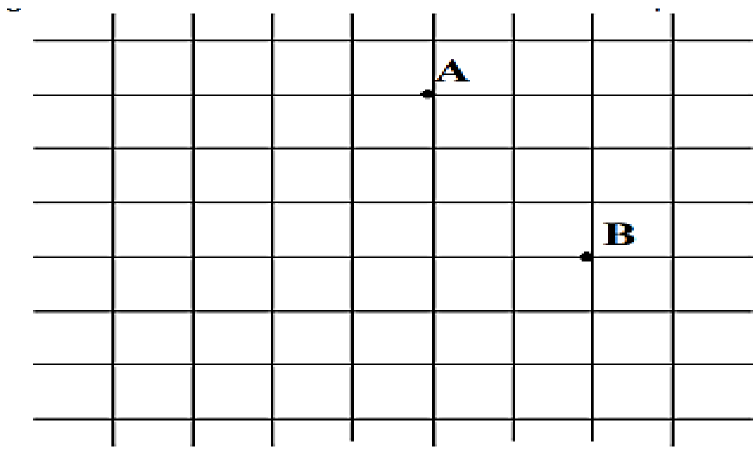
Fonte: Costa (2019, p.211)

Para a análise das justificativas deste item, também será usada a categorização desenvolvida por Câmara dos Santos (1992; 2001) *apud* Costa (2016) descrita anteriormente.

4.3.4 Quarta questão do teste

A questão quatro do teste, que é uma questão de construção também composto de duas etapas. Solicita ao aluno que construa o losango ABCD, dados dois pontos A e B fixados numa malha quadriculada como mostra a figura 7. O objetivo deste item é verificar os critérios utilizados pelo aluno na construção do quadrilátero, isto é, se utilizam apenas o aspecto global, se fizeram uso das propriedades, neste caso fazendo o uso das diagonais.

Figura 7: Extrato da primeira etapa da quarta questão do teste

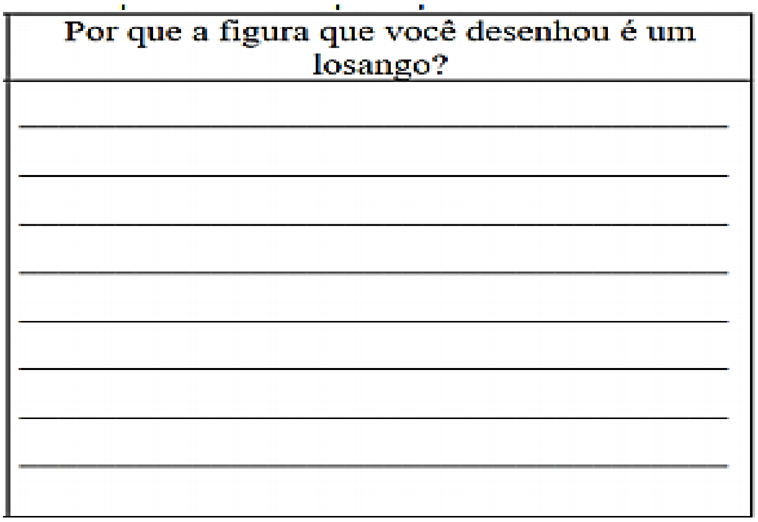


Fonte: Câmara dos Santos (2009) *apud* Costa (201SSs9, p.212)

Essa questão também teve um acréscimo feito por Costa (2019) na construção de sua tese de doutorado na qual ele analisa se o aluno é capaz de fazer a conversão[2] de ida e de volta. Nessa pesquisa, analisaremos apenas os critérios utilizados pelos participantes na justificativa de suas produções.

Logo após, os alunos são convidados a justificar suas construções, de acordo com a Figura 8.

Figura 08: Segunda etapa da quarta questão do teste


Por que a figura que você desenhou é um losango?

Fonte: Costa (2019, p 212)

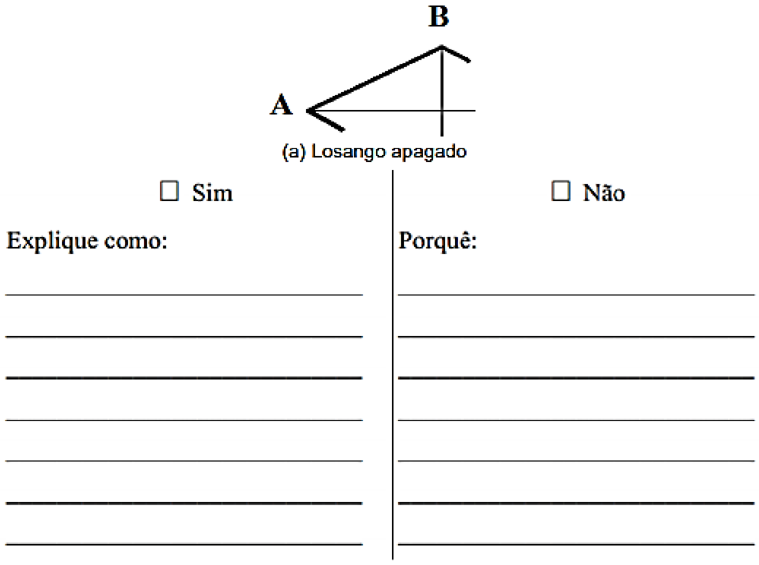
Para analisar as respostas dos alunos, também utilizamos uma categorização desenvolvida por Câmara dos Santos (1992 ;2001) apud Costa (2016) em relação a construção das figuras. Essa categorização é compreendida por três classes: a) perceptiva – o aluno constrói a figura usando seu aspecto global como referência; b) reflexiva – o aluno aplica as propriedades na construção e c) divergente – o aluno produz uma figura divergente

4.3.5 Quinta questão do teste

A quinta e última questão do teste é uma questão de construção. Traz um losango que teve uma parte “apagada” e solicita ao aluno sua reconstrução e a justificativa, como na Figura 9.

[2] Conversão: Converter a construção da figura em definição da mesma e vice-versa.

Figura 09: Extrato da quinta questão do teste



Fonte: Câmara dos Santos (2009) *apud* Costa (219, p.213)

O objetivo dessa questão é analisar os critérios utilizados pelos alunos da construção do quadrilátero, ou seja, se utilizam apenas o aspecto global ou fazem menção as suas propriedades.

Neste item, as respostas serão analisadas, seguindo uma categorização encontrada por Costa (2016) no desenvolvimento de sua pesquisa de mestrado. O autor encontrou três tipos de justificativas para a produção do losango: a) referência ao aspecto global – o aluno usa apenas a aparência visual da figura; b) uso implícito das diagonais: o aluno utiliza as diagonais implicitamente para justificar a produção do losango e c) apelo a ideia de simetria, quando o aluno faz menção à ideia de simetria para construir o losango.

Para identificar as produções dos alunos na análise dos dados, utilizamos o seguinte código: a primeira letra maiúscula A se refere a aluno; o número com dois dígitos, indica a ordem dos alunos de 1 a 36; o terceiro número refere-se ao serie do que é o 9º ano e a ultima letra A ou B é a turma do referido aluno.

4.4 RELAÇÕES DE ANÁLISE DOS NÍVEIS DE VAN HIELE COM OS QUADRILÁTEROS NOTÁVEIS

Para analisar e classificar os níveis de desenvolvimento do pensamento geométrico dos alunos em relação aos quadriláteros notáveis, desenvolvemos uma relação de cada nível do modelo de van Hiele, com os conhecimentos necessários sobre esses quadriláteros que o aluno precisa dominar, para se enquadrar num determinado nível. A Tabela 1, a seguir, traz essa relação.

Tabela 1: Relações dos níveis de Van Hiele com os quadriláteros notáveis

Níveis de Van Hiele	**Conhecimento sobre quadriláteros notáveis**
Nível 0 - Visualização	Os alunos reconhecem os quadriláteros notáveis por meio de seu aspecto global. Ex. Um quadrado lembra um dado.
Nível 1 - Análise	Os alunos reconhecem os quadriláteros notáveis a partir de sua definição e propriedades. Ex. Um quadrado é um quadrilátero que possui quatro lados iguais e quatro ângulos retos.
Nível 2 -Dedução informal	Os alunos conseguem fazer inclusão de classe parcial. Ex. Através das propriedades, já reconhece um quadrado como sendo um retângulo.
Nível 3 - Dedução formal	É capaz de demonstrar as propriedades dos quadriláteros notáveis usando a congruência de triângulos. E faz inclusão de classe total relacionando as propriedades dessas figuras. Ex. Todo quadrado é um paralelogramo que é retângulo e losango ao mesmo tempo.
Nível 4 - Rigor	O aluno demonstra teoremas numa geometria finita.

Fonte: Desenvolvida pelo autor

Dessa forma, os alunos serão classificados nos níveis de Van Hiele de acordo com a relação estabelecida acima. Essa relação é válida para todos os quadriláteros notáveis.

5. ANÁLISE DOS DADOS

Neste capitulo verificamos os dados coletados a partir do instrumento de pesquisa, analisando os resultados e destacando os níveis de pensamento geométrico dos participantes desta pesquisa. Em seguida, analisamos os resultados de cada item do teste.

5.1 PRIMEIRA QUESTÃO

Na primeira questão do teste foi solicitado aos alunos, em um primeiro momento, para construírem um retângulo e uma figura que não fosse um retângulo. Num segundo momento foi solicitado as justificativas de suas produções. Na tabela 02, apresentamos os quadriláteros notáveis construídos pelos alunos como não retângulos.

Tabela 02: Figuras geométricas consideradas como não retângulos

FIGURAS	**TESTE**
Paralelogramo	**3%**
Trapézio	**5%**
Losango	**8%**
Triângulo	**3%**
Quadrado	**67%**
Não responderam	**14%**

Fonte: Dados da pesquisa

Pela tabela, podemos notar que, da mesma forma como na pesquisa de Câmara dos Santos (2001), a maioria dos estudantes não reconhecem o quadrado como retângulo, totalizando 67% como mostra nossa pesquisa.

Esse fenômeno pode ter ocorrido, provavelmente, pelo fato de o quadrado e o retângulo padrão apresentarem diferenças em sua aparência física, aspecto esse que prevalece no primeiro nível de Van Hiele, o Nível 0. Os alunos que atuam nesse nível, utilizam apenas a aparência física das figuras para fazer alguma distinção entre elas, sem mencionar sua definição ou propriedades.

Em seguida, o quadrilátero notável mais citado como não retângulo foi o losango. Isso foi observado em 8% dos alunos. Acreditamos que ao construir o losango como não retângulo, os alunos estivessem procurando figuras com características visuais diferentes das de um retângulo.

Em terceiro lugar aparece o trapézio em 5% das construções. Como o trapézio apresenta características físicas que o diferem de um retângulo, acreditamos que a escolha dessa figura como sendo um não retângulo, tenha sido motivada por esse fato.

Por fim, juntos em quarto lugar, aparecem o triângulo e o paralelogramo como sendo não retângulos escolhidos por 3% dos estudantes para ambas construções. A escolha do paralelogramo, parece, novamente que o aluno buscou uma figura com caraterísticas visuais diferentes das do retângulo. O que mostra uma característica típica do Nível 0 do modelo de Van Hiele. Já a escolha do triângulo pelo estudante, justifica-se pela mera diferença da aparência física, característica do nível 0 de Van Hiele, como veremos na análise das justificativas dessas construções. De todos os estudantes, 13% não responderam a primeira questão do teste. As justificativas foram classificadas de acordo com a categorização estabelecida por Câmara dos Santos (2001) apud Costa (2016) descritas na metodologia.

Inicialmente, realizamos a categorização das respostas relacionadas à primeira construção, isto é, a partir da categoria anunciada, analisamos os argumentos dos estudantes para explicarem o motivo da figura ser um retângulo. A Tabela 03 exibe a classificação de acordo com o teste.

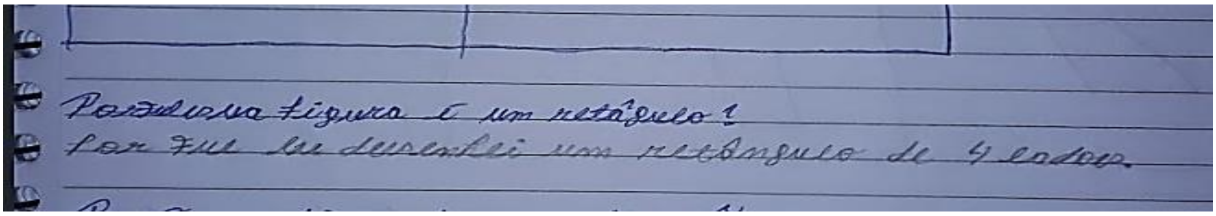
Tabela 03: Categorização das justificativas da primeira construção

CLASSES	TESTE
Pragmática	**64%**
Aplicativa	**22%**
Relacional	**0%**
Não responderam	**14%**

Fonte: Dados da pesquisa

Pela Tabela 03, observamos que mais da metade dos estudantes, ou seja, 64% estão na classificação pragmática. Isso indica que a maioria fez referência apenas ao aspecto visual da figura, que é uma característica do primeiro nível de Van Hiele. A figura 10 abaixo mostra um exemplo da esfera pragmática.

Figura 10: Justificativa do aluno A39A sobre a primeira figura na esfera pragmática

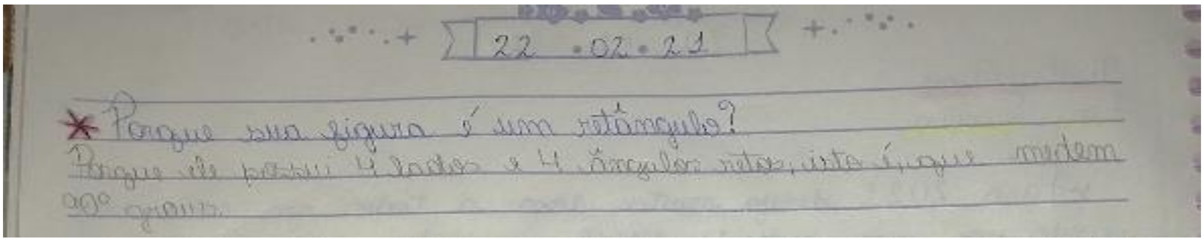


Fonte: Dados da pesquisa

De acordo com a figura, constatamos que o estudante A39A faz menção apenas a quantidade de lados do retângulo, apelando assim para sua estrutura física, o que é evidenciado no primeiro nível de Van Hiele, onde o estudante que atua nesse nível reconhece as figuras geométricas a partir dos seus aspectos globais.

Ainda no teste, identificamos 22% dos participantes atuando dentro do nível aplicativo, fazendo referência as propriedades das figuras, o que corresponde ao segundo nível de Van Hiele. A seguir, podemos observar um exemplo para essa classe na Figura 11.

Figura 11: Justificativa da aluna A79A da primeira produção no nível aplicativo



Fonte: Dados da pesquisa

Na Figura 11, evidenciamos que a aluna afirmou que sua construção é um retângulo, pois apresenta quatro ângulos retos, que medem 90º, fazendo uso da definição usual do retângulo. Dessa forma, a mesma atua no segundo nível da teoria de Van Hiele, o Nível 1.

Em relação a esfera relacional, 0% dos alunos mencionaram as propriedades do retângulo para justificar suas produções. Isso mostra que ainda não construíram o conceito de retângulo.

Posteriormente, categorizamos as justificativas dos estudantes em relação à segunda figura produzida (o não retângulo). A Tabela 04 apresenta essa categorização.

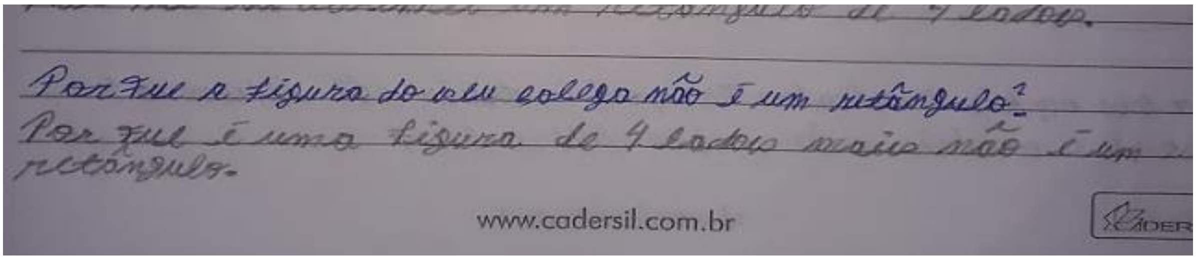
Tabela 04: Categorização em relação a segunda construção da primeira questão do teste

CLASSES	**TESTE**
Pragmática	**6%**
Aplicativa	**80%**
Relacional	**0%**
Não responderam	**14%**

Fonte: Dados da pesquisa

Evidenciamos pela Tabela acima, que 6% dos estudantes, ao justificar suas produções apelaram apenas para o aspecto global da figura. Outros 80% fizeram menção as definições, pois a maioria construiu um quadrado como sendo um não retângulo e nenhum conseguiu relacionar as propriedades com as figuras construídas. Na Figura 12, apresentamos algumas justificativas que se encaixam nas esferas pragmática e aplicativa.

Figura 12: Justificativa do aluno A39A para a construção do não retângulo da primeira questão do teste na esfera pragmática



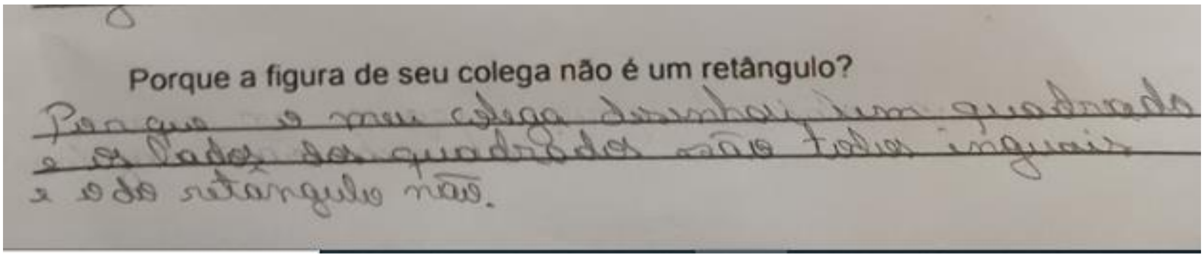
Fonte: Dados da pesquisa

O aluno A39A, desenhou um quadrado, porém não mencionou a definição usual da figura para justificar sua produção, apenas usou o aspecto físico do quadrado e sua quantidade de lados para tentar fazer a diferenciação entre as figuras geométricas. Dessa forma, fica evidente que esse aluno atua no primeiro nível de Van Hiele, o Nível do reconhecimento.

Na Figura 13, evidenciamos que o aluno A191B desenhou um quadrado como sendo um não retângulo e justificou a diferença entre eles afirmando que um quadrado tem todos os lados iguais e o retângulo, não.

Figura 13: Justificativa do aluno A191B para a segunda construção da primeira questão do teste na esfera aplicativa

Ss

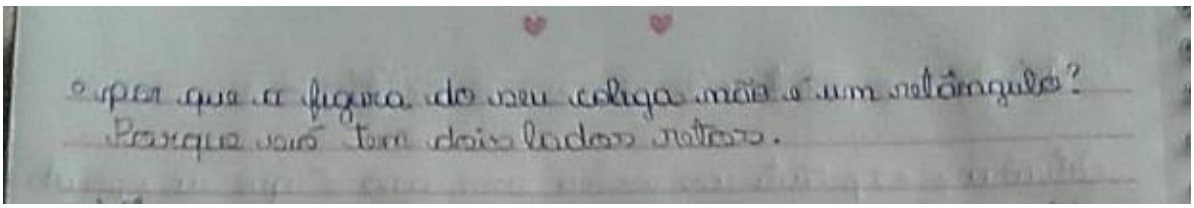


Fonte: Dados da pesquisa

Nessa resposta dada fica claro que o aluno A191B usou a definição usual do quadrado. Assim, atua no segundo nível do pensamento geométrico de Van Hiele, o nível da análise.

O aluno A79B, desenhou um trapézio como sendo um não retângulo e justificou como mostra a Figura 14.

Figura 14: Justificativa da aluna A79B para a segunda construção da primeira questão do teste, na esfera aplicativa



Fonte: Dados da pesquisa

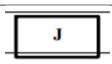
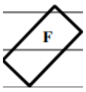
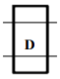
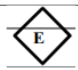
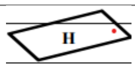
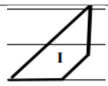
Ao justificar sua produção o referido aluno mencionou que o trapézio não pode ser considerado um retângulo, pois possui apenas dois lados retos. Isso evidencia que ele usou a definição usual de trapézio que é definido como um quadrilátero que possui dois lados opostos e paralelos. De acordo com a relação estabelecida na Tabela 1 da página 36 desta pesquisa, este aluno encontra-se no segundo nível do modelo de Van Hiele.

5.2 SEGUNDA QUESTÃO

Na segunda questão do teste, foram apresentados aos alunos onze quadriláteros notáveis de diferentes formas e posições. A atividade solicitava que os mesmos classificassem esses quadriláteros em diferentes famílias. Nesse sentido, os alunos foram orientados a classificarem os quadriláteros em retângulos, trapézios, quadriláteros, quadrados, paralelogramos e losangos.

A Tabela 05 mostra a classificação feita pelos alunos desses quadriláteros em retângulos.

Tabela 05: Figuras classificadas como retângulos

FIGURAS	TESTE
	**58%**
	**44%**
	**53%**
	**3%**
	**5%**
	**5%**

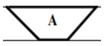
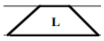
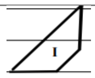
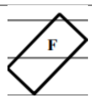
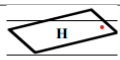
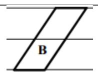
Fonte: Dados da pesquisa

Pela Tabela, observamos que a maioria dos alunos reconheceu o retângulo, em sua forma prototípica, ou seja, a que é usualmente vista em sala de aula, totalizando 58% dos mesmos. Desses, 44% conseguiram reconhecer o retângulo em posição não prototípica, representado pela letra F e 53% representado pela letra D o que é bem satisfatório e mostra um avanço no pensamento geométrico desses alunos.

Apenas 3% reconheceram o quadrado em posição não prototípica como sendo um retângulo, representado pela letra E. Esse resultado mostra que esses alunos conseguiram fazer o agrupamento dos quadriláteros em família ao considerar o quadrado como sendo um retângulo. O paralelogramo e o trapézio foram classificados por 5% dos alunos, sendo representados pelas letras H e I. Isso pode ter ocorrido pelo fato de o paralelogramo e o trapézio apresentarem semelhanças na aparência física do retângulo.

De acordo com a Tabela 06 que traz a classificação dos quadriláteros em trapézios, a maioria dos estudantes pesquisados conseguiram fazer a classificação correta do trapézio em diferentes posições, o que evidencia que estes alunos atuam no Nível 1 da teoria de Van Hiele.

Tabela 06: Figuras classificadas como trapézios

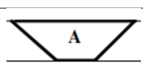
FIGURAS	TESTE
	53%
	55%
	44%
	3%
	3%
	3%
	3%

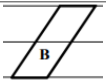
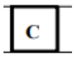
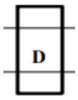
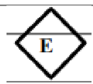
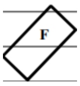
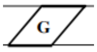
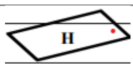
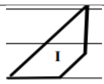
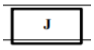
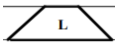
Fonte: Dados da pesquisa

Todos os paralelogramos em diferentes posições (prototípicas e não prototípicas) também foram classificados como trapézios, num total de 3% pelos alunos. Acreditamos que, a aparência física de ambas figuras influenciaram no resultado, assim como a classificação de todos os retângulos como sendo um trapézio por 3% dos estudantes.

A Tabela 07 mostra a classificação das figuras como quadriláteros pelos participantes da pesquisa.

Tabela 07: Classificação das figuras como quadriláteros

FIGURAS	TESTE
	42%

	**50%**
	**42%**
	**42%**
	**42%**
	**42%**
	**44%**
	**39%**
	**36%**
	**39%**
	**36%**

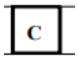
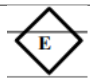
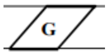
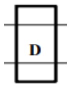
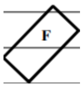
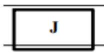
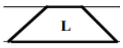
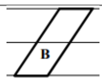
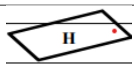
Fonte: Dados da pesquisa

Na classificação das figuras como quadriláteros, os quadrados, em sua posição prototípica foram apontados por 42% dos alunos. Os trapézios foram considerados como quadriláteros por 33% dos participantes. Os paralelogramos foram reconhecidos por 36% dos alunos. O losango em sua posição prototípica, foi escolhido por 42% dos participantes. Os retângulos por sua vez, foram reconhecidos por 39% dos alunos.

Esses resultados se mostram insatisfatórios, pois menos da metade dos estudantes da pesquisa foram capazes de fazer a classificação correta dos quadriláteros, ou seja, não foram capazes de reconhecer os quadriláteros notáveis como sendo uma figura de quatro lados detentoras de propriedades. Isso mostra um atraso no desenvolvimento do pensamento geométrico desses alunos, em relação à esse tópico da geometria, de acordo com modelo de Van Hiele. Em contrapartida, 33% dos alunos conseguiram identificar todas as figuras como sendo quadriláteros. Esse resultado aponta que esses alunos compreendem a definição de quadriláteros e se enquadram no segundo nível da teoria vanhieliana.

A Tabela 08 mostra os resultados alcançados para a classificação das figuras como quadrados.

Tabela 08: Classificação das figuras como quadrados

FIGURAS	TESTE
	64%
	33%
	8%
	8%
	3%
	5%
	3%
	3%
	3%

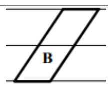
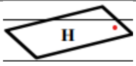
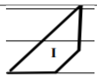
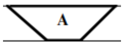
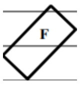
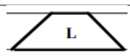
Fonte: Dados da pesquisa

De acordo com a Tabela 08, a maioria dos estudantes conseguiram reconhecer o quadrado em sua posição prototípica, como um quadrado, num total de 64%. Em relação ao quadrado em posição não prototípica, apenas 33% reconheceram a figura como quadrado. Esse fato pode ser justificado, por que o quadrado é apresentado, na maioria dos casos em sala de aula, apenas em sua posição prototípica.

Isso dificulta o reconhecimento dessa figura quando apresentada em outra posição contribuindo para uma possível falha no processo de aprendizagem O paralelogramo e o retângulo (não prototípico) obtiveram, ambos separadamente 8%. O retângulo (prototípico) obteve 5% das escolhas e o trapézio (prototípico), o paralelogramo (prototípico e não prototípico) foram escolhidos por 3% dos participantes como sendo quadrados.

Os participantes também classificaram as figuras como paralelogramos. A Tabela 09 apresenta os resultados alcançados para a classificação das figuras como paralelogramos.

Tabela 09: Figuras classificadas como paralelogramos

FIGURAS	TESTE
	**44%**
	**44%**
	**5%**
	**8%**
	**8%**
	**11%**
	**3%**

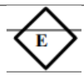
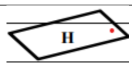
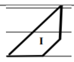
Fonte: Dados da pesquisa

Os paralelogramos em diferentes posições foram identificados por apenas 3% dos alunos. Isso mostra que os mesmos apresentaram dificuldade em reconhecer tal figura em diferentes posições, isto é, estão acostumados apenas com o reconhecimento da figura em posição prototípica. Esse é um ponto que merece atenção por partes dos professores ao fazer a apresentação dessas figuras na sala de aula, para tentar diminuir essa dificuldade.

Reforçando essa ideia, 44% dos estudantes classificaram os paralelogramos em posição prototípica. Os trapézios foram escolhidos por 3% dos estudantes. Acreditamos que tal escolha se deva ao fato de o trapézio ter dois lados 'tortos' assim como o paralelogramo. O retângulo (não prototípico) foi considerado por 8% dos estudantes. Nenhum estudante classificou o quadrado e o losango como paralelogramos.

Por fim, os participantes fizeram a classificação das figuras como losangos. A Tabela 10 apresenta a classificação das figuras em losangos.

Tabela 10: Figuras classificadas como losangos

FIGURAS	TESTE
	**33%**
	**30%**
	**3%**
	**3%**

SSSsFonte: Dados da pesquisa

Pela tabela acima, 30% dos estudantes conseguiram reconhecer o losango em sua posição tal qual a apresentada em sala de aula. O paralelogramo foi escolhido por 33% dos participantes. Isso pode ter ocorrido, pela posição em que o paralelogramo foi exposto na questão do teste.

Porém, nenhum deles foi capaz de reconhecer o quadrado como sendo um losango. Isso reforça a ideia de que eles se atentam apenas para a posição da figura e sua forma, sem relacionar suas propriedades em comum. Dessa forma, esses resultados mostram que esses alunos ainda atuam no primeiro nível da teoria de Van Hiele: o nível do reconhecimento.

5.3 TERCEIRA QUESTÃO

Na terceira questão, foi solicitado aos alunos que construíssem dois quadrados diferentes, em um primeiro momento. No segundo momento, eles deveriam justificar a diferença entre as figuras. O objetivo era verificar que critérios eles usariam para fazer essa diferenciação. A Tabela 11 mostra as figuras escolhidas pelos estudantes para representar a segunda opção.

Tabela 11: Quadriláteros escolhidos para segunda figura (terceira questão do teste)

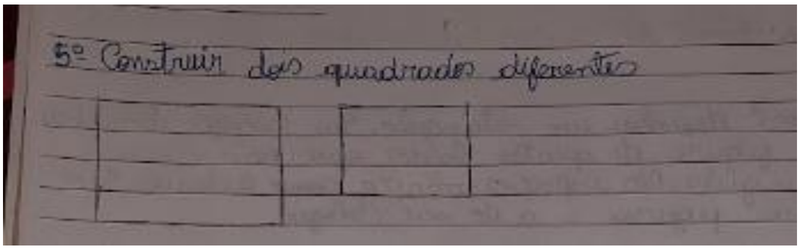
FIGURAS	TESTE
Trapézio	**5%**
Losango quadrado	**14%**
Paralelogramo	**1%**

Quadrado	**22%**

Fonte: Dados da pesquisa

Como resultado neste item, percebemos que a maioria dos estudantes, num total de 22%, construíram dois quadrados de tamanhos diferentes, evidenciando que consideram apenas a aparência global para a diferenciação, como mostra o extrato da questão da aluna A49A, na Figura 15

Figura 15: Extrato da primeira parte da terceira questão da aluna A49A



Fonte: Dados da pesquisa

O losango quadrado foi escolhido por 14% dos alunos como um tipo diferente de quadrado, como mostra o extrato da questão da aluna A119A, na Figura 16.

Figura 16: Extrato da primeira parte da terceira questão da aluna A119A

Fonte: Dados da pesquisa

O trapézio foi selecionado por 5% dos alunos. Essa escolha foi coerente, pois todo quadrado pode ser classificado como trapézio (de acordo com a definição de trapézio). A figura 17 mostra a produção da aluna A139A.

Figura 17: Extrato da primeira parte da terceira questão da aluna A139A

Fonte: Dados da pesquisa

Para a análise das justificativas, utilizamos a categorização estabelecida por Câmara dos Santos (2001). A tabela 12 mostra a categorização das respostas dos participantes.

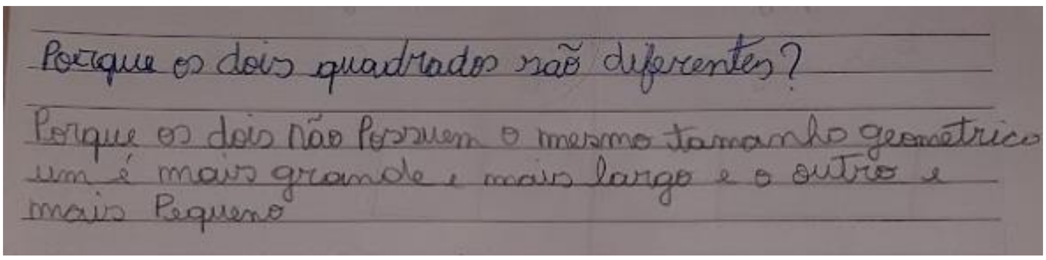
Tabela 12: Categorização das justificativas da terceira questão do teste

CATEGORIAS	TESTE
Pragmática	79%
Aplicativa	5%
Relacional	0
Não responderam	16%

Fonte: Dados da pesquisa

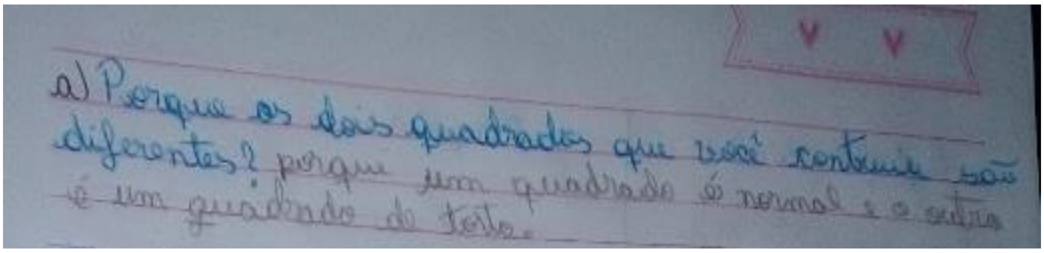
Vimos nas Figuras 15, 16 e 17, que as alunas A49A, A119A e A139A construíram um quadrado, um losango quadrado e um trapézio respectivamente, com sendo um quadrado, porém ao justificar suas produções não citaram nenhuma definição ou propriedades que relacionem esses dois quadriláteros, apenas os diferenciaram pela sua aparência física, característica da *esfera pragmática*, estabelecida por Câmara dos Santos (2001) *apud* Costa (2016), como mostra as Figuras 18, 19 e 20.

Figura 18: Justificativa da aluna A49A da terceira questão



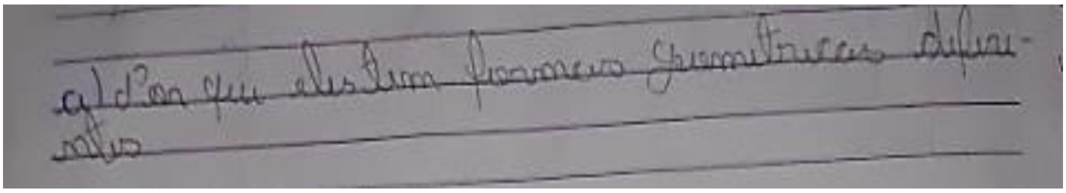
Fonte: Dados da pesquisa

Figura 19: Justificativa da aluna A119A da terceira questão


a) Porque os dois quadrados que você construiu são diferentes? porque um quadrado é normal e o outro é um quadrado de torto.

Fonte: Dados da pesquisa

Figura 20: Justificativa da aluna A139A para a construção do trapézio como sendo um quadrado

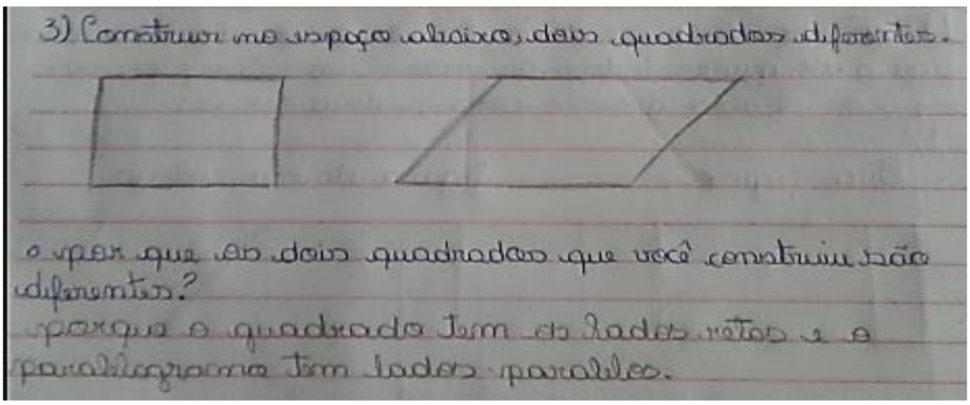

a) Por que eles tem formas geometricas diferentes

Fonte: Dados da pesquisa

Nessa categoria, foram classificados 79% dos alunos como evidencia a Tabela 12. Dessa forma, fica evidenciado que essas alunas ainda atuam no primeiro nível da teoria de Van Hiele, o nível da visualização.

Em relação à *esfera aplicativa*, a qual o aluno aplica a definição usual da figura para justificar sua produção, foram encontrados 5% dos alunos. A aluna A79B desenhou um paralelogramo como sendo um quadrado e nas justificativas usou a definição usual do quadrado e do paralelogramo como mostra a Figura 21, abaixo:

Figura 21: Extrato da questão três da aluna A79B


3) Construir no espaço abaixo, dois quadrados diferentes.

a) por que os dois quadrados que você construiu são diferentes?
porque o quadrado tem os lados retos e o paralelogramo tem lados paralelos.

Fonte: Dados da pesquisa

De acordo com o desenvolvimento da questão pela aluna, pudemos perceber que ela fez uma inclusão de classe de forma parcial ao considerar um quadrado como sendo um paralelogramo, e definiu as figuras com uma definição parcial. Esse resultado mostra uma possível transição de níveis, ou a existência de subníveis, como sugerido por Costa (2019) em sua tese de doutorado.

5.4 QUARTA QUESTÃO

No quarto item, os alunos foram orientados a construir um losango a partir de dois pontos estabelecidos numa malha quadriculada. O objetivo era analisar as construções dos alunos e identificar as estratégias utilizadas por eles na construção do losango, tais como o aspecto global, aplicação das propriedades como o uso das diagonais.

Na Tabela 13, verificamos a categorização das respostas dos estudantes na construção de um losango a partir de dois pontos.

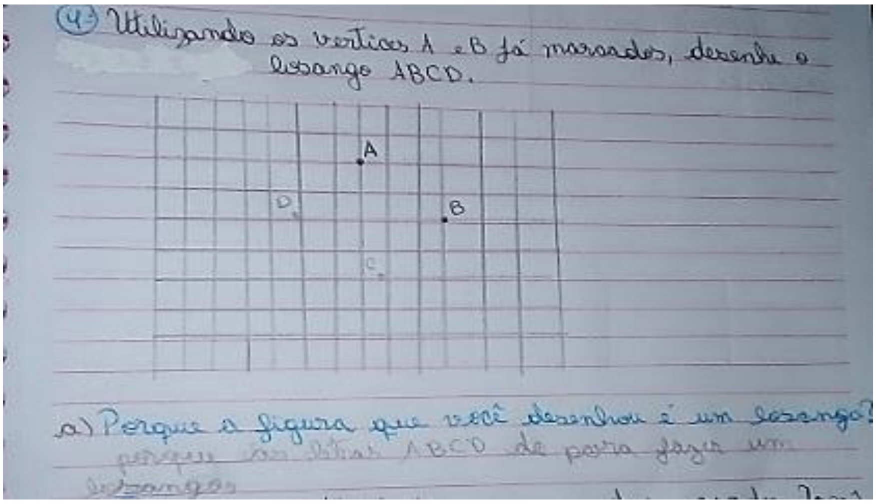
Tabela 13: Categorização das construções do losango pelos estudantes na quarta questão do teste

CATEGORIAS	TESTE
Perceptiva	**50%**
Aplicativa	**14%**
Divergente	**5%**
Não respondeu	**31%**

Fonte: Dados da pesquisa

De acordo com a Tabela 13, metade dos estudantes construíram o losango atentando apenas para seu aspecto global, ou seja, 50% dos alunos construíram o losango utilizando apenas seu aspecto visual, característica da *esfera perceptiva*. A Figura 22 mostra o extrato da questão quatro desenvolvida pela aluna A119A classificado na *esfera perceptiva*:

Figura 22: Extrato da questão quatro da aluna A119A na esfera perceptiva

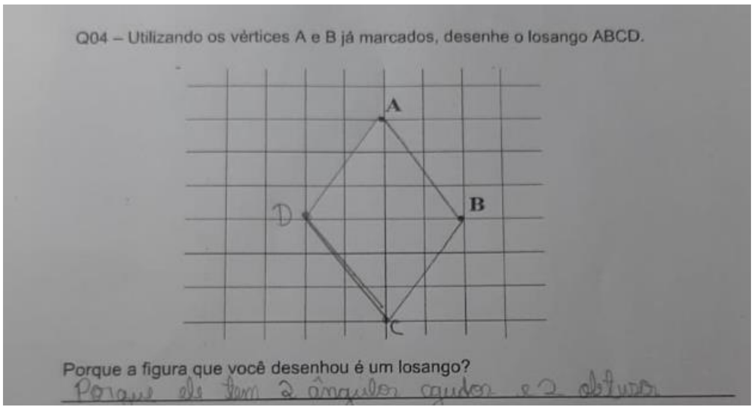


Fonte: Dados da pesquisa

Isso mostra que tais estudantes atuam no primeiro nível do modelo de Van Hiele atentando apenas para a forma da figura em sua construção.

Apenas 14% justificaram suas construções relacionando com as propriedades desse quadrilátero. A Figura 23 mostra o desenvolvimento da questão quatro por um aluno na *esfera aplicativa*.

Figura 23: Extrato da questão quatro da aluna A89A na esfera aplicativa

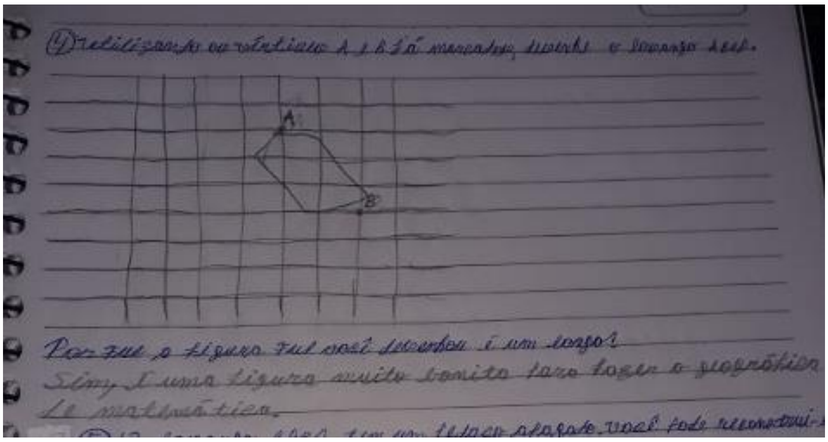


Fonte: Dados da pesquisa

A aluna A89A, além de conseguir construir a Figura a partir de dois pontos estabelecidos na malha quadriculada, justificou sua produção aplicando as propriedades do losango. Esse fato aponta que essa aluna possui domínios de conceitos dos quadriláteros notáveis para atuar no segundo nível de Van Hiele, o nível da análise.

Outros 5% não conseguiram reproduzir a Figura pedida, apresentando uma figura divergente como mostra o extrato da questão do aluno A39A na figura 24.

Figura 24: Extrato da questão quatro do aluno A39A na esfera divergente



Fonte: Dados da pesquisa

Pela Figura 24, é possível observar que o aluno A39A, não foi capaz de reproduzir o losango, mostrando que não apresenta uma formação concreta de conceito visual dessa figura. Assim como a figura, a justificativa também foi divergente do que era esperado pela questão. Desta forma, este aluno pode ser classificado no Nível 0, primeiro nível de Van Hiele

5.5 QUINTA QUESTÃO

Na quinta e última questão do teste, os alunos foram orientados a terminar a construção de um losango que teve algumas partes apagadas. Além disso, eles deveriam dizer se era possível ou não terminar a figura. Depois deveriam justificar suas respostas. A tabela 14 mostra o resultado da primeira parte da questão.

Tabela 14: Respostas dos estudantes em relação à possibilidade de reconstrução do losango apagado

É POSSIVEL RECONSTRUIR O LOSANGO?	**TESTE**
Sim	**55%**
Não	**15%**
Não respondeu	**30%**

Fonte: Dados da pesquisa

Pelos dados da Tabela 14, a maioria dos estudantes afirmaram ser possível reconstruir o losango, num total de 55%. Outros 15% afirmaram que não era possível e 30% não respondeu ao item. Esses resultados mostram que a maioria dos alunos conhecem o losango, já que afirmaram ser capazes de reconstruí-los.

A Tabela 15 mostra o tipo das justificativas dos estudantes na construção do losango ABCD, de acordo com as categorias desenvolvidas por Costa (2016), descritas na metodologia.

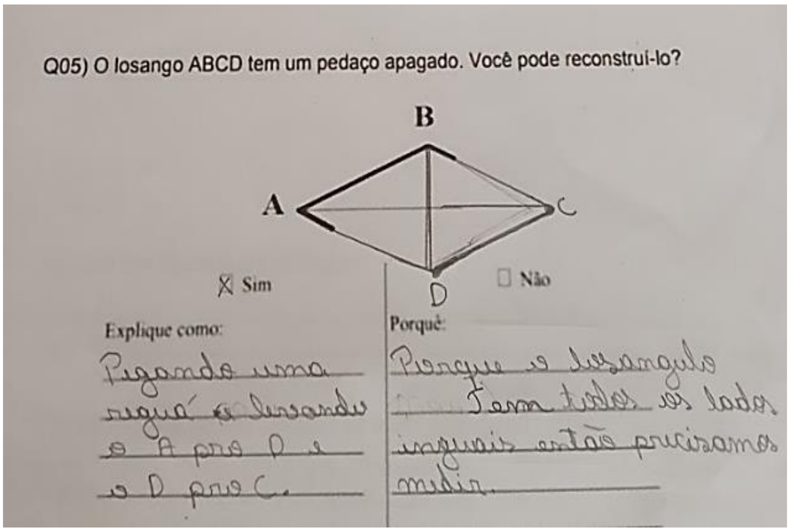
Tabela 15: Tipos de justificativas dos estudantes que confirmaram a possibilidade de reconstrução do losango

TIPOS DE JUSTIFICATIVA	**TESTE**
Referência ao aspecto global	**5%**
Apelo a ideia de simetria	**95%**
Uso implícito das diagonais	**0%**

Fonte: Dados da pesquisa

Os resultados mostraram que a grande maioria dos estudantes reconheceram que seria possível fazer a continuação da figura apenas utilizando a ideia de simetria. A Figura 25 mostra a resposta do aluno A19B, onde o mesmo justifica sua construção usando a ideia de simetria.

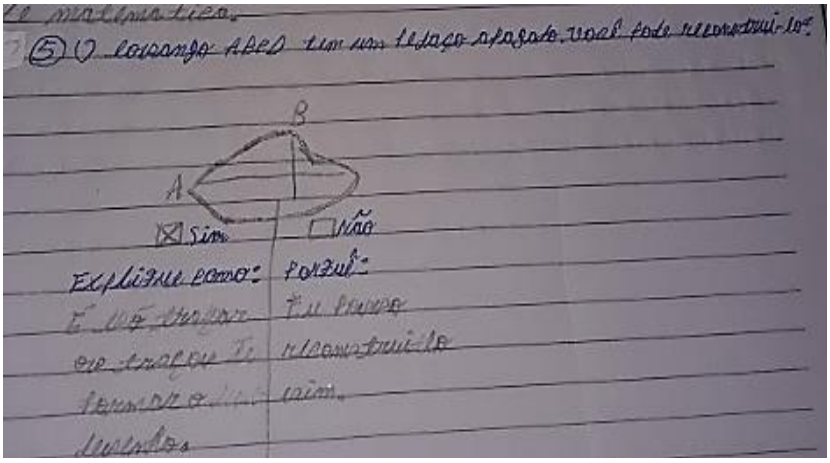
Figura 25: Extrato da questão cinco do aluno A19B



Fonte: Dados da pesquisa

O aluno A39A, o único que não fez menção à ideia de simetria, justificou que precisaria somente seguir os traços para formar a figura como mostra a Figura 26:

Figura 26: Extrato da questão cinco do aluno A39A.



Fonte: Dados da pesquisa

Nenhum estudante justificou suas construções relacionando com o uso implícito das diagonais. Esse resultado aponta que tais estudantes não tiveram uma aprendizagem significativa em relação aos quadriláteros notáveis, já que não dominam conceitos para estarem no nível apropriado, de acordo com a Teoria de Van Hiele.

6. CONSIDERAÇÕES FINAIS

Iniciamos nosso trabalho com o objetivo de analisar o nível do desenvolvimento do pensamento geométrico dos alunos do 9º ano de uma escola pública da cidade de Cachoeira dos Índios/PB em relação aos quadriláteros notáveis. Para responder tal questionamento, aplicamos um teste composto por cinco questões envolvendo construção e classificação dessas figuras geométricas. Vale ressaltar que, o teste foi aplicado de forma on-line por meio da Plataforma *Google Classrroom*, devido a situação pandêmica que o mundo está passando e estarmos trabalhando com o Ensino Remoto Emergencial, para 62 alunos de duas turmas de 9º ano, porém destes apenas 36 foram devolvidos.

Em relação aos resultados obtidos, pudemos constatar que dos 36 alunos, 66% estão no nível 0 (nível do reconhecimento), pois não conseguiram usar definições e aplicar as propriedades dos quadriláteros notáveis nas resoluções das questões do teste. Dos 12 alunos restantes, 100% encontram-se no Nível 1, ou seja, conseguiram aplicar propriedades de definições em suas construções e justificativas. É importante ressaltar que, dentro do Nível 1, um aluno encontrou - se numa espécie de transição entre os níveis, pois de certa forma conseguiu aplicar algumas propriedades e fazer inclusão de classes de maneira parcial e de forma implícita na resolução das questões, mas não o suficiente para alcançar o nível seguinte. A existência de subníveis dentro dos próprios níveis de Van Hiele foi constatado por Costa (2019) em sua tese de doutorado, na qual criou um modelo para classificar o pensamento geométrico de alunos em níveis e subníveis.

De acordo com os resultados, nenhum dos estudantes encontrou-se efetivamente no nível 2. Esse resultado se mostra insatisfatório, pois de acordo com Van Hiele, esses alunos já deveriam ter alcançado o Nível 2, que é o nível da dedução informal, por estarem finalizando o ensino fundamental.

Por meio da primeira questão do teste, foi possível constatar que a maioria dos estudantes não consideraram o quadrado como sendo um retângulo, evidenciando, assim que ainda não são capazes de fazer inclusão de classes, mesmo de maneira parcial.

Esse fato foi ainda mais evidenciado na questão dois do teste, onde os mesmos deveriam classificar alguns quadriláteros notáveis em quadrados, retângulos, losangos, trapézios, paralelogramos, quadriláteros. Os estudantes tiveram muita dificuldade em classificar as figuras não prototípicas. O quadrado, por exemplo foi classificado apenas por 33% dos estudantes. Esses resultados mostram que, esses alunos não tiveram uma aprendizagem satisfatória e efetiva em relação aos quadriláteros notáveis em relação ao reconhecimento de figuras em diferentes posições.

Na questão três os alunos deveriam produzir dois quadrados diferentes. Nessa questão pudemos observar que a maioria dos alunos não foram capazes de considerar o quadrado como um losango ou como um trapézio, pelo fato de não dominarem as definições e as propriedades dessas figuras, não realizando assim inclusão de classes. Na quarta questão do teste, também pudemos notar que em relação ao quadrilátero notável losango, a maioria dos alunos demonstraram reconhecer fisicamente um losango, porém não detém saber sobre as propriedades dessa figura. Por fim, na quinta questão, que tratava de uma construção de um losango, a maioria dos alunos conseguiu reconstruir a figura utilizando a ideia de simetria dos lados. Isso reforça o resultado da questão quatro, pois eles mostraram conhecer a figura em si, mas não raciocinam sobre suas propriedades.

Tais resultados, apontam para a necessidade do uso de metodologias apropriadas no estudo dos quadriláteros notáveis nas aulas de Geometria. Dessa maneira, existe a necessidade do desenvolvimento de pesquisas que busquem estratégias metodológicas pra melhorar o ensino dos quadriláteros notáveis nas escolas públicas do Brasil. Disso, fica o questionamento: Como o ensino dos quadriláteros notáveis podem ser abordados de forma significativa nas aulas de Matemática? Como os professores de matemática podem atuar para que essa aprendizagem significativa e efetiva aconteça?

Nesse sentido, a teoria de Van Hiele pode servir como uma ferramenta poderosíssima para auxiliar o professor a desenvolver uma prática do ensino dos quadriláteros notáveis de maneira eficaz, respeitando o nível de desenvolvimento geométrico de cada aluno.

Sabemos que o melhoramento do ensino da Geometria em relação aos quadriláteros notáveis nas escolas públicas não depende apenas de sugestões metodológicas de pesquisadores, mas principalmente da aceitação e compreensão dessas metodologias pelos nossos professores e sua efetivação na pratica.

Assim, a teoria de Van Hiele vem a ser uma bússola norteadora desse processo de ensino e aprendizagem, visando a efetiva aquisição dos conhecimentos geométricos nas aulas de Matemática.

REFERÊNCIAS

BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular**. Brasília, 2018.

CARGNIN, R. M. GUERRA, S. H. R.; LEIVAS, J. C. P. **T**eoria de van Hiele e investigação matemática: implicações para o ensino de Geometria. **REVISTA PRÁXIS.** Volta Redonda: RJ, Ano VIII, n. 15, junho, p. 106-117, 2016.

COSTA, A. P. **A CONSTRUÇÃO DE UM MODELO DE NÍVEIS DE DESENVOLVIMENTO DO PENSAMENTO GEOMÉTRICO:** o caso dos quadriláteros notáveis. 2019. Tese (Doutorado em Educação Matemática e Tecnológica) – Universidade Federal de Pernambuco, Recife, 2019.

COSTA, A. P. **A construção do conceito de quadriláteros notáveis no 6º ano do ensino fundamental**: um estudo sob a luz da teoria vanhieliana. 2016. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática e Tecnológica) – Universidade Federal de Pernambuco, Recife, 2016.

COSTA, A. P. da. SANTOS, M. C. dos. Aspectos do pensamento geométrico demonstrados por estudantes do Ensino Médio em um problema envolvendo o conceito de quadriláteros. In: **Conferência Internamericana de Educação Matemática- XIV CIAEM**. Anais... México, 2015.

COSTA, A. P. da. SANTOS, M. C. dos. NÍVEIS DE PENSAMENTO GEOMÉTRICO DE ALUNOS DO ENSINO MÉDIO NO ESTADO DE PERNAMBUCO: um estudo sob o olhar vanhieliano. In: EM TEIA – **Revista de Educação Matemática e Tecnológica Iberoamericana**. Vol. 7, número 3, 2016.

CROWLEY, M. L. O modelo Van Hiele de desenvolvimento do pensamento geométrico. In: MONTGOMERY, M. L. SHULTE, A. P. **Aprendendo e ensinando geometria.** São Paulo, SP. Atual Editora, 1994.

FIORENTINI, D. LORENZATO, S. **Investigação em educação Matemática:** percursos teóricos e metodológicos**.** 3.ed.rev. Campinas, SP: Autores associados, 2012. (Coleção formação de professores).

FONSECA, J. A. da. LEIVAS, J.C.P. TRIÂNGULOS: UMA EXPERIÊNCIA UTILIZANDO A TEORIA DE VAN HIELE. In**:** e- Mosaicos: **Revista Multidisciplinar de Ensino, Pesquisa, Extensão e Cultura do Instituto de Aplicação Fernando Rodrigues da Silveira** (Cap – UERJ). Vol. 7, número 14, 2018.

KALEFF, A. M. HENRIQUES, A. S. REI, D. M. FIGUEREDO, L. G. **Desenvolvimento do Pensamento Geométrico – Modelo de Van Hiele**. Bolema, Rio Claro – SP, v. 9, n. 10, 1994.

LONGATO, D. F. OLIVEIRA, L. S. ENSINO E APRENDIZAGEM DA GEOMETRIA E A TEORIA DE VAN HIELE: VIA DE MÃO DUPLA PARA O DESENVOLVIMENTO DO PENSAMENTO GEOMÉTRICO. In: **Os desafios da escola pública paraense**

na perspectiva do professor PDE. Cadernos paraenses. Artigos - Versão online. Vol.1, 2016.

SILVA, S. R. da. GAYESKI, R. G. UMA EXPERIÊNCIA DE GEOMETRIA PLANA COM TECNOLOGIAS NO ENSINO BÁSICO: UM OLHAR A PARTIR DA TEORIA DE VAN HIELE. In: #Tear: **Revista de Educação Ciência e Tecnologia,** Canoas, v.7, número 1, 2018.

VAN DE WALLE, J. A. **Matemática no ensino fundamental**: formação de professores e aplicação em sala de aula. 6.ed. Porto Alegre: Artmed, 2009.

VILLIERS, M. de. Algumas reflexões sobre a Teoria de Van Hiele**.** In: **Educ. Matem. Pesq.**, São Paulo, v.12, número 3, p. 400-431, 2010.