



INSTITUTO FEDERAL
Paraíba
Campus Campina Grande

INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA DA PARAÍBA
CURSO DE ESPECIALIZAÇÃO EM ENSINO DE MATEMÁTICA

ANDRÉ MACEDO COSTA

APLICAÇÕES DA MATEMÁTICA AO GLOBO TERRESTRE

PICUÍ - PB
2021

ANDRÉ MACEDO COSTA

APLICAÇÕES DA MATEMÁTICA AO GLOBO TERRESTRE

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado no Curso de Especialização em Ensino de Matemática do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia da Paraíba (IFPB), como requisito parcial para obtenção do título de Especialista em Ensino de Matemática.

Orientador: Prof. Me. Clebson Huan de Freitas.

ANDRÉ MACEDO COSTA

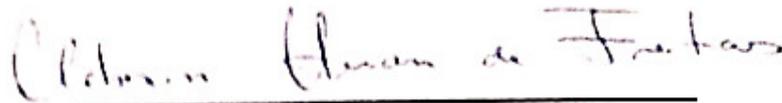
APLICAÇÕES DA MATEMÁTICA AO GLOBO TERRESTRE

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado no Curso de Especialização em Ensino de Matemática do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia da Paraíba (IFPB), como requisito parcial para obtenção do título de Especialista em Ensino de Matemática.

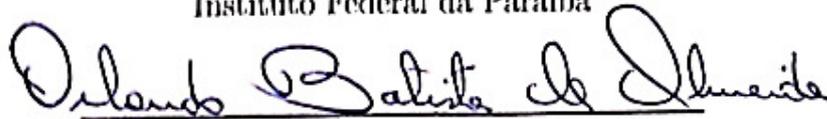
Orientador: Prof. Me. Clebson Huan de Freitas.

Aprovado em: 22/09/2021

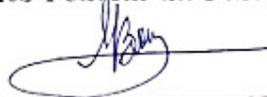
BANCA EXAMINADORA



Prof. Me. Clebson Huan de Freitas.
Instituto Federal da Paraíba



Prof. Me. Orlando Batista de Almeida.
Instituto Federal da Paraíba



Prof. Dr. Luciano Martins Barros
Universidade Federal de Campina Grande

Este trabalho é dedicado a minha família.

AGRADECIMENTOS

- Agradeço a meus pais Sandra e Edmílson, pelo apoio e auxílio durante toda a realização deste curso;
- Agradeço aos meus irmãos Ailton, Vanessa e Evandro por todo apoio;
- Aos meus amigos que fiz durante essa jornada, em especial a Anderson e Ivo colegas desde a graduação;
- Aos Professores do curso de especialização em Ensino de Matemática, em especial ao coordenador Luis Havelange;
- Ao orientador Prof. Me. Clebson Huan de Freitas por sua orientação, paciência e conselhos durante a elaboração deste trabalho;
- Aos professores da banca Orlando e Luciano, pelas suas sugestões que certamente contribuiram para melhoria da qualidade deste trabalho.
- A Deus pela saúde e proteção.

“Se você não consegue resolver um problema, existe uma maneira mais fácil de resolvê-lo: encontre-a...”
(George Polya)

RESUMO

O globo terrestre é uma representação geométrica do nosso planeta que possui alguns aspectos fundamentados em teorias matemáticas como, por exemplo, as coordenadas geográficas, os fusos horários e a variação da intensidade solar. O presente trabalho consiste em uma revisão bibliográfica de livros, artigos e monografias, cujo objetivo é caracterizar os conceitos motivados pela geometria do globo terrestre, com necessárias concepções teóricas prévias, exemplos detalhados e aplicações desse tema, além de sugestões didáticas para apresentação de cada tópico em sala de aula. Foram expostas as ideias de geometria plana e espacial utilizadas, com as devidas definições e resultados. Na sequência, tem-se algumas aplicações: formato da Terra, coordenadas geográficas, movimentos da Terra, fusos horários e ângulo de elevação do Sol e intensidade solar, contendo suas respectivas fundamentações teóricas, e apresentando problemas desafiadores e possibilidades didáticas em cada tópico, visando, assim, servir de base a professores da Educação Básica interessados pelo tema. Desse modo, o presente trabalho objetiva, também, enriquecer o currículo dos docentes e da etapa do Ensino Médio.

Palavras-chave: Cartografia. Coordenadas geográficas. Geometria espacial. Geometria plana. Intensidade solar.

ABSTRACT

The terrestrial globe is a geometric representation of our planet which has some fundamental aspects in mathematical theories, for instance, geographic coordinates, time zones, and variation of solar intensity. The present study consists of a bibliographic review of books, articles and monographs, whose purpose is to characterize the concepts motivated by the earth's geometry, with necessary prior theoretical conceptions, detailed examples and application of theme, as well as teaching suggestions for presentation of each topic in the classroom. The ideas of plane and spatial geometry used were presented, with appropriate definitions and results. Following, it has some applications: shape of the Earth, geographic coordinates, Earth's movement, time zones, elevation angle of the sun and solar intensity, containing their respective theoretical foundation, and presenting challenging problems and teaching possibilities on every topic, thus aiming to serve as a basis for Basic Education teacher concerned with the subject. Therefore, the present study also aims to enrich the curriculum of teachers and the high school stage.

Keywords: Cartography. Geographic coordinates. Solar intensity. Spatial geometry. Plane geometry.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1 – Ângulo \widehat{AOB}	15
Figura 2 – Ângulo suplementar a \widehat{AOB}	16
Figura 3 – Retas distintas com intersecção no ponto O	16
Figura 4 – Bissetriz de um ângulo qualquer	17
Figura 5 – ângulos formados por s, s' e r	18
Figura 6 – Ângulos alternos internos de medida α e β	19
Figura 7 – Retas paralelas cortadas por uma transversal	19
Figura 8 – Soma dos ângulos internos de um triângulo	20
Figura 9 – Soma dos ângulos internos de um quadrilátero convexo	20
Figura 10 – Triângulos retângulos semelhantes	21
Figura 11 – Círculo de centro A e reta tangente s	23
Figura 12 – Triângulo retângulo APT	23
Figura 13 – Secção plana de uma esfera	25
Figura 14 – Elementos de uma esfera	26
Figura 15 – Esboço de um diedro	26
Figura 16 – Fuso esférico	27
Figura 17 – Elipse sobre um plano	27
Figura 18 – Elipsoide gerado pela revolução da elipse em torno de um eixo	28
Figura 19 – Formato elíptico da Terra	29
Figura 20 – Processo usado por Erástostenes para determinar o raio da Terra	30
Figura 21 – Linha do equador	32
Figura 22 – Cálculo da latitude	32
Figura 23 – Cálculo da longitude	33
Figura 24 – Latitude θ e longitude ϕ do ponto P	33
Figura 25 – Arco de meridiano que liga os dois pontos	34
Figura 26 – Posicionamento do satélite	35
Figura 27 – Caso com ângulo β menor que 90°	35
Figura 28 – Caso com ângulos iguais a 90°	36
Figura 29 – Relação do raio em um paralelo de latitude θ	36
Figura 30 – Ilustração dia e noite no movimento de rotação	38
Figura 31 – Ilustração da inclinação do eixo de rotação em relação ao plano da eclíptica	38
Figura 32 – Ilustração estações do ano no hemisfério sul	39
Figura 33 – Solstício de 21 de dezembro	40
Figura 34 – Reta imaginária entre o centro da Terra e o centro do sol	40
Figura 35 – Fusos horários ao redor do mundo	41

Figura 36 – Ângulo de elevação do Sol	43
Figura 37 – Lanterna iluminando papel A	44
Figura 38 – Projeção da sombra de B em A	44
Figura 39 – Papel C paralelo a A	45
Figura 40 – Diagrama de iluminação	45
Figura 41 – Representação do ângulo de elevação solar nos equinócios	46
Figura 42 – Representação do ângulo β no solstício de 21 de Junho	47
Figura 43 – Ponto P com latitude maior que $23,45^\circ$	47
Figura 44 – Ponto P no hemisfério norte com latitude menor que $23,45^\circ$	48
Figura 45 – Ponto P no hemisfério sul com latitude 0° e $66,55^\circ$	48

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Tabela com pesquisadores e valores encontrados para os semi-eixos a e b	29
Tabela 2 – Locais com coordenadas	50
Tabela 3 – Instalação de painéis solares	50

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	13
2	RESULTADOS PRELIMINARES	15
2.1	Geometria plana	15
2.1.1	Trigonometria no triângulo retângulo	15
2.1.2	Posição relativa entre retas e círculos	22
2.1.3	Comprimento de arcos de circunferência	23
2.2	Geometria Espacial	24
3	APLICAÇÕES E POSSÍVEIS CAMINHOS PARA O ENSINO	29
3.1	Forma da Terra	29
3.2	Coordenadas geográficas	31
3.3	Os movimentos de rotação e translação	37
3.4	Os fusos horários	41
3.5	Ângulo de elevação do Sol e intensidade solar	43
3.5.1	Ângulo de elevação do Sol nos equinócios	49
3.5.2	Ângulo de elevação do Sol nos solstícios	49
4	CONSIDERAÇÕES FINAIS	52
5	REFERÊNCIAS	53

1 INTRODUÇÃO

Se faz necessário a todos os estudantes conhecerem sobre o nosso planeta e seus elementos, e normalmente estes conceitos fazem parte na disciplina de geografia no ensino básico, estes elementos muitas vezes são expostos sem a devida relação com outras áreas do conhecimento, como matemática, física e química. Alguns dos pontos estudados, como por exemplo as coordenadas geográficas, fuso-horários e solstícios, possuem fortes relações com a matemática, em especial com elementos da geometria plana e espacial, que fazem parte do currículo da etapa do ensino médio, conforme (BRASIL, 2017).

Pode-se observar em algumas livros didáticos do ensino médio, a exemplo de (DANTE, 2016) e (IEZZI et al, 2016) que na apresentação sobre o ensino de geometrias planas e espaciais, a sua estreita relação com a geometria do globo terrestre é pouco abordada e muitas vezes acontece de forma superficial em exercícios do tema, favorecendo um ensino fragmentado do tema e por vezes pouco atrativo.

Conforme defendem (GEHARD e ROCHA FILHO, 2012) a fragmentação do ensino pode ser danosa em alguns aspectos, dificultando o estabelecimento de uma finalidade para tais conceitos. Nesse contexto, uma opção interessante é apresentar de uma forma intrínseca e direta os conceitos relativos ao globo terrestre, sob a ótica matemática que rege tais caracterizações.

Especificamente, a geometria do planeta Terra e seus movimentos, geram problemas e perguntas que podem ser respondidas através da matemática, como por exemplo: qual a angulação e solar a cada dia do ano? Como uma pessoa se localiza no planeta de forma eficiente, e como medimos as coordenadas geográficas? Porque existe um padrão na variação das estações do ano? Porque os fuso horários mudam a cada lugar do mundo? Qual a intensidade solar em um ponto do planeta em determinada data do ano? Através da matemática, é possível determinar as respostas para os questionamentos supostos acima, e diversos outros.

Conforme podemos ver em (ALVES, 2009), os elementos citados acima tem sua origem nos conceitos matemáticos da Geometria plana e Espacial, a exemplo de trigonometria no triângulo retângulo, posição relativa entre retas e círculos, Comprimentos de arcos, elementos de uma esfera e posição relativa entre esferas e planos.

Além da direta relação entre os conceitos situados acima, a exploração da geometria do globo terrestre, pode ser uma porta para inserção da geometria não euclidiana na Educação Básica, uma vez que, sob uma esfera a distância entre dois pontos passa a ser um arco, trazendo ainda outros elementos como triângulos esféricos e as razões trigonométricas sob esta ótica, como apresenta (BRITO, 2017) em seu trabalho.

Podemos elencar também outras pesquisas sobre o tema, levando em consideração sua interdisciplinaridade e multidisciplinaridade, propondo atividades e sequências didáticas

para seu uso na Educação Básica, como (DUELI, 2013; HEIM, 2013; SANTANA, 2013 e SOUZA, 2019).

Nesse contexto, o objetivo geral deste trabalho é a exposição dos elementos da geometria do globo terrestre, com necessários conteúdos prévios, exemplos detalhados com aplicações do tema e sugestões didáticas para apresentação de cada tópico.

Especificamente, objetiva-se, também, apresentar com precisão e detalhes os conceitos matemáticos necessários, além de buscar proporcionar um material que possa servir de consulta e aprofundamento a professores da Educação Básica.

Dessa forma, o trabalho organiza-se da seguinte forma; no segundo capítulo temos os conhecimentos prévios de geometria plana e espacial, com os resultados e definições necessárias.

O capítulo seguinte está dividido em 5 seções, abordando a forma da Terra, as coordenadas geográficas, os movimentos de rotação e translação, os fuso horários e o ângulo de elevação do Sol e a intensidade solar. Em cada seção buscou-se apresentar com clareza o tema, além de solucionar problemas desafiadores e analisar sua inserção na educação básica. Por fim temos as considerações finais e as referências deste trabalho.

2 RESULTADOS PRELIMINARES

Neste capítulo, iremos expor os conteúdos necessários para o desenvolvimento das aplicações do capítulo seguinte e das discussões didáticas, por se tratar de uma proposta com conteúdos do Ensino Médio (BRASIL, 2017) as teorias aqui desenvolvidas podem servir de aprofundamento a professores da Educação Básica.

2.1 GEOMETRIA PLANA

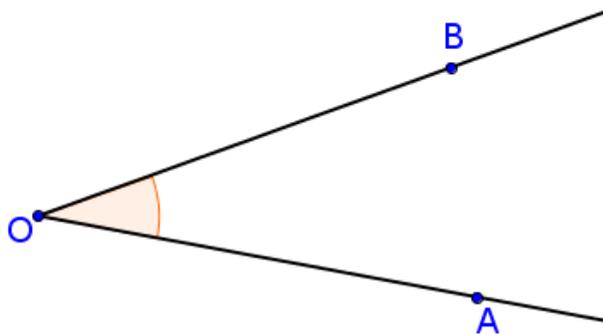
Nesta seção, serão apresentados os principais resultados e definições da geometria plana que são usados neste trabalho, são admitidos também axiomas e algumas definições elementares. Os resultados aqui presentes foram obtidos de (BARBOSA, 1994; CARMO et al, 1992; DOLCE e POMPEO, 1997a; LIMA, et al 1998).

2.1.1 Trigonometria no triângulo retângulo

Apresentaremos a seguir a definição de ângulo, a sua construção também pode ser exposta de maneira axiomática, o que não é o nosso objetivo, o leitor interessado pode consultar (BARBOSA, 1994).

Definição 2.1.1. *O ângulo é a figura formada por duas semirretas de mesma origem. As semirretas são os lados do ângulo e a origem é o seu vértice.*

Figura 1 – Ângulo $A\hat{O}B$



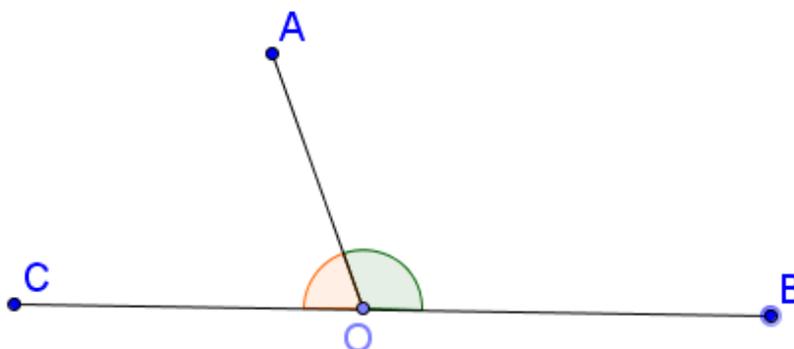
Fonte: Próprio autor com o software Geogebra.

Sendo O o vértice e A e B pontos quaisquer, um em cada lado do ângulo, podemos denotar o ângulo por $A\hat{O}B$ ou $B\hat{O}A$, sempre que não houver confusão na notação usaremos a letra do vértice ao nos referirmos ao ângulo, na forma \hat{O} . Ao nos referirmos a medida de um ângulo $A\hat{O}B$, denotaremos por $med(A\hat{O}B)$.

Os ângulos são normalmente medido em graus, e muitas vezes a parte decimal dos ângulos é medido em minutos e segundos, seguindo um sistema de base 60 nessa conversão. O instrumento utilizado para realizar medidas de ângulos é o transferidor, o leitor interessado por consultar (CARMO et al, 1992) para entender um pouco melhor como se dá sua construção e finalidade.

Definição 2.1.2. *Dois ângulos são ditos suplementares se a soma de suas medidas é 180° . O suplemento de um ângulo é o ângulo adjacente ao ângulo dado obtido pelo prolongamento de um dos seus lados.*

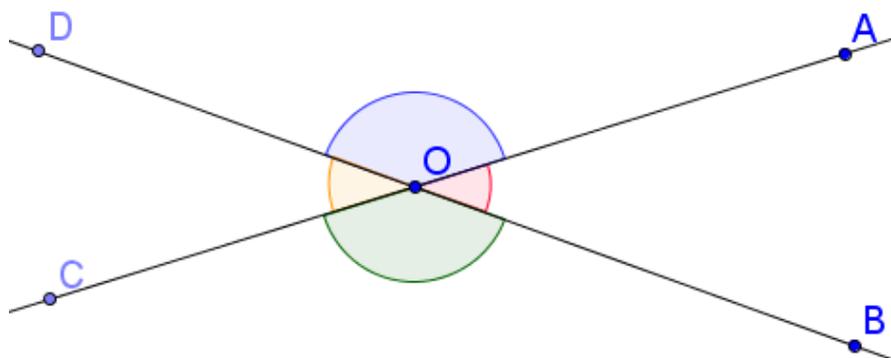
Figura 2 – Ângulo suplementar a $\widehat{A\hat{O}B}$



Fonte: Próprio autor com o software Geogebra.

Quando duas retas distintas se cruzam em um único ponto, são formados quatro ângulos, como podemos ver na Figura 3. Considerando O o ponto de intersecção das retas e A, B, C e D pontos dispostos como na Figura 3.

Figura 3 – Retas distintas com intersecção no ponto O



Fonte: Próprio autor com o software Geogebra.

Os ângulos $\widehat{A\hat{O}B}$ e $\widehat{C\hat{O}D}$ são opostos pelo vértice, assim como, $\widehat{A\hat{O}D}$ e $\widehat{B\hat{O}C}$ também são.

Definição 2.1.3. *Dois ângulos são ditos congruentes quando possuem mesma medida.*

Proposição 2.1.1. *Os ângulos opostos pelo vértice são congruentes.*

Demonstração: Os ângulos \widehat{AOB} e \widehat{COD} são opostos pelo vértice, e ambos tem como suplementar o ângulo \widehat{AOD} . Desta forma, $med(\widehat{AOB}) + med(\widehat{AOD}) = 180^\circ$ e $med(\widehat{COD}) + med(\widehat{AOD}) = 180^\circ$, assim:

$$med(\widehat{AOB}) = 180^\circ - med(\widehat{AOD}) = med(\widehat{COD})$$

e portanto, os ângulos opostos pelo vértice são congruentes. ■

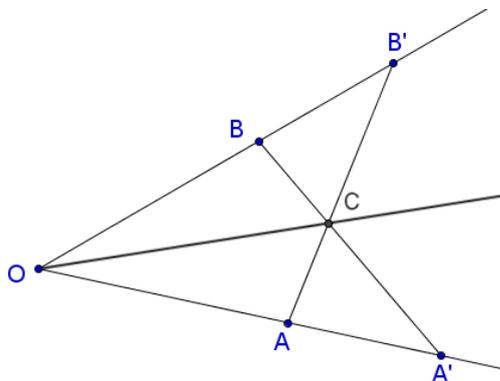
Definição 2.1.4. *A semirreta OC interna ao ângulo \widehat{AOB} é bissetriz do ângulo \widehat{AOB} se, e somente se,*

$$\widehat{AOC} \equiv \widehat{BOC}.$$

Proposição 2.1.2. *Dado qualquer ângulo AOB existe uma semirreta OC bissetriz desse ângulo.*

Demonstração: Sob as semirretas do ângulo \widehat{AOB} , marque os pontos, A' e B' como na Figura 4, tais que $\overline{OA} \equiv \overline{OB}$ e $\overline{OA'} \equiv \overline{OB'}$, com $\overline{OA'} > \overline{OA}$ e $\overline{OB'} > \overline{OB}$. Seja C o

Figura 4 – Bissetriz de um ângulo qualquer



Fonte: Próprio autor com o software Geogebra.

ponto de intersecção de $\overline{AB'}$ com $\overline{A'B}$ e consideremos a semirreta OC de origem O .

Vejamos a sequência de congruências os triângulos

$$\triangle AOB' \equiv \triangle AOB'$$

são congruentes pelo caso lado, ângulo, lado e assim segue que os ângulos, $\widehat{OBA'}$ e $\widehat{OAB'}$ são congruentes, assim como, $\widehat{CBB'}$ e $\widehat{CAA'}$, e como $\overline{AA'} = \overline{BB'}$, e assim pelo caso de congruência ângulo, lado, ângulo, segue que $\triangle AA'C \equiv \triangle BB'C$, de onde segue que:

$$\overline{A'C} = \overline{B'C}.$$

Finalmente, pelo caso lado, ângulo, lado, tem-se que

$$\triangle OA'C \equiv \triangle OB'C$$

e portanto, $A\hat{O}C \equiv B\hat{O}C$ e assim existe a bissetriz de qualquer ângulo $A\hat{O}B$. ■

Um dos ângulos mais recorrentes no nosso cotidiano é o ângulo de 90° , chamado de ângulo reto, quando duas retas formam esse ângulo entre si, dizemos que essas retas(ou segmentos) são perpendiculares. Vejamos o teorema a seguir:

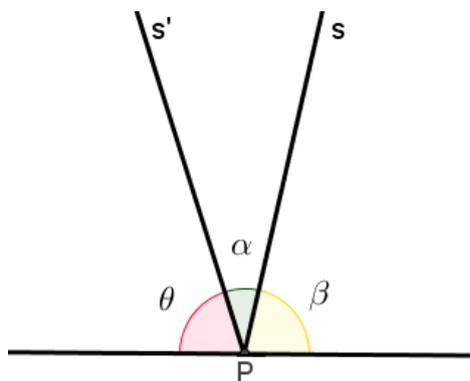
Teorema 2.1.3. *Por qualquer ponto de uma reta passa uma única perpendicular a esta reta.*

Demonstração: Iremos provar a existência dessa reta e depois a unicidade.

Para mostrar a existência, vamos considerar uma reta r dada e um ponto P sobre ela. As duas semirretas determinadas por P formam um ângulo de 180° , dentre todas as retas com origem em P , existira uma reta que será a bissetriz do ângulo pela proposição [2.1.2](#), formando conseqüentemente um ângulo de 90° com r , ou seja, sendo perpendicular a ela.

Para provar a sua unicidade, suponha a existência de duas retas s e s' perpendiculares a r passando por P . Assim, as semirretas da intersecção entre s e s' formam um ângulo α e essas retas formam ângulos, β e θ com a reta r , como vemos na Figura [5](#):

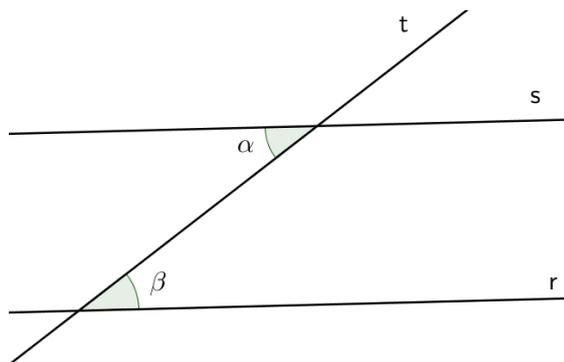
Figura 5 – ângulos formados por s , s' e r



Fonte: Próprio autor com o software Geogebra.

Como por hipótese s e s' são perpendiculares a r , então $\beta = \theta = 90^\circ$, e como, $\beta + \alpha + \theta = 180^\circ \implies \alpha = 0^\circ$, e portanto s e s' coincidem. ■

Definição 2.1.5. *Dada duas retas paralelas r e s cortadas por uma reta transversal t , os ângulos que estão em semiplanos distintos delimitados por t e na região delimitada entre r e s são ditos ângulos alternos internos.*

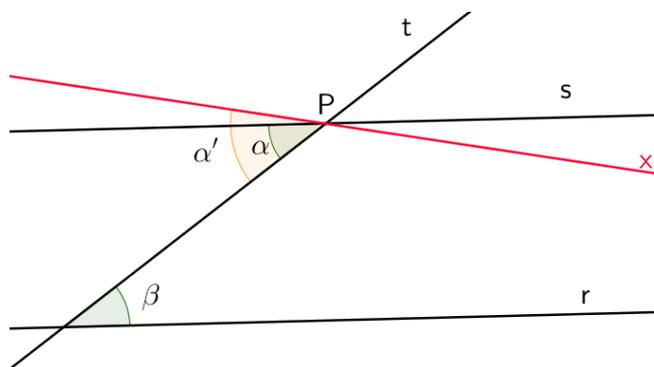
Figura 6 – Ângulos alternos internos de medida α e β 

Fonte: Próprio autor com o softwate Geogebra

Proposição 2.1.4. *Se duas retas paralelas distintas interceptam uma transversal, então os ângulos alternos internos são congruentes.*

Demonstração: Considere s e r retas paralelas, cortadas pela reta transversal t , nos pontos P e Q respectivamente, como vê-se na Figura 7. Seja α e β a medida dos ângulos alternos internos. Suponha que $\alpha \neq \beta$ então, deve existir uma reta x passando por P , formando um ângulo α' com s , tal que $\beta = \alpha'$.

Figura 7 – Retas paralelas cortadas por uma transversal



Fonte: Próprio autor com o softwate Geogebra

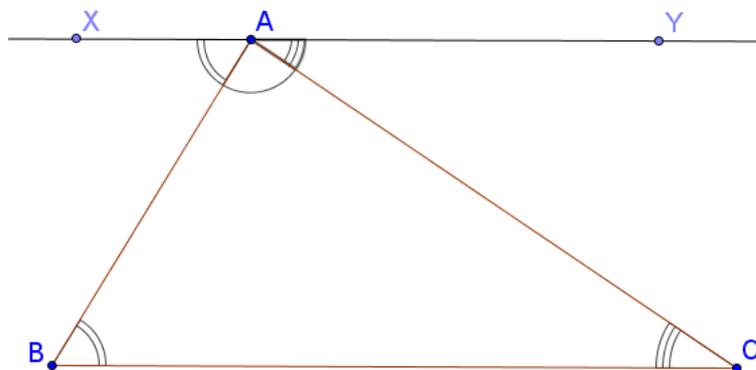
Portanto, teríamos $x \parallel r$. Ou seja, por P teríamos duas retas distintas x e s paralelas a r , o que é um absurdo. Logo, $\alpha = \beta$. ■

Usando a noção de ângulos opostos pelo vértice e de ângulos complementares, pode-se facilmente deduzir mais igualdades entre os ângulos formados pelas retas r , s e t .

Proposição 2.1.5. *A soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo é 180° .*

Demonstração: Seja ABC um triângulo qualquer e considere uma reta r passando por A paralela a \overline{BC} . Marque nessa reta os pontos X e Y como na Figura 8.

Figura 8 – Soma dos ângulos internos de um triângulo



Fonte: Próprio autor com o softwate geogebra.

Pela proposição 2.1.4 temos que, $med(\widehat{B}) = med(\widehat{BAX})$ e $med(\widehat{C}) = med(\widehat{CA Y})$, concluímos que:

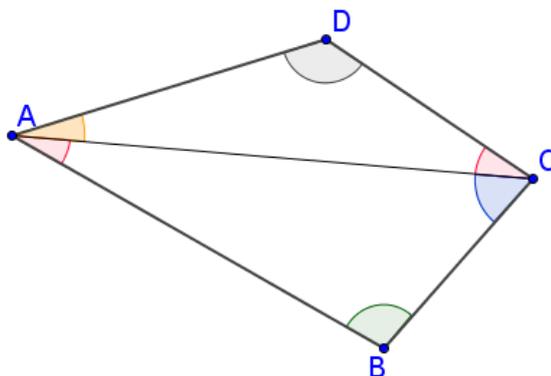
$$med(\widehat{A}) + med(\widehat{BAX}) + med(\widehat{CA Y}) = med(\widehat{A}) + med(\widehat{B}) + med(\widehat{C}) = 180^\circ.$$

■

Definição 2.1.6. Um conjunto de pontos Σ de um plano é convexo (ou é uma região convexa) se, e somente se, dois pontos quaisquer A e B de Σ são extremidades de um segmento \overline{AB} contido em Σ , ou se Σ é unitário, ou se Σ é vazio.

Proposição 2.1.6. A soma das medidas dos ângulos internos de um quadrilátero convexo é 360° .

Figura 9 – Soma dos ângulos internos de um quadrilátero convexo



Fonte: Próprio autor com o softwate geogebra.

Demonstração: Considere um quadrilátero convexo $ABCD$ qualquer, a diagonal \overline{AC} divide-o em dois triângulos ABC e ACD , de onde seguem as igualdades:

$$(I) \quad med(\widehat{DAC}) + med(\widehat{ACD}) + med(\widehat{D}) = 180^\circ$$

$$(II) \text{ med}(\widehat{C\hat{A}B}) + \text{med}(\widehat{B\hat{C}A}) + \text{med}(\widehat{B}) = 180^\circ$$

Os ângulos internos \widehat{B} e \widehat{D} coincidem com os ângulos internos do quadrilátero, e sabe-se que $\text{med}(\widehat{D\hat{A}C}) + \text{med}(\widehat{B\hat{A}C}) = \text{med}(\widehat{A})$ e $\text{med}(\widehat{A\hat{C}D}) + \text{med}(\widehat{A\hat{C}B}) = \text{med}(\widehat{C})$, portanto, das igualdades (I) e (II) segue que,

$$\text{med}(\widehat{A}) + \text{med}(\widehat{B}) + \text{med}(\widehat{C}) + \text{med}(\widehat{D}) = 360^\circ.$$

■

Antes de definirmos as chamadas proporções trigonométricas, veremos a definição de triângulos semelhantes.

Definição 2.1.7. *Dois lados são homólogos quando, cada um está em um triângulo que possui ângulos internos congruentes, e são opostos a ângulos de mesma medida.*

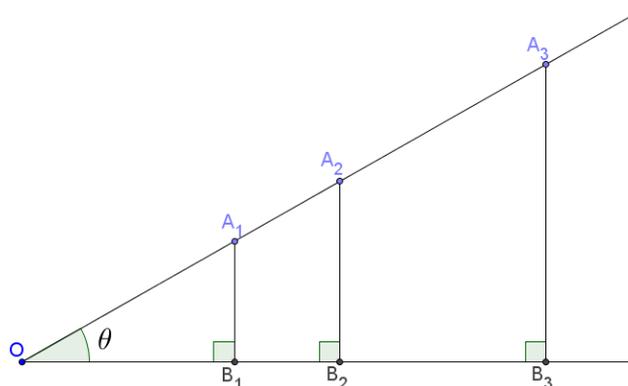
Definição 2.1.8. *Dois triângulos são semelhantes, se e somente se, possuem os três ângulos ordenadamente congruentes e os lados homólogos proporcionais.*

Dois lados homólogos são tais que, cada um está em um triângulo, e são opostos a ângulos congruentes.

A seguir vamos definir as proporções trigonométricas, seno, cosseno e tangente para um ângulo agudo θ . Considere então um ângulo $\widehat{A\hat{O}B} = \theta$, com $0^\circ < \theta < 90^\circ$ e tomando os pontos A_1, A_2, A_3, \dots , na semirreta OA , considere segmentos A_1B_1, A_2B_2, A_3B_3 etc perpendiculares a semirreta OB sendo B_1, B_2, B_3, \dots pontos desta.

Dessa forma, os triângulos, $OA_1B_1, OA_2B_2, OA_3B_3$ etc são semelhantes por terem os mesmos ângulos internos, como podemos ver na Figura 10:

Figura 10 – Triângulos retângulos semelhantes



Fonte: Próprio autor com o software Geogebra.

Da semelhança obtemos a seguinte relação:

$$\frac{\overline{A_1B_1}}{\overline{OA_1}} = \frac{\overline{A_2B_2}}{\overline{OA_2}} = \frac{\overline{A_3B_3}}{\overline{OA_3}} = \dots$$

A relação acima depende apenas do ângulo θ e não dos comprimentos, uma vez que a razão de semelhança garante a constância. A esta proporção de θ assim construída, é atribuído o nome de seno de θ , e definida para $0^\circ < \theta < 90^\circ$, como segue:

$$\frac{\overline{A_1B_1}}{\overline{OA_1}} = \text{sen } \theta$$

Desta razão, temos uma boa vantagem que podemos utilizar um triângulo menor com mesmo ângulo, encontrar o valor do seno e assim resolver problemas relacionados com triângulos maiores, que podem possuir distâncias inacessíveis, como por exemplo o cálculo do raio do planeta Terra.

Observando a [Figura 10](#) podemos determinar as seguintes relações:

$$\frac{\overline{OB_1}}{\overline{OA_1}} = \frac{\overline{OB_2}}{\overline{OA_2}} = \frac{\overline{OB_3}}{\overline{OA_3}} = \dots$$

$$\frac{\overline{A_1B_1}}{\overline{OB_1}} = \frac{\overline{A_2B_2}}{\overline{OB_2}} = \frac{\overline{A_3B_3}}{\overline{OB_3}} = \dots$$

Da mesma forma, estas relações dependem somente de θ . Definem-se assim as proporções, para $0^\circ < \theta < 90^\circ$,

$$\cos \theta = \frac{\overline{OB_1}}{\overline{OA_1}}, \text{tg } \theta = \frac{\overline{A_1B_1}}{\overline{OB_1}}$$

chamamos de *coosseno* de θ e *tangente* de θ , respectivamente.

Observando as relações, podemos identificar que $\text{tg } \theta = \frac{\text{sen } \theta}{\cos \theta}$, além disso, as funções trigonométricas possuem extensão sobre todos os valores de θ , levando em consideração sempre que a $\text{tg } \theta$ só pode ser definida para os valores que $\cos \theta \neq 0$.

2.1.2 Posição relativa entre retas e círculos

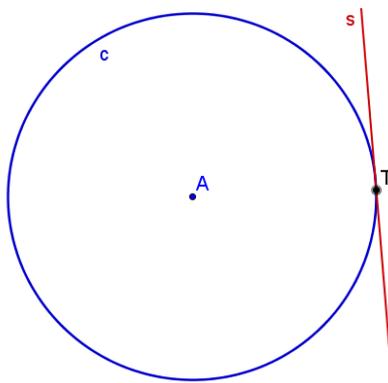
Considerando a noção de reta axiomática, e utilizando a definição de círculo dada por (BARBOSA, 1994)

Definição 2.1.9. *Um círculo centrado em um ponto A , com raio $r > 0$, é o conjunto dos pontos do plano que estão a uma distância menor do que ou igual a r do ponto A .*

Dado um ponto P qualquer, cuja distância ao ponto A é menor que r , dizemos que esse ponto é interno ao círculo. Em alguns momentos, ao nos referirmos apenas ao conjunto de pontos P cuja distância $d_{PA} = r$ utilizaremos a nomenclatura de circunferência.

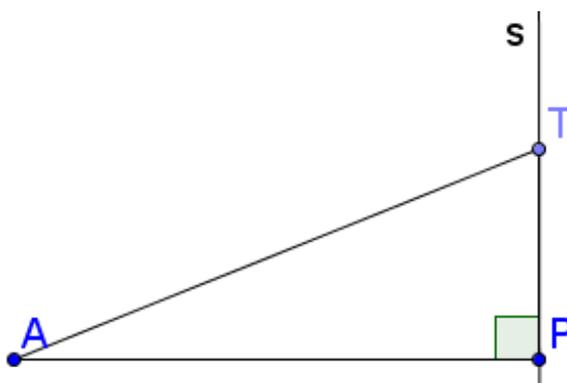
Proposição 2.1.7. *Se uma reta é tangente a um círculo, então ela é perpendicular ao raio que liga o centro ao ponto de tangência.*

Demonstração: Considere um círculo de centro A e uma reta s tangente a ele. Seja T o ponto de tangência.

Figura 11 – Círculo de centro A e reta tangente s 

Fonte: Próprio autor com o software Geogebra.

Seja então P o pé da perpendicular baixada do ponto A à reta s . Suponha que P e T são pontos distintos. Dessa forma, o segmento \overline{AT} é a hipotenusa do triângulo retângulo APT : Portanto $\overline{AP} < \overline{AT}$. Como AT é um raio, então P é um ponto interno ao círculo, o que contraria a hipótese de tangência da reta.

Figura 12 – Triângulo retângulo APT 

Fonte: Próprio autor com o software Geogebra.

Logo, P e T coincidem, e assim a reta s é perpendicular ao raio no ponto de tangência. ■

Da proposição [2.1.7](#) pode-se deduzir que, dado uma reta s que toca um ponto da circunferência, mas, não forma um ângulo de 90° com o raio nesse ponto, então essa reta não é tangente, sendo portanto secante, tocando a circunferência em mais de um ponto, essa argumentação será usada no Exemplo [3.2.1](#).

2.1.3 Comprimento de arcos de circunferência

Dado um círculo de centro A e raio $r > 0$, tem-se os seguintes elementos.

Definição 2.1.10. *A uma corda que passa pelo centro do círculo, e tem medida igual ao dobro do raio, damos o nome de diâmetro.*

Definição 2.1.11. *O comprimento de uma circunferência é o perímetro de um círculo.*

A razão entre o comprimento da circunferência e o diâmetro, é igual a $\pi = 3,141592535\dots$, com isso o comprimento c de uma circunferência é dada por:

$$c = 2 \cdot \pi \cdot r$$

assim podemos definir o comprimento de um arco de circunferência.

Definição 2.1.12. *Seja uma circunferência de raio r . O comprimento de um arco de circunferência l é proporcional a sua medida do ângulo α .*

Utilizando α em graus temos, as seguintes razões equivalentes:

$$\frac{360^\circ}{\alpha} = \frac{2 \cdot \pi \cdot r}{l} \implies l = \frac{\pi \cdot r \cdot \alpha}{180^\circ}$$

por outro lado, ao considerarmos o ângulo α em radianos, temos as seguintes razões equivalentes:

$$\frac{2\pi rad}{\alpha rad} = \frac{2 \cdot \pi \cdot r}{l} \implies l = r \cdot \alpha$$

Uma dedução e apresentação mais detalhadas, sobre o comprimento de uma circunferência, e comprimentos de arcos pode ser observada em (DOLCE e POMPEO, 1997a). Na seção seguinte falaremos sobre a geometria espacial.

2.2 GEOMETRIA ESPACIAL

Assim como ponto e reta, o plano é considerado uma das noções primitivas da geometria que são adotadas sem definição (DOLCE e POMPEO, 1997b).

Nesse contexto, iremos analisar alguns aspectos sobre planos e esferas, que permeiam a construção de fuso horários e das coordenadas geográficas do globo terrestre, além disso, a trajetória dos planetas em torno do Sol é descrita sob um plano. As teorias presentes nesta seção, foram obtidas de (DOLCE e POMPEO, 1997b; REIS e SILVA, 1996; WINTERLE, 2014; LIMA et al, 1998).

Considerando então um ponto O e uma medida $r > 0$ qualquer, podemos definir uma esfera.

Definição 2.2.1. *Chama-se de esfera de centro O e raio r ao conjunto dos pontos P do espaço, tais que a distância \overline{OP} seja menor ou igual a r .*

Assim, atribui-se a superfície da esfera de centro O e raio r o conjunto dos pontos P do espaço, tais que a distância \overline{OP} é igual a r . Com isso temos as seguintes definições:

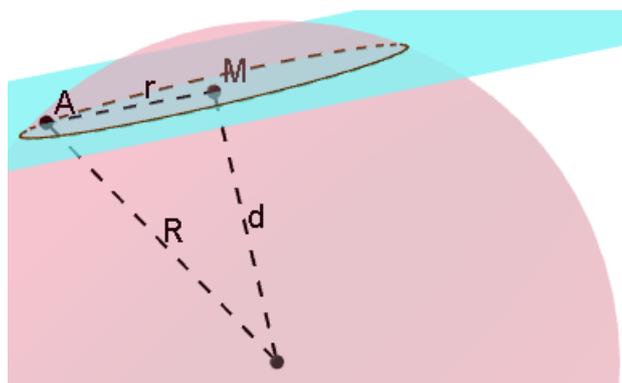
Definição 2.2.2. *Um plano que passa por um único ponto de uma esfera é denominado de plano tangente.*

Definição 2.2.3. Um plano que intersecta a superfície de uma esfera em mais de um ponto é denominado plano secante.

Definição 2.2.4. Uma seção plana de uma esfera é definida pela intersecção de um plano secante com a esfera.

Proposição 2.2.1. Toda secção plana é formada por um círculo.

Figura 13 – Secção plana de uma esfera



Fonte: Próprio autor com o software Geogebra.

Considere uma esfera de centro O e raio R . Seja α o plano secante e A um ponto qualquer da intersecção entre a superfície esférica e o plano. Seja M a projeção ortogonal do ponto O sobre o plano α , com segmento OM de medida d .

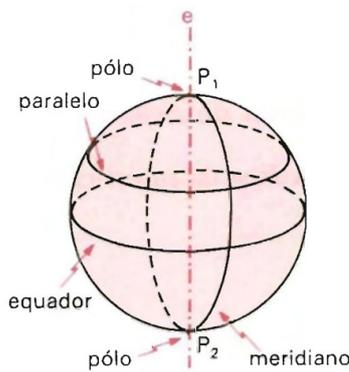
Seja r a distância de A até M , pelo teorema de Pitágoras, para qualquer ponto A vale que a distância $r = \sqrt{R^2 - d^2}$ e assim é um valor constante, e portanto, a secção plana é formada por um círculo. ■

Por vezes, vamos considerar a intersecção entre um plano e a superfície esférica, resultando em uma circunferência.

Podemos ainda, observar outros elementos em uma esfera, são eles polos, equador, paralelo e meridiano. Considerando a superfície de uma esfera de eixo e , tem-se que, os polos são as intersecções da superfície com o eixo, já o equador é a secção que gera a circunferência máxima, obtido pela intersecção de um plano perpendicular ao eixo e .

Já os paralelos e meridianos são secções geradas de formas distintas, os paralelos são obtidos a partir de planos paralelos ao equador. Já os meridianos são obtidos de planos que passam pelo eixo e . Podemos observar na Figura [14](#)

Figura 14 – Elementos de uma esfera

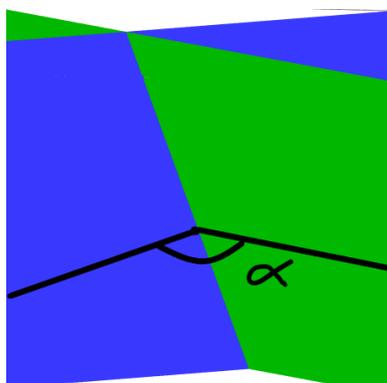


Fonte: (DOLCE e POMPEO, 1997b).

Pode-se definir também, os chamados fusos esféricos, para isso é importante que lembremos o que são diedros.

Definição 2.2.5. *Um diedro (ou setor diedral) é obtido da intersecção entre dois planos que formam um ângulo α entre si.*

Figura 15 – Esboço de um diedro

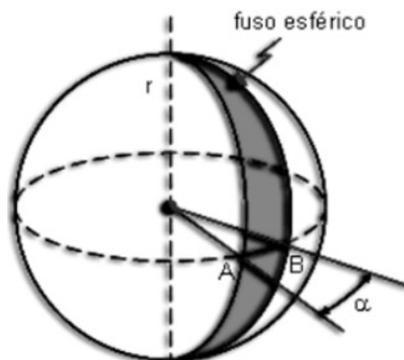


Fonte: Próprio autor com o software Geogebra.

Definição 2.2.6. *Um fuso esférico, é a intersecção da superfície esférica com um diedro cuja aresta contem um diâmetro, o ângulo α medido na secção equatorial caracteriza o fuso.*

O eixo e das esferas apresentado anteriormente, pode também ser chamado de eixo de rotação, uma vez que, dado um círculo qualquer no plano com o diâmetro sobre um eixo e , a revolução em torno do eixo forma uma esfera.

Figura 16 – Fuso esférico

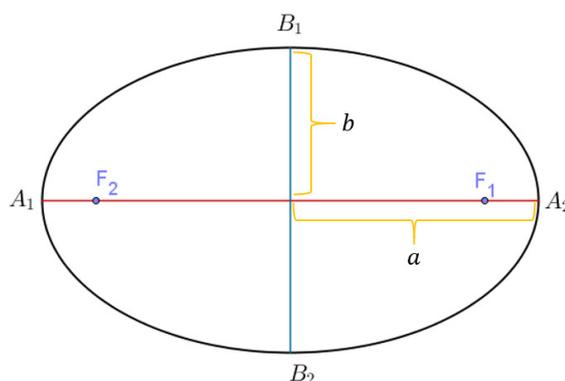


Fonte: (DOLCE e POMPEO, 1997b).

Definição 2.2.7. Dados dois pontos F e F_1 do plano e dado um valor r positivo, maior que a distância de F até F_1 , o conjunto dos pontos P do plano, tais que, a soma da sua distância para até F e até F_1 é constante igual a r , é chamado de elipse.

Os pontos F_1 e F_2 do plano são chamados de focos, o segmento de reta que passa pelos focos e intersecta a elipse nos pontos A_1 e A_2 é chamado de eixo maior, e a metade do comprimento desse segmento tem medida a . Já o semi-eixo menor de medida b , é a metade do segmento que passa pelo centro da elipse e é perpendicular ao eixo maior, intersectando a elipse nos pontos B_1 e B_2 , como vemos na Figura 17

Figura 17 – Elipse sobre um plano



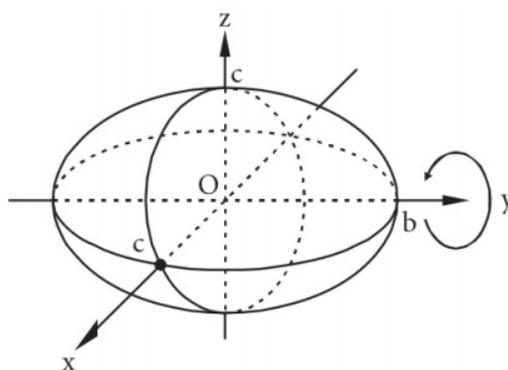
Fonte: Próprio autor com o software Geogebra.

Ao considerarmos a sua rotação sob um dos eixos y ou z da Figura 17, sua revolução gera um elipsoide, como vemos na Figura 18:

A rigor, toda circunferência é uma elipse, da mesma forma, toda esfera é um caso particular de elipsoide, que tem achatamento igual a 0, o achatamento é determinado pela seguinte expressão:

$$\epsilon = \frac{a - b}{b}$$

Figura 18 – Elipsoide gerado pela revolução da elipse em torno de um eixo



Fonte: (WINTERLE, 2014).

onde a e b , são respectivamente o semi-eixo maior e o semi-eixo menor da elipse que gera o elipsoide.

3 APLICAÇÕES E POSSÍVEIS CAMINHOS PARA O ENSINO

3.1 FORMA DA TERRA

Apesar de algumas ressalvas, a grande maioria da população mundial "admite" o formato do planeta Terra como esférico. Entretanto, a formulação de modelos que se referem a nosso planeta como formato esférico ou quase isso, são bem mais antigos, de acordo com (SILVEIRA, 2017) alguns matemáticos e personagens históricos já trabalhavam com essa hipótese, a exemplo de: Pitágoras (570 a.C.-495 a.C.), Aristóteles (384 a.C.-322 a.C.) e Eratóstenes (276a.C.-194 a.C.).

Além dos pesquisadores acima citados, pode-se pontuar as colaborações de inúmeros cientistas ao longo da história sobre o tema, o leitor interessado pode encontrar mais detalhes sobre esse processo em (SILVEIRA, 2017). Conforme afirmam (SILVEIRA, 2017) e (ALVES, 2009), a Terra apresenta na realidade um formato de elipsoide, entretanto com um achatamento $\epsilon = \frac{a - b}{b}$ muito próxima de 0, sendo a e b os semi-eixos do elipsoide.

Figura 19 – Formato elíptico da Terra



Fonte: (SILVEIRA, 2017).

Vejamos a seguir, na Tabela 1 as medidas dos semi-eixos encontrados por diversos pesquisadores ao longo da história:

Tabela 1 – Tabela com pesquisadores e valores encontrados para os semi-eixos a e b

	a (km)	b (km)	ϵ
Bessel (1841)	6377,397	6356,078	0,0033541
Clarke (1880)	6378,249	6356,515	0,0034191
Helmert (1906)	6378,200	6356,940	0,0033443
Hayford (1924)	6378,388	6356,911	0,0033785
Krassovski (1940)	6378,245	6356,863	0,0033636

Fonte: (ALVES, 2009)

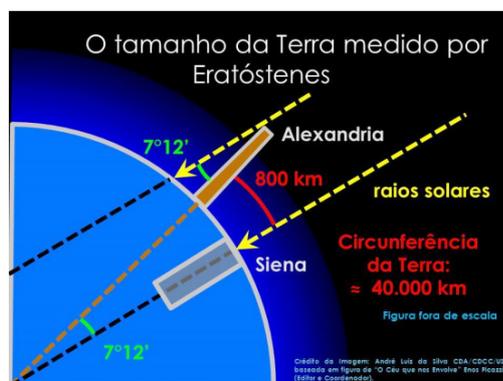
Observa-se na Tabela 1 que, o achatamento da Terra tem valores bem próximos de zero, permitindo que, seja admitido o formato esférico ao nosso planeta até por modelos teóricos. Nesse contexto surge um questionamento, qual o raio dessa esfera? A resposta a essa pergunta foi determinada por Eratóstenes, por volta do século III a. C..

Eratóstenes nasceu em Cirene, território que atualmente pertence a Líbia. De posse dos conhecimentos matemáticos da sua época, ele procedeu da seguinte forma para, determinar a circunferência terrestre e consequentemente o raio.

1. Imaginariamente dividiu a Terra ao meio e a separou em frações iguais;
2. Conhecendo a quantidade total de frações iguais se faz necessário conhecer apenas o comprimento de uma dessas frações.

De acordo com SILVA (2017) e ALVES (2009), dos conhecimento da biblioteca de Alexandria, Eratóstenes sabia que em determinada data na cidade de Siena localizada a aproximadamente 800 km ao sul de Alexandria, ao meio dia, o Sol incidiria exatamente na vertical dentro de um poço, sem projetar nenhuma sombra.

Figura 20 – Processo usado por Eratóstenes para determinar o raio da Terra



Fonte: (SILVA, 2017)

Admitindo que os raios solares incidem paralelamente sobre a superfície terrestre, ele calculou usando a projeção de uma sombra o ângulo de $7^{\circ}12'$ de incidência em Alexandria, e sabia que o comprimento desse arco era de 800 quilômetros.

Em seguida, dividiu 360 por 7,2, tendo como resultado 50, ou seja, a Terra por completo tem 50 frações com comprimento de 800 km, tendo como comprimento total 40000 km. Afim de determinar o raio, basta lembrarmos que o comprimento da circunferência é $2 \cdot \pi \cdot r$, assim obtemos aproximadamente $r = 6366$ metros.

De acordo com ÁVILA (2010), a medição atual do comprimento da circunferência terrestre é de 39936 km e raio de 6378 km no equador, o que mostra que o erro na medida feita por Eratóstenes é menor que 2% em relação as medidas atuais.

A discussão sobre o formato geral do nosso planeta como um elipsoide, ao invés de uma esfera, pode ser inserido como aplicação de conceitos presentes em disciplinas como

Geometria Analítica e Cálculo Diferencial no Ensino Superior e Geometria Espacial no Ensino Médio, onde pode-se propor como atividade investigativa realizar cálculos de volume, área superficial e comprimentos de arcos considerando as geometrias de um elipsoide e de uma esfera, como por exemplo no caso da Terra, e assim avaliar os erros encontrados.

Em um âmbito mais geral, a análise dos modelos da forma terrestre surge como conceito importante na formação de professores da área de astronomia como apresenta (FERREIRA, 2013).

Com o objetivo da inserção desse tema na educação básica, o ensaio do cálculo do raio terrestre e do comprimento da circunferência realizado por Erastóstenes, inclusive com variação de unidades de medida pode ser uma alternativa de utilização em suas aulas por professores do ensino médio.

Levando em consideração a forma do planeta Terra, pode-se destacar a sequência didática proposta por CONCEIÇÃO (2018), em que são propostas atividades de maneira gradual, nas quais são introduzidos aspectos da geometria Riemanniana no ensino fundamental e médio, a exemplo do fato que a menor distância entre dois pontos sobre a superfície terrestre é necessariamente um arco e não uma reta, surgindo como alternativa pedagógica no ensino de comprimento de arcos.

3.2 COORDENADAS GEOGRÁFICAS

Tomando o globo terrestre, estabelecemos com precisão e unicidade a nossa posição através das chamadas coordenadas geográficas, a qualquer momento, por exemplo, podemos verificar através do celular as nossas coordenadas no planeta.

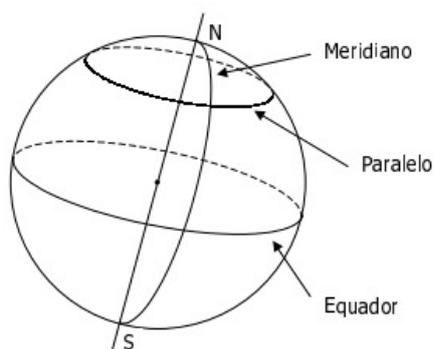
As localizações sobre o planeta Terra tomam como base os chamados paralelos e meridianos, vamos a seguir apresentar sua construção. Considere para tanto a intersecção de um plano perpendicular ao eixo polar passando pelo centro da Terra, temos assim uma circunferência máxima que recebe o nome de linha do Equador conforme a Figura 21. Em seguida são traçadas os demais paralelos, que são obtidos através da intersecção de planos paralelos ao plano que demarca a linha imaginária do equador.

Assim traçados os paralelos, alguns recebem nomes especiais que são: a linha o Equador, o Trópico de Câncer, o Trópico de Capricórnio, o Círculo Polar Ártico e o círculo Polar Antártico (IBGE, 1998).

De maneira semelhante, constroem-se os meridianos que são arcos que ligam o polo norte ao polo sul sobre a esfera terrestre, e que estão contidos em planos que passam pelo eixo polar do planeta Terra. O mais famoso dos meridianos é o meridiano de Greenwich, que serve como referência para divisão do planeta na parte oriental e ocidental.

Construídas todas as linhas imaginárias que são os meridianos e paralelos, torna-se possível localizar de maneira única todos os lugares do nosso planeta através de coordenadas. Essas coordenadas são chamadas de latitude e longitude e são determinadas em

Figura 21 – Linha do equador

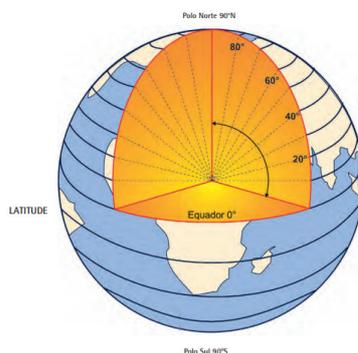


Fonte: (ALVES, 2009)

graus, utilizando a forma de horas, minutos e segundos.

Para determinar a latitude, considera-se o ângulo entre o plano que contém a linha do equador e a reta geratriz que determina o paralelo, como vemos na Figura 22, assim a latitude varia entre 0 e 90° e é medida a sul e a norte da linha do equador.

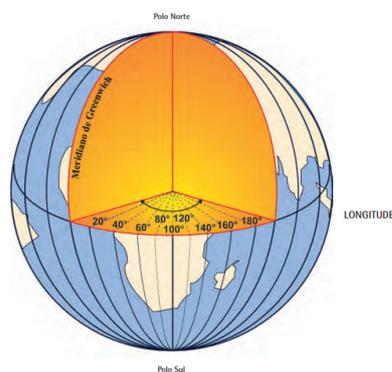
Figura 22 – Cálculo da latitude



Fonte: (IBGE, 1998).

Já a longitude é medida com relação ao meridiano de Greenwich e varia entre 0 e 180° , conforme observa-se na Figura 23.

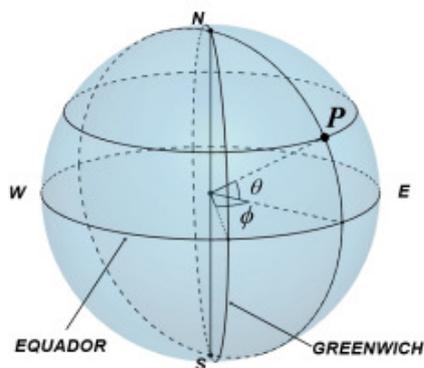
Figura 23 – Cálculo da longitude



Fonte: (IBGE, 1998).

Considerando então um ponto P qualquer sob a superfície terrestre ele será localizado por um par ordenado (θ, ϕ) , em que de acordo com (BRITO, 2018) são definidos como:

- A coordenada θ determina a latitude do ponto P , é a medida do arco de meridiano compreendido entre o equador e o paralelo que passa por P . As medições vão de 0° a 90° para norte (N) e de 0° a 90° para sul (S), tendo como referência a linha do equador.
- A coordenada ϕ do ponto P é a longitude, que é a medida do arco paralelo compreendido entre o meridiano de Greenwich e o meridiano que passa pelo ponto P . As medições vão de 0° a 180° para leste (E) e para oeste (W), tendo como referencial o meridiano de Greenwich.

Figura 24 – Latitude θ e longitude ϕ do ponto P .

Fonte: (BRITO, 2018).

Veja que, as medidas de latitude e longitude são medidas em graus e são normalmente expressas em graus ($^\circ$), minutos ($'$) e segundos ($''$), lembrando que $1^\circ=60'$ e $1' = 60''$.

Quando observamos as coordenadas de algum local no planeta Terra, é importante lembrar que se a latitude possui na frente (S) indica uma localidade no Hemisfério sul do

planeta, e quanto mais próximo de 90° o lugar se encontra a uma menor distância do polo Sul, analogamente para o Norte.

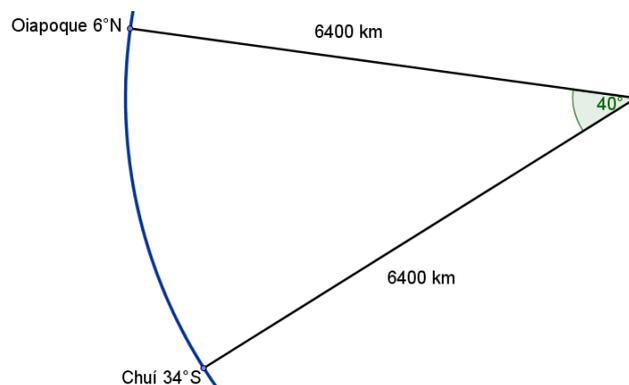
Já quando observamos a longitude, que varia de leste para oeste, quando a longitude é escrita a Oeste significa que a localização está na parte ocidental do planeta, já quando é escrita a leste está na parte oriental do planeta.

Pode-se então ao analisar comprimentos de arcos, medir distâncias entre lugares do planeta que se encontrem sob um mesmo meridiano, dessa forma, podemos estabelecer uma conexão entre conceitos diferentes e analisar situações logísticas. Analisemos então o seguinte problema obtido de (ALVES, 2009).

Exemplo 3.2.1. *Qual a altura mínima para que um satélite consiga fotografar o Brasil inteiro? Admita que Oiapoque e Chuí estejam sobre o mesmo meridiano, mas em paralelos diferentes: a latitude de Oiapoque é $6^\circ N$ e a de Chuí é $34^\circ S$. Suponha que o raio da Terra tenha medida de $6\,400\text{ km}$.*

Solução: Como os pontos estão em hemisférios distintos, e num mesmo meridiano podemos somar as coordenadas, obtendo a seguinte representação da Figura 25:

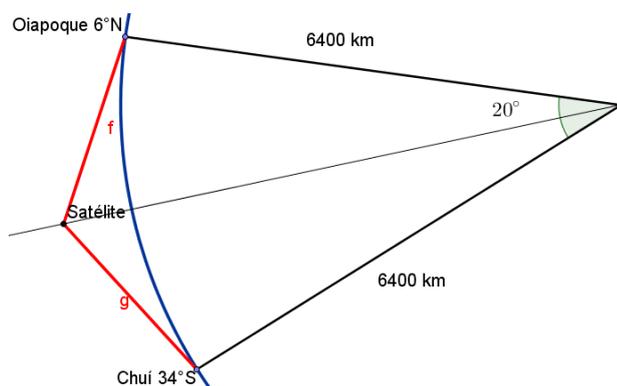
Figura 25 – Arco de meridiano que liga os dois pontos



Fonte: Próprio autor no software Geogebra.

Para que o satélite consiga fotografar os dois lugares ao mesmo tempo, é conveniente que ele se encontre posicionado sobre a reta bissetriz do ângulo de 40° , mantendo uma mesma distância aos dois pontos o Oiapoque e o Chuí. Os segmentos de reta f e g , da Figura 26 que ligam os pontos ao satélite, não podem interceptar a circunferência para que permita que a foto seja tirada.

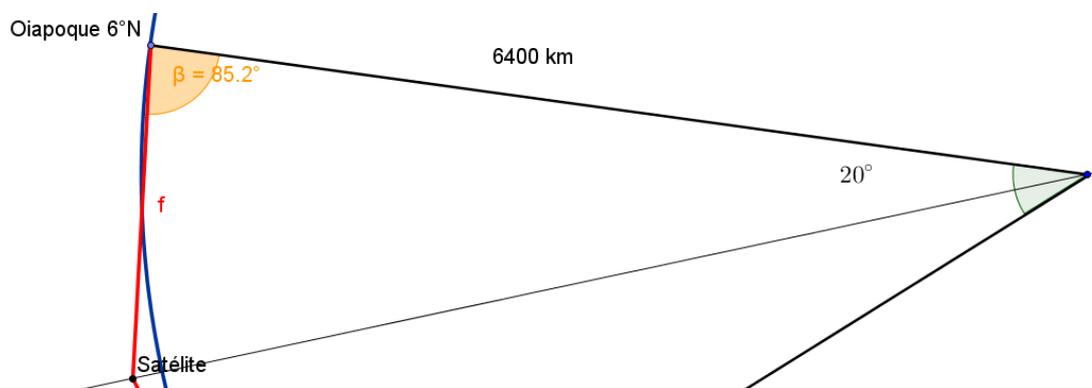
Figura 26 – Posicionamento do satélite



Fonte: Próprio autor no software Geogebra.

Observe que, o ângulo entre os segmentos de reta e os raios da circunferência devem ser $\beta = 90^\circ$, uma vez que, se o ângulo for menor que 90° o segmento é secante e dessa forma a foto do satélite não consegue observar o lugar. Como podemos ver na Figura 27 que é a Figura 26 ampliada, o segmento de reta que parte do satélite até o local cruza a circunferência do planeta Terra.

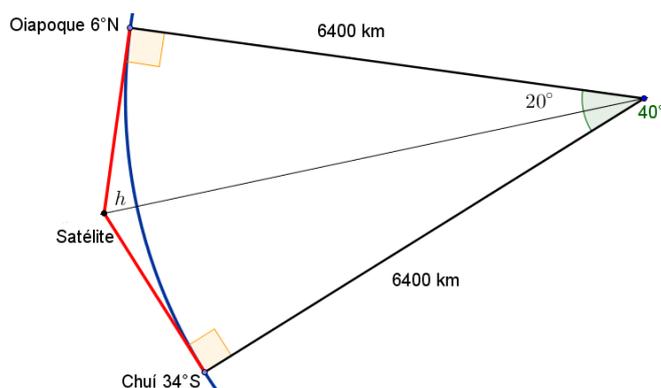
Figura 27 – Caso com ângulo β menor que 90°



Fonte: Próprio autor no software Geogebra.

Caso o ângulo β seja maior que 90° , o posicionamento do satélite fica mais longe da superfície terrestre, dessa forma, a menor distância do satélite para superfície é obtido quando o ângulo é 90° , temos assim dois triângulos retângulos e sendo h a distância sob a superfície terrestre temos o seguinte caso, como vemos na Figura 28:

Figura 28 – Caso com ângulos iguais a 90°



Fonte: Próprio autor no software Geogebra.

Nesse caso, pela trigonometria no triângulo retângulo temos:

$$\text{sen } 70^\circ = \frac{6400}{6400 + h} \implies h \approx 410 \text{ km}$$

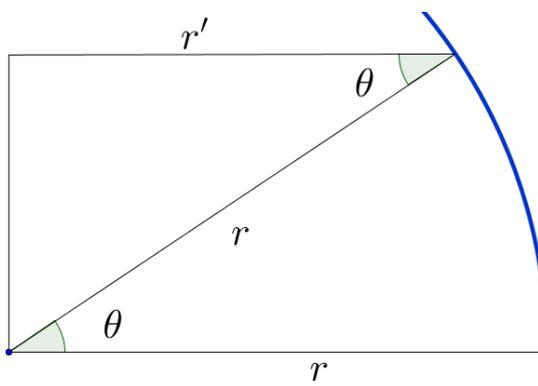
Ou seja, o satélite para ter a possibilidade de fotografar o Brasil por completo tem que orbitar a uma distância mínima da aproximadamente 410 km da superfície. ■

Exemplo 3.2.2. *Supondo que o raio da Terra tenha medida de 6 400 km, qual o comprimento de um grau de longitude em uma latitude arbitrária θ ?*

Solução: Sabemos que, cada paralelo é uma circunferência paralela ao equador, e como os meridianos são arcos que ligam os polos, a distância entre cada meridiano depende do comprimento da circunferência do paralelo.

Seja r o raio do paralelo do equador, e r' o raio da circunferência do paralelo de coordenadas θ , como podemos observar na Figura 22 forma-se um triângulo retângulo com hipotenusa r e cateto adjacente a θ sendo r' , como vemos na Figura 29, dessa forma $r' = r \cdot \cos \theta \implies r' = 6400 \cdot \cos \theta$ km.

Figura 29 – Relação do raio em um paralelo de latitude θ



Fonte: Próprio autor no software Geogebra.

De posse da relação acima, sabemos que os 180° de longitude em um paralelo de coordenadas θ é igual a $\pi \cdot 6400 \cdot \cos\theta$ e portanto, cada grau de longitude equivale a $111,7 \cdot \cos\theta$. ■

Além de aplicações acima citadas, sobre os conceitos de coordenadas geográficas podem ser utilizadas propostas pedagógicas no ensino básico, a exemplo de propostas de identificação de locais no mapa dadas as coordenadas e outros problemas, como observamos no trabalho de (PRESTES, 2006), ou ainda em uma análise a partir de situações, comparando distâncias medidas considerando a geometria euclidiana e a esférica sobre o globo terrestre, como vê-se no trabalho de (CONCEIÇÃO, 2018).

Uma outra possibilidade é a construção no software Geogebra do globo terrestre, proposta em (SILVA, 2017), em que tem-se a possibilidade de localizar pontos no globo terrestre, além de calcular de maneira computacional distâncias sob a esfera, e além de tudo auxilia em novas ações pedagógicas com o tema globo terrestre, como sugere o autor.

3.3 OS MOVIMENTOS DE ROTAÇÃO E TRANSLAÇÃO

O nosso planeta não está parado no universo, ele se move continuamente. Existem assim, dois movimentos que ocorrem com nosso planeta, e que são responsáveis por diversas situações recorrentes no nosso cotidiano, são eles a rotação, que é o movimento da Terra em torno do seu eixo polar, e a translação que é o movimento da Terra em torno do Sol.

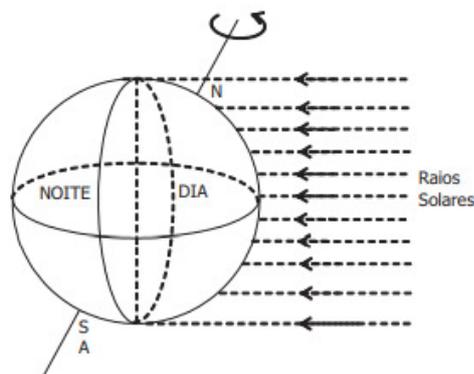
Na rotação, a Terra gira em torno do eixo imaginário polar, cada um desses giros leva um período aproximado de 24 horas, mais precisamente, 23 horas, 56 minutos, 4 segundos e 9 centésimos, e esse movimento ocorre a uma velocidade de 1666 km/h (SILVA, 2017). Além disso, a rotação do nosso planeta acontece no sentido de oeste para leste, o que faz com que vejamos o movimento aparente do Sol no sentido de leste para oeste.

Admitindo a hipótese dos raios solares incidirem paralelamente sob o globo terrestre, temos uma circunferência máxima a curva que separa a parte iluminada e a não iluminada, ou seja, o dia e a noite ao redor do mundo (ALVES, 2009), como podemos ver na Figura [30](#):

No momento que o Sol em sua trajetória aparente, está mais alto no céu, é o chamado meio-dia solar, esse é o instante em que a sombra possui seu menor comprimento. Historicamente foi durante o meio dia solar que Eratóstenes conseguiu informações para determinar o raio da Terra. O meio dia solar em uma localidade, ocorre quando seu meridiano, corta uma reta imaginária determinada pelos centros da Terra e do Sol, (ALVES, 2009).

Já no movimento de translação, a Terra descreve uma curva elíptica em torno do Sol denominada órbita. A trajetória dessa órbita recebe o nome de eclíptica e o plano que a contém é chamado de plano da eclíptica. Para realizar essa volta em torno do Sol, a Terra leva 365 dias e 6 horas aproximadamente.

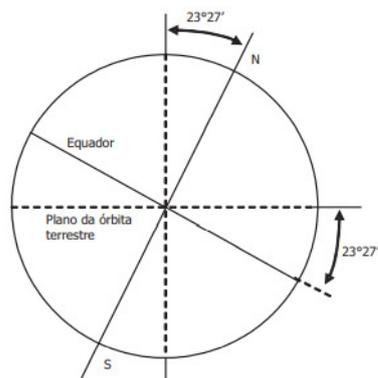
Figura 30 – Ilustração dia e noite no movimento de rotação



Fonte: (ALVES, 2009).

Um fato que deve ser observado, é que o eixo de rotação (eixo polar) não é perpendicular ao plano da eclíptica, e na verdade ele apresenta uma inclinação de $23^{\circ}27'$ com um eixo perpendicular ao plano, como vemos na Figura 31:

Figura 31 – Ilustração da inclinação do eixo de rotação em relação ao plano da eclíptica



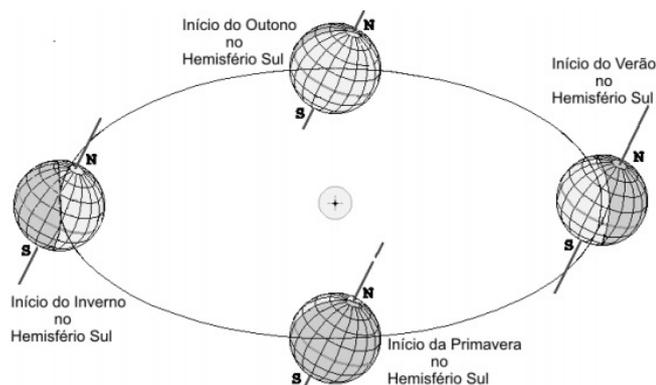
Fonte: (ALVES, 2009)

Se o eixo da Terra fosse perpendicular ao plano da eclíptica, teríamos durante todo o ano os dois hemisférios recebendo uma mesma quantidade de luz e calor do Sol, e assim dia e noite durariam um mesmo período. Conforme podemos ver na Figura 32 a inclinação da Terra, faz com que tenhamos variação de intensidade solar entre os hemisférios ao longo do movimento de translação:

Em apenas 2 momentos do ano os dias e noites tem um mesma duração em todos lugares da Terra, é quando a circunferência máxima que separa a zona iluminada da que estão no escuro coincide com a circunferência que passa pelos polos, acontece aproximadamente nos dias 21 de março e em 23 de setembro, esses dias recebem o nome de equinócios.

Durante os equinócios, os raios incidem perpendicularmente sobre a linha do equador, no dia 21 de Março se inicia o outono no hemisfério sul e a primavera no hemisfério norte, o que se inverte no dia 23 de setembro.

Figura 32 – Ilustração estações do ano no hemisfério sul



Fonte: (ALVES, 2009)

Após esses dias, gradualmente a duração dos dias e noites mudam em cada hemisfério, por exemplo, durante a primavera no hemisfério sul que ocorre entre setembro e dezembro, tendo no dia 21 de dezembro a duração dos dias vai aumentando, até chegar ao dia mais longo e a noite mais curta no hemisfério sul, o que chamamos de solstício de verão, onde ele tem início.

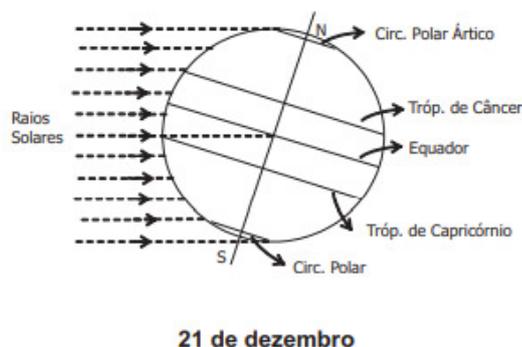
Durante o mesmo período ocorre o processo inverso no hemisfério sul, onde se inicia o inverno em 21 de dezembro. Assim como os equinócios, os solstícios ocorrem duas vezes por ano, o outro solstício ocorre por volta de 21 de junho, e nessa data as coisas se invertem nos hemisférios em relação ao dia 21 de dezembro.

No dia 21 de dezembro o Sol incide perpendicularmente sobre paralelo conhecido como Tropicó de Capricórnio que possui latitude de $23^{\circ}27' S$, e no dia 21 de Junho incide perpendicularmente sobre o paralelo de latitude $23^{\circ}27' N$, chamado Trópicó de Câncer.

Um ponto curioso, é o que ocorre nos polos durante os solstícios, veremos o caso de 21 de Dezembro, e de maneira análoga ocorre no dia 21 de junho. Neste dias os raios solares não ultrapassam o paralelo de latitude $66^{\circ}33' N$ do círculo polar ártico, fazendo com que as localidades entre esse paralelo e o polo norte fiquem inteiramente no escuro.

Já em contrapartida a zona entre o paralelo de latitude $66^{\circ}33' S$, conhecido como círculo polar antártico, os lugares entre esse paralelo e o polo sul ficam iluminados durante todo o dia, e o dia nesses locais dura 24 horas. Vejamos na Figura [33](#) a representação do que ocorre no dia 21 de Dezembro.

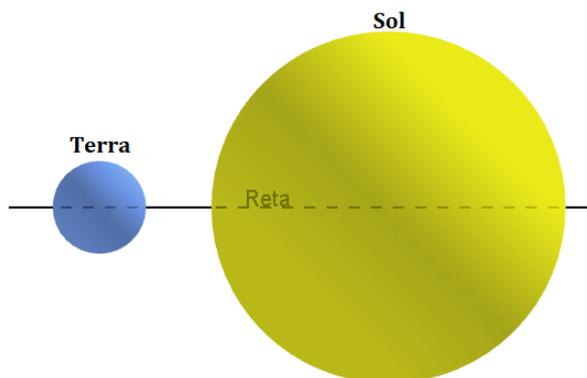
Figura 33 – Solstício de 21 de dezembro



Fonte: (ALVES, 2009)

Exemplo 3.3.1. A Terra gira 360° em torno de seu eixo em 24 horas. Quantos graus de longitude a reta determinada pelos centros da Terra e do Sol cruza a cada hora? E a cada minuto?

Figura 34 – Reta imaginária entre o centro da Terra e o centro do sol



Fonte: Próprio autor no software Geogebra: Figura fora de escala.

Solução: Tomando como referencial a Terra, o sol se mantém parado, dessa forma no movimento de rotação completo da Terra a reta gira 360° , como um dia tem 24 horas, a cada hora a reta percorre $\frac{360}{24} = 15^\circ$ por hora. Como uma hora tem 60 minutos, então por minuto são percorridos $\frac{15}{60} = 0,25^\circ$. ■

Exemplo 3.3.2. Quanto tempo depois do meio-dia solar em Greenwich ocorre o meio-dia solar em São Paulo? Qual a diferença de tempo entre o meio-dia solar em São Paulo e em Roma?

Solução: Pelo movimento aparente do Sol de leste a oeste, para determinamos depois de quanto tempo ocorre o meio dia solar em São paulo, basta que observemos a variação na longitude. Greenwich se localiza com longitude de 0° já São Paulo possui longitude $46^\circ38'02''\text{O}$, dessa forma, o meio dia solar ocorre 3 horas e 8 minutos após.

Sabendo que Roma possui longitude de $12^{\circ}29'46''\text{E}$, basta que seja somada sua longitude com a de São Paulo, por estarem em lados opostos de Greenwich, tendo assim uma variação longitudinal de $59^{\circ}07'48''$, implicando uma diferença de tempo entre o meio dia solar nas duas localidades de 3 horas e 56 minutos. ■

3.4 OS FUSOS HORÁRIOS

No instante em que é meio dia na cidade de São Paulo, é também meio dia em todos os lugares que se situam sobre o mesmo meridiano, ou seja, os lugares que possuem uma mesma longitude, isso é o que chama-se de hora verdadeira, conforme (ALVES, 2009).

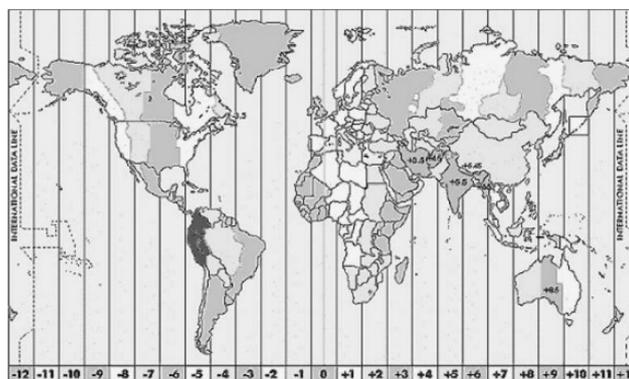
Assim se é meio-dia na cidade de Teresina, o mesmo não acontece simultaneamente em Salvador, isso acontece porque as duas cidades estão em meridianos diferentes, Teresina encontrasse no meridiano $42^{\circ}48' \text{ W}$ e Salvador está no meridiano $38^{\circ}31' \text{ W}$. Portanto, a hora verdadeira nos dois locais é diferente.

Entretanto, se fosse adotada a hora verdadeira, teríamos que adiantar o relógio sempre que viajássemos para leste ou oeste. Para solucionar esse empecilho foram criados os fuso horários, que foram criados dividindo o globo terrestre em 24 partes, já que a Terra gasta 24 horas para dar uma volta completa em torno do seu eixo polar.

Cada fuso horário está limitado por dois meridianos 15° distantes um do outro, construídos a partir do meridiano de Greenwich, assim todas as localidades dentro de cada fuso tem uma mesma hora oficial, fazendo com que Teresina e Salvador tenham uma mesma hora oficial.

Nessas circunstâncias países extensos tem mais de um fuso horário como o Brasil, e alguns países com menor extensão longitudinal tem apenas um fuso horário, como podemos observar no mapa da Figura [35](#)

Figura 35 – Fusos horários ao redor do mundo



Fonte: (ALVES, 2009)

Vejamos a seguir alguns exemplos sobre o tema.

Exemplo 3.4.1. *Indo-se de Oeste para Leste, deve-se adiantar o relógio de uma hora cada vez que se ultrapassa um limite de fuso horário. Utilizando-se um avião bastante rápido, pode-se partir de Greenwich a zero hora do sábado, e chegar ao seu meridiano oposto às 24 horas (tempo local). Nessa altura, serão 12 horas do sábado em Greenwich. Continuando com a mesma velocidade, o viajante completará a volta, podendo chegar a Greenwich às 24 horas do sábado; mas seu relógio, modificado somente em função dos fusos horários marcará 24 horas de domingo! Como resolver este problema?*

Solução: Para resolver o problema acima citado, existe a chamada linha internacional de mudança de data, localizada no meridiano oposto ao de Greenwich, tem o intuito de corrigir esse problema da seguinte forma, temos um total de 24 fusos, cada um deles possui uma hora. Então a partir desse meridiano, temos um total de 24 horas que é o intervalo de um dia completo.

Então, ao cruzar a linha internacional de mudança de data de leste para oeste devemos atrasar um dia no nosso calendário, e ao cruzar no sentido oposto adiantar um dia. Isso resolve o problema acima citado, pois assim o relógio marcará 24 horas de sábado como esperado.

Veja que, no momento que ele chega a linha de mudança internacional de data e não atrasa um dia no calendário, ao passar mais uma hora relógio marcará 02 horas de domingo, enquanto em Greenwich serão hora 13 horas de sábado, o que não faz sentido uma vez que uma hora atrás a diferença era de apenas 12 horas nos dois lugares. ■

Exemplo 3.4.2. *Um piloto sai de uma cidade A de latitude 40° N às 12 horas e 15 minutos (hora local verdadeira). Ele voa no rumo Leste a uma velocidade média de 1 000 km/h permanecendo o tempo todo na mesma latitude. Seu destino B é alcançado após percorrer 3 000 km. Supondo que o raio da Terra seja 6 400 km, qual a hora local verdadeira em B?*

Solução: Sabe-se pelo Exemplo [3.2.2](#) que o comprimento de um grau de longitude a uma latitude θ qualquer é dado por, $111,7 \cdot \cos\theta$, como a latitude é 40° , cada grau de longitude é $111,7 \cdot \cos 40^\circ = 85,56$ km. Como o avião percorreu 3000 km, temos que foram percorridos $\frac{3000}{85,56} = 35,06$ graus de longitude.

Convertendo em horas foram 2 horas e 20 minutos, somando a hora de partida junto com as 3 horas necessárias para percorrer 3000 km, a uma velocidade de 1000 km/h. Portanto, a hora local em B é de 17 horas e 35 minutos. ■

Como alternativa pedagógica para contextualização e ensino envolvendo os fusos horários e horas, pode-se considerar a proposta de (SOUZA, 2019), onde a construção de um relógio solar envolvendo em itinerários do processo, estudo de ângulos, coordenadas geográficas e noções de trigonometria com a finalidade de construir um relógio de sol, que fornece a hora verdadeira.

3.5 ÂNGULO DE ELEVAÇÃO DO SOL E INTENSIDADE SOLAR

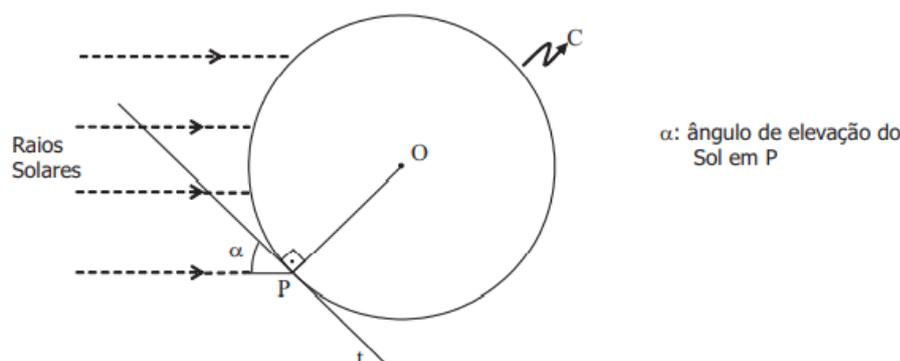
A inclinação que o eixo da Terra possui em relação ao plano da órbita elíptica, onde ocorre o movimento de translação, conforme vimos anteriormente, é de aproximadamente $23,45^\circ$.

Essa inclinação, contribui diretamente para percepções cotidianas que temos do mundo ao nosso redor, como variações de temperaturas e a intensidade do sol nas diferentes estações do ano. Serão esses fenômenos que iremos analisar agora.

Considerando uma localidade qualquer P do globo terrestre. Nesse local a variação da intensidade dos raios solares dependem do chamado ângulo de elevação do sol.

Seja uma circunferência C , determinada pelo meridiano que passa no ponto P . Definimos então, o ângulo de elevação do sol α , como sendo o menor ângulo entre a reta tangente a C passando por P e os raios solares.

Figura 36 – Ângulo de elevação do Sol



Fonte:(ALVES, 2009)

O momento do dia em que os raios solares possuem uma maior intensidade é conhecido como meio dia solar, nesse momento do dia vemos o Sol posicionado imediatamente acima, ou seja, nesse momento a distância entre a localidade e o sol é mínima.

Para avaliar melhor a variação de intensidade solar, definimos então a intensidade relativa, que é a razão da intensidade de radiação solar pela maior intensidade que ocorre quando os raios solares incidem perpendicularmente a superfície, ou seja, quando $\alpha = 90^\circ$.

Antes de analisarmos as variações de intensidade, vejamos a seguir uma possibilidade didática experimental, que fornece informações mais concretas sobre o comportamento dos raios luminosos e dos cálculos da sua variação de intensidade.

Tomando como referência (ALVES, 2009) observe o seguinte procedimento. Escureça a sala ou laboratório e acenda uma lanterna perpendicularmente sobre um pedaço de papel branco A. Toda a área do papel será iluminada. Coloque então um outro pedaço de papel idêntico B na frente do papel A.

Figura 37 – Lanterna iluminando papel A



Fonte: (ALVES, 2009)

Toda a área do novo papel será iluminado também por completo. Mova o papel B e discuta a qual papel recebe mais energia luminosa a cada mudança. Observe que a sombra de B é projetada sob o papel A, e quando mais inclinamos o papel B, temos uma menor sombra em A.

Figura 38 – Projeção da sombra de B em A



Fonte:(ALVES, 2009)

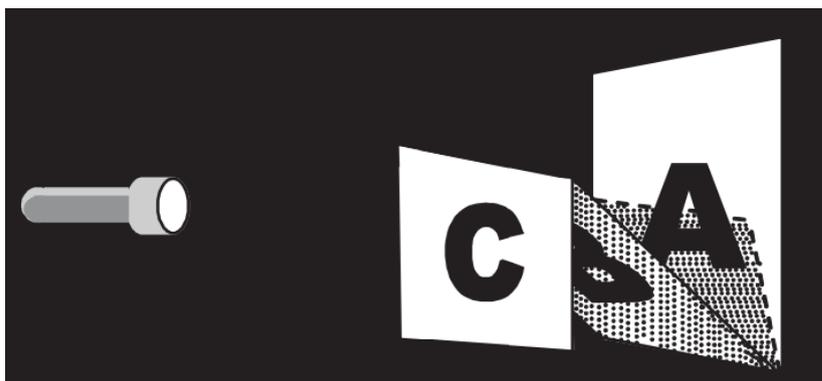
Veja que o papel B recebe a mesma energia luminosa que um papel posicionado paralelamente ao A receberia, sendo este da altura de B, como vemos na Figura 39.

A partir dessa situação, podemos observar que quando a elevação é reduzida a quantidade de luminosidade também é, veja a Figura 40 diagrama com a quantidade de energia recebida pelo papel B em cada inclinação. As ilustrações do meio e da direita no diagrama, mostram a quantidade relativamente menor de energia luminosa quando o ângulo de elevação é reduzido. O diagrama considera apenas os comprimentos mostrados, pois, como as larguras dos papéis são as mesmas, podem ser desconsideradas:

O comprimento B é a hipotenusa do triângulo retângulo que possui α como ângulo de elevação do Sol e o comprimento C é a medida do lado oposto a α .

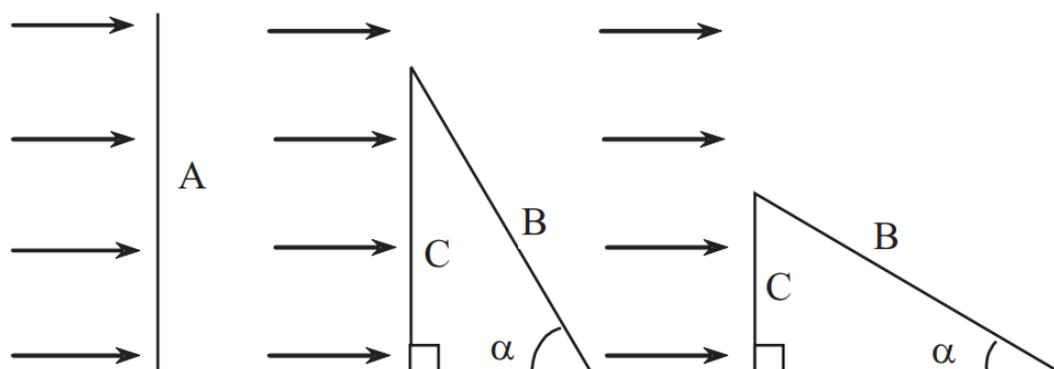
Tomando B como medida unitária temos pela trigonometria no triângulo retângulo que $\sin \alpha = \frac{C}{1} = C$. Tomando então se $\alpha = 90^\circ$, isto é, B é perpendicular à direção

Figura 39 – Papel C paralelo a A



Fonte: (ALVES, 2009)

Figura 40 – Diagrama de iluminação



Fonte: (ALVES, 2009)

da luz da lanterna, então $\sin 90^\circ = 1$ e a intensidade relativa da luz solar é 1, ou em porcentagem 100%.

Tomando então $\alpha = 75^\circ$, tem-se que $\sin 75^\circ = 0,965925826$ e portanto o papel *B* recebe aproximadamente 98% da luminosidade disponível.

Neste modelo prático o papel representa uma parte da Terra, a lanterna o Sol, e o ângulo α o ângulo de elevação do Sol que é formado pela inclinação entre os raios solares e a reta tangente ao ponto *P* analisado.

Dessa forma a variação do ângulo α que surge com seu menor valor pela manhã e assim a intensidade relativa de radiação solar é pequena, já ao se aproximar do meio dia o ângulo α se aproxima de 90° e portanto a intensidade solar se aproxima da máxima, a tarde o ângulo α diminui até que sua a intensidade solar volte a seu menor valor.

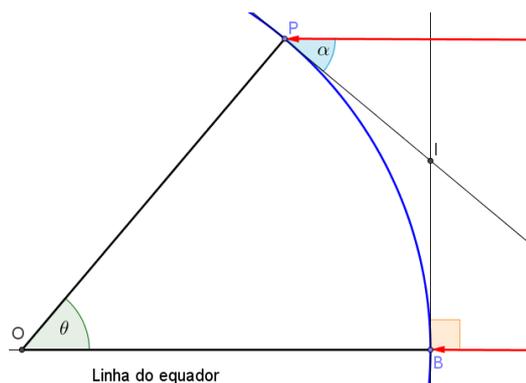
Exemplo 3.5.1. Considere um ponto *P* de latitude θ e seja α o ângulo de elevação do sol ao meio dia solar nessa localidade, vamos determinar a expressão que relaciona α e θ nos equinócios e solstícios.

Solução: Para os equinócios, que ocorrem aproximadamente nos dias 21 de Março e 23 de Setembro, sabemos que os raios solares incidem perpendicularmente na linha do

equador. Desta forma, temos a seguinte representação do problema que vemos na Figura 41

Admitindo o fato que, os raios solares incidem paralelamente sob a superfície terrestre, os vetores em vermelho os representam na Figura 41. Consideramos um ponto P de latitude θ no hemisfério norte e um outro ponto sob a linha do equador, com seus respectivos ângulos de inclinação solar.

Figura 41 – Representação do ângulo de elevação solar nos equinócios



Fonte: Próprio autor com o software Geogebra.

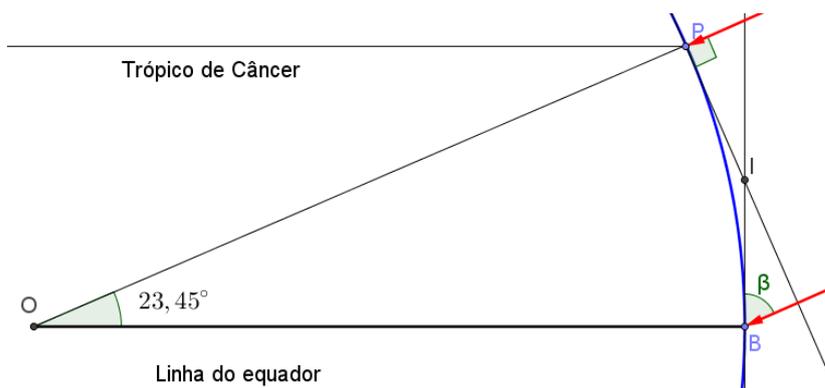
Pela soma dos ângulos internos de um triângulo, temos que, o ângulo $P\hat{I}B = 90^\circ + \alpha$, desta forma do quadrilátero $OPIB$ segue que:

$$\alpha + 90^\circ + 90^\circ + 90^\circ + \alpha = 360^\circ \implies \theta + \alpha = 90^\circ. \quad (3.1)$$

o caso acima é análogo para um ponto P considerado no hemisfério sul do planeta.

Analisaremos a seguir, os solstícios de forma separada. No solstício que ocorre por volta do dia 21 de Junho, os raios solares incidem perpendicularmente sobre o paralelo de latitude $23,45^\circ$ conhecido como trópico de Câncer, seja então β o ângulo de elevação solar na linha do equador, dessa forma observe a representação da Figura 42 onde vamos determinar o valor de β .

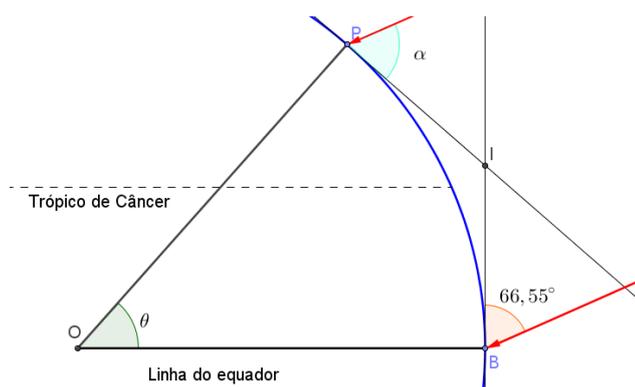
Figura 42 – Representação do ângulo β no solstício de 21 de Junho



Fonte: Próprio autor com o software Geogebra.

Veja que o ângulo $P\hat{I}B$ na representação vale $90^\circ + \beta$, desta forma do quadrilátero $OPIB$ segue que $\beta = 66,55^\circ$. Ao considerarmos um ponto P do hemisfério norte, com latitude maior que $23,45^\circ$, obtêm-se a figura 43:

Figura 43 – Ponto P com latitude maior que $23,45^\circ$



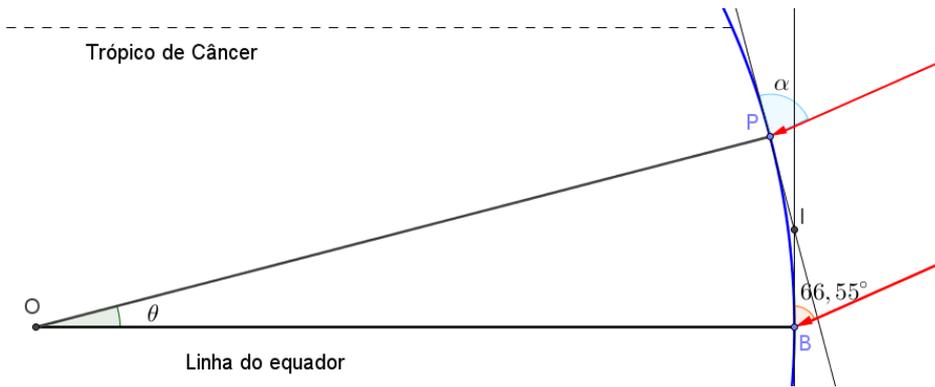
Fonte: Próprio autor com o software Geogebra.

Donde o ângulo de elevação α , é determinado como segue:

$$\theta + 90^\circ + 90^\circ + \alpha + 66,55^\circ = 360^\circ \implies \theta + \alpha = 113,45^\circ. \quad (3.2)$$

Já quando a latitude do ponto P , no hemisfério norte, é um valor θ entre 0° e $23,45^\circ$, temos a seguinte Figura 44:

Figura 44 – Ponto P no hemisfério norte com latitude menor que $23,45^\circ$



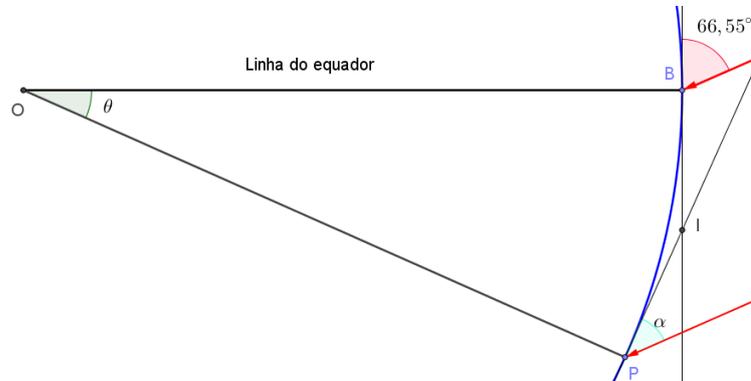
Fonte: Próprio autor com o software Geogebra.

E portanto, α pode ser determinado como segue:

$$\theta + 90^\circ + 90^\circ + 66,55^\circ + 180^\circ - \alpha = 360^\circ \implies \alpha = \theta + 66,55^\circ. \quad (3.3)$$

Por fim, considere um ponto P no hemisfério sul com latitude θ , essa latitude deve ser menor do que $66,55^\circ$, pois a faixa planetária com latitude entre $66,55^\circ$ e 90° sul permanece sem iluminação solar durante o solstício de 21 de Junho. Desta forma, observe a Figura 45:

Figura 45 – Ponto P no hemisfério sul com latitude θ e $66,55^\circ$



Fonte: Próprio autor com o software Geogebra.

Com isso o ângulo α pode ser determinado como segue:

$$\theta + 90^\circ + 113,45^\circ + 90^\circ + \alpha = 360^\circ \implies \alpha + \theta = 66,55^\circ. \quad (3.4)$$

Para o solstício que acontece por volta do dia 21 de dezembro, o ângulo α é obtido de forma análoga, invertendo apenas hemisfério norte por hemisfério sul, e tomando como base o fato do sol incidir perpendicularmente, sobre o Trópico de Capricórnio, que tem latitude igual a $23,45^\circ$ sul.

Assim dado um ponto P do nosso planeta, conseguimos determinar o ângulo de elevação solar nesse lugar durante os equinócios e solstícios, e consequentemente determinar a intensidade solar nesse lugar. ■

De um modo geral, é possível determinar o ângulo de elevação solar em um ponto P de latitude θ em qualquer dia do ano, para isso basta considerarmos um ângulo β de elevação solar na linha do equador nesse dia, e assim determinar o ângulo de elevação solar na localidade e conseqüentemente a intensidade solar.

Entretanto, essa relação depende de alguns fatores, a exemplo das estações do ano, da latitude do local em relação ao ângulo β de cada caso, e também de qual hemisfério a localidade se encontra, caracterizando assim um processo extenso de análise de casos.

3.5.1 Ângulo de elevação do Sol nos equinócios

Os equinócios, são os dias do ano em que os raios solares incidem perpendicularmente sobre a linha do equador. Tomando como exemplo as coordenadas da cidade de João Pessoa, capital da Paraíba, que possui longitude aproximada de 34° W e latitude sul de 7° . vamos determinar a intensidade nesse local no dia do equinócios.

Para tanto, basta que seja usado na equação [3.1](#), $\theta = 7^\circ$ o que implica, que o ângulo de inclinação solar em João pessoa é $\alpha = 83^\circ$, portanto a intensidade solar é de $\sin 83^\circ = 0,9925$ que é aproximadamente 99,25% da intensidade solar disponível.

3.5.2 Ângulo de elevação do Sol nos solstícios

Para calcularmos a intensidade solar na cidade de Cleveland, no Estados Unidos, que possui latitude de 41° norte, basta que utilizemos a equação [3.2](#) com $\theta = 41^\circ$, de onde vem que o ângulo de elevação solar é de $72,45^\circ$, e a localidade recebe portanto, $\sin 72,45^\circ = 0,9534 = 95,34\%$ da radiação solar disponível.

Já para determinar a intensidade solar, no solstício de 21 de Junho, na Cidade de Porto Alegre, que possui latitude de 30° sul, basta que usemos a equação [3.4](#) com $\theta = 30^\circ$, donde vem que o ângulo de elevação solar é de $36,55^\circ$, recebendo portanto, $\sin 36,55^\circ = 0,5955 = 59,55\%$ da radiação solar disponível.

É possível encontrar também, a intensidade solar em qualquer lugar do planeta no solstício de 21 de Dezembro, a exemplo, na linha do equador a intensidade solar nessa data é de 91,74%.

Pode-se propor como alternativa pedagógica uma oficina, tomando como base um personagem do qual seu poder varia conforme a porcentagem de radiação solar que ele recebe, adaptando o exemplo proposto por (ALVES, 2009), imaginemos um oponente com 75% do poder desse personagem, e deve-se determinar quais lutas ele seria capaz de vencer, veja Tabela [2](#)

Após a análise da Tabela [2](#), pode-se questionar obviamente quais desafios o personagem venceu, pode-se também discutir diversas circunstâncias e análises sobre os locais, como estação do ano e a localização das cidades podendo obter resultados opostos em datas distintas.

Tabela 2 – Locais com coordenadas

	Cidade	Latitude	Solstício de junho intensidade relativa	Equinócio de setembro intensidade relativa
	São Paulo, Brasil	23°S		
	Melbourne, Austrália	38°S		
	Quito, Equador	0°		
	São José, Costa Rica	10°N		
	Miami, EUA	26°N		

Fonte: (ALVES, 2009) adaptada.

Pode-se também incrementar o problema acima, levando em consideração diferentes datas e locais, e até introduzir a escolha de um itinerário de viagens que o permitisse vencer todos os desafios, a proposta do problema acima é que ele sirva de motivação inicial para atrair o interesse dos alunos ao estudo do ângulo de elevação do Sol e intensidade solar.

Por fim, vimos nesta secção que, a partir da latitude de um local no planeta Terra, podemos determinar a intensidade de radiação solar que esse local recebe em um equinócio ou solstício, em uma análise mais profunda, pode-se determinar a intensidade solar em um lugar a qualquer dia do ano, analisando atentamente as informações de cada caso.

E intuitivo imaginar que os locais próximos a linha do equador, recebam uma maior quantidade de energia solar, tendo assim maior vantagem e disposição para usinas de produção de energia solar.

Além disso, a latitude de um local também pode influenciar o ângulo de posicionamento da placa solar com o solo. De acordo com (RIBEIRO, 2015) o ideal seria que os painéis de energia solar se movessem durante o dia, recebendo os raios solares de forma perpendicular, quando isso não é possível, os painéis devem ser posicionados ao norte, pois dessa forma recebem os raios solares, que incidem paralelamente sobre a Terra, durante todo o dia.

Ainda de acordo com (RIBEIRO, 2015) os painéis são instalados com um ângulo visando produzir o máximo de energia solar durante o ano, dependendo assim da sua latitude com a seguinte relação.

Tabela 3 – Instalação de painéis solares

Latitude dos locais	Ângulo de inclinação recomendado
0° a 10°	$\alpha = 10^\circ$
11° a 20°	$\alpha = \text{latitude}$
21° a 30°	$\alpha = \text{latitude} + 5^\circ$
31° a 40°	$\alpha = \text{latitude} + 10^\circ$
41° ou mais	$\alpha = \text{latitude} + 15^\circ$

Fonte: (RIBEIRO, 2015).

Ao leitor interessado, pode consultar (RIBEIRO, 2015) para um aprofundamento sobre

a produção de energia solar.

4 CONSIDERAÇÕES FINAIS

A geometria do globo terrestre mostra-se como um tema que, permite a contextualização e fornece uma aplicação real a diversos conceitos matemáticos, acreditamos assim que os objetivos de expor o tema deste trabalho com as devidas teorias matemáticas e com problemas motivadores e desafiadores foi atingido.

Por outro lado, conforme apontam as sugestões propostas, os conceitos que aqui tratamos possuem potencialidades para inserção na Educação Básica, favorecendo uma interdisciplinaridade com Geografia, apresentando aplicações a conceitos matemáticos e especialmente explicando fenômenos como, variação de sombras e hora do por do sol ao longo do ano, através da ciência, retomando ainda problemas e descobertas da antiguidade que podem ser redescobertas nesse processo de ensino-aprendizagem.

A partir das ideias tratadas nesse trabalho, é possível resolver diversos problemas desafiadores e que representam situações reais, a exemplo dos utilizados neste trabalho. Sendo assim uma opção de inserção ao currículo do Ensino Médio que pode estimular a curiosidade dos alunos e proporcionar a produção de justificativas por parte dos mesmos.

A aplicação das concepções de geometria do globo terrestre na Educação básica, por meio de sequências didáticas, com uma análise e avaliação da sua contribuição para o processo educativo, pode ser objetivo de futuros trabalhos, assim como, um aprofundamento na análise do funcionamento do GPS (Sistema de Posicionamento Global) a partir da geometria analítica, ou ainda a análise da influência da intensidade solar na produção da energia solar na Terra.

5 REFERÊNCIAS

ALVES, S. **A geometria do globo terrestre.** obmep.org.br, 2009. Disponível em: <http://www.obmep.org.br/docs/apostila6.pdf> acesso em 20 de Abril de 2021.

ÁVILA, G. S. S. **Várias faces da matemática: Tópicos para licenciatura e leitura geral.** 2ª edição. São Paulo: Blucher, 2010.

BARBOSA, J. L. M. **Geometria Euclidiana Plana.** 4 edição. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 1994.

BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular.** Brasília, 2018.

BRITO, G. A. **A geometria do globo terrestre: Uma proposta de trabalho interdisciplinar entre matemática e geografia.** 2017. p.84. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional), Universidade Federal do Piauí. Teresina, 2017.

CARMO, M. f. et al. **Trigonometria e números complexos.** Rio de Janeiro: GRAF-TEX comunicação visual, 1992.

CONCEIÇÃO, L. G. Geometria Riemanniana na educação básica: interdisciplinaridade em ação. **BOEM. Joinville**, v. 6, n. 10, p.61-81, 2018.

DANTE, L. R. **Matemática contexto e aplicações Volume 2.** 3ª edição. São Paulo: Ática, 2016.

DOLCE, O. e POMPEO, J. N. **Fundamentos da matemática elementar: geometria plana Volume 9.** 7ª edição. São Paulo: Atual, 1997a.

DOLCE, O. e POMPEO, J. N. **Fundamentos da matemática elementar: geometria espacial posição e métrica Volume 10.** 7ª edição. São Paulo: Atual, 1997b.

DUELI, L. J. **Geometria Esférica: Propostas de sequências didáticas interdis-**

ciplinares 2013. p.126. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional), Universidade Federal de Juiz de Fora. Juiz de Fora - MG, 2013.

FERREIRA, F. P. **A forma e os movimentos do sistema solar: Uma proposta para a formação do professor em astronomia.** 2013. p.190. Dissertação (Programa de pós graduação Interunidades em Ensino de Ciências), Universidade de São Paulo. São Paulo - SP, 2013.

GERHARD, A. C. e ROCHA FILHO, J. B. A fragmentação dos saberes na educação científica escolar na percepção de professores de uma escola de ensino médio. **Investigação em ensino de ciências.** Porto Alegre, v. 17, p.125-145, 2012.

HEIM, L. **Geometria Esférica: proposta de atividades em conexão com a geografia.** 2013. p. 126. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) Universidade Federal Rural de Pernambuco. Recife-PE, 2013.

IEZZI, G. **Matemática ciência e aplicações Volume 2.** 9ª edição. São Paulo: Saraiva, 2016.

Instituto Brasileiro de geografia e estatística (IBGE) **Introdução a cartografia,** <<https://www.ibge.gov.br/>> 1998. Disponível em: <https://biblioteca.ibge.gov.br/visualizacao/livros/liv44152_cap2.pdf> acesso em 20 de Abril de 2021.

LIMA, E. L. et al. **A matemática do ensino médio: volume 3.** Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 1998.

PRESTES, I. C. R. **Geometria esférica: Uma conexão com a geografia.** 2006. p.210. Dissertação (Mestrado Profissional em ensino de Matemática), Pontifícia Universidade Católica. São Paulo, 2006.

REIS, G. L. ; SILVA, V. V. **Geometria Analítica.** 2ª edição. Rio de Janeiro: Livros Técnicos e Científicos, 1996.

RIBEIRO, A. E. D. **Análise da influência da localização, área e forma de sítios no potencial de geração de energia elétrica de pequena escala no Brasil: Um método para as fontes solar e eólica.** 2015. p.111. Tese (Programa de Pós-Graduação

em Planejamento Energético), Universidade Federal do Rio de Janeiro. Rio de Janeiro - RJ, 2015.

SANTANA, A. L. M. **Trabalhando com geometria Não-Euclidiana, com ênfase para a geometria do globo terrestre na Educação Básica - Proposta de novas atividades** 2013. p.76. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional), Universidade Federal da Bahia. Salvador - BA, 2013.

SILVA, E. L. **A contextualização da geometria esférica pelo estudo do globo terrestre e suas representações com o uso do software geogebra.** 2017. p.165. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional), Universidade Federal de Campina Grande. Campina Grande - PB, 2017.

SILVEIRA, F. L. Sobre forma da Terra. **Física na escola**, São Paulo, v. 15, n. 2, p.4-14, 2017.

SOUZA, M. R. **Geometria esférica.** 2019. p.50. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional), Universidade Federal do Rio Grande do Norte. Natal, 2019.

WINTERLE, P. **Vetores e geometria Analítica.** 2ª edição. São Paulo: Pearson education do Brasil, 2014.



INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA DA PARAÍBA
Campus Campina Grande
R. Tranqüilino Coelho Lemos, 671 - Dinamérica, CEP 58432-300, Campina Grande (PB)
CNPJ: 10.783.898/0003-37 - Telefone: (83) 2102.6200

Documento Digitalizado Ostensivo (Público)

Entrega de TCC

Assunto: Entrega de TCC
Assinado por: André Costa
Tipo do Documento: Prova
Situação: Finalizado
Nível de Acesso: Ostensivo (Público)
Tipo do Conferência: Cópia Simples

Documento assinado eletronicamente por:

- **André Macedo Costa, ALUNO (202011280002) DE ESPECIALIZAÇÃO EM ENSINO EM MATEMÁTICA - CAMPINA GRANDE**, em 27/10/2021 21:39:23.

Este documento foi armazenado no SUAP em 27/10/2021. Para comprovar sua integridade, faça a leitura do QRCode ao lado ou acesse <https://suap.ifpb.edu.br/verificar-documento-externo/> e forneça os dados abaixo:

Código Verificador: 359482

Código de Autenticação: 50ef35d36c

