INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO,
CIÊNCIA E TECNOLOGIA DA PARAÍBA
COORDENAÇÃO DO CURSO SUPERIOR DE
LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

FRANCISCO MARCIO DE OLIVEIRA

LIVRO DIDÁTICO: Análise das figuras geométricas empregadas para o estabelecimento da relação parte-todo dos números racionais à luz dos registros de representações semióticas

CAJAZEIRAS – PB
2021

FRANCISCO MARCIO DE OLIVEIRA

LIVRO DIDÁTICO: Análise das figuras geométricas empregadas para o estabelecimento da relação parte-todo dos números racionais à luz dos registros de representações semióticas

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Curso de Licenciatura em Matemática do Instituto Federal da Paraíba, como requisito parcial à obtenção do título de Licenciado em Matemática.

Orientadora: Prof.ª Dr.ª Fernanda Andrea Fernandes Silva

CAJAZEIRAS – PB
2021

FRANCISCO MARCIO DE OLIVEIRA

LIVRO DIDÁTICO: Análise das figuras geométricas empregadas para o estabelecimento da relação parte-todo dos números racionais à luz dos registros de representações semióticas

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Curso de Licenciatura em Matemática do Instituto Federal da Paraíba, como requisito parcial à obtenção do título de Licenciado em Matemática.

Aprovada em: 26 / 11 / 2021.

BANCA EXAMINADORA

Fernanda Andréa F. Silva

Prof.ª DRª Fernanda Andrea F. Silva
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia da Paraíba
Orientadora

Antônia Edivaneide de Sousa Gonzaga

Prof.ª DRª Antônia Edivaneide de Sousa Gonzaga
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia da Paraíba
Examinadora

Francisco Aureliano Vidal

Prof. Me. Francisco Aureliano Vidal
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia da Paraíba
Examinador

IFPB /Campus Cajazeiras
Coordenação de Biblioteca
Catalogação na fonte: Daniel Andrade CRB-15/593

O48l

Oliveira, Francisco Marcio de

Livro didático: análise das figuras geométricas empregadas para o estabelecimento da relação parte todo dos números racionais à luz dos registros de representações semióticas / Francisco Marcio de Oliveira; orientadora Fernanda Andrea F. Silva.- 2021.
87 f. : il.

Orientadora: Fernanda Andrea F. Silva.
TCC (Licenciatura em Matemática) – Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia da Paraíba, Cajazeiras, 2021.

1. Números racionais 2. Relação parte-todo 3. Registro geométrico bidimensional 4. livro didático I. Título

CDU 511(0.067)

Dedico este trabalho de Conclusão de Curso, primeiramente a Deus pelo dom da vida, pela saúde e disposição para lutar a cada amanhecer. Aos meus pais Geraldo (in memoriam) e Tereza por me guiar pelo caminho certo, sempre com muito amor e carinho, dando suporte necessário para hoje comemorar esta importante conquista.

AGRADECIMENTOS

Os meus agradecimentos aos colegas de curso que contribuíram para minha formação acadêmica e pessoal, proporcionando experiências que serão indispensáveis na jornada profissional.

Em especial, agradeço a orientadora deste trabalho, a pesquisadora Prof.ª Dr.ª Fernanda Andrea Fernandes Silva pela contribuição indispensável para a conclusão deste trabalho, dedicando-se e prestando uma orientação minuciosa e técnica, enfim, agradeço pela disponibilidade e humildade que tratou seu orientando.

Por fim, agradeço aos demais professores do curso de Licenciatura Plena em Matemática do IFPB Campus Cajazeiras pelas experiências e conhecimento construído no decorrer do curso.

RESUMO

O presente trabalho de abordagem qualitativa objetivou analisar o livro didático quanto às características das figuras geométricas empregadas no LD para o estabelecimento da relação parte-todo e em transformações entre registros de representações dos números racionais que envolvem o registro geométrico bidimensional. Para isso, tivemos como referência a Teoria dos Registros de representações semióticas de Raymond Duval, a pesquisa desenvolvida por Silva e Moretti (2020) que buscou analisar as características das figuras geométricas utilizadas para trabalhar a relação parte-todo dos números racionais, como também a pesquisa de doutoramento de Silva (2018) e o estudo de Silva e Santos (2020) que estabeleceu graus de não congruência semântica nas conversões entre os registros geométrico bidimensional e numérico fracionário dos números racionais. Foi escolhido duas coleções para análise dos livros de 6º e 7º anos do Ensino Fundamental aprovadas pelo PNLD. Concluímos que as coleções utilizam figuras geométricas para trabalhar a relação parte-todo dos números racionais que apresentam um alto grau de congruência semântica nas transformações entre o registro geométrico bidimensional e numérico fracionário, estimulando o procedimento da dupla contagem para o estabelecimento da relação parte-todo que pode gerar uma avaliação enganosa quanto a aprendizagem dos educandos. Pois, a maioria das questões trabalhadas nas coleções analisadas são particionadas explicitamente em subfiguras com mesmo número de lados. Além disso, priorizam a conversão do registro geométrico bidimensional para o numérico fracionário dos números racionais.

Palavras-chave: Números racionais; relação parte-todo; registro geométrico bidimensional; livro didático.

ABSTRACT

The present work, with a qualitative approach, aimed to analyze the textbook regarding the characteristics of geometric figures used in the DL to establish the part-whole relationship and in transformations between registers of representations of rational numbers that involve the two-dimensional geometric register. For this, we used Raymond Duval's Theory of Records of Semiotic Representations as a reference, the research developed by Silva and Moretti (2020) that sought to analyze the characteristics of the geometric figures used to work the part-whole relationship of rational numbers, as well as the PhD research by Silva (2018) and the study by Silva and Santos (2020) that established degrees of semantic non-congruence in the conversions between the two-dimensional geometric and fractional numerical registers of rational numbers. Two collections were chosen for analysis of books from the 6th and 7th years of Elementary School approved by the PNLD. We conclude that the collections use geometric figures to work the part-whole relationship of rational numbers that present a high degree of semantic congruence in the transformations between the two-dimensional geometric and fractional numerical register, stimulating the double counting procedure to establish the part-whole relationship which can generate a misleading assessment of student learning. Because, most questions worked in the analyzed collections are explicitly partitioned into subfigures with the same number of sides. Furthermore, they prioritize the conversion of the two-dimensional geometric register to the fractional numerical register of rational numbers.

Keywords: Rational numbers; part-whole relationship; two-dimensional geometric register; textbook.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE QUADROS

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

No decorrer da caminhada docente, é possível perceber que alguns conteúdos, principalmente, no componente curricular Matemática, provocam diversas dificuldades na sua aprendizagem, entre eles, os números racionais, cuja temática é alvo de discussões em diversas pesquisas que envolvem o ensino dessa disciplina, como afirmam Romanato (1997) e Oliveira (2016).

Como também evidenciamos, nos estágios supervisionados desenvolvidos durante o curso, as dificuldades que os alunos da educação básica apresentam em representar e compreender os conceitos que envolvem os números racionais.

O ensino e a aprendizagem dos números racionais na educação básica se dão a partir do 4° ano das séries iniciais do Ensino Fundamental, de acordo com a Base Nacional Comum Curricular – BNCC (BRASIL, 2018). E de acordo com Romanatto (1997) esses números apresentam diversos significados, dependendo do contexto em que são utilizados, em diferentes representações, a exemplo da representação fracionária, decimal, porcentagem, língua natural e figuras geométricas. Entre os significados desses números está a relação parte-todo.

Segundo Post, Behr e Lesh (1982), o conceito de relação parte-todo dos números racionais consiste em particionar uma quantidade contínua podendo ser um comprimento, área ou volume em partes congruentes, ou particionar um conjunto discreto em partes ou subconjuntos de mesmo tamanho.

Para Silva (2018), particionar figuras geométricas em áreas congruentes, aborda ideias como, quanto maior a área de cada parte, menor será o número de partes do todo, sendo tal ideia própria do registro geométrico bidimensional dos racionais[1]. Neste registro é trabalhado prioritariamente a relação parte-todo, dividindo-se a figura geométrica que representa o inteiro em “n” partes congruentes, sendo cada parte representada por “1/n” do inteiro, e o total de partes congruentes “m”, tomadas do inteiro será “m/n”.

Nas figuras geométricas pertencentes ao registro geométrico bidimensional dos números racionais é necessário reconhecer algumas características visuais para que

[1] O registro geométrico bidimensional dos números racionais é composto de representações semióticas que são figuras geométricas planas com particionamento totalmente explícito ou parcialmente implícito.

seja estabelecida a relação parte-todo. Entretanto, para Santos (2005) e Costa (2011), figuras geométricas que possuem o particionamento total em subfiguras de áreas congruentes e mesma forma, pode estimular o aluno a utilizar o procedimento da dupla contagem para estabelecer a relação parte-todo e realizar a conversão[2] do Registro geométrico bidimensional para o numérico fracionário dos números racionais. Silva e Moretti (2020) afirmam que o procedimento da dupla contagem consiste na contagem das partes tomadas do inteiro e daquelas em que o inteiro foi dividido, sem garantir que o aluno tenha a compreensão da relação entre as partes e o todo, como também, da necessidade de congruência entre as áreas das partes.

Silva e Moretti (idem) apresentam cinco tipos diferentes de figuras geométricas, com particionamento explícito ou implícito, para que sejam trabalhadas no ensino e aprendizagem da relação parte-todo e compreensão da conversão dessas figuras geométricas para fração. Esses autores afirmam ainda que as figuras geométricas com particionamento implícito necessitam de transformações para que seja visualizada a congruência entre as áreas das partes e estabelecida a relação parte-todo. Sendo assim, propiciam o trabalho heurístico próprio das figuras geométricas, como as transformações das subfiguras por movimentos de rotação e translação, particionamentos e inclusão de partes.

Por outro lado, Oliveira (2007) e Melo (2017) apontam para a importância do livro didático – LD como recurso pedagógico, por ser o recurso mais utilizado pelos docentes em suas práticas pedagógicas e que, portanto, norteiam o ensino e aprendizagem na educação básica do nosso país. Dessa forma, se faz necessário analisar os seguintes aspectos: Como os livros didáticos estão abordando a relação parte-todo dos números racionais na sua representação geométrica bidimensional? Quais são os tipos de figuras geométricas que estão sendo utilizadas? Essas figuras geométricas podem levar ao desenvolvimento da heurística, ou apenas transparecem o procedimento da dupla contagem?

Neste sentido, temos como objetivo geral, analisar as características das figuras geométricas empregadas no LD para o estabelecimento da relação parte-todo e em transformações entre registros de representações dos números racionais que envolvem o registro de representação geométrico bidimensional.

---

[2] Conversão de acordo com Duval (2012) é a transformação realizada entre registros de representações semióticas distintos. Nesse caso, seria a transformação da figura geométrica (registro geométrico bidimensional) para a fração (registro numérico fracionário).

Como meio para alcançar o objetivo geral, delineamos os seguintes objetivos específicos: Identificar questões e situações do LD que envolvem a relação parte-todo e as transformações entre registros que utilizam o registro geométrico bidimensional dos números racionais; analisar nas questões e situações identificadas as características das figuras geométricas e possíveis tratamentos necessários para que seja estabelecida a relação parte-todo na representação geométrica bidimensional dos números racionais; analisar nas questões e situações identificadas a transformação entre os registros envolvidos.

Esse trabalho foi organizado em capítulos. No primeiro capítulo, apresenta-se a contextualização da temática em discussão, o problema de pesquisa, a justificativa pela escolha do tema, os objetivos gerais e específicos e a síntese dos tópicos subsequentes.

No segundo, uma discussão do Programa Nacional do Livro Didático (PNLD), com ênfase na importância do LD no contexto educacional, abordando também a Teoria dos Registros de representações semióticas de Raymond Duval e a discussão das características visuais das figuras geométricas utilizadas para trabalhar a relação parte-todo, na conversão entre os registros geométrico bidimensional e numérico fracionário dos números racionais.

No terceiro capítulo, evidencia-se o percurso metodológico dessa pesquisa. No quarto é realizada a análise da coleção A, no quinto a análise da coleção B. Em seguida teceu-se as considerações finais, constando reflexões dos resultados encontrados e das contribuições deste estudo.

2 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

Neste capítulo estão algumas considerações acerca do histórico da criação do PNLD e da sua importância para a educação básica. Traz também uma breve introdução da teoria dos registros de representação semiótica desenvolvida por Raymond Duval, bem como, as questões que envolvem a relação parte-todo dos números racionais.

2.1 Programa Nacional do Livro Didático (PNLD)

Com base nos aportes teóricos de estudiosos da educação e documentos oficiais do Governo Federal, descreve-se aqui de modo objetivo acerca da criação e implementação do Programa Nacional do Livro Didático – PNLD no Brasil.

De acordo com a Resolução nº 42 de 28 de agosto de 2012, o Programa Nacional do Livro Didático (PNLD) para a Educação Básica, é justificado,

> Considerando ser a educação um direito de todos e um dever do Estado, visando ao pleno desenvolvimento da pessoa, seu preparo para o exercício da cidadania e sua qualificação para o trabalho, de acordo com o estabelecido na Constituição Federal; Considerando as diversidades sociais e culturais que caracterizam a população e a sociedade brasileira, demandando a garantia de oportunidades e a igualdade de condições para o acesso e a permanência dos alunos na escola; Considerando a importância da participação dos docentes no processo de escolha dos livros, em função do conhecimento da realidade dos seus alunos e das suas escolas. (BRASIL, 2012 p.1).

O livro didático no Brasil faz parte de um movimento que se iniciou no final da década de 1930, mais precisamente, em 1937, a partir da criação do Instituto Nacional do Livro – INL. Passados quase meio século, no preâmbulo da década de 1980, surge o PNLD, cuja implementação ocorre em 1996.

Segundo Menezes (2001) citado por Cornélio (2015, p. 29):

> [...] a implementação do PNLD foi resultado das decisões internacionais da Conferência Mundial de Educação para Todos, realizada em 1990, em Jomtien, Tailândia. Essa conferência teve por objetivo estabelecer compromissos mundiais para garantir a todas as pessoas os conhecimentos básicos necessários a uma vida digna, condição insubstituível para o advento de uma sociedade mais humana e mais justa. Participaram das discussões a Organização das Nações Unidas para a Educação, Ciência e Cultura (Unesco) e o Fundo das Nações Unidas para a Infância (Unicef), com apoio do Banco Mundial (BM) e de várias outras organizações intergovernamentais,

> regionais e organizações não governamentais (ONGs). (MENEZES (2001) apud CORNÉLIO (2015, p. 29))

Destaca-se o fundamental papel do Banco Mundial (BM) neste contexto, como sendo além de financiador, o órgão orientador do programa, mediante a atuação de técnicos responsáveis pela educação do país. Com vistas no estabelecimento de melhorias educacionais, delimitou-se nove insumos, entre estes, o livro didático foi contemplado como o quarto insumo, revelando a propensão de custear a educação das nações em desenvolvimento, em contraversão a qualidade do ensino, com foco principal para as questões econômicas, quantitativamente (BITTENCOURT, 2002).

A Conferência de Jomtien, evento que ocorreu no ano de 1990, passou a ser, então, um tipo de referência na educação. Assim, para assegurar o cumprimento de suas metas, lançou incentivos aos países participantes correspondentes à elaboração dos Planos Decenais de Educação, com o intento de fomentar melhorias na Educação Básica.

A partir da universalização da Educação Básica, prevista na Constituição Federal de 1988, o Brasil, atendendo às exigências da Conferência dá início a construção do Plano de Desenvolvimento de Educação – PDE, conhecido atualmente como Plano Nacional de Educação – PNE, documento normativo que determina as metas e as diretrizes validadas por um período de 10 anos, sendo o primeiro Plano aprovado no país em 2001, isto é, compreendendo o decênio 2001 a 2010.

Para a implementação do programa e sua consequente universalização, ocorreu a distribuição de forma gratuita do livro didático no Ensino Fundamental, exigindo do governo um rigoroso controle de qualidade.

Nesse contexto, Cornélio (2015) afirma que:

> Na tentativa de controlar e garantir a qualidade da educação brasileira e a qualidade do livro didático, o MEC passou a desenvolver e executar medidas, desde a implementação do PNLD, para avaliar sistemática e continuamente os livros didáticos a serem distribuídos para as escolas públicas, exercendo, dessa forma, um maior controle a esse suporte de circulação em âmbito nacional. Cornélio (2015, p. 32).

No ano de 1996, ocorreu o lançamento do primeiro Guia do livro didático, destinado às séries iniciais do Ensino Fundamental, material formulado para orientar os educadores na escolha do livro didático. Contudo, por não haver professores habilitados para a avaliação e seleção desse material, o Ministério da Educação – MEC criou uma comissão avaliadora, com o objetivo de classificar os livros conforme as exigências estabelecidas pelos Parâmetros Curriculares Nacionais – PCNs. Mas, depois de formada a comissão, é gerado na equipe docente um certo receio, por não fazerem parte do quadro de avaliadores, bem como nas editoras, cujos exemplares não foram classificados.

Diante das políticas públicas de implantação do livro didático, buscou-se garantir a qualidade dos livros, através da elaboração de Editais e Guias do Livro Didático, com orientações aos professores no curso da seleção desse documento.

O LD é o principal e, por muitas vezes o único material didático utilizado nas escolas públicas, destacando assim seu papel fundamental e balizador na educação básica, assim afirma Oliveira (2007). Como também, é fundamental para que se tenha uma uniformidade no currículo de todas as unidades da federação, seguindo as normas e critérios previstos na BNCC.

Segundo o portal do FNDE, o processo de escolha do LD inicia-se na manifestação formal de interesse das escolas em participar dos programas de livro didático. Em seguida, é lançado o edital no Diário Oficial da União que estabelece regras para inscrição de obras por parte das editoras. Para analisar o enquadramento das obras inscritas, é realizada uma avaliação pelo Instituto de Pesquisas Tecnológicas do Estado de São Paulo (IPT). Os livros que cumprem as regras previstas no edital são encaminhados à Secretaria de Educação Básica (SEB/MEC), responsável pela avaliação pedagógica. Os especialistas escolhidos pela SEB elaboram resenhas dos livros aprovados, que passam a compor o guia de livros didáticos.

Ainda de acordo com o portal do FNDE, os livros didáticos aprovados que constam no guia são escolhidos de forma democrática pelos professores e diretores de cada escola pública brasileira. Mas, segundo Vidal (2016), os professores e diretores não dispõem de tempo para analisarem as obras, são despreparados para tal tarefa e que o processo de escolha não contempla a avaliação de todos os professores que lecionam a mesma disciplina.

2.2 A Teoria dos Registros de Representação Semiótica

A matemática é composta por símbolos, escritas, segmentos, pontos, que representam objetos matemáticos. Essas representações não podem ser confundidas com o objeto matemático, para que a compreensão dos conhecimentos adquiridos seja alcançada.

Para Duval (2012), as dificuldades presentes na aprendizagem em Matemática ocorrem pelo fato de os alunos só terem acesso aos objetos matemáticos por meio de um sistema semiótico, pois estes objetos não possuem existência física, e que tais sistemas são diversos, com transformações complexas.

Assim, torna-se um paradoxo cognitivo pensar que,

> De um lado, a apreensão dos objetos matemáticos não pode ser mais do que uma apreensão conceitual e, de outro, é somente por meio de representações semióticas que a atividade sobre objetos matemáticos se torna possível. (DUVAL, 2012 p. 268).

Dessa forma o referido autor afirma que,

> As representações mentais recobrem o conjunto de imagens e, mais globalmente, as conceitualizações que um indivíduo pode ter sobre um objeto, sobre uma situação e sobre o que lhe é associado. As representações semióticas são produções constituídas pelo emprego de signos pertencentes a um sistema de representações que tem inconvenientes próprios de significação e de funcionamento. Uma figura geométrica, um enunciado em língua natural, uma fórmula algébrica, um gráfico são representações semióticas que exibem sistemas semióticos diferentes. (DUVAL,2012 p. 269).

Assim, compreende-se que “as representações não são somente necessárias para fins de comunicação, elas são igualmente essenciais à atividade cognitiva do pensamento.” (DUVAL,2012 p. 269)

Desse modo, vale destacar que o desenvolvimento da representação mental depende da representação semiótica,

> O funcionamento cognitivo do pensamento humano se revela inseparável da existência de uma diversidade de registros semióticos de representação. Se é chamada “semiose” a apreensão ou a produção de uma representação semiótica, e “noesis” a apreensão conceitual de um objeto, é preciso afirmar que a noesis é inseparável da semiose. (DUVAL,2012 p. 270).

Portanto, o ‘fazer’ matemática envolve transformações entre representações semióticas, denominadas de ‘tratamento’ e ‘conversão’. O tratamento diz respeito à transformação interna a um registro. Dentre as formas de tratamento, Duval (2012), destaca: a paráfrase e a inferência, o cálculo, a reconfiguração e a anamorfose:

> A **paráfrase** e a **inferência** são formas de tratamento em língua natural. O **cálculo** é uma forma de tratamento próprio das expressões simbólicas (cálculo numérico, cálculo algébrico, cálculo proposicional...). A **reconfiguração** é um tipo de tratamento particular para as figuras geométricas: é uma das numerosas operações que dá ao registro das figuras

> o seu papel heurístico. A **anamorfose** é uma forma de tratamento que se aplica a toda representação figural. (DUVAL,2012 p. 272).

No que se refere à conversão, define-se como sendo a transformação externa ao registro. Entre as formas de conversão, elencadas por Duval (2012), estão: a ilustração, a tradução e a descrição.

> **Ilustração** é a conversão de uma representação linguística em uma representação figural. A **tradução** é a conversão de uma representação linguística numa língua dada, em outra representação linguística de outro tipo de língua. A **descrição** é a conversão de uma representação não verbal (esquema, figura, gráfico) em uma função linguística. (DUVAL,2012 p. 272).

É importante destacar que a conversão e o tratamento têm seus aspectos cognitivos diferentes uma da outra, sendo que a primeira não depende da segunda. Um exemplo que fica evidente a esta afirmação é o cálculo numérico. Um educando pode realizar simplificação em uma fração e não pensar em converter para o registro geométrico bidimensional.

Se tratando da conversão, faz-se necessário que os alunos vão além da realização do cálculo, percebendo a diferença entre o sentido e a representação dos símbolos. (FREGE,1971 apud Duval, 2012)

Desse modo, Duval (2012) deixa claro que a garantia de que o aluno compreenda o conceito não se dá pela representação (semióse). O aluno só adquire a compreensão conceitual do objeto (noesis) ao transitar espontaneamente ao menos por dois registros de representações semióticas.

2.3 A relação parte-todo dos números racionais com foco no seu Registro Geométrico Bidimensional

As atividades de matemática envolvendo as figuras geométricas estimulam a prática de duas condutas muito importantes: A conduta espontânea e a conduta controlada. A primeira se refere ao método de percepção das formas geométricas. A segunda diz respeito à interpretação dos elementos que compõe a figura. (DUVAL, 2012).

Uma das principais dificuldades dos alunos quanto à compreensão da relação parte-todo dos números racionais, está relacionada ao conceito de área das figuras geométricas. Outro problema relacionado a essa questão é quanto ao entendimento da figura unitária e sua divisão em partes congruentes (SILVA, 2018).

Entretanto, Campos, Magina e Nunes (2006) apontam que,

> As situações com significado parte-todo, muito usadas no ensino de fração no Brasil, resumem-se, em geral, em dividir uma área em partes iguais, em nomear uma fração como o número de partes pintadas sobre o número total de partes e em analisar a equivalência e a ordem da fração por meio da percepção. Tais ações levam os alunos a desenvolverem seus raciocínios sobre fração baseados principalmente na percepção, em detrimento das relações lógico-matemáticas. (CAMPOS, MAGINA & NUNES, 2006, p. 128).

É de suma importância que o sujeito ultrapasse os limites do particionamento das figuras geométricas para estabelecer a relação parte-todo, a partir do significado dado a necessidade de congruências entre as áreas das partes ou subfiguras e da realização de tratamentos próprios ao tipo de figura trabalhada (SILVA, 2018).

Para Duval (2011, p. 92), “é preciso organizar as tarefas fazendo variar a figura geométrica, depois a situação que ajuda a <<ver>> a solução até aquelas em que, ao contrário, torna-se difícil ou impossível vê-la.”

Portanto, é possível perceber que o conhecimento matemático não interfere nas possibilidades de tratamentos figurais, pelo fato de que se deve levar em consideração todas as modificações que podem surgir ao longo do processo. Duval (2004) afirma que:

> Nem sempre é fácil ver sobre uma figura as relações ou as propriedades relativas as hipóteses dadas e que correspondem com a solução buscada [...] é essencial do ponto de vista cognitivo e didático não confundir a possibilidade de tratamento figural com a legitimidade ou a justificação matemática destes tratamentos figurais. A possibilidade dos tratamentos figurais está vinculada às possibilidades de modificação que surgem das relações das partes com o todo, por exemplo, relações óticas, visuais ou posicionais de uma figura; modificações que podem efetuar-se física ou mentalmente e é independentemente de todo conhecimento matemático. (DUVAL, 2004, p. 162).

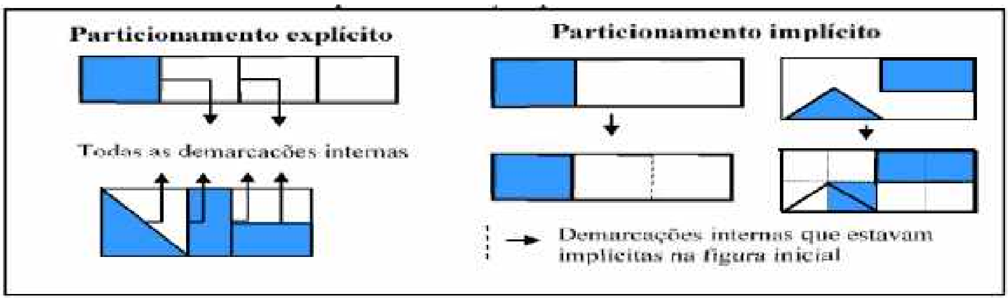
Assim, ao analisar as figuras geométricas para trabalhar a relação parte-todo dos números racionais, deve-se levar em consideração que toda figura possui suas características, e que o particionamento pode se apresentar de forma explícita ou implícita. Neste âmbito, Silva e Moretti (2020) reforçam que,

> As ideias matemáticas de particionamento em áreas congruentes, tais como, quanto maior a área de cada parte, menor será o número de partes do todo, a conservação do todo e a equivalência de frações são intrínsecas ao registro geométrico bidimensional dos racionais. (SILVA e MORETTi, 2020 p. 286).

Desse modo, nota-se que o registro geométrico bidimensional dos números racionais apresenta tratamento próprio, exigindo um olhar não linear em relação às cores, traços e área das partes das unidades básicas figurais.

Segundo Silva e Moretti (2020), o particionamento é uma importante característica visual destas figuras geométricas. Tal particionamento pode ser apresentado explícito, ou seja, quando a figura é totalmente particionada, ou de forma implícita, quando o particionamento não está totalmente visível, sendo necessário realizar um tratamento na figura geométrica, conforme Figura 1.

Figura 1- Tipos de particionamentos das figuras geométricas quanto à relação parte-todo.

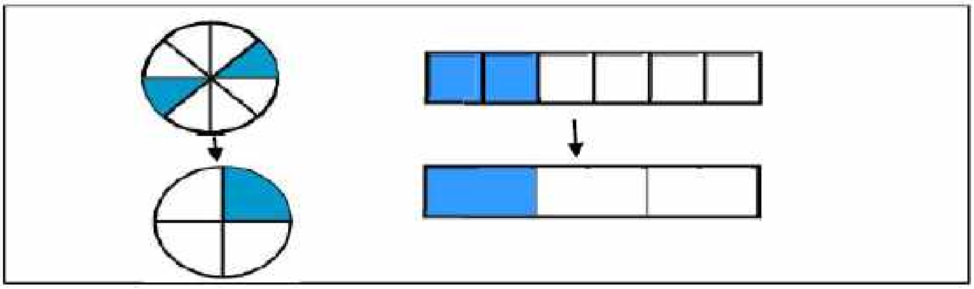


Fonte: Silva e Moretti (2020 p. 290).

As figuras geométricas que possuem particionamento explícito em subfiguras com mesmo número de lados, são chamadas figuras prototípicas, pois todos os elementos visuais necessários para a relação parte todo estão explícitos, não sendo necessário realizar tratamento para o estabelecimento da relação parte-todo, pois a unidade parte é dada, como afirmam Silva e Moretti (2020).

Entretanto, nestes tipos de figuras geométricas pode ocorrer das subfiguras poderem ser sobrepostas e formarem novas subfiguras, com unidade parte equivalentes, de acordo com a figura 2.

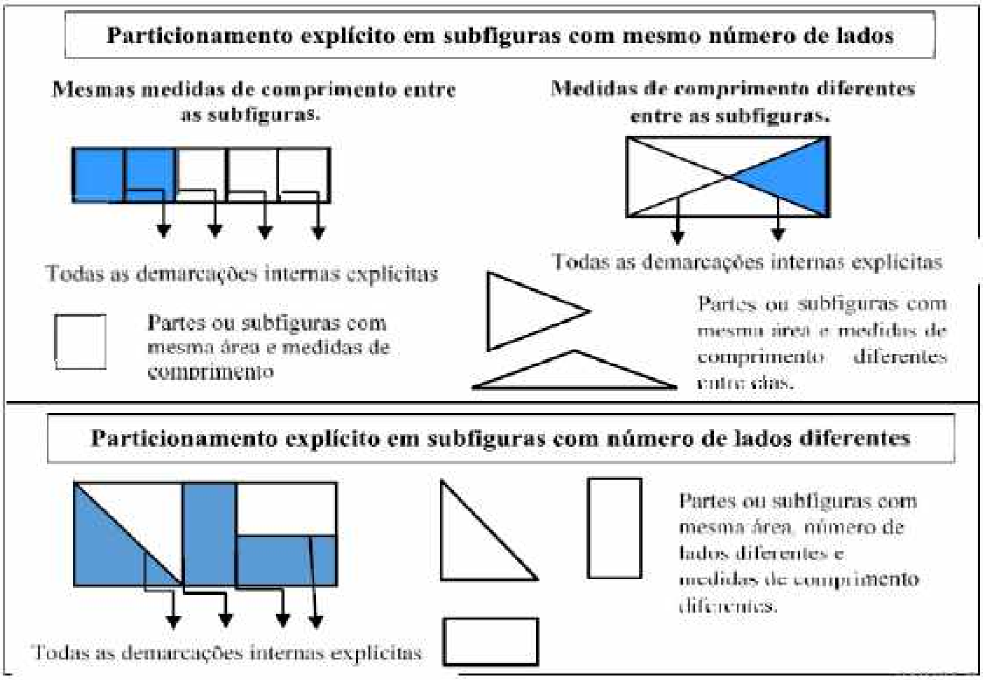
Figura 2 - Figuras geométricas com particionamento explícito e formas homogêneas que aceitam sobreposição de partes.



Fonte: Silva e Moretti (2020 p. 292).

Tais figuras favorecem o conceito de equivalência, enquanto as figuras particionadas em subfiguras com número de lados diferentes dificulta a percepção de equivalência, segundo os autores citados. Podemos notar as diferenças visuais destes dois tipos de particionamento explícito na figura 3.

Figura 3 - Tipos de particionamento explícitos das figuras geométricas quanto à relação parte-todo

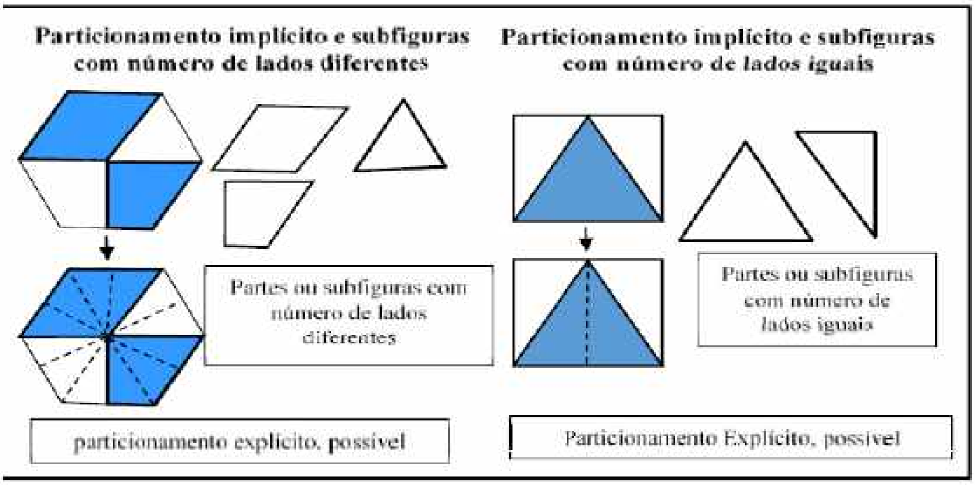


Fonte: Silva e Moretti (2020 p. 291).

As subfiguras com número de lados diferentes dificultam a utilização da dupla contagem e aborda a necessidade de realizar tratamentos figurais, tornando claro a importância de utilizar uma diversidade de figuras com múltiplas características para trabalhar a relação parte-todo dos números racionais.

Entre os tipos de figuras, é importante discutir aquelas que apresentam o particionamento implícito para estabelecer a relação parte todo. Este tipo de particionamento também dificulta o procedimento da dupla contagem e garante uma aprendizagem mais significativa, pois é necessário que o educando realize um tratamento figural para encontrar a unidade parte em que o inteiro foi dividido, evidenciando a necessidade de particionar o inteiro em partes congruentes. Observe na figura 4 as características visuais deste tipo de particionamento.

Figura 4 - Tipos de particionamento implícitos das figuras geométricas quanto à relação parte-todo



Fonte: Silva e Moretti (2020 p. 293)

Para concluir, o quadro abaixo aborda os tipos possíveis de figuras para trabalhar conversões entre os registros geométrico bidimensional e numérico fracionário dos números racionais, apontando as características visuais da relação parte-todo, sugeridas por Silva e Moretti (2020).

Quadro 1 - Tipos de figuras geométricas que podem ser utilizadas em atividades de conversão para o registro simbólico fracionário

Fonte: Silva e Moretti (2020 p. 294)

No Quadro 1, podemos observar cinco tipos de figuras geométricas propostas pelos autores com características visuais diferentes para o estabelecimento da relação parte-todo dos números racionais. Dessa forma, podem estimular processos cognitivos distintos, e assim contribuir na construção significativa da relação das partes com o todo na conceptualização de números racionais.

Enquanto que Silva e Santos (2020) classificam em seis graus de não congruência semântica[3] as conversões que tem como registro de partida o geométrico bidimensional e como registro de chegada o numérico fracionário. Dessa forma, definem como 'Figuras perceptuais' as figuras particionadas explicitamente em subfiguras com mesmo número de lados, como sendo aquelas de maior grau de congruência semântica, consistindo em figuras mais perceptíveis, em que a unidade parte é dada sem ser necessário nenhum tratamento. Além disso, estas figuras geométricas são perfeitamente adaptadas ao procedimento da dupla contagem.

Outrossim, os autores classificam como 'figuras operatórias que necessitam modificação das formas e das áreas', aquelas com particionamento implícito em subfiguras com número de lados diferentes. E as definem como apresentando o menor grau de congruência semântica, ou seja, são os tipos de figuras geométricas que menos transparecem os elementos a serem utilizados no estabelecimento da relação parte-todo e conversão para o registro numérico fracionário.

Silva e Santos (2020) afirmam que as características visuais das figuras geométricas podem favorecer ou dificultar as transformações e que quanto menos nítido os elementos figurais necessários para estabelecer a relação parte-todo, mais elementos figurais devem ser descobertos, pois é necessário aprofundar-se para determinar a relação proposta.

[3] Silva (2018) define como congruência semântica a capacidade de transparecer as unidades significantes a serem correlacionadas na conversão entre dois registros de representações semióticas. Quanto menos transparecem os elementos pertencentes as representações necessárias para estabelecer a coordenação entre os dois registros, maior será o grau de não congruência semântica

3 PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS

Com o objetivo analisar as características das figuras geométricas empregadas no LD para o estabelecimento da relação parte-todo e em transformações entre registros de representações dos números racionais que envolvem o registro de representação geométrico bidimensional, se faz necessário definir os métodos científicos e as técnicas de pesquisa capazes de facilitar os processos que envolvem a citada análise.

A respeito, cabe destacar que o método é compreendido como sendo o “caminho para se chegar a um determinado fim” (GIL, 2019, p. 10); e que quando aplicado à ciência passa, a ser concebido como método científico, sendo, nesta circunstância, compreendido como “o conjunto de procedimentos intelectuais e técnicos adotados para se atingir o conhecimento” (GIL, 2019, p. 10). Em relação às técnicas de execução da pesquisa, por sua vez, estas são compreendidas como “um conjunto de preceitos ou processos de que se serve uma ciência ou arte; é a habilidade para usar esses preceitos ou normas, a parte prática” (MARCONI; LAKATOS, 2017, p. 189).

No que concerne aos métodos científicos, estes classificam-se em métodos de abordagem e métodos de procedimento, sendo os métodos de abordagem aqueles capazes de oferecerem as normas genéricas capazes de estabelecerem a ruptura entre os objetivos provenientes do conhecimento científico, daqueles provenientes do senso comum; já os métodos de procedimento, menos abstratos que os de abordagem, estão relacionados diretamente com os procedimentos técnicos, conforme a classificação do estudo (PRODANOV; FREITAS, 2013).

Neste sentido, foram definidos como métodos capazes de atenderem as expectativas e auxiliarem no alcance dos objetivos o método de abordagem racionalista dedutivo e o método de procedimento comparativo. O método dedutivo, conforme define Prodanov e Freitas (2013), é aquele que por meio de princípios, leis ou teorias consideradas verdadeiras e indiscutíveis, condiciona o pesquisador a análises particulares, em conexão descendente, isto é, partindo das teorias e leis específicas, predizendo a situações particulares. Já o método comparativo, assim explicitado por Marconi e Lakatos (2017), está relacionado a possibilidade de comparação acerca das semelhanças e diferenças de grupos, situações ou fundamentos, tanto no presente, quanto no passado, isto é, permite a análise de dados concretos, deduzindo dos mesmos os elementos constantes, sejam eles abstratos ou gerais.

Por sua vez, e de suma importância, a técnica de pesquisa desenvolvida no contexto do processo de análise do objeto deste estudo limitaram-se a documentação indireta, por meio da pesquisa bibliográfica, sendo a princípio, indispensável para a construção da fundamentação teórica que embasou este estudo, bem como para a delimitação do objeto de análise, neste caso, os livros de didáticos de matemática das séries finais do Ensino Fundamental. Conforme explicitam Marconi e Lakatos (2017, p. 189), “toda pesquisa implica o levantamento de dados de variadas fontes, quaisquer que sejam os métodos ou técnicas empregadas”, assim, a técnica de documentação indireta, por meio da pesquisa bibliográfica, se apresenta como material-fonte, útil para o recolhimento prévio de informações sobre o objeto estudado.

As coleções selecionadas para análise foram aprovadas pelo PNLD e adotadas pela Secretaria Municipal de Educação do município de Vieirópolis, na Paraíba. Foi escolhida esta cidade por ser o local onde reside o autor desta pesquisa.

Em síntese, considerando os métodos de abordagem racionalista dedutivo e de procedimento comparativo, bem como a técnica de pesquisa de documentação indireta bibliográfica, foram utilizados no processo de comparação e análise dos livros didáticos a coleção Araribá Mais - Matemática, 6º Ano (capítulos 5 e 6) e 7º Ano (capítulos 4 e 11) da Editora Moderna, cujos autores são Mara Regina Garcia Gay e Willian Raphael Silva. Esta coleção foi denominada neste trabalho de coleção A. Como também, a coleção, Matemática Bianchini, 6º Ano (capítulos 7, 8, 9 e 11) e 7º Ano (capítulos 5, 9 e 11), de Edwaldo Bianchini, da mesma editora que a coleção anterior, tendo sido denominada neste trabalho de coleção B. Os anos escolares escolhidos tiveram como base a BNCC que considera e aprofunda o ensino dos números racionais nos 6°e 7° anos do Ensino Fundamental e o critério para escolha dos capítulos foi conter questões e situações abordadas pelos objetivos.

No livro do 6º ano da coleção A, o capítulo 5 estuda os números racionais na forma de fração, trabalhando este conteúdo em 5 Tópicos: Conceito de frações, situações envolvendo frações, números mistos, frações equivalentes e comparação de frações, dos quais todos serão analisados.

O capítulo 6 conceitua as operações com frações, sendo dividido em 4 Tópicos: Adição e subtração de frações, multiplicação de frações, divisões com frações e porcentagem, dos quais todos serão analisados.

No livro do 7º ano da coleção A, o capítulo 4 trabalha os números racionais e suas operações em diversas representações. Dos 8 Tópicos trabalhados, analisaremos apenas uma questão do primeiro Tópico, intitulado “Números racionais”.

O capítulo 11 sobre proporções e suas aplicações é trabalhado em 8 Tópicos, dos quais apenas uma questão do Tópico 1, denominado “Razão”, utiliza figuras geométricas envolvendo o estabelecimento da relação parte-todo.

No livro do 6º ano da coleção B, o capítulo 7 trabalha com números racionais na forma de fração, onde apresenta situações que são necessários utilizar números não inteiros no dia-a-dia do aluno, subdividindo o capítulo em 7 Tópicos: Os números com os quais convivemos, número racional e a fração que o representa, a fração também pode representar um quociente, a fração como razão, frações equivalentes, simplificação de frações, comparação de números escritos na forma de fração, dos quais apenas o Tópico 6 não será analisado.

No capítulo 8, são trabalhadas as operações com números racionais representados no registro numérico fracionários, sendo dividido em 6 Tópicos: adição e subtração com frações de mesmo denominador, adição e subtração com frações de denominadores diferentes, multiplicação, divisão, potenciação e expressões numéricas, onde apenas o ultimo citado não será analisado.

O capítulo 9 conceitua números racionais na representação decimal e suas operações, sendo dividido em 15 Tópicos, dos quais apenas uma questão do Tópico 2 denominado “As frações decimais e a representação na forma decimal” será analisada.

O capítulo 11 que trabalha com comprimentos e áreas é subdividido em 7 Tópicos, mas apenas uma situação do Tópico 7, denotada de “Área da superfície retangular” será analisada.

O capítulo 5 do livro do 7º ano da coleção B estuda as equações e é dividido em 7 Tópicos, no entanto, analisaremos uma questão do Tópico 3, que trabalha valor numérico de expressões algébricas.

No capítulo 9, denominado “Razões, proporções e porcentagem”, apenas o segundo Tópico dos 6 trabalhados, que estuda a razão entre grandezas de mesma natureza, será objeto de nossa análise.

O capítulo 11 trabalha com áreas e volumes, particionado em 5 Tópicos, dos quais apenas o Tópico 1, que tem a finalidade de conceituar área, terá questões analisadas por se enquadrarem no objetivo de nossa pesquisa.

Por fim, no tocante a sua classificação, trata-se, portanto, de um estudo de natureza aplicada, com fins exploratórios-descritivos, de ordem qualitativa, realizado a partir de fontes bibliográficas. Conforme apontado por Prodanov e Freitas (2013), um estudo pode ser considerado aplicado quando este tem por objetivo gerar conhecimentos de maneira prática, destinado à solução de problemas específicos, envolvendo em seu contexto verdades, interesses locais.

Tem finalidade exploratória-descritiva pois, ao tempo em que se obtém informações sobre o objeto de estudo, são descritas as impressões que sobre ela constroem-se, sem promover interferências nestas.

E abordagem qualitativa, pois não requer a aplicabilidade de métodos e técnicas estatísticas, cujo contato direto entre pesquisador e objeto ocorre a partir da consulta às fontes bibliográficas.

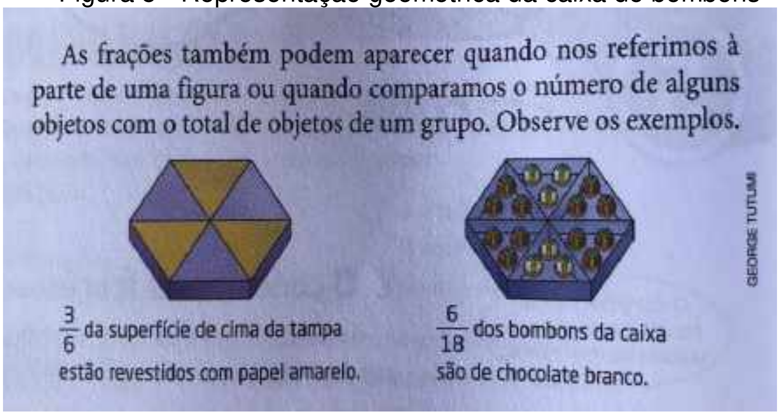
4 ANÁLISE DA COLEÇÃO A

Este capítulo tem como objetivo analisar as questões que envolvem o estabelecimento da relação parte-todo dos números racionais nos livros do 6º e 7º anos do ensino fundamental.

4.1 Análise qualitativa da Coleção A

Introduzindo o Tópico 1 do capítulo 5, temos a situação descrita na Figura 5 que relaciona frações de duas formas diferentes, uma representada por uma quantidade contínua (superfície de cima da tampa) e a outra representa uma quantidade discreta (bombons).

Figura 5 - Representação geométrica da caixa de bombons



Fonte: Silva; Gay (2018a p. 120)

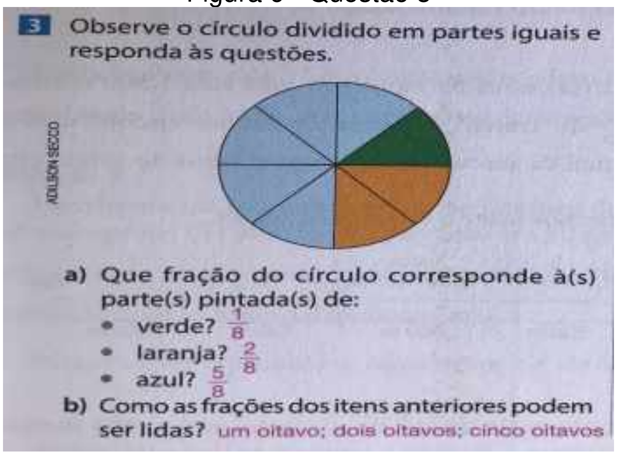
A figura geométrica está dividida em partes com áreas congruentes e mesma forma geométrica (triângulos). Portanto é uma figura prototípica que não necessita de tratamento para que seja estabelecida a relação-parte-todo, bastando serem contadas o número de partes pintadas de amarelo (3) e sobrepondo sobre o número de partes que foi dividido o inteiro (6). Por se tratar de uma situação introdutória de um tópico do capítulo, a figura geométrica vem acompanhada de uma outra representação, nesse caso a numérica fracionária.

A fração (6/18) corresponde a quantidade de chocolates brancos em relação ao total de chocolates. A relação parte-todo é estabelecida a partir de quantidades discretas[4] (quantidade de chocolates), de forma que representa a quantidade de chocolates branco (6), em relação a quantidade de chocolates da caixa (18). E a figura geométrica não é levada em consideração para estabelecer a relação parte-todo.

Nesta situação não podemos citar a ordem da conversão por apresentar os dois registros (geométrico bidimensional e o numérico fracionário). Pois, podemos ver seja no sentido da figura geométrica para a fração, seja da fração para a figura geométrica.

Logo após a situação inicial do Tópico são propostos exercícios. Entre as questões propostas, temos a questão 3 representada na Figura 6, que traz uma circunferência particionada em oito áreas iguais

Figura 6 - Questão 3



Fonte: Silva; Gay (2018a p. 121)

A figura geométrica foi explicitamente particionada totalmente em partes de áreas congruentes e mesma forma geométrica (figura prototípica), tendo sido reforçado o particionamento em áreas iguais no enunciado da questão ao afirmar que o ‘círculo foi dividido em partes iguais’.

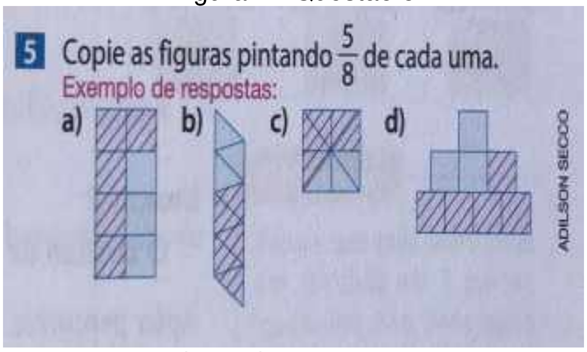
A questão trabalha com três registros de representações dos números racionais, o geométrico bidimensional, o numérico fracionário e o registro da língua natural.

Sendo necessário realizar na letra ‘a’ uma conversão do registro geométrico bidimensional para o numérico fracionário, podendo ser aplicado diretamente o procedimento da dupla contagem; e na letra ‘b’ uma conversão do registro numérico fracionário para o da língua natural.

A Figura 7 apresenta a questão 5 que solicita representar a fração dada nas figuras geométricas que compõem os itens.

[4] Quantidade discreta é uma quantidade enumerável.

Figura 7 - Questão 5

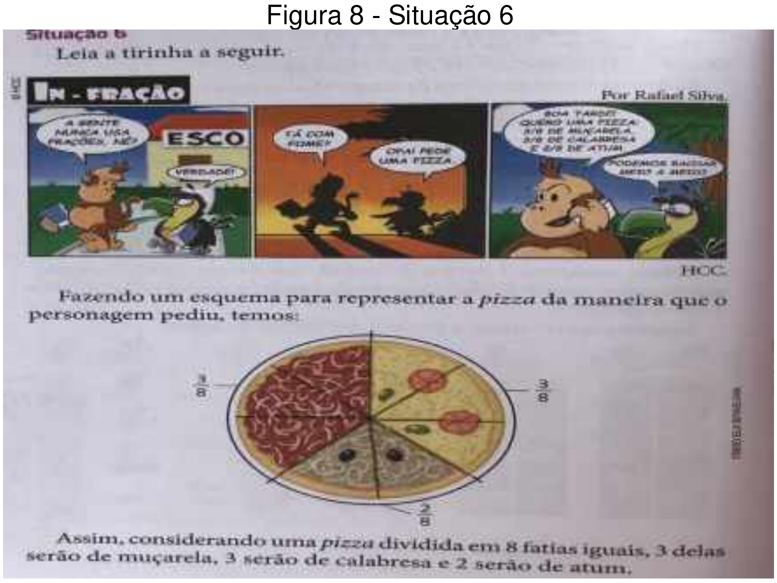


Fonte: Silva; Gay (2018a   p. 121)

Nessa questão é necessário realizar uma conversão do registro numérico fracionário para o geométrico bidimensional. Entretanto, os itens trazem a figura geométrica totalmente particionada em áreas congruentes e mesma forma geométrica, no total de 8 partes. Portanto, o aluno terá apenas que representar a quantidade de partes que foi tomada, pintando 5 partes em cada figura. Sendo assim, o conceito de áreas congruentes das partes não é explorado porque as áreas já vêm explicitamente divididas em partes iguais e de mesma forma.

No tópico 2 que descreve situações que envolvem frações, temos a situação da Figura 8.

Figura 8 - Situação 6

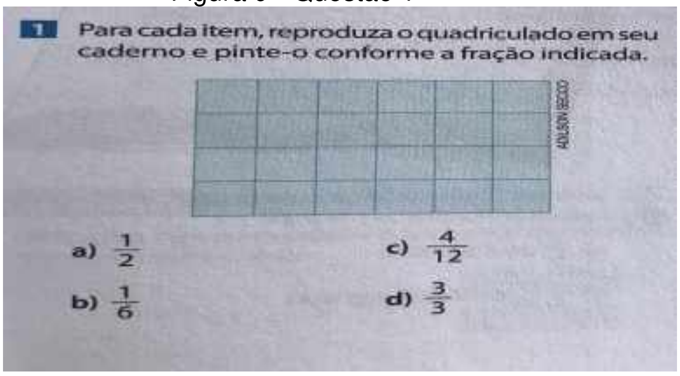


Fonte: Silva; Gay (2018a   p. 124)

A situação descrita trata-se do particionamento de uma pizza em 3 sabores diferentes. E tem uma representação auxiliar, a figura geométrica que representa a pizza explicitamente particionada totalmente em frações de (3/8) do sabor muçarela, (3/8) de calabresa e (2/8) de atum. Podemos verificar que a situação descreve que a pizza foi dividida em 'fatias iguais' sem se referir ao sentido de igualdade, e são trabalhadas as representações, geométrica bidimensional e numérica fracionária dos números racionais.

Logo após trabalhar exemplos de situações que envolvem frações foi proposto a aplicação dos conhecimentos com 10 questões. Entre elas, 3 questões envolvem a relação parte-todo, como a questão 1, representada na Figura 9.

Figura 9 - Questão 1



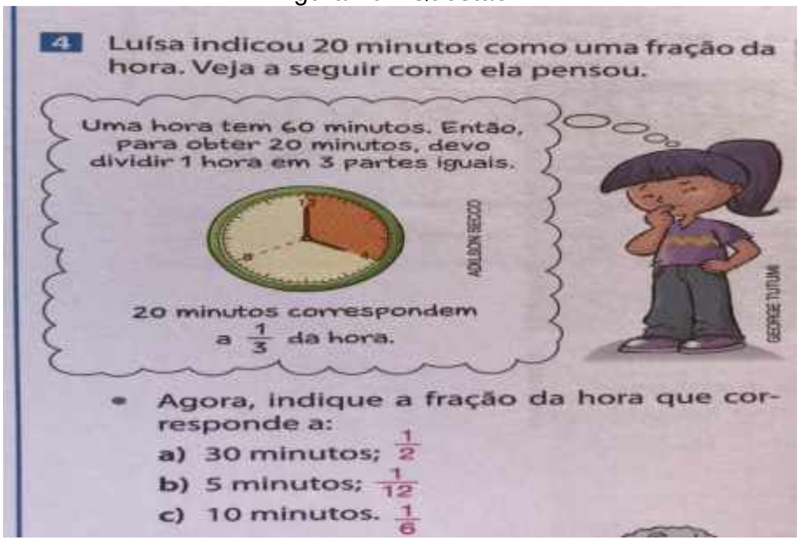
Fonte: Silva; Gay (2018a p. 125)

A questão propõe uma conversão do registro numérico fracionário para o geométrico bidimensional. O todo ou a unidade é fornecida na questão particionado em áreas congruente e de mesma forma (retangulares). Entretanto, o aluno terá que encontrar a 'unidade de área' para realizar o particionamento pedido em cada item e estabelecer a relação parte-todo.

Portanto, terá que realizar um tratamento na figura geométrica inicial reparticionando-a para estabelecer a relação parte-todo em cada item e converter do registro numérico fracionário para o geométrico bidimensional.

A Figura 10, representa a questão 4 que trata de uma situação envolvendo frações de hora, tendo como suporte uma representação auxiliar da figura geométrica (circunferência) que representa um relógio de ponteiros particionado em setores circulares correspondendo cada um a (1/3) da área total da circunferência.

Figura 10 - Questão 4



Fonte: Silva; Gay (2018a p. 126)

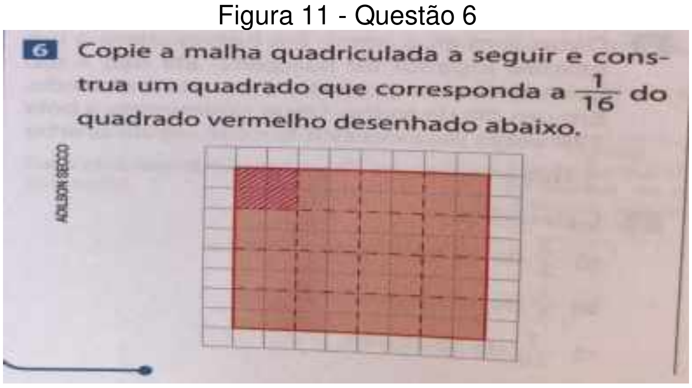
A representação auxiliar apresenta uma situação de conversão do registro numérico ‘em minutos’ para o geométrico bidimensional e desse para o numérico fracionário.

Nos itens de ‘a’ a ‘c’ é solicitado que seja realizada a conversão do registro numérico ‘em minutos’ para o numérico fracionário. Entretanto, a representação auxiliar induz o aluno a realizar uma conversão, ao menos mentalmente ou implicitamente, do registro numérico ‘em minutos’ para o geométrico bidimensional, e depois desse para o numérico fracionário.

Nessa questão é interessante notar que a unidade de área é dada em cada item. Restando ao aluno descobrir ‘quantas cabem’ em 60 min e indicar a fração unitária para cada uma.

A Figura 11 solicita que seja encontrada a ‘unidade-parte’ (1/16) na representação geométrica do quadrado sobreposto a malha quadriculada que compõem a representação auxiliar da questão.

Figura 11 - Questão 6

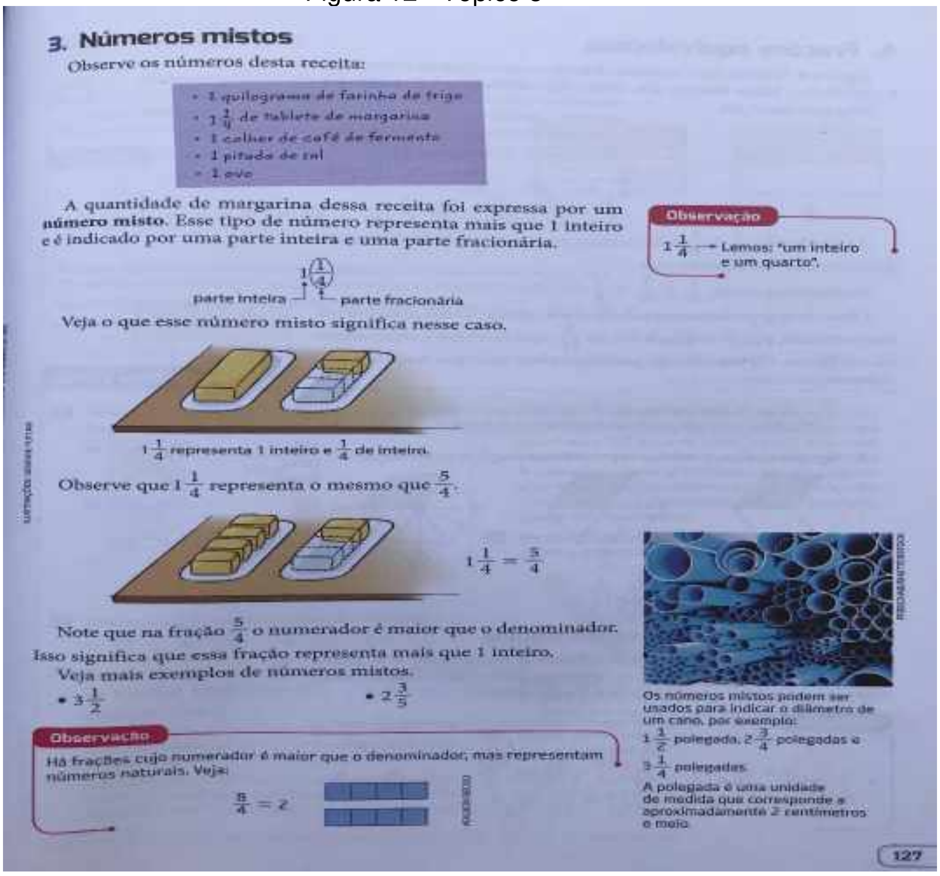


Fonte: Silva; Gay (2018a p. 126)

Nessa questão é necessário que seja encontrada a unidade-parte (1/16), definida no enunciado e particionar o quadrado em unidades-parte de (1/16). Ou seja, em subfiguras do quadrado que contenham a mesma área e forma, sendo um total de 16 subfiguras. Dessa forma é necessária uma conversão do registro numérico fracionário (1/16) para o geométrico bidimensional com o apoio do todo que foi dado (quadrado) e da malha quadriculada.

No Tópico 3 que trata sobre números mistos é apresentada uma situação de parte-todo que envolve uma receita culinária, como na Figura 12.

Figura 12 - Tópico 3



3. Números mistos

Observe os números desta receita:

- 1 quilograma de farinha de trigo
- $1\frac{1}{4}$ de tablete de margarina
- 1 colher de café de fermento
- 1 pitada de sal
- 1 ovo

A quantidade de margarina dessa receita foi expressa por um **número misto**. Esse tipo de número representa mais que 1 inteiro e é indicado por uma parte inteira e uma parte fracionária.

$1\frac{1}{4}$

parte inteira — parte fracionária

Observação

$1\frac{1}{4}$ → Lemos: "um inteiro e um quarto".

Veja o que esse número misto significa nesse caso.

$1\frac{1}{4}$ representa 1 inteiro e $\frac{1}{4}$ de inteiro.

Observe que $1\frac{1}{4}$ representa o mesmo que $\frac{5}{4}$.

$1\frac{1}{4} = \frac{5}{4}$

Note que na fração $\frac{5}{4}$ o numerador é maior que o denominador. Isso significa que essa fração representa mais que 1 inteiro.

Veja mais exemplos de números mistos.

- $3\frac{1}{2}$
- $2\frac{3}{5}$

Observação

Há frações cujo numerador é maior que o denominador, mas representam números naturais. Veja:

$\frac{8}{4} = 2$

Os números mistos podem ser usados para indicar o diâmetro de um cano, por exemplo: $1\frac{1}{2}$ polegada, $2\frac{3}{4}$ polegadas e $3\frac{1}{4}$ polegadas.

A polegada é uma unidade de medida que corresponde a aproximadamente 2 centímetros e meio.

127

Fonte: Silva; Gay (2018a p. 127)

A receita apresenta uma quantidade de margarina maior que um inteiro na representação numérica mista (1 1/4), na representação fracionária (5/4) e na representação geométrica tridimensional.

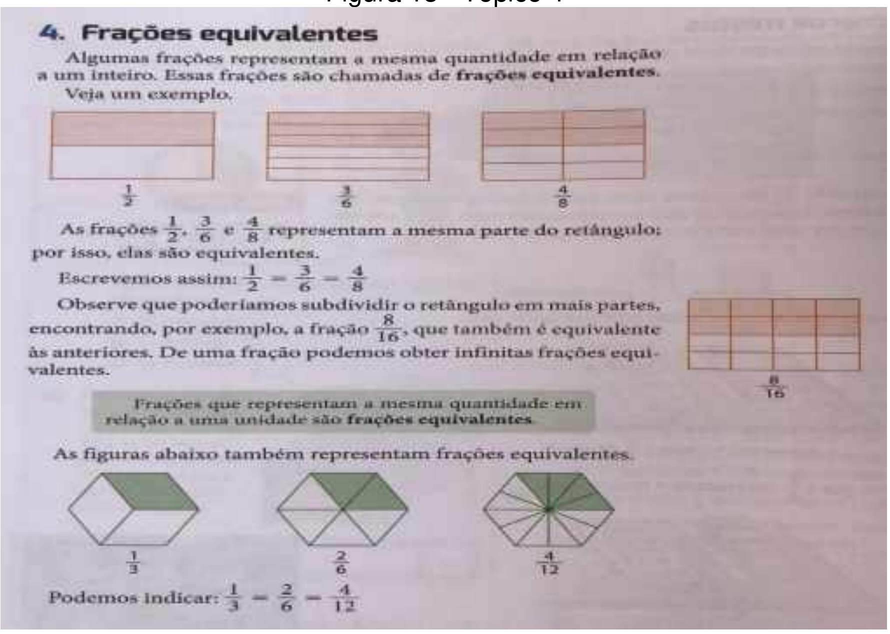
Utiliza uma representação auxiliar que apresenta duas margarinas em forma de um paralelepípedo (representação geométrica tridimensional), sendo um desses sem particionamento explícito e o outro totalmente particionado. E realiza uma conversão do registro numérico misto dos números racionais para o geométrico tridimensional.

Logo em seguida, realiza uma conversão do registro numérico misto para o numérico fracionário, utilizando como apoio a mesma representação auxiliar, tendo dessa vez os dois inteiros totalmente particionados. Dessa forma, busca demonstrar que é necessário ter mais de um inteiro, particionado em 4 partes de mesmo volume para que se tenha tomado 5 partes.

Na parte ‘observação’ apresenta uma conversão do registro numérico misto para a língua natural.

No Tópico 4 são trabalhadas as frações equivalentes, como na Figura 13. Inicialmente, são apresentadas quatro figuras geométricas, representando o mesmo inteiro (um retângulo) com particionamentos distintos (explícitos), mas que as partes pintadas equivalem a mesma área (metade da figura), para trabalhar o conceito de equivalência. Sendo assim, apresentam conversões do registro geométrico bidimensional para o numérico fracionário.

Figura 13 - Tópico 4



4. Frações equivalentes

Algumas frações representam a mesma quantidade em relação a um inteiro. Essas frações são chamadas de **frações equivalentes**.

Veja um exemplo.

$\frac{1}{2}$ $\frac{3}{6}$ $\frac{4}{8}$

As frações $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{6}$ e $\frac{4}{8}$ representam a mesma parte do retângulo; por isso, elas são equivalentes.

Escrevemos assim: $\frac{1}{2} = \frac{3}{6} = \frac{4}{8}$

Observe que poderíamos subdividir o retângulo em mais partes, encontrando, por exemplo, a fração $\frac{8}{16}$, que também é equivalente às anteriores. De uma fração podemos obter infinitas frações equivalentes.

$\frac{8}{16}$

Frações que representam a mesma quantidade em relação a uma unidade são **frações equivalentes**.

As figuras abaixo também representam frações equivalentes.

$\frac{1}{3}$ $\frac{2}{6}$ $\frac{4}{12}$

Podemos indicar: $\frac{1}{3} = \frac{2}{6} = \frac{4}{12}$

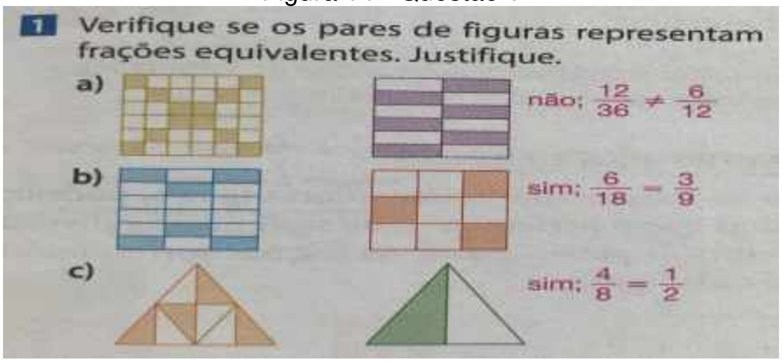
Fonte: Silva; Gay (2018a p. 128)

Logo em seguida, apresenta três figuras geométricas que representam o mesmo inteiro (hexágono regular), particionados, em três, seis e doze partes de áreas iguais, tendo sido pintadas partes de mesma área para obter frações equivalentes.

Nesse caso, também observamos conversões do registro geométrico bidimensional para o numérico fracionário.

Após serem apresentadas as frações equivalentes é proposta uma aplicação dos conceitos trabalhados. A Figura 14 representa a questão 1 de um conjunto de 6 questões. Sendo a única que trabalha a relação parte-todo.

Figura 14 - Questão 1



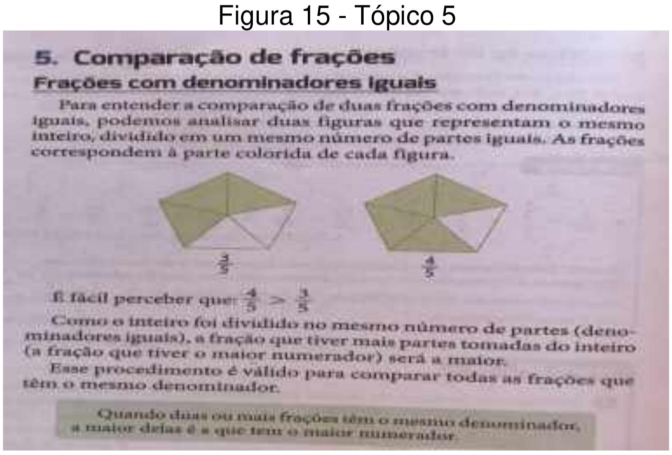
Fonte: Silva; Gay (2018a p. 129)

Esta questão faz parte de um conjunto de questões sobre equivalência de frações, e tem como finalidade comparar figuras particionadas explicitamente em partes iguais, utilizando o registro geométrico bidimensional, com o objetivo de propor ao aluno a classificação quanto à equivalência das figuras geométricas e a conversão para o registro numérico fracionário.

Cada item da referida questão traz duas figuras particionadas em quantidades diferentes de partes congruentes, tomando em cada figura uma certa quantidade de partes, propondo assim ao aluno, analisar em quais itens existe igualdade de partes tomadas em relação a figura inteira.

Dando sequência ao estudo das frações, no Tópico 5 intitulado, ‘Comparação de frações’ representado na Figura 15 aborda uma situação sobre comparação de frações com denominadores iguais.

Figura 15 - Tópico 5



5. Comparação de frações

Frações com denominadores iguais

Para entender a comparação de duas frações com denominadores iguais, podemos analisar duas figuras que representam o mesmo inteiro, dividido em um mesmo número de partes iguais. As frações correspondem à parte colorida de cada figura.

$\frac{3}{5}$ $\frac{4}{5}$

É fácil perceber que: $\frac{4}{5} > \frac{3}{5}$

Como o inteiro foi dividido no mesmo número de partes (denominadores iguais), a fração que tiver mais partes tomadas do inteiro (a fração que tiver o maior numerador) será a maior.

Esse procedimento é válido para comparar todas as frações que têm o mesmo denominador.

Quando duas ou mais frações têm o mesmo denominador, a maior delas é a que tem o maior numerador.

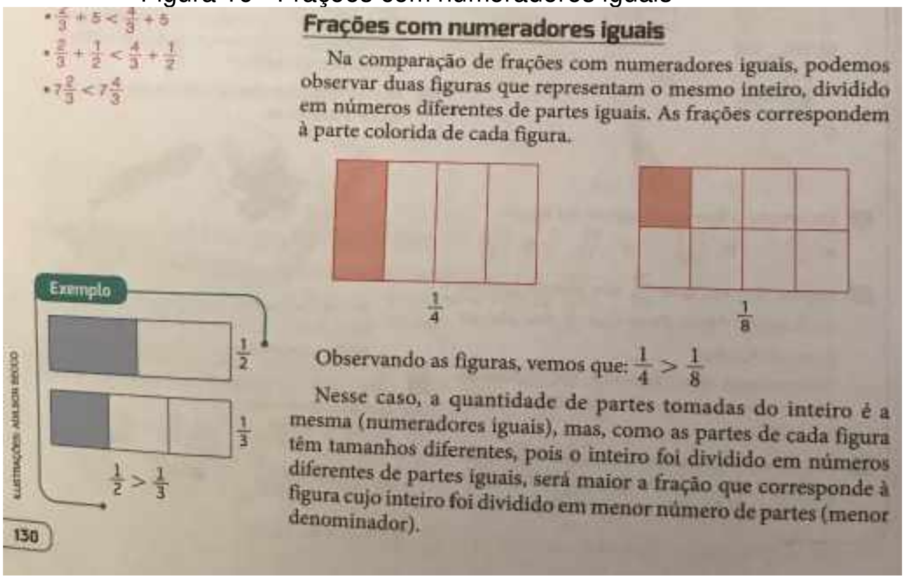
Fonte: Silva; Gay (2018a p. 130)

Temos neste caso, os registros de representações geométrico bidimensional e o numérico, com o objetivo de se trabalhar a comparação entre as frações de mesmo denominador com o auxílio da visualização proporcionada pelas figuras geométricas para ajudar na compreensão da relação existente entre elas.

Neste caso, as figuras geométricas estão com particionamento explícito e as subfiguras possuem mesmo número de lados.

Outra situação do tópico 5 trabalha a comparação de frações com numeradores iguais, também com o auxílio do registro geométrico bidimensional, de acordo com a Figura 16.

Figura 16 - Frações com numeradores iguais



• $\frac{2}{3} + \frac{1}{2} < \frac{4}{3} + \frac{1}{2}$

• $7\frac{2}{3} < 7\frac{4}{3}$

Frações com numeradores iguais

Na comparação de frações com numeradores iguais, podemos observar duas figuras que representam o mesmo inteiro, dividido em números diferentes de partes iguais. As frações correspondem à parte colorida de cada figura.

$\frac{1}{4}$ $\frac{1}{8}$

Exemplo

$\frac{1}{2}$

$\frac{1}{3}$

$\frac{1}{2} > \frac{1}{3}$

Observando as figuras, vemos que: $\frac{1}{4} > \frac{1}{8}$

Nesse caso, a quantidade de partes tomadas do inteiro é a mesma (numeradores iguais), mas, como as partes de cada figura têm tamanhos diferentes, pois o inteiro foi dividido em números diferentes de partes iguais, será maior a fração que corresponde à figura cujo inteiro foi dividido em menor número de partes (menor denominador).

130

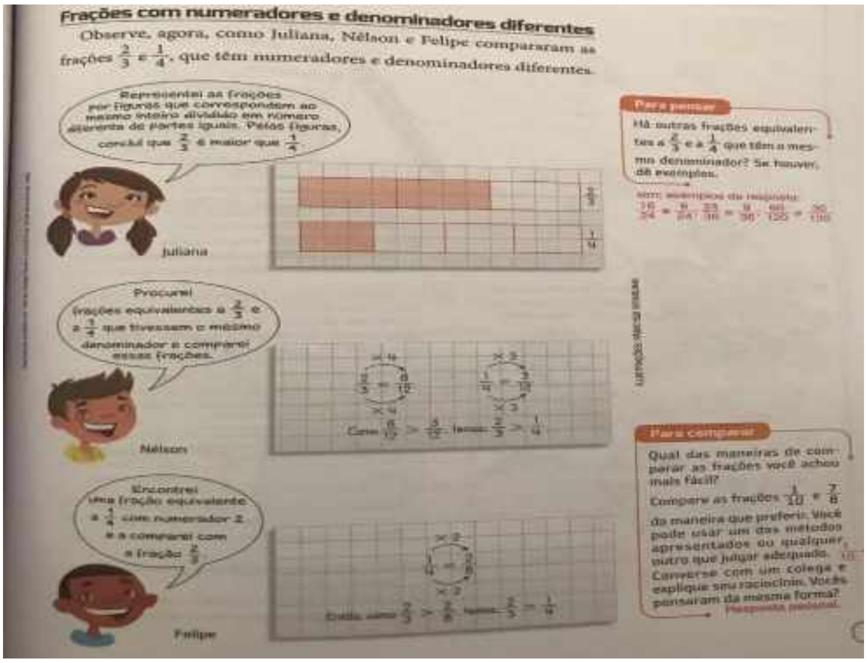
Fonte: Silva; Gay (2018a p. 130)

Na situação, são particionados de forma explícita dois inteiros idênticos em 4 e 8 partes com subfiguras congruentes e mesmo número de lados e tomada uma parte de cada um dos inteiros. Dessa forma, carrega-se na visualização da ideia, quanto menor o número de partes que o inteiro for dividido, maior será cada parte.

No exemplo o autor faz a conversão do registro geométrico bidimensional para o registro numérico fracionário sem reforçar a necessidade de congruência entre as partes, cabendo ao professor trabalhar esse conceito indispensável e desta forma não estimular o procedimento da dupla contagem.

Na Figura 17 é trabalhada ainda outra situação que envolve dessa vez a comparação entre frações com numeradores e denominadores distintos.

Figura 17 - Comparação entre frações com numeradores e denominadores diferentes

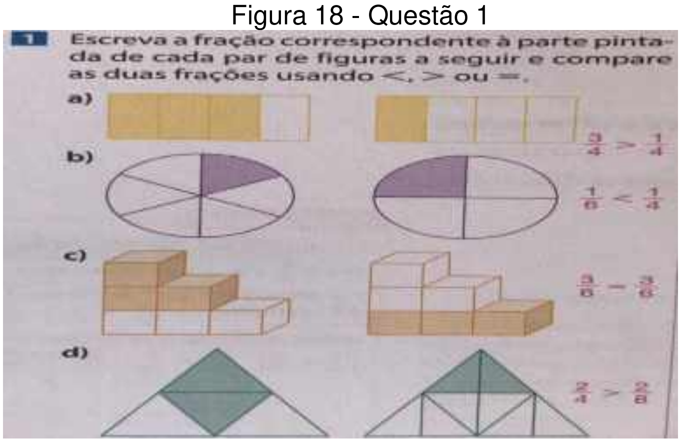


Fonte: Silva; Gay (2018a p. 131)

O tipo de particionamento utilizado é explícito, particionando dois inteiros iguais em 3 e 4 partes congruentes, respectivamente, sendo as subfiguras com mesmo número de lados. O autor utiliza a conversão do registro geométrico bidimensional para o numérico fracionário enfatizando que as partes são congruentes.

Na Figura 18, temos a primeira das 5 questões sobre comparação de frações e uma das duas questões que aborda a relação parte-todo.

Figura 18 - Questão 1



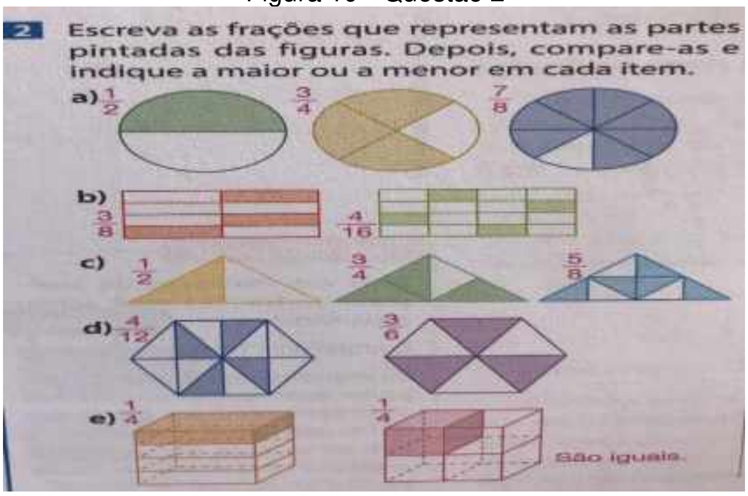
Fonte: Silva; Gay (2018a p. 132)

Cada item requer que o aluno faça a conversão do registro geométrico bidimensional para o numérico fracionário, considerando cada uma das duas figuras geométricas como um todo e depois compare as frações encontradas. A única exceção é o item ‘c’ que apresenta uma representação geométrica tridimensional.

Entretanto, em todos os itens as figuras geométricas estão particionadas explicitamente em subfiguras ou partes de mesmo número de lados.

A Figura 19 traz a segunda questão sobre comparação de frações utilizando a relação parte-todo. Essa questão é muito parecida com a anterior. A maior diferença que vislumbramos são nos itens ‘a’ e ‘c’ que possuem três inteiros.

Figura 19 - Questão 2



Fonte: Silva; Gay (2018a p. 132)

No item ‘a’ temos três círculo congruentes divididos de três formas diferentes, sendo respectivamente suas áreas particionadas em 2, 4 e 8 partes ou subfiguras congruentes. No primeiro círculo, uma parte é pintada de verde, ou seja (1/2) da figura, no segundo círculo, três partes são pintadas de amarelo, (3/4) do inteiro e no terceiro círculo, sete partes são pintadas de azul, que representa 7/8 do círculo.

No item ‘b’, dois retângulos iguais foram particionados de duas diferentes formas, sendo o primeiro em oito partes e no segundo em dezesseis partes, congruentes. No primeiro foram pintadas (3/8) do retângulo de vermelho e (4/16) do outro retângulo foram pintadas de verde.

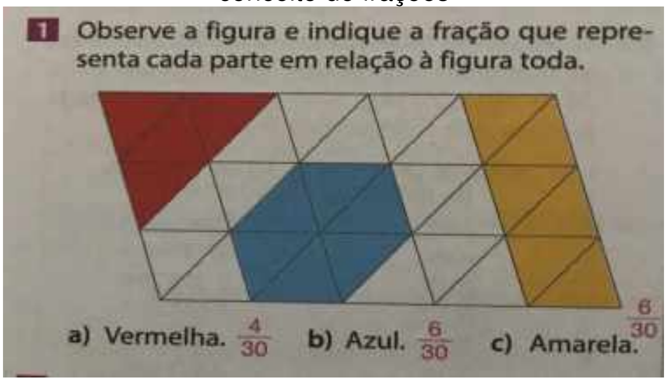
No item ‘c’, três triângulos iguais foram particionados em três diferentes quantidades de partes congruentes e pintadas, respectivamente, (1/2) de amarelo, (3/4) de verde e (5/8) de azul.

No item ‘d’, foram particionadas um hexágono irregular em duas diferentes quantidades de partes congruentes. O primeiro foi dividido em doze partes, dais quais foram pintadas quatro partes de azul (4/12) e o segundo foi particionado e pintadas (3/6) da figura.

No item ‘e’, temos um sólido geométrico, mais precisamente um prisma de base retangular sendo particionado em quantidades de partes congruentes, mas com formas diferentes, pintando (1/4) nas duas figuras, sendo de amarelo na primeira e rosa na segunda.

Na Figura 20, temos a primeira de 9 questões complementares, propostas com o objetivo de revisar conceitos trabalhados no capítulo 5, entre essas questões temos três que trabalham a relação parte-todo dos números racionais.

Figura 20 - Questão 1 da atividade complementar sobre conceito de frações



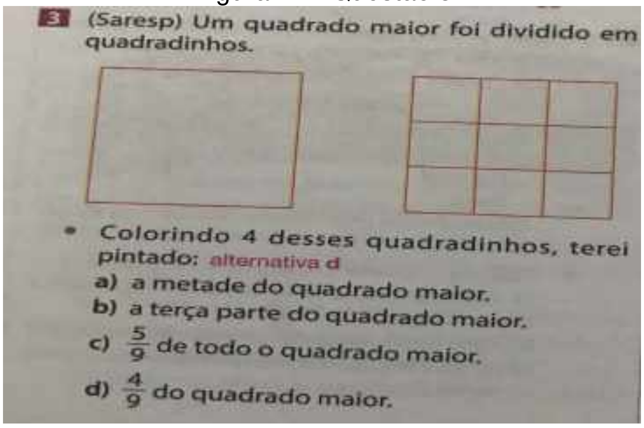
Fonte: Silva; Gay (2018a p. 136)

A questão requer a conversão do registro geométrico bidimensional para o numérico fracionário. A figura geométrica é particionada de forma explícita e em subfiguras com mesmo número de lados um paralelogramo em 30 partes triangulares, onde 4 partes são pintadas de vermelho, 6 são pintadas de azul e 6 são pintadas de amarelo.

Para realizar o estabelecimento da relação parte-todo e a conversão solicitada é necessário que o aluno considere as partes ou subfiguras pintadas de cada cor em relação ao inteiro. Além disso, nessa questão podem ser realizados tratamentos figurais como a sobreposição de subfiguras para encontrar uma fração irredutível.

A segunda questão que utiliza a relação parte-todo na lista de exercícios complementar é representada na Figura 21.

Figura 21 - Questão 3



3 (Saresp) Um quadrado maior foi dividido em quadradinhos.

- Colorindo 4 desses quadradinhos, terei pintado: alternativa d

a) a metade do quadrado maior.

b) a terça parte do quadrado maior.

c) $\frac{5}{9}$ de todo o quadrado maior.

d) $\frac{4}{9}$ do quadrado maior.

Fonte: Silva; Gay (2018a p. 136)

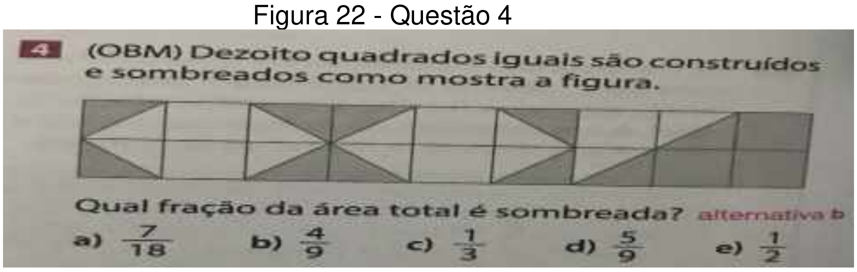
A questão consistiu em particionar um quadrado em 9 partes quadradas. O aluno é questionado sobre qual fração representará a situação quando se tomar 4 partes do inteiro. Dessa forma o autor propõe ao aluno realizar a conversão do registro geométrico bidimensional para o registro numérico fracionário.

O tipo de particionamento é explicito em subfiguras com mesmo número de lados, não trazendo a necessidade de tratamentos para encontrar a unidade parte.

A análise negativa que podemos fazer na questão é utilizar uma figura prototípica, sem ser reafirmado a necessidade de congruência entre as partes, estimulando assim a dupla contagem.

A próxima questão a ser analisada é a questão 4, representada na figura 22. Ela é um pouco distinta das outras duas questões que utilizam a relação parte-todo nesta atividade complementar, utilizando o particionamento implícito em subfiguras com mesmo número de lados diferentes.

Figura 22 - Questão 4



4 (OBM) Dezoito quadrados iguais são construídos e sombreados como mostra a figura.

Qual fração da área total é sombreada? alternativa b

a) $\frac{7}{18}$ b) $\frac{4}{9}$ c) $\frac{1}{3}$ d) $\frac{5}{9}$ e) $\frac{1}{2}$

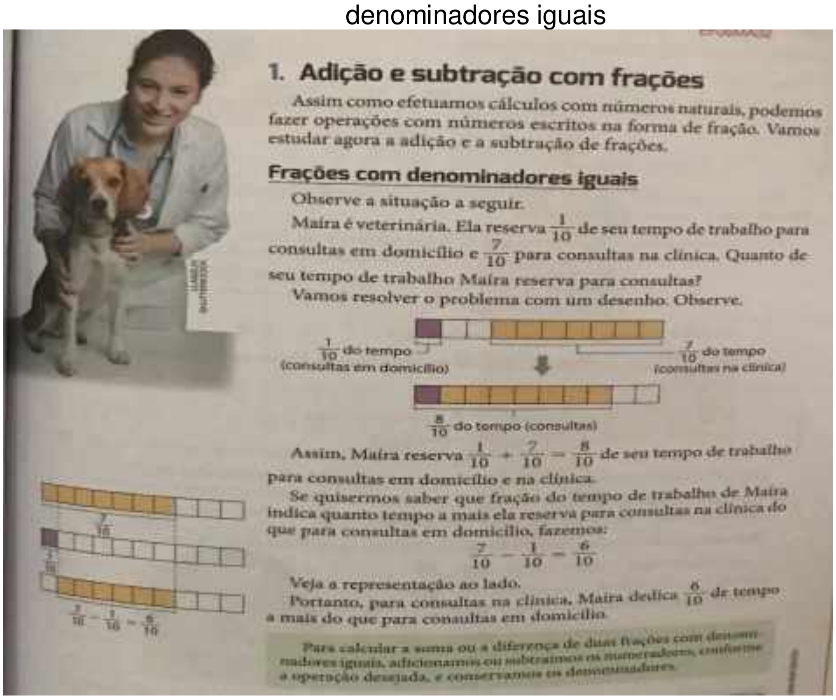
Fonte: Silva; Gay (2018a p. 136)

A figura foi particionada de forma incompleta, sendo algumas partes triângulos e outras partes retangulares. Na questão o aluno deve realizar um tratamento figural, onde permita encontrar a unidade parte e assim possa realizar a conversão do registro geométrico bidimensional para o numérico fracionário. Posteriormente à conversão, o aluno terá que realizar um tratamento no registro numérico fracionário, encontrando a fração irredutível, congruente à fração encontrada na conversão.

Outra maneira do aluno realizar a conversão é fazer um tratamento figural, sobrepondo subfiguras para formar nove retângulos e transladar algumas partes tomadas do inteiro para determinar a fração irredutível, sem ser necessário realizar tratamentos no registro numérico fracionário.

No capítulo 6, Tópico 1 é apresentada uma situação que envolve adição e subtração de frações com denominadores iguais e trabalham a relação parte-todo dos números racionais, no registro geométrico bidimensional auxiliado pelo registro numérico fracionário, conforme Figura 23.

Figura 23 - Situação envolvendo Adição e subtração de frações com denominadores iguais



1. Adição e subtração com frações

Assim como efetuamos cálculos com números naturais, podemos fazer operações com números escritos na forma de fração. Vamos estudar agora a adição e a subtração de frações.

Frações com denominadores iguais

Observe a situação a seguir.

Maíra é veterinária. Ela reserva $\frac{1}{10}$ de seu tempo de trabalho para consultas em domicílio e $\frac{7}{10}$ para consultas na clínica. Quanto de seu tempo de trabalho Maíra reserva para consultas?

Vamos resolver o problema com um desenho. Observe.

$\frac{1}{10}$ do tempo (consultas em domicílio)

$\frac{7}{10}$ do tempo (consultas na clínica)

$\frac{8}{10}$ do tempo (consultas)

Assim, Maíra reserva $\frac{1}{10} + \frac{7}{10} = \frac{8}{10}$ de seu tempo de trabalho para consultas em domicílio e na clínica.

Se quisermos saber que fração do tempo de trabalho de Maíra indica quanto tempo a mais ela reserva para consultas na clínica do que para consultas em domicílio, fazemos:

$$\frac{7}{10} - \frac{1}{10} = \frac{6}{10}$$

Veja a representação ao lado.

Portanto, para consultas na clínica, Maíra dedica $\frac{6}{10}$ de tempo a mais do que para consultas em domicílio.

$\frac{7}{10}$

$\frac{1}{10}$

$\frac{7}{10} - \frac{1}{10} = \frac{6}{10}$

Para calcular a soma ou a diferença de duas frações com denominadores iguais, adicionamos ou subtraímos os numeradores, conforme a operação desejada, e conservamos os denominadores.

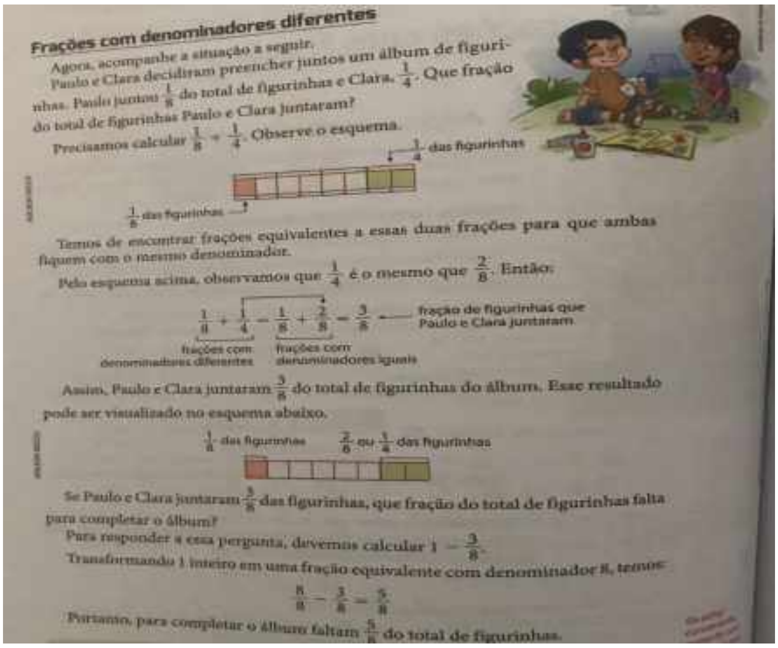
Fonte: Silva; Gay (2018a p. 137)

Nos exemplos que a Figura 23 retrata, temos 5 inteiros particionados de forma explícita em 10 subfiguras retangulares de áreas congruentes. No primeiro inteiro foi pintada uma parte de lilás e 7 partes pintadas de amarelo. No segundo inteiro as partes pintadas de amarelo foram colocadas ao lado da parte pintada de lilás, destacando que juntas formam (8/10) do inteiro e representa a soma das partes (1/10) e (7/10). No terceiro inteiro de cima para baixo na figura, foi tomada 7 partes das 10 partes que compõem o inteiro. No quarto inteiro foi pintada 1 parte de lilás das 10 partes do inteiro, fazendo relação com o terceiro inteiro e resultando no quinto inteiro que é resultado da diferença entre as partes tomadas dos terceiro e quarto inteiros, representando (6/10) do inteiro.

O autor utiliza um particionamento total em subfiguras idênticas, ou seja, mesmo número de lados, e não reafirma a necessidade de congruência entre as partes e o todo, tornando uma falha frequente da obra.

Para exemplificar adição e subtração de frações com denominadores diferentes, a Figura 24 apresenta uma situação com duas figuras geométricas auxiliadas pelo registro numérico fracionário.

Figura 24 - Situação envolvendo adição e subtração de frações com denominadores diferentes



Frações com denominadores diferentes

Agora, acompanhe a situação a seguir.

Paulo e Clara decidiram preencher juntos um álbum de figurinhas. Paulo juntou $\frac{1}{8}$ do total de figurinhas e Clara, $\frac{1}{4}$. Que fração do total de figurinhas Paulo e Clara juntaram?

Precisamos calcular $\frac{1}{8} + \frac{1}{4}$. Observe o esquema.

Temos de encontrar frações equivalentes a essas duas frações para que ambas fiquem com o mesmo denominador.

Pelo esquema acima, observamos que $\frac{1}{4}$ é o mesmo que $\frac{2}{8}$. Então:

$$\underbrace{\frac{1}{8} + \frac{1}{4}}_{\text{frações com denominadores diferentes}} = \underbrace{\frac{1}{8} + \frac{2}{8}}_{\text{frações com denominadores iguais}} = \frac{3}{8} \longleftarrow \text{fração de figurinhas que Paulo e Clara juntaram}$$

Assim, Paulo e Clara juntaram $\frac{3}{8}$ do total de figurinhas do álbum. Esse resultado pode ser visualizado no esquema abaixo.

Se Paulo e Clara juntaram $\frac{3}{8}$ das figurinhas, que fração do total de figurinhas falta para completar o álbum?

Para responder a essa pergunta, devemos calcular $1 - \frac{3}{8}$.

Transformando 1 inteiro em uma fração equivalente com denominador 8, temos:

$$\frac{8}{8} - \frac{3}{8} = \frac{5}{8}$$

Portanto, para completar o álbum faltam $\frac{5}{8}$ do total de figurinhas.

Fonte: Silva; Gay (2018a p. 138)

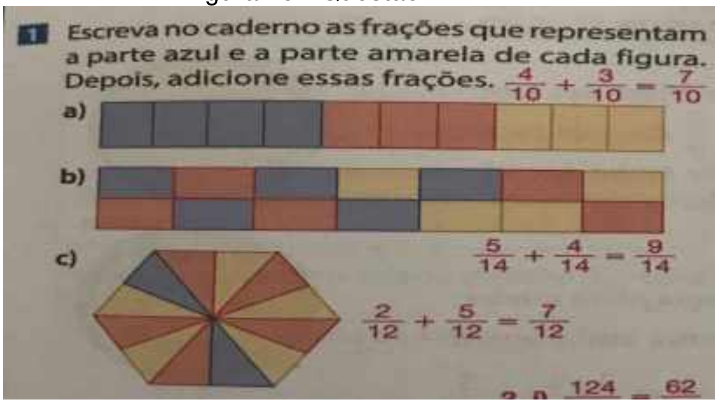
Nas duas figuras geométricas, temos um particionamento explícito em subfiguras com mesmo número de lados, sem ser afirmada a congruência entre as partes.

Na primeira figura, é particionado um retângulo em 8 partes supostamente congruentes, pintando (1/8) de laranja e (2/8) de verde e sobrepondo a figura, é particionado o inteiro em 4 partes, destacando a equivalência de (2/8) e (1/4), sendo possível realizar a soma de (1/8) e (2/8).

Na segunda figura, é trabalhada a diferença entre as partes pintadas e o restante do inteiro.

A Figura 25, é referente a primeira das 8 questões relacionadas à soma e subtração de frações, onde 3 destas utiliza a relação parte-todo.

Figura 25 - Questão 1

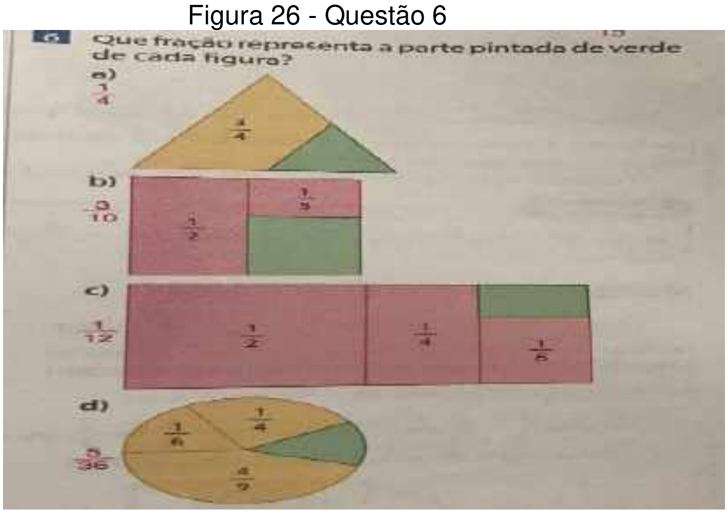


Fonte: Silva; Gay (2018a p. 139)

A questão é composta de três itens, onde todos utilizam particionamento explícito em subfiguras com mesmo número de lados, não reafirmando a congruência entre as partes. Os três itens consistem em realizar a conversão do registro geométrico bidimensional para o registro numérico fracionário e realizar a soma das partes pintadas de azul e amarelo, podendo realizar a adição das partes no registro geométrico e depois realizar a conversão, ou realizar a conversão posteriormente a soma das partes.

Na questão 6, representada na Figura 26 são utilizadas figuras particionadas implicitamente, onde é proposto ao aluno descobrir que partes do inteiro estão sendo pintadas de verde, sendo necessário realizar um tratamento figural para realizar a conversão, ou tomar como registro de partida o numérico fracionário e subtrair do todo as partes não pintadas de verde.

Figura 26 - Questão 6

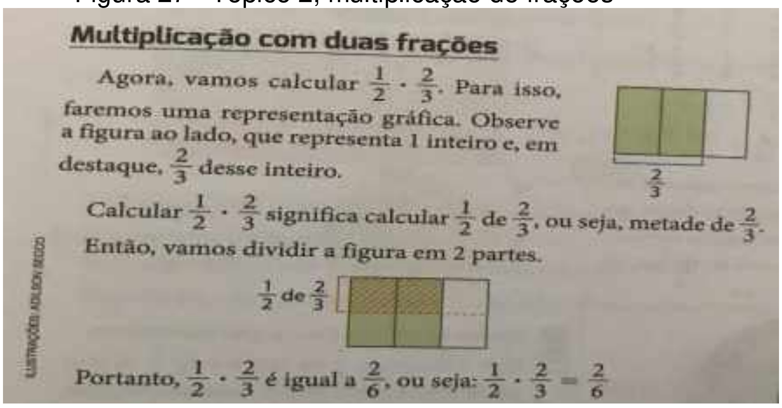


Fonte: Silva; Gay (2018a p. 139)

É necessário realizar um tratamento, encontrando a unidade-parte e particionando totalmente a figura. Nesse caso, nas letras (a) e (c) a unidade-parte será a figura pintada de verde. Enquanto que nas letras (b) e (d) a unidade-parte deve ser tratada para se tornar nítida.

No Tópico 2 do capítulo 6 com o intuito de demonstrar a multiplicação de frações, o autor utiliza a relação parte-todo dos números racionais, trabalhando com figuras geométricas totalmente particionadas em subfiguras com mesmo número de lados, conforme Figura 27.

Figura 27 - Tópico 2, multiplicação de frações



Multiplicação com duas frações

Agora, vamos calcular $\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3}$. Para isso, faremos uma representação gráfica. Observe a figura ao lado, que representa 1 inteiro e, em destaque, $\frac{2}{3}$ desse inteiro.

$\frac{2}{3}$

Calcular $\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3}$ significa calcular $\frac{1}{2}$ de $\frac{2}{3}$, ou seja, metade de $\frac{2}{3}$. Então, vamos dividir a figura em 2 partes.

$\frac{1}{2}$ de $\frac{2}{3}$

Portanto, $\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3}$ é igual a $\frac{2}{6}$, ou seja: $\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} = \frac{2}{6}$

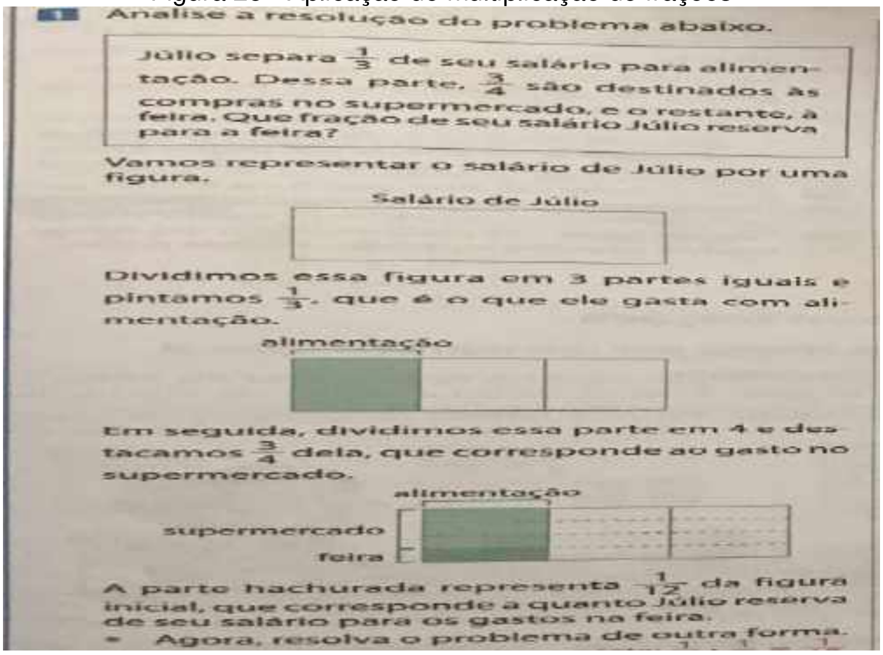
Fonte: Silva; Gay (2018a p. 140)

No primeiro inteiro, um retângulo é particionado explicitamente em 3 partes também retangulares, porém, sem ser realizada referência com relação à congruência entre as partes, tomando-se 2 das partes. Em seguida é proposto calcular a metade das partes tomadas no primeiro inteiro, utilizando outro inteiro idêntico reparticionado em seis partes congruentes, para representar o produto encontrado.

Portanto, temos um tratamento (multiplicação) no registro numérico fracionário sendo abordado a partir do registro geométrico bidimensional com conversão para o numérico fracionário.

Dando seguimento ao estudo das operações com frações, a figura 28 retrata uma aplicação da relação parte-todo para ilustrar uma situação que envolve multiplicação de frações.

Figura 28 - Aplicação de multiplicação de frações


1 Analise a resolução do problema abaixo.

Júlio separa $\frac{1}{3}$ de seu salário para alimentação. Dessa parte, $\frac{3}{4}$ são destinados às compras no supermercado, e o restante, à feira. Que fração de seu salário Júlio reserva para a feira?

Vamos representar o salário de Júlio por uma figura.

Salário de Júlio

Dividimos essa figura em 3 partes iguais e pintamos $\frac{1}{3}$, que é o que ele gasta com alimentação.

alimentação

Em seguida, dividimos essa parte em 4 e destacamos $\frac{3}{4}$ dela, que corresponde ao gasto no supermercado.

alimentação

supermercado

feira

A parte hachurada representa $\frac{1}{12}$ da figura inicial, que corresponde a quanto Júlio reserva de seu salário para os gastos na feira.

• Agora, resolva o problema de outra forma.

Fonte: Silva; Gay (2018a p. 141)

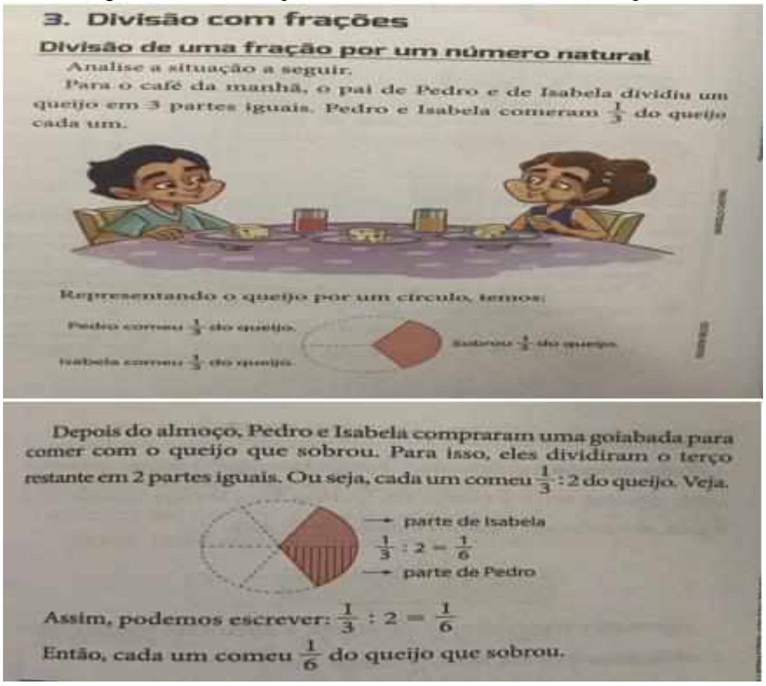
Na situação, temos o salário do Júlio, sendo representado na ilustração por um retângulo inteiro. O segundo retângulo está particionado em 3 partes supostamente congruentes e tomado 1 destas partes para representar o gasto com alimentação. Em um terceiro retângulo, a parte tomada do inteiro é dividido em 4 partes, onde, 3 partes representam o gasto com supermercado e 1 parte representa o gasto com a feira, logo, (1/4) de (1/3) do salário de Júlio é reservado para feira.

O autor utiliza figuras totalmente particionadas em subfiguras com mesmo número de lados para facilitar a visualização da ilustração utilizada, mas é preciso destacar a necessidade da congruência entre as partes e o todo.

É possível analisar ainda que é feito uma conversão do registro numérico fracionário para o registro geométrico bidimensional.

Na figura 29, temos uma situação envolvendo o conceito de divisão de frações, onde é utilizado figuras totalmente particionadas em subfiguras com mesmo número de lados, e que mais uma vez não é afirmado a congruência entre as partes.

Figura 29 - Situação envolvendo divisão de frações

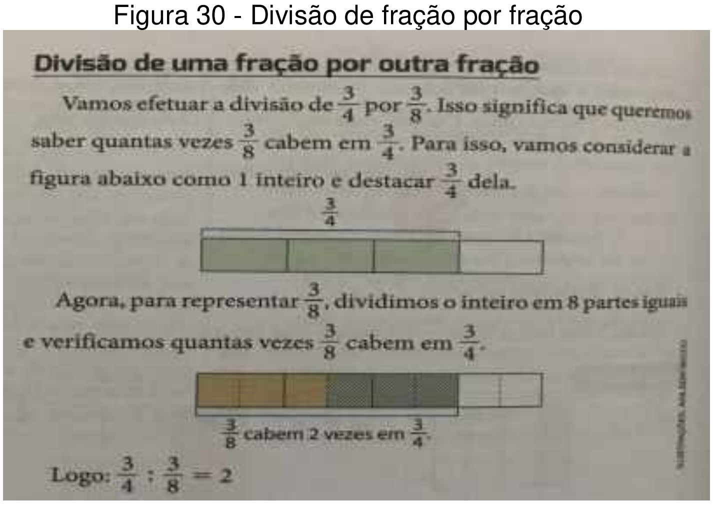


Fonte: Silva; Gay (2018a p. 142 e 143)

Temos o registro numérico fracionário sendo auxiliado pelo registro geométrico bidimensional, no qual foi dividido o queijo em 3 partes congruentes, das quais Pedro e Isabela comeram 1 parte cada um e sobrou a terceira parte. É abordada a divisão do terceiro pedaço em duas partes, onde o quociente é representado na segunda figura.

Para trabalhar com divisões, que tanto o dividendo quando o divisor são frações, é proposto o exemplo representado pela figura 30.

Figura 30 - Divisão de fração por fração

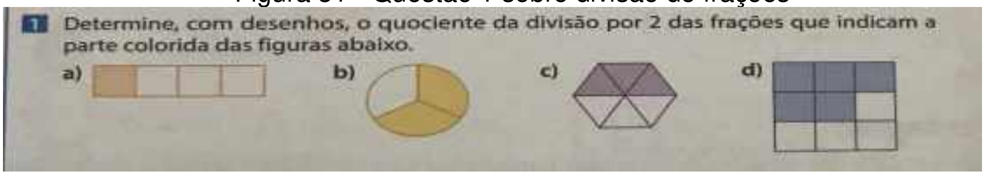


Fonte: Silva; Gay (2018a p. 144)

É realizada a conversão do registro numérico fracionário para o geométrico bidimensional, onde as figuras são particionadas de forma explícita e com subfiguras com mesmo número de lados, não sendo reafirmado a congruência entre as partes.

Para trabalhar os conceitos estudados referentes a divisões com frações, é proposta uma atividade com 12 questões, das quais, duas utilizam a relação parte-todo. A questão 1, composta de quatro itens requer o quociente ao particionar a parte colorida por 2, conforme Figura 31.

Figura 31 - Questão 1 sobre divisão de frações

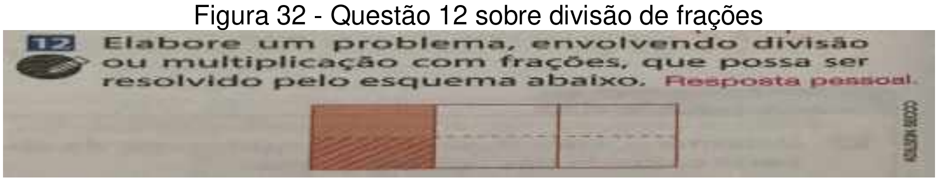


Fonte: Silva; Gay (2018a p. 145)

Na questão é exposto figuras geométricas totalmente particionadas em subfiguras com mesmo número de lados, onde os alunos terão que realizar um tratamento figural e encontrar a nova unidade parte, com isso expressar na figura o quociente que representa a metade das partes tomadas de cada inteiro.

A segunda questão que utiliza a relação parte-todo é apresentada pela Figura 32, na qual propõem ao educando elaborar um problema em que a figura geométrica representada seja a solução.

Figura 32 - Questão 12 sobre divisão de frações

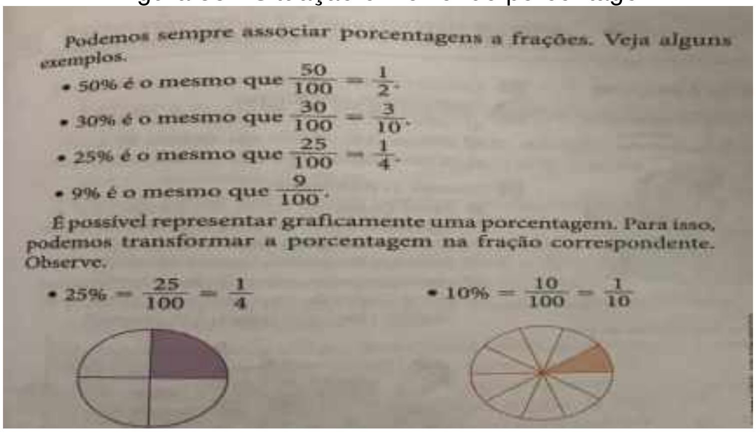


Fonte: Silva; Gay (2018a p. 146)

A figura é particionada explicitamente em 6 subfiguras com mesmo número de lados, onde não é afirmado a congruência entre as partes.

No tópico 4 do capítulo seis é apresentada uma situação representada na Figura 33.

Figura 33 - Situação envolvendo porcentagem



Podemos sempre associar porcentagens a frações. Veja alguns exemplos.

- 50% é o mesmo que $\frac{50}{100} = \frac{1}{2}$.
- 30% é o mesmo que $\frac{30}{100} = \frac{3}{10}$.
- 25% é o mesmo que $\frac{25}{100} = \frac{1}{4}$.
- 9% é o mesmo que $\frac{9}{100}$.

É possível representar graficamente uma porcentagem. Para isso, podemos transformar a porcentagem na fração correspondente. Observe.

- $25\% = \frac{25}{100} = \frac{1}{4}$
- $10\% = \frac{10}{100} = \frac{1}{10}$

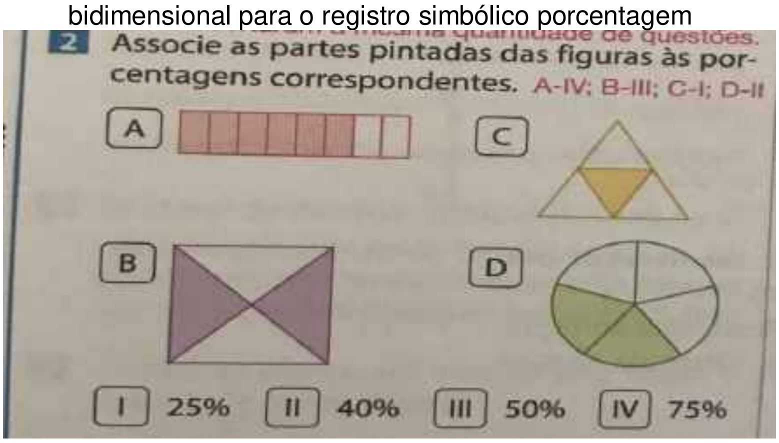
Fonte: Silva; Gay (2018a p. 147)

Na situação da Figura 34 é apresentado o registro simbólico porcentagem dos racionais e sua conversão para o registro numérico fracionário. Logo após é trabalhada a conversão do registro numérico fracionário para o registro geométrico bidimensional.

As figuras geométricas são particionadas explicitamente em subfiguras e tomadas o mesmo número de partes (1/4 e 1/10 dos inteiros), com o objetivo de trabalhar a conversão do registro simbólico porcentagem para o geométrico bidimensional, passando pelo registro numérico fracionário.

Nos exercícios propostos do tópico é proposto a questão 2, conforme Figura 34 que consiste em converter do registro geométrico bidimensional para o simbólico porcentagem, associando a letra referente a figura ao algarismo romano referente a porcentagem.

Figura 34 - Questão 2 conversão do registro geométrico bidimensional para o registro simbólico porcentagem



2 Associe as partes pintadas das figuras às porcentagens correspondentes. A-IV; B-III; C-I; D-II

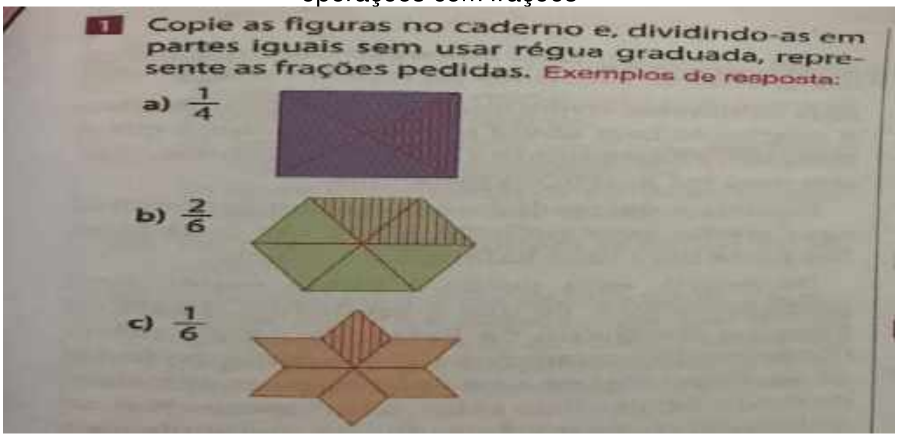
Fonte: Silva; Gay (2018a p. 148)

As figuras utilizadas são totalmente particionadas em subfiguras com mesmo número de lados, não sendo afirmado a congruência entre as partes.

Para que o aluno realize a conversão, dentre as formas de obter a solução, ele pode realizar a conversão do registro geométrico bidimensional para o numérico fracionário, e em seguida realizar um tratamento nesse registro para transformar em uma fração de denominador centesimal e depois converte para o registro numérico porcentagem.

Na sequência do estudo do capítulo 6, temos uma atividade complementar compreendendo 9 questões, onde 2 delas utilizam a relação parte-todo. A primeira questão, representada na Figura 35 é proposto realizar a conversão do registro numérico fracionário para o registro geométrico bidimensional.

Figura 35 - Questão 1 da atividade complementar referente a operações com frações

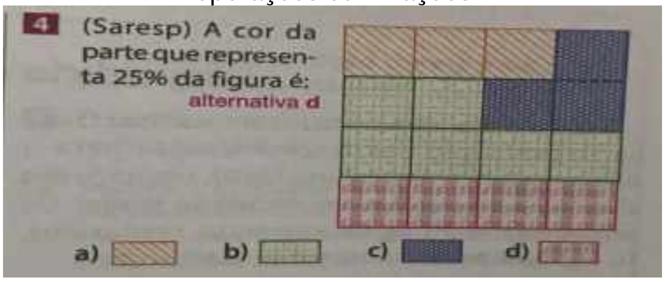


Fonte: Silva; Gay (2018a p. 151)

Na questão temos três itens, onde as figuras não estão particionadas, cabendo ao aluno fazer o particionamento. Na questão o professor pode trabalhar a necessidade de congruência das partes, pois, caso contrário, pode acontecer um particionamento distinto das partes.

Por fim, temos a Figura 36, na qual é proposto realizar uma conversão do registro simbólico porcentagem para o geométrico fracionário.

Figura 36 - Questão 4 da atividade complementar sobre operações com frações

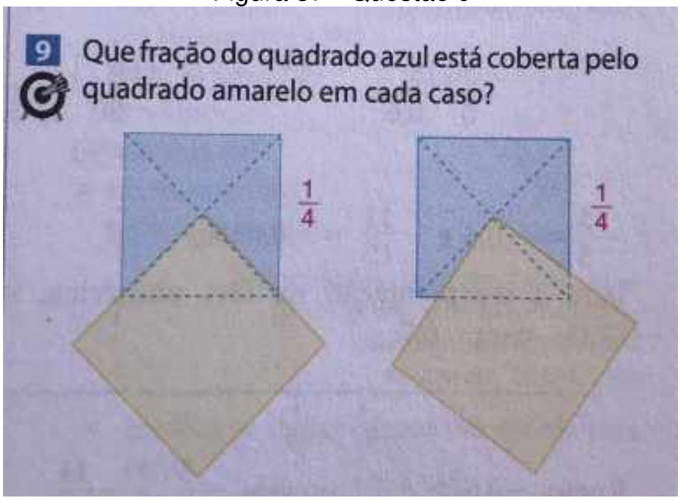


Fonte: Silva; Gay (2018a p. 151)

A figura utilizada é particionada de forma explícita, com subfiguras com mesmo número de lados, não reafirmando mais uma vez a congruência das partes.

A questão 9, exposta na Figura 37, é uma das poucas questões do livro do 7º ano, dessa coleção, que traz a relação parte todo em figuras geométricas. Ela está contida no capítulo que trata dos números racionais e traz uma conversão do registro geométrico bidimensional para o numérico fracionário.

Figura 37 - Questão 9



Fonte: Silva; Gay (2018b p. 97)

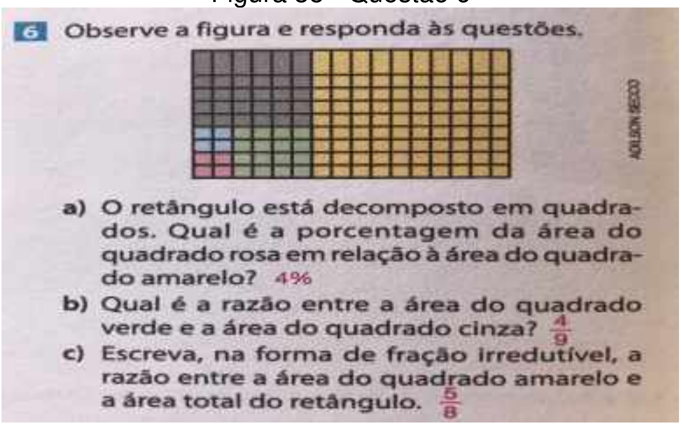
Na questão, o quadrado azul está totalmente particionado de forma explícita, tendo quatro partes de áreas congruentes construídas a partir de suas diagonais. Na figura localizada à esquerda, uma região do quadrado amarelo sobrepõe explicitamente uma das quatro partes do quadrado azul. Assim, a área do quadrado azul coberta pelo quadrado amarelo equivale a um quarto.

Na figura localizada à direita da questão, o quadrado amarelo foi rotacionado pelo seu vértice localizado no centro do quadrado azul. A fração coberta por esse no quadrado azul continua sendo de um quarto, pois deve-se perceber que a parte do quadrado amarelo que falta para completar a subfigura que equivale um quarto do quadrado azul é exatamente a que ultrapassa essa subfigura.

É interessante observar que os dois quadrados têm áreas diferentes, portanto um quarto da área do quadrado azul não equivale a um quarto do quadrado amarelo. Como as áreas do quadrado azul, nas duas figuras não mudou, então, teremos a mesma porção da área do triângulo amarelo sobreposta nestas figuras.

No capítulo sobre Proporções e suas aplicações, Tópico ‘Razões’ encontramos a questão 6, conforme Figura 38, que aborda uma conversão cujo registro de partida é o geométrico bidimensional e os registros de chegada são o simbólico porcentagem e o numérico fracionário.

Figura 38 - Questão 6



6 Observe a figura e responda às questões.

a) O retângulo está decomposto em quadrados. Qual é a porcentagem da área do quadrado rosa em relação à área do quadrado amarelo? 4%

b) Qual é a razão entre a área do quadrado verde e a área do quadrado cinza? $\frac{4}{9}$

c) Escreva, na forma de fração irredutível, a razão entre a área do quadrado amarelo e a área total do retângulo. $\frac{5}{8}$

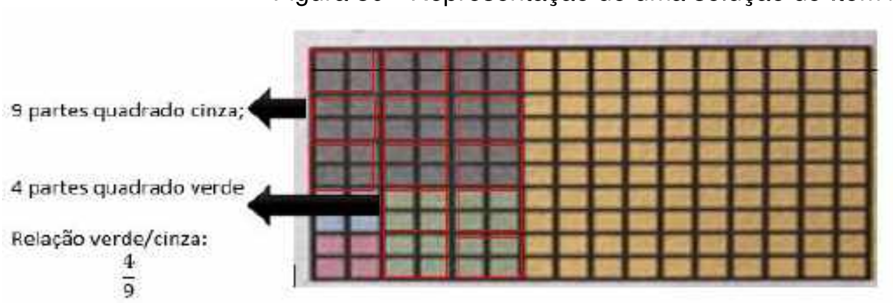
Fonte: Silva; Gay (2018b p. 264)

Na questão temos um retângulo que não está totalmente particionado explicitamente. É necessário que o aluno reconheça a necessidade de particionar ao menos implicitamente a primeira linha do retângulo em duas linhas de alturas iguais.

Após o particionamento total, no item ‘a’, o significado de fração que está sendo trabalhado é o de porcentagem, que trabalha a relação parte-todo. Entretanto, as áreas estão perceptivamente disjuntas e o sujeito deve considerar como se a área do quadrado rosa fizesse parte da área do quadrado amarelo, encontrando assim, a fração (4/100) e convertendo para a representação simbólica porcentagem (4%).

No item b, o significado de número racional trabalhado é o de razão, sendo necessário uma conversão do registro geométrico bidimensional para o numérico fracionário (16/36) e depois ser realizado um tratamento nesse registro (4/9). Ou ainda, pode ser realizado um tratamento no registro geométrico bidimensional e depois a conversão para o numérico fracionário (4/9), conforme Figura 39. A representação fracionária relaciona a área do quadrado verde com a área do quadrado cinza.

Figura 39 - Representação de uma solução do Item b



Fonte: Autoria própria, 2021

No item c, o significado trabalhado é o parte-todo. Sendo necessário uma conversão do registro geométrico bidimensional para o numérico fracionário (100/160) e depois ser realizado um tratamento nesse registro (5/8). Ou ainda, pode ser realizado um tratamento no registro geométrico bidimensional e depois a conversão para o numérico fracionário (5/8).

4.2 Síntese da análise da coleção A

Na coleção analisada encontramos um total de 112 figuras geométricas que envolvem a relação parte-todo e a representação geométrica bidimensional dos números racionais. Pudemos observar que as principais conversões trabalhadas envolviam os registros geométrico bidimensional e numérico fracionário, conforme gráfico 1.

Gráfico 1 - Conversões entre o registro geométrico bidimensional e o numérico fracionário da coleção A

Fonte: Autoria própria, 2021

Analisando os dados, podemos verificar que as conversões estão sendo trabalhadas de forma desigual, pois existem muito mais conversões do registro geométrico bidimensional para o registro numérico fracionário do que do registro numérico fracionário para o registro geométrico bidimensional.

Segundo Duval (2012), a compreensão dos objetos matemáticos só será possível quando o educando conseguir de forma espontânea, fazer a transição de ida e volta em pelo menos dois dos seus registros de representação semiótica. Para isso é necessário que sejam trabalhadas conversões de ida e volta entre os registros de representações semióticas do objeto matemático de forma mais uniforme. E isso não vislumbramos na análise dessa coleção.

Entre as figuras geométricas analisadas, 83% apresentam particionamento explícito, ou seja, estão totalmente particionadas explicitamente, conforme Quadro 2. Dessa forma, o aluno não terá o trabalho de realizar tratamentos, sendo explícita a unidade parte das subfiguras.

Quadro 2 - Tipo de Figuras quanto ao particionamento

Figuras	Quantidade de Figuras geométricas
Figuras totalmente particionadas	93
Particionamento implícito	19

Fonte: Autoria própria, 2021

De acordo com Silva e Santos (2020), nos casos em que as figuras geométricas têm um particionamento explícito basta o aluno identificar em quantas partes congruentes o inteiro foi dividido e quantas partes foram pintadas, utilizando assim o procedimento da dupla contagem, e com isso, obtém o registro numérico fracionário como resultado de uma contagem.

Neste tipo de figuras geométricas, não podemos afirmar que o aluno de fato teve compreensão do objeto estudado, pois ele pode ter utilizado apenas elementos visuais para realizar a conversão, não notando por exemplo, que as partes tomadas possuem áreas congruentes a todas as partes que formam o inteiro.

Sobre figuras totalmente particionadas, Silva e Moretti (2020) afirmam que:

> As figuras geométricas que possuem particionamento explícito e subfiguras com mesmas medidas de comprimento entre si são figuras prototípicas, pois

> todos os elementos necessários ao estabelecimento da relação parte-todo estão presentes explicitamente, quais sejam, áreas congruentes e mesmo número de lado das subfiguras. (Silva e Moretti, 2020, p. 291).

De acordo com o Quadro 3, entre as figuras geométricas particionadas explicitamente, 100% possuem subfiguras com mesmo número de lados, ou seja, não encontramos figuras geométricas com particionamento explícito que possuam subfiguras com número de lados diferentes. Este tipo de Figura geométrica é apontado por Silva; Santos (2020) como aquela que requer tratamento para que sejam visualizadas as unidades figurais necessárias para o estabelecimento da relação parte-todo, apesar de serem totalmente particionadas, dando oportunidade ao aluno de tratar a figura para que perceba a congruência entre as áreas das partes ou subfiguras e encontre a unidade-parte.

Quadro 3 - Figuras Totalmente Particionadas

Tipos de Figuras	**Quantidade de Figuras geométricas**	
	Com sobreposição	**Sem sobreposição**
Subfiguras com mesmo número de lados	28	65
Subfiguras com número de lados diferentes	-	

Fonte: Autoria própria, 2021

Entre as figuras geométricas que possuem subfiguras com mesmo número de lados, 69,9% dessas são ‘sem sobreposição’, ou seja, não necessitam do tratamento de sobreposição para que seja encontrada a fração irredutível ao ser estabelecida a relação parte-todo e convertida para o registro numérico fracionário. Sendo assim, são totalmente adaptadas ao procedimento da dupla contagem.

Apenas 30,1% das figuras geométricas encontradas com mesmo número de lados admitem o tratamento de sobreposição de subfiguras. Este tipo de figura geométrica favorece o desenvolvimento do conceito de equivalência, pois é perceptível a congruência das áreas das partes da figura com outras unidades parte após a sobreposição.

Com relação as figuras que se apresentam com particionamento implícito, podemos verificar que 73,7% possuem subfiguras com mesmo número de lados, conforme Quadro 4.

Quadro 4 - Figuras com Particionamento implícito

Tipos de Figuras	Quantidade de Figuras geométricas
Duas únicas subfiguras com número de lados iguais ou diferentes	-
Subfiguras com mesmo número de lados	14
Subfiguras com número de lados diferentes	5

Fonte: Autoria própria, 2021

Apenas 26,4% das figuras com particionamento implícito são formadas por subfiguras com número de lados diferentes. Apesar das figuras particionadas implicitamente em subfiguras com mesmo número de lados necessitar de um esforço maior para estabelecer a relação parte-todo em relação as figuras totalmente particionadas, pois é necessário encontrar a unidade parte, as figuras com particionamento implícito em subfiguras com número de lados diferentes demandaria de um esforço ainda maior para estabelecer a unidade parte, pois seria necessário uniformizar tanto as formas quanto as áreas.

No Quadro 5 destacamos algumas características das figuras geométricas com particionamento implícito e subfiguras com mesmo número de lados.

Quadro 5 - Características das Figuras Geométricas com particionamento implícito em subfiguras com o mesmo número de lados

Tipos de figura	Quantidade de Figuras geométricas		Tratamentos Figurais	
	Com malha quadriculada	Sem malha quadriculada	Sobreposição de subfiguras	Translação e rotação de subfiguras
Unidade-parte é dada	4	6	2	3
Unidade-parte necessita ser encontrada	1	3	3	-

Fonte: Autoria própria, 2021

Podemos perceber que apenas 8 figuras geométricas com particionamento implícito, ou seja, o equivalente a 7,1% das figuras geométricas encontradas na coleção requer obrigatoriamente um tratamento figural para estabelecer a relação parte-todo e realizar a conversão para outro registro. E dessas, somente 2,6% aceita tratamento com movimentos de rotação e translação de subfiguras, que são necessários para o desenvolvimento da heurística por parte dos alunos.

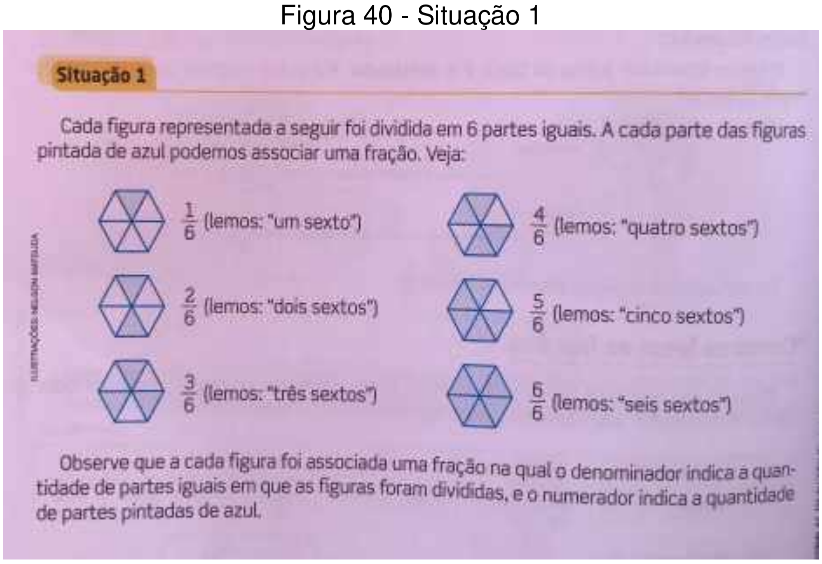
5 ANÁLISE DA COLEÇÃO B

Nesse capítulo iremos analisar as questões que utilizam a relação parte-todo na representação de números racionais nos livros do 6º e 7º anos do Ensino Fundamental da coleção B.

5.1 Análise qualitativa da Coleção B

O capítulo 7 sobre números racionais na forma de fração apresenta no tópico 2, denominado de número racional e a fração que o representa, a situação 1, que tem como objetivo representar a leitura de frações.

Figura 40 - Situação 1



Situação 1

Cada figura representada a seguir foi dividida em 6 partes iguais. A cada parte das figuras pintada de azul podemos associar uma fração. Veja:

$\frac{1}{6}$ (lemos: "um sexto")

$\frac{2}{6}$ (lemos: "dois sextos")

$\frac{3}{6}$ (lemos: "três sextos")

$\frac{4}{6}$ (lemos: "quatro sextos")

$\frac{5}{6}$ (lemos: "cinco sextos")

$\frac{6}{6}$ (lemos: "seis sextos")

Observe que a cada figura foi associada uma fração na qual o denominador indica a quantidade de partes iguais em que as figuras foram divididas, e o numerador indica a quantidade de partes pintadas de azul.

Fonte: Bianchini (2018a, p. 152)

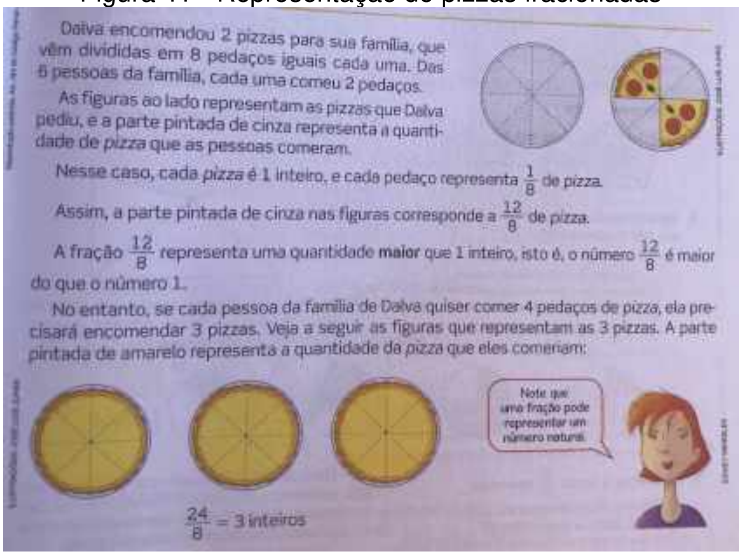
Na questão, temos um hexágono regular particionado em seis partes ou subfiguras de áreas congruentes e mesmo número de lados, com auxílio da representação numérica fracionária e o registro em língua materna.

No exemplo acima, o autor aborda o conceito de numerador e denominador, pintando o inteiro de seis maneiras diferentes, na primeira pinta apenas uma das partes, na segunda pinta duas partes e assim até que na última ele pinta todas as partes do inteiro. Dessa forma, fica claro para o aluno a função do numerador e do denominador em uma fração, mas não garante que o aluno entenda de fato o real propósito dessas representações, tendo que ser aprofundado o debate pelo professor para que o aluno consiga entender o funcionamento de cada registro e suas relações.

É necessário ainda que o professor estimule ao educando fazer o tratamento figural no último hexágono, fazendo-o entender que se tem, no caso, uma fração aparente e que representa o próprio inteiro.

No livro do 6° ano, capítulo 7 intitulado, números racionais na forma de fração, Tópico 2 – Número racional e a fração que o representa, temos a Figura 41 que faz parte de um conjunto de exemplos utilizados para ilustrar situações envolvendo a relação parte-todo.

Figura 41 - Representação de pizzas fracionadas



Dalva encomendou 2 pizzas para sua família, que vêm divididas em 8 pedaços iguais cada uma. Das 6 pessoas da família, cada uma comeu 2 pedaços.

As figuras ao lado representam as pizzas que Dalva pediu, e a parte pintada de cinza representa a quantidade de *pizza* que as pessoas comeram.

Nesse caso, cada *pizza* é 1 inteiro, e cada pedaço representa $\frac{1}{8}$ de pizza.

Assim, a parte pintada de cinza nas figuras corresponde a $\frac{12}{8}$ de pizza.

A fração $\frac{12}{8}$ representa uma quantidade **maior** que 1 inteiro, isto é, o número $\frac{12}{8}$ é maior do que o número 1.

No entanto, se cada pessoa da família de Dalva quiser comer 4 pedaços de *pizza*, ela precisará encomendar 3 pizzas. Veja a seguir as figuras que representam as 3 pizzas. A parte pintada de amarelo representa a quantidade da *pizza* que eles comeram:

Fonte: Bianchini (2018a, p. 153)

No exemplo acima, temos uma situação que descreve inicialmente a divisão de duas pizzas para seis pessoas. Essa situação trata do significado quociente dos números racionais. E foi auxiliada por uma representação das pizzas (representação geométrica bidimensional dos racionais) totalmente particionada.

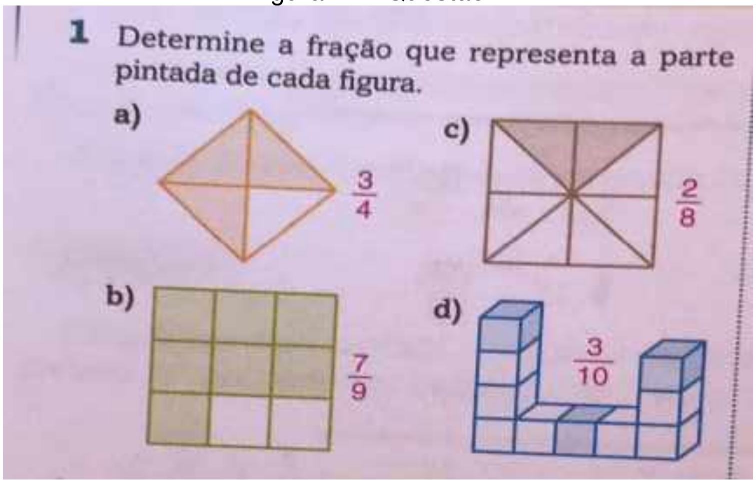
Logo em seguida é apresentado quanto cada parte representa do inteiro(1/8), trazendo a ideia de parte-todo e uma conversão do registro geométrico bidimensional para o numérico fracionário.

Continuando, é apresentado a fração 12/8 que representa a parte de pizzas que foram comidas. Nesse caso, a fração é imprópria. Ou seja, o numerador é maior que o denominador. A conversão realizada também foi entre o registro geométrico bidimensional e o numérico fracionário.

E logo após a situação foi modificada para representar uma situação em que a conversão entre o registro geométrico bidimensional e o numérico fracionário irá resultar em uma fração aparente para que fosse trabalhado a ideia de número inteiro como sendo um número racional.

Na figura 42, temos a primeira questão de um conjunto de 9 questões do Tópico 2, em que é solicitado a fração que representa a parte pintada de cada figura bidimensional ou tridimensional.

Figura 42 - Questão 1



Fonte: Bianchini (2018a, p. 154)

Na questão 1 é necessário realizar uma conversão do registro geométrico para o numérico fracionário.

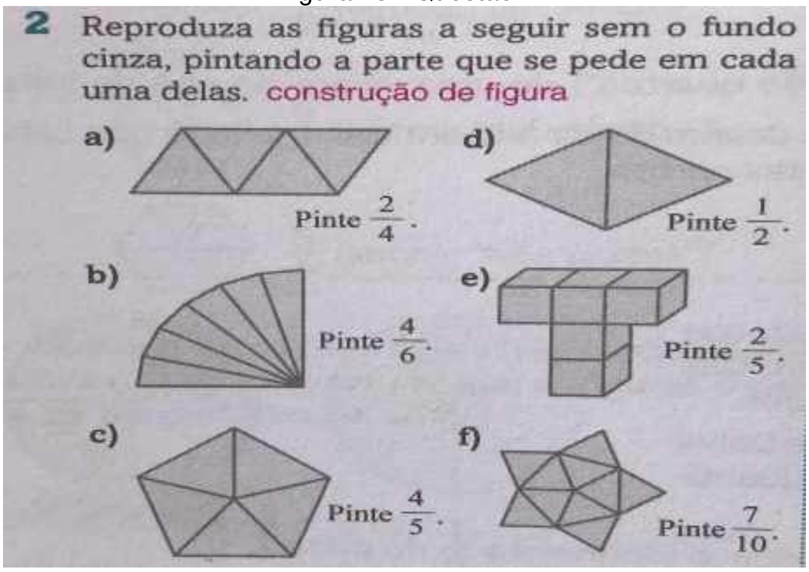
Os itens ‘a’, ‘b’ e ‘c’ trazem a figura geométrica bidimensional totalmente particionada em áreas congruentes e de mesma forma, respectivamente em 4, 9 e 8 partes, tendo o aluno apenas que representar numericamente a quantidade de partes que foram pintadas.

No item ‘d’ temos a mesma proposta, porém parte do registro geométrico tridimensional para o registro numérico fracionário.

Devido as figuras serem totalmente particionadas explicitamente em áreas congruentes, o procedimento da dupla contagem é totalmente adequado. Portanto, basta que o aluno conte o número de partes pintadas e coloque sobre o número de partes que foram divididos os inteiros.

Na sequência dos exercícios propostos sobre situações que envolvam números racionais na forma de fração, é proposta a questão 2, representada pela figura 43, pintar parte da figura que já está particionada em áreas congruentes.

Figura 43 - Questão 2



2 Reproduza as figuras a seguir sem o fundo cinza, pintando a parte que se pede em cada uma delas. construção de figura

a) Pinte $\frac{2}{4}$.

b) Pinte $\frac{4}{6}$.

c) Pinte $\frac{4}{5}$.

d) Pinte $\frac{1}{2}$.

e) Pinte $\frac{2}{5}$.

f) Pinte $\frac{7}{10}$.

Fonte: Bianchini (2018a, p. 154)

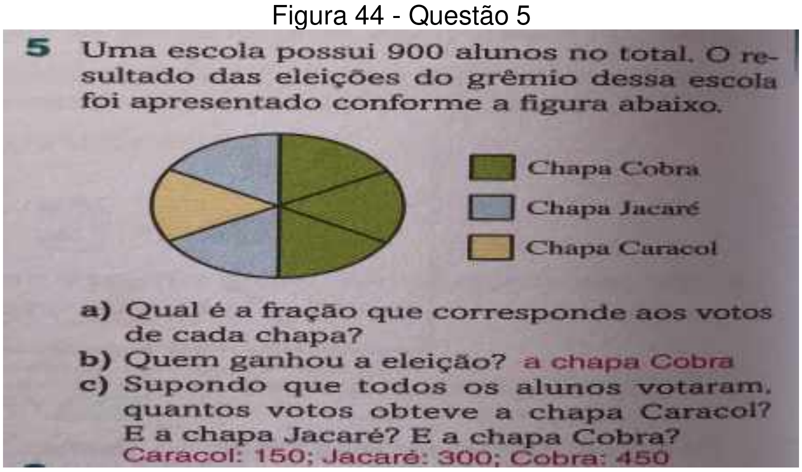
Temos neste caso um registro numérico fracionário, sendo necessário converter para o registro geométrico bidimensional e tridimensional, porém, a questão já vem particionada em áreas congruentes e de mesma forma.

A questão solicita do aluno a construção da figura e em seguida pintar parte do inteiro equivalente a fração dada.

O aluno terá apenas que relacionar o numerador da fração com a quantidade de partes do inteiro a serem pintadas, não exigindo tratamento na figura geométrica.

A questão 5, representada pela figura 44 é a terceira das quatro questões em que se utiliza o conceito de parte todo em geometria para ilustrar o conceito de frações. Nela temos uma circunferência dividida em áreas congruentes e de mesma forma.

Figura 44 - Questão 5



5 Uma escola possui 900 alunos no total. O resultado das eleições do grêmio dessa escola foi apresentado conforme a figura abaixo.

Chapa Cobra
Chapa Jacaré
Chapa Caracol

a) Qual é a fração que corresponde aos votos de cada chapa?

b) Quem ganhou a eleição? a chapa Cobra

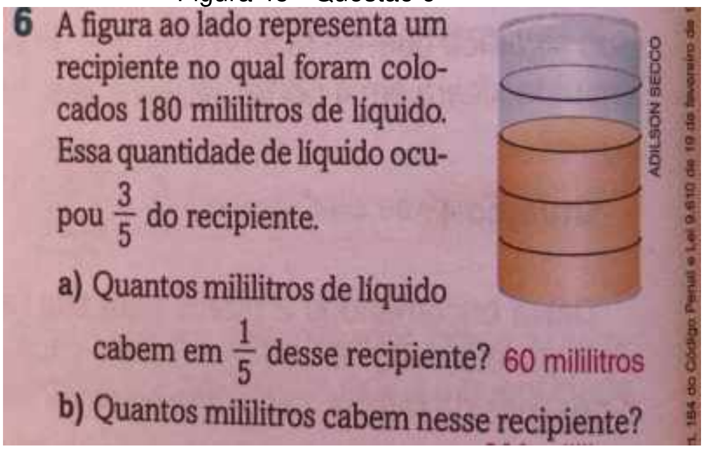
c) Supondo que todos os alunos votaram, quantos votos obteve a chapa Caracol? E a chapa Jacaré? E a chapa Cobra?
Caracol: 150; Jacaré: 300; Cobra: 450

Fonte: Bianchini (2018a, p. 154)

Na questão é utilizado um gráfico de setores para representar a quantidade de votos obtidos por cada chapa na eleição do grêmio estudantil de uma referida escola. No caso, é proposto aos alunos fazer a conversão do registro geométrico bidimensional para o numérico fracionário e em seguida encontrar a relação da fração de votos de cada chapa com o total de votantes, descobrindo assim, a quantidade de votos de cada uma.

Continuando a análise bibliográfica, temos a figura 45 que utiliza o conceito de frações para representar parte da capacidade de um recipiente, fazendo o aluno interpretar a relação de equivalência e encontrando a capacidade para diferentes partes do inteiro.

Figura 45 - Questão 6



6 A figura ao lado representa um recipiente no qual foram colocados 180 mililitros de líquido. Essa quantidade de líquido ocupou $\frac{3}{5}$ do recipiente.

a) Quantos mililitros de líquido cabem em $\frac{1}{5}$ desse recipiente? 60 mililitros

b) Quantos mililitros cabem nesse recipiente?

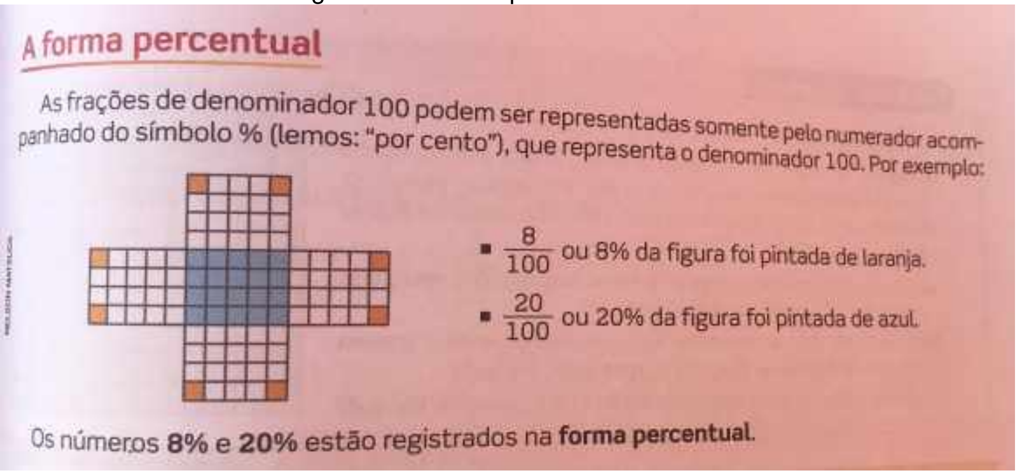
Fonte: Bianchini (2018a, p. 154)

Na figura, temos o registro geométrico tridimensional, trazendo o volume de liquido no recipiente. A questão traz a informação que foram colocados 180 ml de um certo liquido no referido recipiente, correspondendo (3/5) do volume do recipiente.

A questão propõe ao aluno calcular o volume de diferentes partes do recipiente, porém, para interpretar a questão, o aluno necessita dos conceitos relacionados a relação parte-todo.

O Tópico ‘A forma percentual’ representado na Figura 46 é apresentada uma figura geométrica bidimensional particionada explicitamente em 100 subfiguras com mesmo número de lados.

Figura 46 - Forma percentual


A forma percentual

As frações de denominador 100 podem ser representadas somente pelo numerador acompanhado do símbolo % (lemos: "por cento"), que representa o denominador 100. Por exemplo:

- $\frac{8}{100}$ ou 8% da figura foi pintada de laranja.
- $\frac{20}{100}$ ou 20% da figura foi pintada de azul.

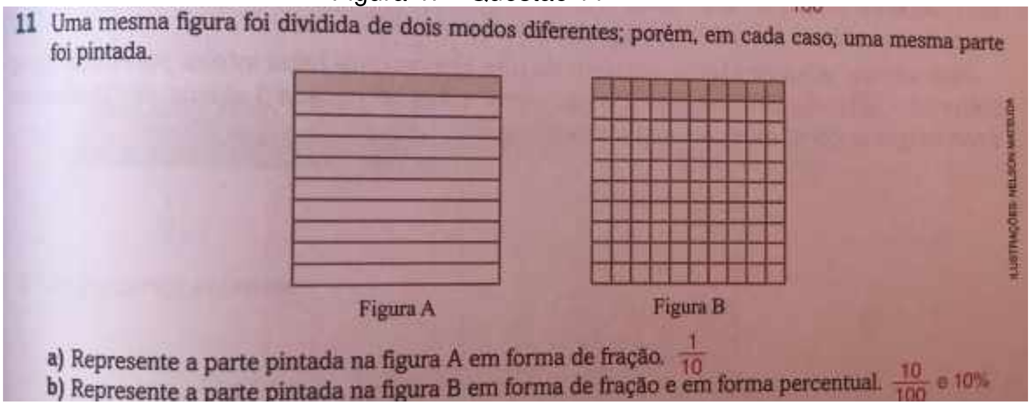
Os números **8%** e **20%** estão registrados na **forma percentual**.

Fonte: Bianchini (2018a, p. 155)

Foi realizada a conversão do registro geométrico bidimensional para o numérico fracionário e posteriormente, realizou-se a conversão do registro numérico fracionário para o registro simbólico porcentagem.

Dando sequência ao Tópico sobre a forma percentual é proposta uma atividade de 3 questões, das quais duas utilizam a relação parte-todo. A primeira delas está representada na Figura 47.

Figura 47 - Questão 11


11 Uma mesma figura foi dividida de dois modos diferentes; porém, em cada caso, uma mesma parte foi pintada.

a) Represente a parte pintada na figura A em forma de fração. $\frac{1}{10}$

b) Represente a parte pintada na figura B em forma de fração e em forma percentual. $\frac{10}{100}$ e 10%

Fonte: Bianchini (2018a, p. 155)

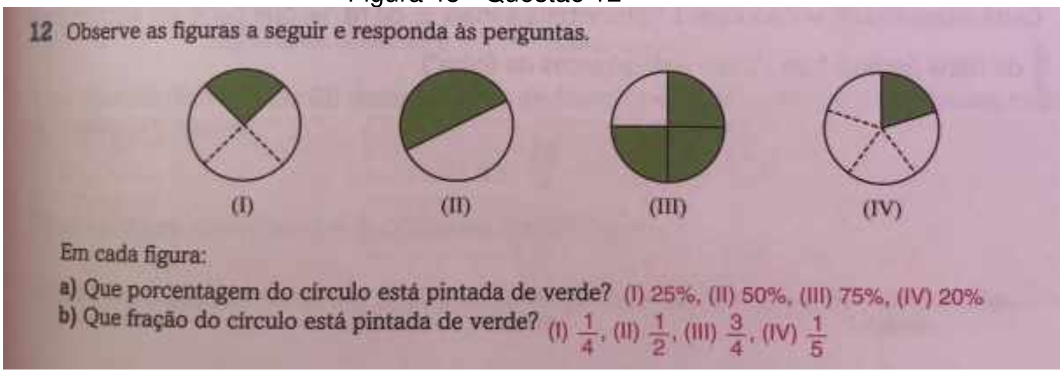
Duas figuras foram particionadas explicitamente com subfiguras com mesmo número de lados, sem reafirmar a congruência entre as partes, identificadas como figura A e figura B.

A primeira figura foi particionada em 10 retângulos e a segunda foi dividida em 100 partes, mas tomadas a mesma parte dos dois inteiros, podendo também ser trabalhada a equivalência de frações.

O item “a” da questão consiste em converter do registro geométrico bidimensional para o numérico fracionário e o item “b” para o registro fracionário e o simbólico porcentagem.

A questão 12, conforme Figura 48, é a segunda questão da lista de exercícios sobre porcentagem de exercícios sobre porcentagem que utiliza a relação parte-todo, consistindo em converter do registro geométrico fracionário para o registro simbólico porcentagem e numérico fracionário.

Figura 48 - Questão 12

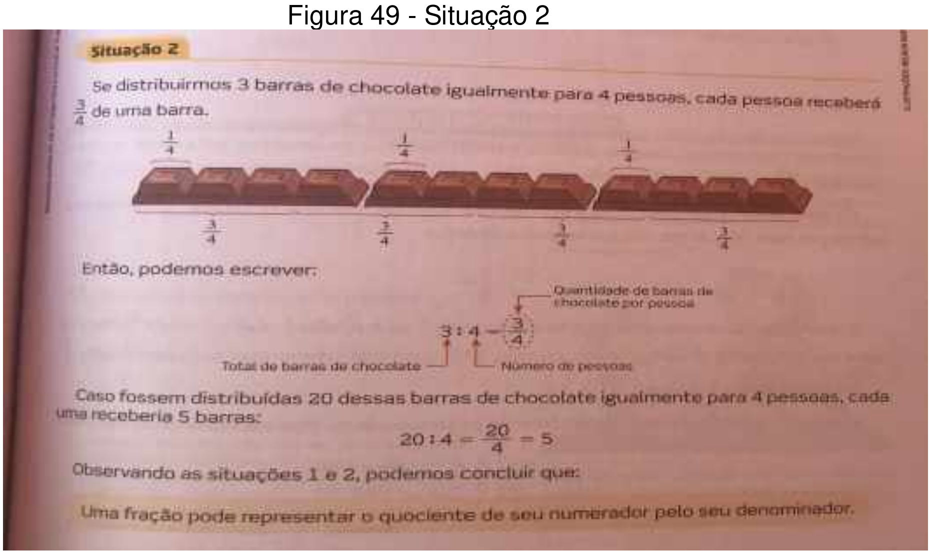


Fonte: Bianchini (2018a, p. 155)

As figuras geométricas trabalhadas na questão têm particionamento explícito com subfiguras com mesmo número de lados, não fazendo referência a congruência entre as áreas das partes.

A fim de exemplificar situações onde frações representam quociente, é ilustrada a situação 2, pertencente ao tópico 3 do capítulo 7, que trabalha números racionais na forma de fração, conforme Figura 49.

Figura 49 - Situação 2

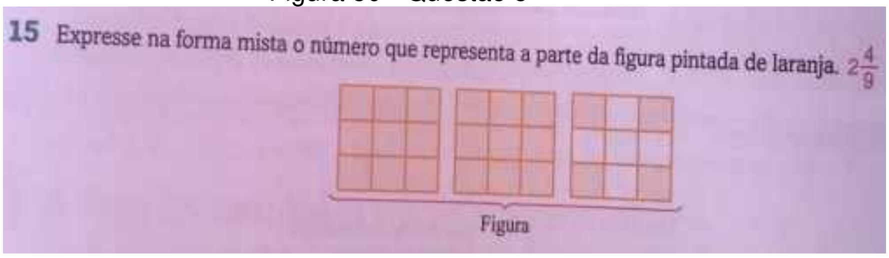


Fonte: Bianchini (2018a, p. 157)

É trabalhado a conversão do registro numérico fracionário para o geométrico bidimensional, onde é dividido 3 chocolates em 4 partes iguais cada um, configurando particionamento explicito em subfiguras com mesmo número de lados.

Na questão 5, representado pela Figura 50, é proposto aos educandos uma situação de conversão do registro geométrico bidimensional para o registro numérico misto.

Figura 50 - Questão 5


15 Expresse na forma mista o número que representa a parte da figura pintada de laranja. $2\frac{4}{9}$

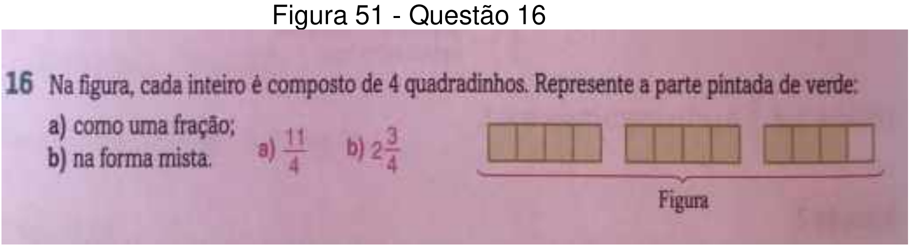
Figura

Fonte: Bianchini (2018a, p. 158)

Temos três inteiros divididos em 9 partes supostamente quadradas e congruentes entre si, sendo tomadas dois inteiros completos e (4/9) do terceiro inteiro. O tipo de particionamento é explícito em subfiguras com mesmo número de lados, sem ser reafirmado a necessidade de congruência entre as partes.

A questão 16, da Figura 51, consiste em realizar a conversão do registro geométrico bidimensional para o registro numérico fracionário e numérico misto.

Figura 51 - Questão 16


16 Na figura, cada inteiro é composto de 4 quadradinhos. Represente a parte pintada de verde:

a) como uma fração; a) $\frac{11}{4}$

b) na forma mista. b) $2\frac{3}{4}$

Figura

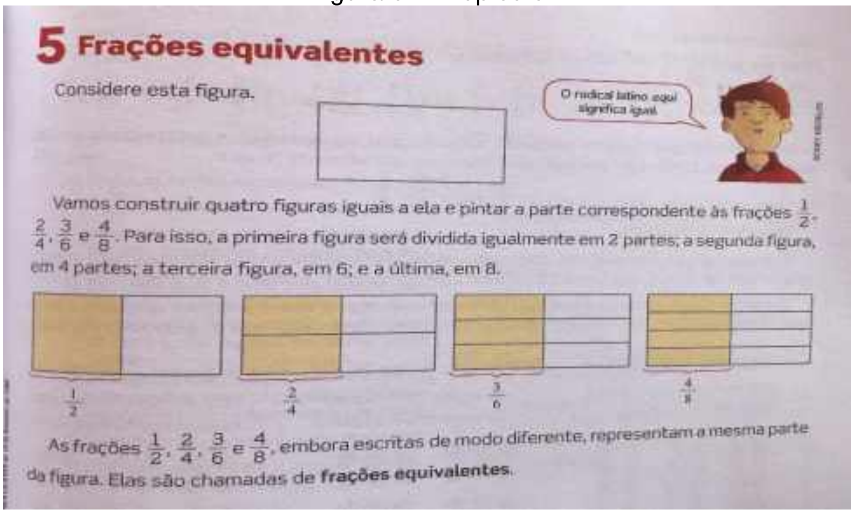
Fonte: Bianchini (2018a, p. 158)

A figura geométrica é composta por três inteiros divididos em três partes retangulares e supostamente iguais, no qual são pintados de verde dois inteiros completos e (3/4) do terceiro.

O tipo de particionamento é explícito em subfiguras com mesmo número de lados e mais uma vez não é feita a referência de congruência entre as áreas das partes.

Na Figura 52 temos uma situação ilustrando frações equivalentes, sendo apresentadas quatro figuras geométricas idênticas, representando o mesmo inteiro, (um retângulo) com particionamentos distintos, deixando explicito que estão sendo pintadas as mesmas áreas de cada inteiro para trabalhar o conceito de equivalência.

Figura 52 - Tópico 5



5 Frações equivalentes

Considere esta figura.

Vamos construir quatro figuras iguais a ela e pintar a parte correspondente às frações $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{4}$, $\frac{3}{6}$ e $\frac{4}{8}$. Para isso, a primeira figura será dividida igualmente em 2 partes; a segunda figura, em 4 partes; a terceira figura, em 6; e a última, em 8.

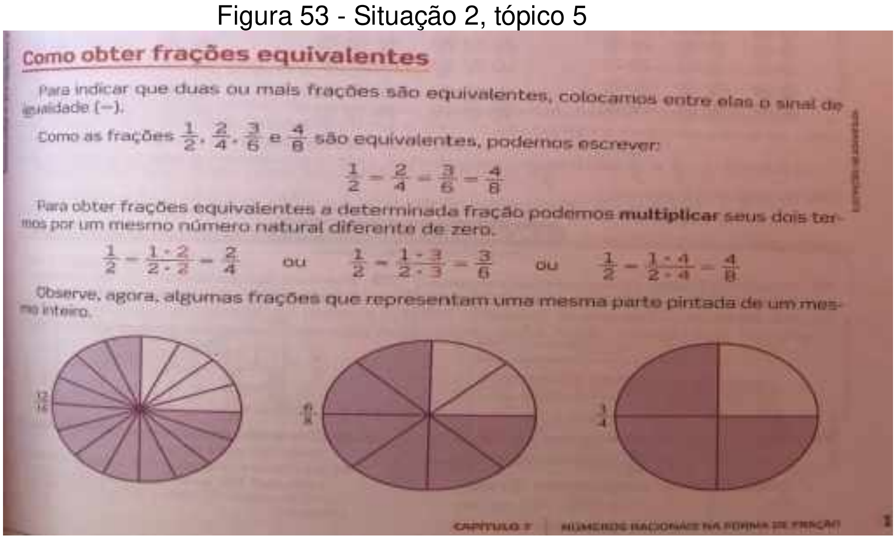
As frações $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{4}$, $\frac{3}{6}$ e $\frac{4}{8}$, embora escritas de modo diferente, representam a mesma parte da figura. Elas são chamadas de **frações equivalentes**.

Fonte: Bianchini (2018a, p. 165)

São apresentadas conversões do registro geométrico bidimensional para o numérico fracionário, apresentando de forma didática o conceito trabalhado e que deixa claro que embora particionadas em quantidades diferentes, foram pintadas partes iguais de cada retângulo.

Para exemplificar números racionais equivalentes na forma de fração, é exposta a situação 2, que dá exemplos de como encontrar frações equivalentes, inclusive utiliza a relação parte-todo nos exemplos, conforme Figura 53.

Figura 53 - Situação 2, tópico 5



Como obter frações equivalentes

Para indicar que duas ou mais frações são equivalentes, colocamos entre elas o sinal de igualdade (=).

Como as frações $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{4}$, $\frac{3}{6}$ e $\frac{4}{8}$ são equivalentes, podemos escrever:

$$\frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{3}{6} = \frac{4}{8}$$

Para obter frações equivalentes a determinada fração podemos **multiplicar** seus dois termos por um mesmo número natural diferente de zero.

$$\frac{1}{2} = \frac{1 \cdot 2}{2 \cdot 2} = \frac{2}{4} \quad \text{ou} \quad \frac{1}{2} = \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 3} = \frac{3}{6} \quad \text{ou} \quad \frac{1}{2} = \frac{1 \cdot 4}{2 \cdot 4} = \frac{4}{8}$$

Observe, agora, algumas frações que representam uma mesma parte pintada de um mesmo inteiro.

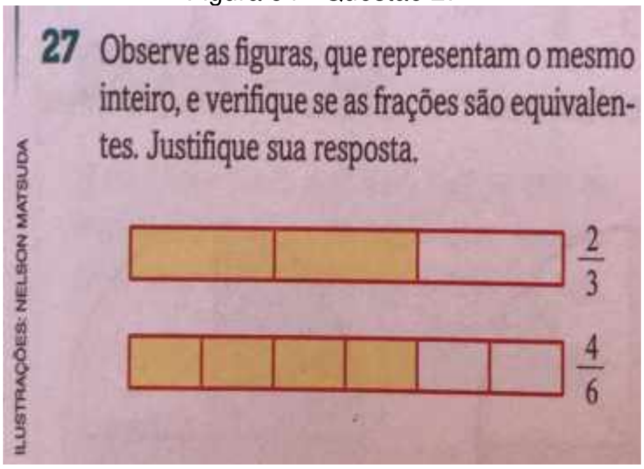
Fonte: Bianchini (2018a, p. 165)

É trabalhada a conversão do registro geométrico bidimensional para o numérico fracionário, onde são divididos três inteiros idênticos em quantidade de partes distintas e tomados as mesmas partes de cada um, sendo visível a equivalência nas figuras trabalhadas.

O tipo de particionamento é explícito em subfiguras com mesmo número de lados, não reafirmando a congruência entre as áreas das partes.

A Figura 54 retrata uma das dez questões propostas sobre frações equivalentes, nela temos dois inteiros iguais, particionados em partes diferentes, mas tomados partes que suas áreas são iguais.

Figura 54 - Questão 27



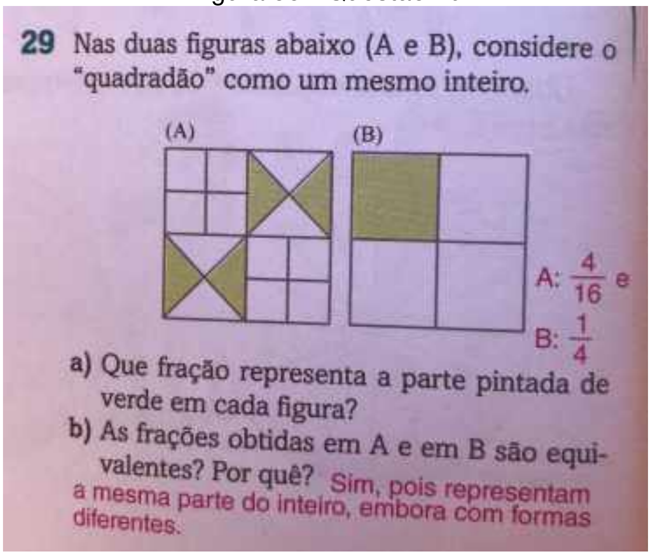
Fonte: Bianchini (2018a, p. 166)

Na questão 27, temos uma questão sobre o conceito de equivalência de frações. Nela aparece retângulos em que suas áreas estão particionadas igualmente, mas em quantidades diferentes, no primeiro retângulo temos o inteiro divididos em três partes, e no segundo em seis partes.

Além do registro geométrico bidimensional, a questão traz como auxílio o registro numérico fracionário, deixando evidente que o objetivo da questão não é assimilar o conceito de parte todo ao fracionário, mas comparar os inteiros de forma inquestionável e didática, assimilando quase que de imediato que as partes tomadas dos inteiros são iguais.

A Figura 55 traz outra questão do tópico de frações equivalentes, porém, diferente da primeira, ela cobra um nível mais elevado de raciocínio lógico, pois relaciona dois inteiros divididos em partes e formatos diferentes, entretanto, é explícito que as áreas dos inteiros estão particionadas igualmente.

Figura 55 - Questão 29



29 Nas duas figuras abaixo (A e B), considere o "quadradão" como um mesmo inteiro.

(A) (B)

A: $\frac{4}{16}$ e

B: $\frac{1}{4}$

a) Que fração representa a parte pintada de verde em cada figura?

b) As frações obtidas em A e em B são equivalentes? Por quê? Sim, pois representam a mesma parte do inteiro, embora com formas diferentes.

Fonte: Bianchini (2018a, p. 166)

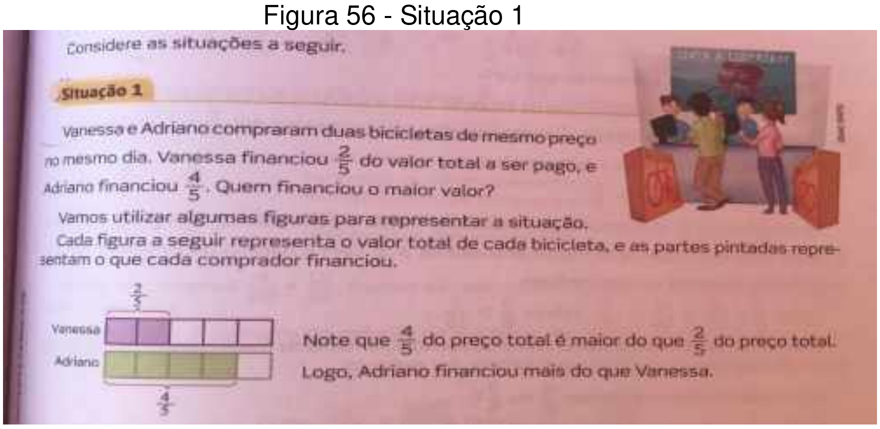
O "quadradão A", foi particionado em quatro quadrados, que por sua vez, cada quadrado foi particionado de duas formas diferentes, dois quadrados foram particionados em quatro quadrados menores e dois quadrados foram particionados em quatro triângulos, dos quais quatro triângulos foram pintados.

O "quadradão B", foi particionado uma só vez, formando quadro quadrados iguais, destes, um quadrado foi pintado de verde.

A questão busca do aluno a conversão do registro geométrico bidimensional para o numérico fracionário, interpretando que embora os quadrados estejam particionados de formas diferentes, foram pintadas partes equivalentes nos dois "quadradões".

No tópico 7 do capítulo 7, analisemos a situação 1 que utiliza a relação parte-todo para ilustrar comparação de frações, de acordo com a Figura 56.

Figura 56 - Situação 1



Considere as situações a seguir.

Situação 1

Vanessa e Adriano compraram duas bicicletas de mesmo preço no mesmo dia. Vanessa financiou $\frac{2}{5}$ do valor total a ser pago, e Adriano financiou $\frac{4}{5}$. Quem financiou o maior valor?

Vamos utilizar algumas figuras para representar a situação.

Cada figura a seguir representa o valor total de cada bicicleta, e as partes pintadas representam o que cada comprador financiou.

Vanessa $\frac{2}{5}$

Adriano $\frac{4}{5}$

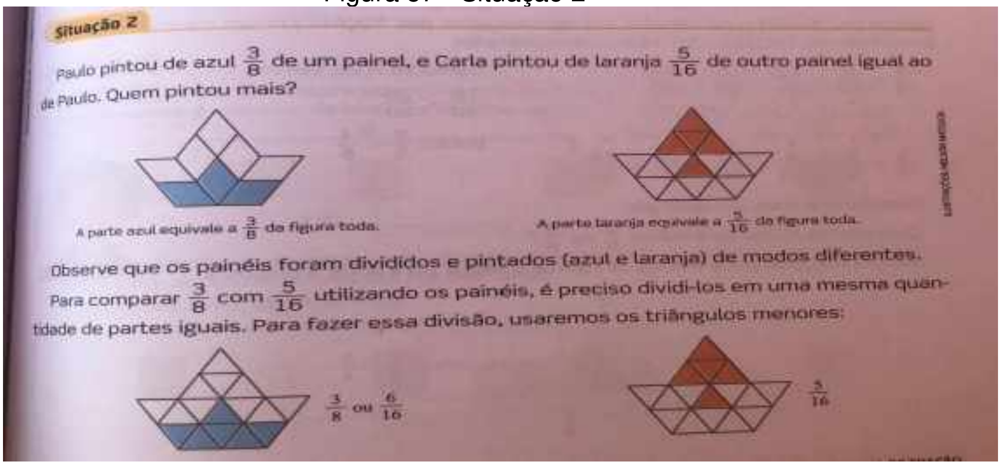
Note que $\frac{4}{5}$ do preço total é maior do que $\frac{2}{5}$ do preço total. Logo, Adriano financiou mais do que Vanessa.

Fonte: Bianchini (2018a, p. 171)

Neste caso, é trabalhado a conversão do registro numérico fracionário para o registro geométrico bidimensional, utilizando para tanto, figuras com particionamento explícito e em subfiguras com mesmo número de lados.

Na figura 57, temos a situação 2 que também tem como objetivo trabalhar comparação de frações utilizando a relação parte-todo.

Figura 57 - Situação 2



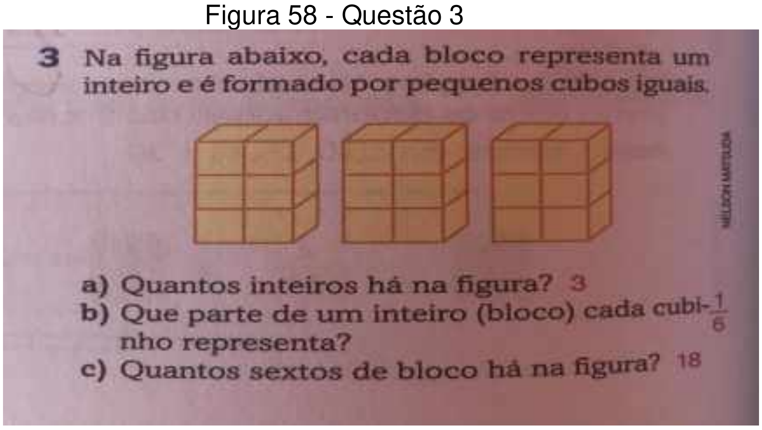
Fonte: Bianchini (2018a, p. 171)

As figuras geométricas são totalmente particionadas em subfiguras com mesmo número de lados, sendo trabalhado a conversão do registro numérico fracionário para o registro geométrico bidimensional.

No exemplo, figuras idênticas são particionadas em quantidades distintas, não sendo possível comparar os valores. Para que seja possível a comparação na análise figural, é necessário particionar o inteiro para que os dois tenham a mesma unidade parte e assim a comparação seja mais nítida.

A questão 3 consiste em converter o registro geométrico bidimensional no registro numérico fracionário, conforme Figura 58.

Figura 58 - Questão 3



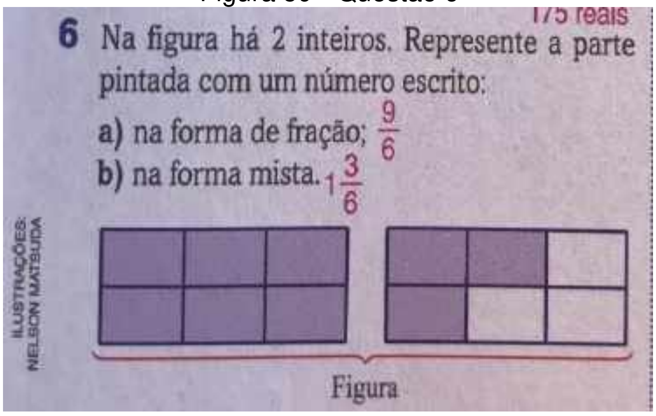
Fonte: Bianchini (2018a, p. 174)

O tipo de particionamento utilizado é o explícito em subfiguras com mesmo número de lados, porém, é enfatizado a igualdade das partes.

São três inteiros divididos em blocos iguais, que são questionados no item “a” quantos inteiros existem, no item “b” é perguntado sobre a unidade parte e no item “c” quantos sextos as partes das três figuras são.

A Figura 59 faz parte de um conjunto de exercícios complementares a fim de revisar os conceitos abordados no capítulo 7 sobre números racionais na forma de fração. Temos dois inteiros particionados em formas e áreas iguais, porém tomados partes diferentes de cada inteiros. No primeiro tomados todas as 6 partes do inteiro, e no segundo inteiro, foram tomadas (3/6), ou seja, metade de sua área.

Figura 59 - Questão 6



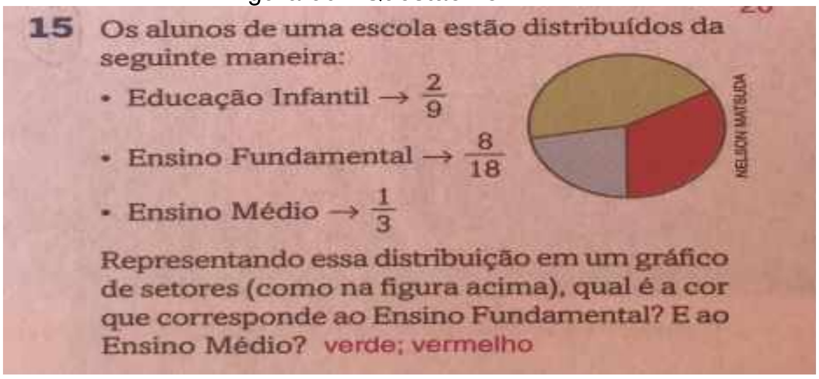
Fonte: Bianchini (2018a, p. 175)

A questão 6 propõem ao aluno converter o registro geométrico bidimensional no registro numérico fracionário e misto, trazendo dois retângulos particionados em seis partes iguais, destes, foram pintados de azul todas as seis partes do primeiro retângulo e três partes do segundo retângulo.

Na questão, o professor pode questionar o aluno sobre o conceito de frações impróprias, propondo converter do registro numérico fracionário para o numérico misto ou até mesmo para o numérico decimal.

Para concluir as situações envolvendo relação parte-todo dos números racionais no capítulo 7 deste livro analisado, traremos a questão 15, representada pela Figura 60. A questão propõe realizar a conversão do registro numérico fracionário para o registro geométrico bidimensional.

Figura 60 - Questão 15



15 Os alunos de uma escola estão distribuídos da seguinte maneira:

- Educação Infantil → $\frac{2}{9}$
- Ensino Fundamental → $\frac{8}{18}$
- Ensino Médio → $\frac{1}{3}$

Representando essa distribuição em um gráfico de setores (como na figura acima), qual é a cor que corresponde ao Ensino Fundamental? E ao Ensino Médio? verde; vermelho

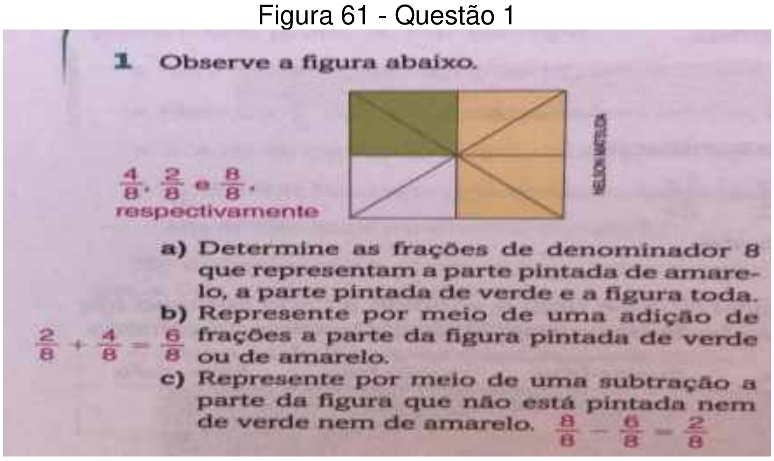
Fonte: Bianchini (2018a, p. 175)

A figura geométrica empregada é particionada explicitamente em subfiguras com áreas distintas, tornando evidente a comparação entre as quantidades de alunos em cada etapa de ensino.

Uma das formas de chegar à solução é realizando tratamento na representação numérica fracionária e relacionar a maior fração com a maior parte do inteiro.

Para exercitar o tópico de adição e subtração com frações de mesmo denominador, o autor propôs a questão 1, de um conjunto de 9 questões, a primeira e única questão utilizando o conceito de parte todo, conforme Figura 61.

Figura 61 - Questão 1



1 Observe a figura abaixo.

$\frac{4}{8}$, $\frac{2}{8}$ e $\frac{8}{8}$, respectivamente

a) Determine as frações de denominador 8 que representam a parte pintada de amarelo, a parte pintada de verde e a figura toda.

b) Represente por meio de uma adição de frações a parte da figura pintada de verde ou de amarelo. $\frac{2}{8} + \frac{4}{8} = \frac{6}{8}$

c) Represente por meio de uma subtração a parte da figura que não está pintada nem de verde nem de amarelo. $\frac{8}{8} - \frac{6}{8} = \frac{2}{8}$

Fonte: Bianchini (2018a, p. 180)

A questão traz um quadrado particionado em 8 partes iguais, dais quais duas foram pintadas de verde, quatro foram pintadas de amarelo e duas foram pintadas de branco.

No item “a” é proposto ao aluno interpretar o registro geométrico bidimensional e converter para o registro numérico fracionário, em seguida, no item “b”, o discente terá que operar com frações, adicionando as partes do inteiro pintadas de verde e amarelo, já no item “c”, o aluno terá que encontrar a diferença entre o inteiro e as partes pintadas de verde e amarelo.

A situação expressa pela Figura 62 faz parte de um conjunto de aplicações que buscam ilustrar o conceito de Adição e subtração de frações com denominadores diferentes.

Figura 62 - Situação 1

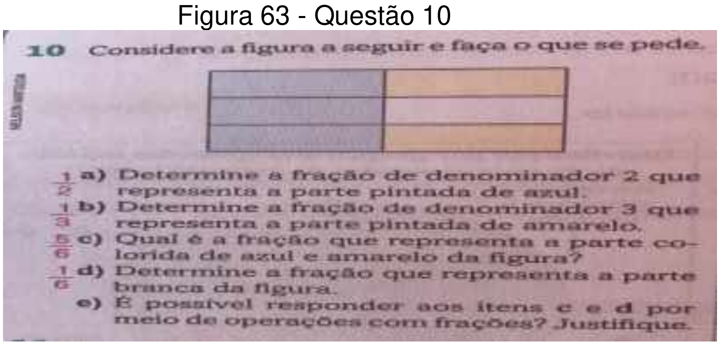
Fonte: Bianchini (2018a, p. 183)

Apresenta dois recipientes com volumes iguais, porém, com volume de líquidos diferentes, ele mistura os dois líquidos em um único recipiente, propondo ao aluno questionar qual o registro numérico fracionário da soma dos volumes dos líquidos.

Para solucionar o problema, busca-se relacionar frações equivalentes para ilustrar a situação e conseguir somar as partes. O autor dividiu o recipiente em seis partes iguais, relacionando a fração (1/2) a fração (3/6) e (1/3) a fração (2/6), pois representam partes iguais do inteiro, assim, como os inteiros estão representados em divisão de partes iguais, pode se somar as partes tomadas 3 + 2, resultando na fração (5/6).

No tópico 2 do capítulo 8, temos a questão 10, onde é trabalhada a conversão do registro geométrico bidimensional para o numérico fracionário, conforme Figura 63.

Figura 63 - Questão 10



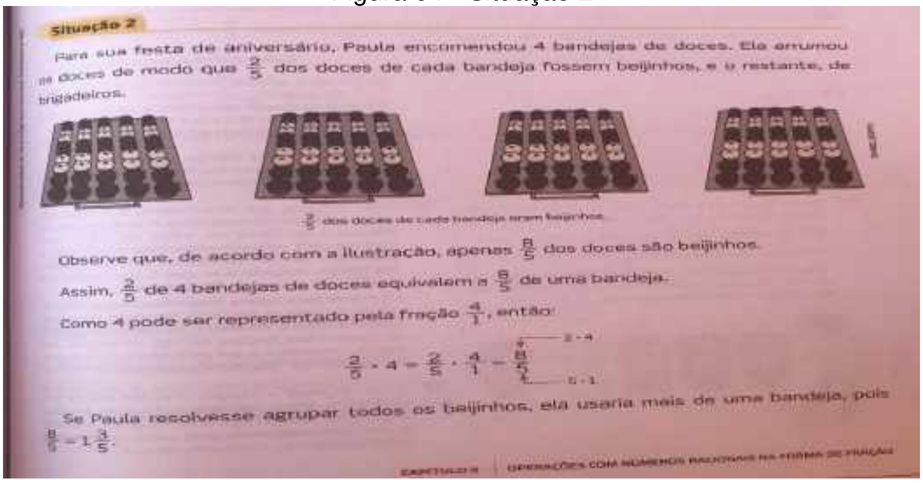
Fonte: Bianchini (2018a, p. 186)

O tipo de particionamento utilizado na figura é o explícito em subfiguras com mesmo número de lados, não afirmando a congruência das partes.

Para responder os itens “a” e “b”, o aluno terá que realizar um tratamento figural para visualizar o denominador 2 e 3 respectivamente, ou realizar a conversão e posteriormente realizar o tratamento na fração encontrada.

A situação 2 ilustra um exemplo sobre multiplicação de frações, onde são utilizadas figuras geométricas totalmente particionadas em subfiguras com o mesmo número de lados, no qual é provado que quatro vezes (2/5) são (8/5).

Figura 64 - Situação 2



Situação 2

Para sua festa de aniversário, Paula encomendou 4 bandejas de doces. Ela arrumou os doces de modo que $\frac{2}{5}$ dos doces de cada bandeja fossem beijinhos, e o restante, de brigadeiros.

$\frac{2}{5}$ dos doces de cada bandeja eram beijinhos

Observe que, de acordo com a ilustração, apenas $\frac{8}{5}$ dos doces são beijinhos.

Assim, $\frac{2}{5}$ de 4 bandejas de doces equivalem a $\frac{8}{5}$ de uma bandeja.

Como 4 pode ser representado pela fração $\frac{4}{1}$, então:

$$\frac{2}{5} \cdot 4 = \frac{2}{5} \cdot \frac{4}{1} = \frac{8}{5}$$

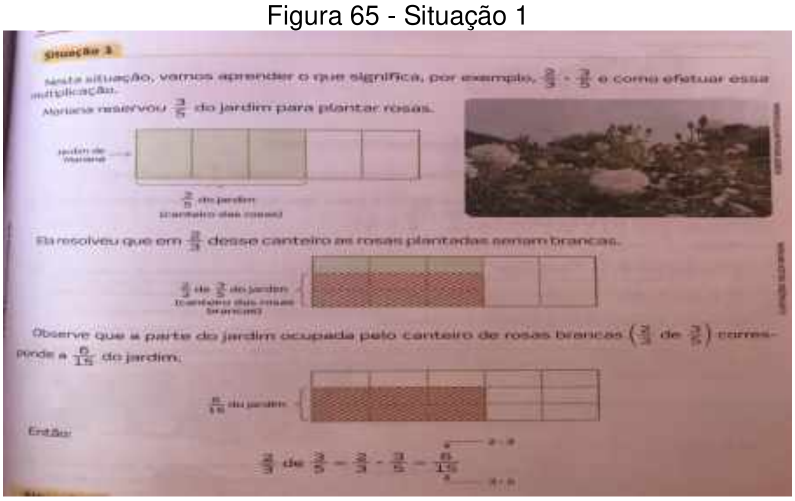
Se Paula resolvesse agrupar todos os beijinhos, ela usaria mais de uma bandeja, pois $\frac{8}{5} = 1\frac{3}{5}$.

Fonte: Bianchini (2018a, p. 189)

É utilizada na questão a conversão do registro numérico fracionário para o registro geométrico bidimensional.

A Figura 65 apresenta situações envolvendo multiplicações de fatores fracionários.

Figura 65 - Situação 1



Situação 1

Nesta situação, vamos aprender o que significa, por exemplo, $\frac{2}{3} \cdot \frac{3}{5}$ e como efetuar essa multiplicação.

Mariana reservou $\frac{3}{5}$ do jardim para plantar rosas.

$\frac{3}{5}$ do jardim (canteiro das rosas)

Ela resolveu que em $\frac{2}{3}$ desse canteiro as rosas plantadas seriam brancas.

$\frac{2}{3}$ de $\frac{3}{5}$ do jardim (canteiro das rosas brancas)

Observe que a parte do jardim ocupada pelo canteiro de rosas brancas $\left(\frac{2}{3} \text{ de } \frac{3}{5}\right)$ corresponde a $\frac{6}{15}$ do jardim.

$\frac{6}{15}$ do jardim

Então:

$$\frac{2}{3} \text{ de } \frac{3}{5} = \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{5} = \frac{6}{15}$$

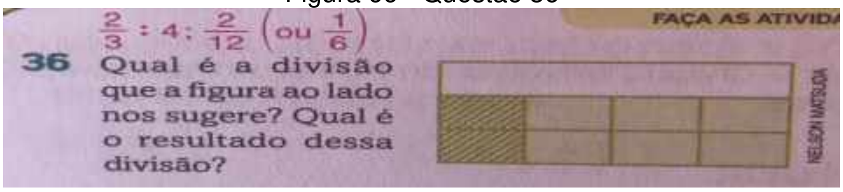
Fonte: Bianchini (2018a, p. 191)

O tipo de particionamento das figuras é explícito em subfiguras com mesmo número de lados, onde é feita a conversão do registro numérico fracionário para o geométrico bidimensional, não fazendo relação entre a congruência das partes.

Inicialmente divide-se um retângulo em 5 partes retangulares e toma-se 3 destas partes, posteriormente divide-se as partes tomadas em 3 partes e toma-se (2/3) de (3/5), sendo visível o resultado da multiplicação.

Para exercitar a divisão de frações, a questão 36 representada na Figura 66, utiliza uma figura particionada implicitamente em subfiguras com mesmo número lados para representar o quociente de uma divisão.

Figura 66 - Questão 36

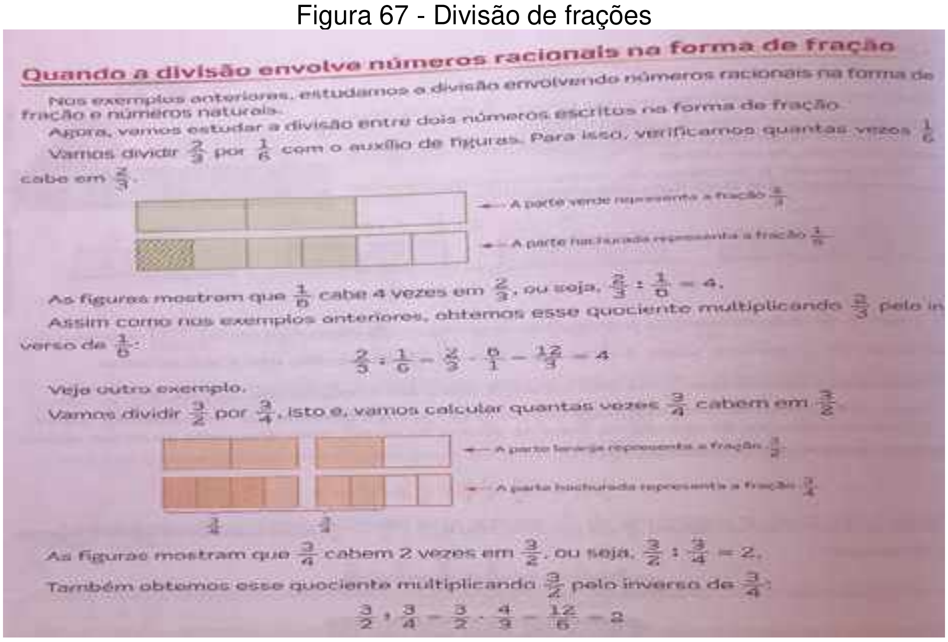


Fonte: Bianchini (2018a, p. 196)

É proposto realizar a conversão do registro geométrico bidimensional para o numérico fracionário, onde o aluno deve perceber que temos (2/3) divididos em 4 partes iguais e que a figura admite sobreposição, realizando tratamento figural.

Na Figura 67 temos um exemplo de divisão de duas frações que utilizam a relação parte-todo como ilustração.

Figura 67 - Divisão de frações



Quando a divisão envolve números racionais na forma de fração

Nos exemplos anteriores, estudamos a divisão envolvendo números racionais na forma de fração e números naturais.

Agora, vamos estudar a divisão entre dois números escritos na forma de fração.

Vamos dividir $\frac{2}{3}$ por $\frac{1}{6}$ com o auxílio de figuras. Para isso, verificamos quantas vezes $\frac{1}{6}$ cabe em $\frac{2}{3}$.

A parte verde representa a fração $\frac{2}{3}$

A parte hachurada representa a fração $\frac{1}{6}$

As figuras mostram que $\frac{1}{6}$ cabe 4 vezes em $\frac{2}{3}$, ou seja, $\frac{2}{3} : \frac{1}{6} = 4$.

Assim como nos exemplos anteriores, obtemos esse quociente multiplicando $\frac{2}{3}$ pelo inverso de $\frac{1}{6}$:

$$\frac{2}{3} : \frac{1}{6} = \frac{2}{3} \cdot \frac{6}{1} = \frac{12}{3} = 4$$

Veja outro exemplo.

Vamos dividir $\frac{3}{2}$ por $\frac{3}{4}$, isto é, vamos calcular quantas vezes $\frac{3}{4}$ cabem em $\frac{3}{2}$.

A parte laranja representa a fração $\frac{3}{2}$

A parte hachurada representa a fração $\frac{3}{4}$

$\frac{3}{4}$ $\frac{3}{4}$

As figuras mostram que $\frac{3}{4}$ cabem 2 vezes em $\frac{3}{2}$, ou seja, $\frac{3}{2} : \frac{3}{4} = 2$.

Também obtemos esse quociente multiplicando $\frac{3}{2}$ pelo inverso de $\frac{3}{4}$:

$$\frac{3}{2} : \frac{3}{4} = \frac{3}{2} \cdot \frac{4}{3} = \frac{12}{6} = 2$$

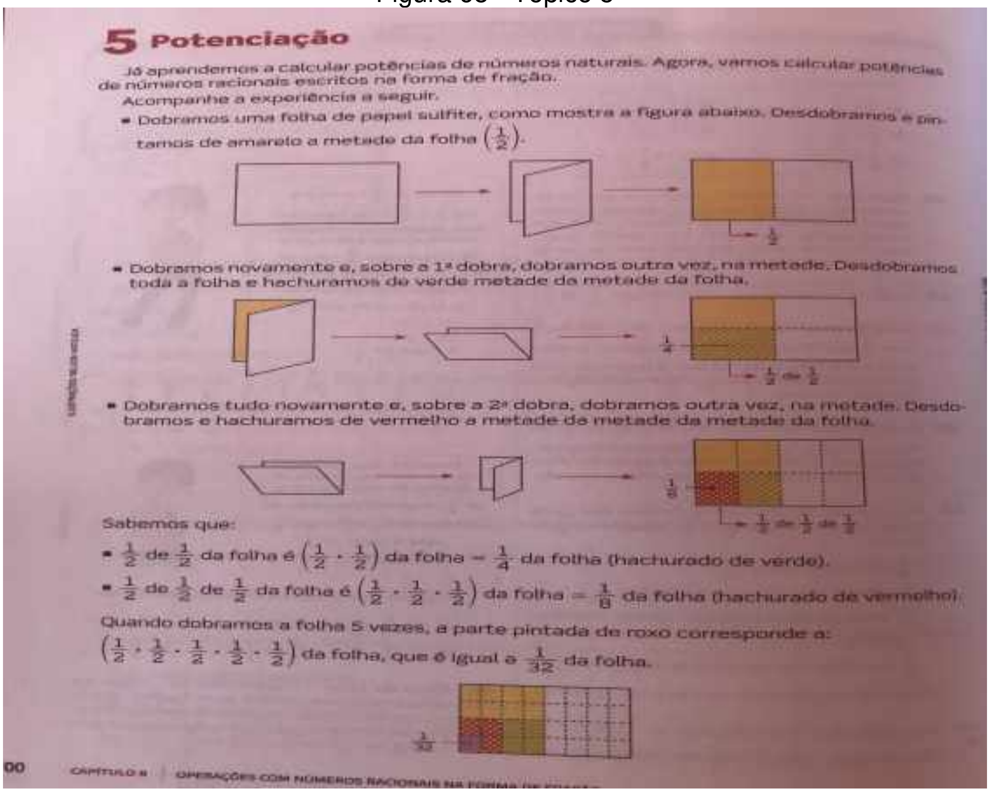
Fonte: Bianchini (2018a, p. 198)

A conversão utilizada neste caso é do registro numérico fracionário para o geométrico bidimensional, no qual a figura particionada explicitamente em subfiguras com mesmo número de lados representa o quociente de divisões.

Nas duas primeiras figuras geométricas é dividido o inteiro em (2/3) e em seguida o inteiro é dividido em (1/6), cabendo 4 partes em (2/3). Já as outras quatro figuras exemplificam a divisão da fração imprópria (3/2) por uma fração própria (3/4) que resultam em 2.

No tópico 5 sobre potenciação, é utilizado a relação parte-todo para demonstrar como funciona a ideia de potência quando a base é um número não inteiro, como podemos observar na Figura 68.

Figura 68 - Tópico 5



5 Potenciação

Já aprendemos a calcular potências de números naturais. Agora, vamos calcular potências de números racionais escritos na forma de fração.

Acompanhe a experiência a seguir.

- Dobramos uma folha de papel sulfite, como mostra a figura abaixo. Desdobramos e pintamos de amarelo a metade da folha $\left(\frac{1}{2}\right)$.
- Dobramos novamente e, sobre a 1ª dobra, dobramos outra vez, na metade. Desdobramos toda a folha e hachuramos de verde metade da metade da folha.
- Dobramos tudo novamente e, sobre a 2ª dobra, dobramos outra vez, na metade. Desdobramos e hachuramos de vermelho a metade da metade da metade da folha.

Sabemos que:

- $\frac{1}{2}$ de $\frac{1}{2}$ da folha é $\left(\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}\right)$ da folha $= \frac{1}{4}$ da folha (hachurado de verde).
- $\frac{1}{2}$ de $\frac{1}{2}$ de $\frac{1}{2}$ da folha é $\left(\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}\right)$ da folha $= \frac{1}{8}$ da folha (hachurado de vermelho).

Quando dobramos a folha 5 vezes, a parte pintada de roxo corresponde a:
$\left(\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}\right)$ da folha, que é igual a $\frac{1}{32}$ da folha.

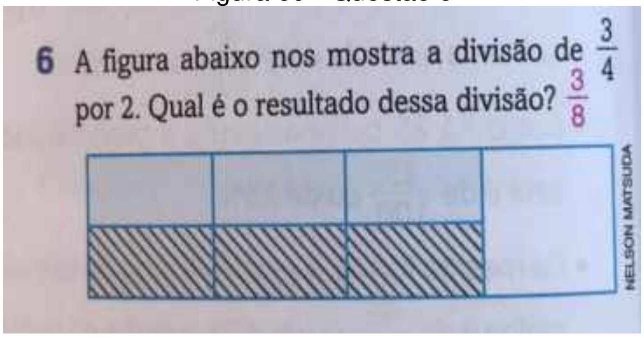
Fonte: Bianchini (2018a, p. 200)

É possível notar que quanto maior for o expoente da fração, menor seja o resultado da operação, pois a quantidade de partes do inteiro cresce exponencialmente.

A questão converte o registro numérico fracionário para o geométrico bidimensional, utilizando figuras particionadas explicitamente em subfiguras com mesmo número de lados, não admitindo sobreposição.

A questão 6, da Figura 69 é a única entre as 10 questões complementares propostas com a finalidade de revisar os conceitos abordados no capítulo 8 sobre operações com números racionais na forma de fração.

Figura 69 - Questão 6



Fonte: Bianchini (2018a, p. 206)

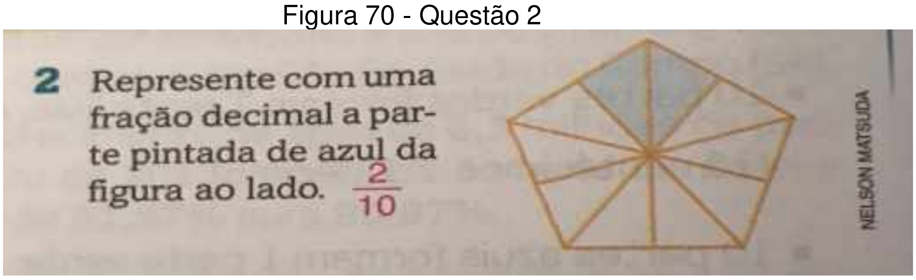
Neste caso, temos o registro geométrico bidimensional, auxiliado pelo registro numérico fracionário.

O inteiro está particionado explicitamente, porém o resultado está implícito na ilustração, sendo necessário ao aluno um grau de interpretação maior em comparação as outras questões onde trata o conceito de parte todo.

Temos um retângulo particionado em quatro partes iguais, destas, foram pintadas três partes de azul e em seguida, destas partes tomadas do inteiro, foram divididas por dois, ou seja, tomados metade da área correspondente.

A figura 70 utiliza a conversão do registro geométrico bidimensional para o registro numérico fracionário, onde a figura utilizada tem particionamento explícito em subfiguras com mesmo número de lados.

Figura 70 - Questão 2

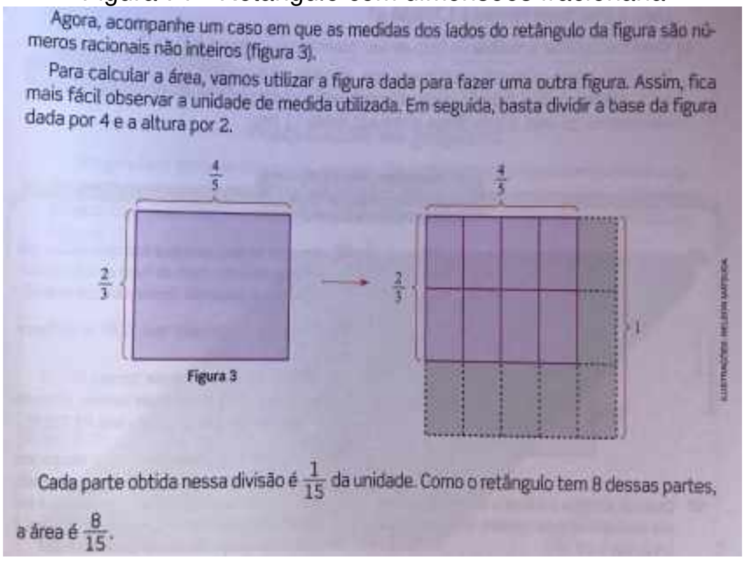


Fonte: Bianchini (2018a, p. 210)

A questão não faz referência a congruência entre as partes, podendo estimular a dupla contagem e não gerar de fato uma compreensão do objeto matemático estudado, cabendo ao professor estimular os alunos a fazerem tratamentos figurais de sobreposição e também de simplificação da fração encontrada.

A Figura 71 retrata a situação 2, proposta com a finalidade de exemplificar áreas de superfícies retangulares onde suas dimensões são números racionais na forma de fração.

Figura 71 - Retângulo com dimensões fracionaria



Fonte: Bianchini (2018a, p. 303)

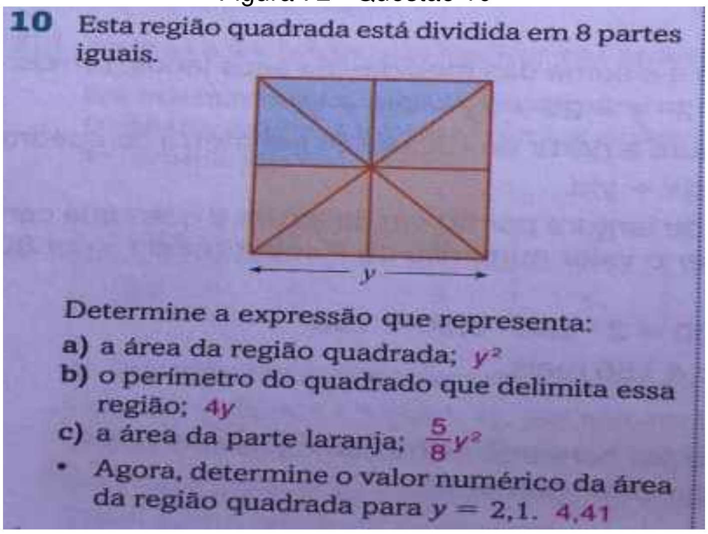
Neste caso, temos um problema onde se utiliza os conceitos de fração relacionados com o registro geométrico bidimensional, com auxílio do registro numérico fracionário.

Na questão temos um retângulo lilás, onde suas dimensões são números racionais não inteiros. Para o aluno entender de forma didática, foi construído o retângulo inteiro de onde foi retirado o retângulo lilás para se descobrir a unidade de área utilizada, ou seja, descobrir em quantas partes o inteiro foi dividido.

Assim sendo, como o comprimento do retângulo é (4/5), foi construído um retângulo com todas as partes de comprimento, ou seja (5/5) do inteiro, a mesma ideia foi utilizada para descobrir qual a altura do retângulo. Portanto, a unidade de área é (1/15) e como foram tomados 8 partes para construir o retângulo lilás, a área do retângulo lilás é (8/15) do inteiro.

No livro do 7º ano, no capítulo 5 sobre equações, no tópico 3 referentes a valor numérico de expressões algébricas, temos a questão 10, a única questão da atividade que aborda o conceito de parte-todo para ilustrar área de parte de um quadrado, conforme Figura 72.

Figura 72 - Questão 10



10 Esta região quadrada está dividida em 8 partes iguais.

Determine a expressão que representa:

a) a área da região quadrada; y^2

b) o perímetro do quadrado que delimita essa região; $4y$

c) a área da parte laranja; $\frac{5}{8}y^2$

• Agora, determine o valor numérico da área da região quadrada para $y = 2,1$. 4,41

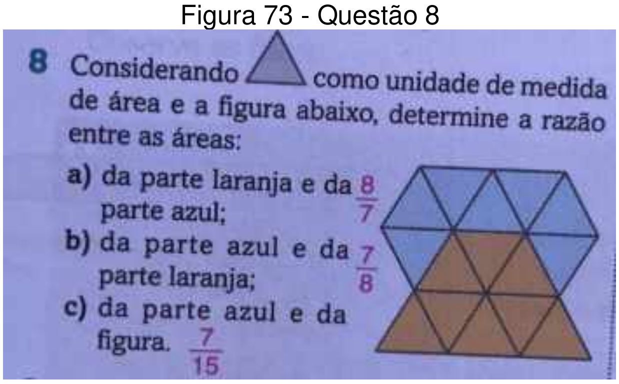
Fonte: Bianchini (2018b, p. 116)

A questão particiona um quadrado em oito partes e de mesma forma, tornando explícito a equivalência de áreas em cada parte do inteiro, pintando 3 partes de azul e 6 partes de laranja.

No item ‘C’ da questão, o autor propõe que seja feita a conversão do registro geométrico bidimensional para o numérico fracionário, onde o aluno terá que descobrir a fração da área do quadrado que está pintada de laranja.

No capítulo 9 sobre razões, proporções e porcentagem, no tópico 2 referente a razão entre grandezas de mesma natureza, o autor utiliza o conceito de parte todo na questão 8, a única a utilizar essa metodologia na atividade, de acordo com a Figura 73.

Figura 73 - Questão 8



8 Considerando ▲ como unidade de medida de área e a figura abaixo, determine a razão entre as áreas:

a) da parte laranja e da parte azul; $\frac{8}{7}$

b) da parte azul e da parte laranja; $\frac{7}{8}$

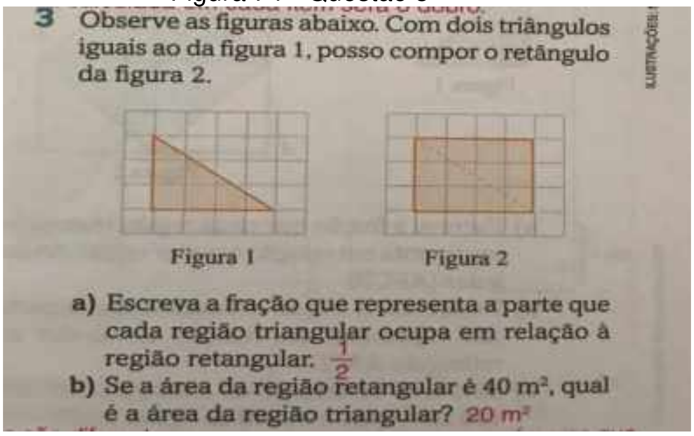
c) da parte azul e da figura. $\frac{7}{15}$

Fonte: Bianchini (2018b, p. 199)

A questão traz uma figura particionada em triângulos de mesma área e formas, sendo pintados 7 triângulos de azul e 8 triângulos de laranja, sendo proposto a conversão do registro geométrico bidimensional para o registro numérico fracionário.

A questão 3 apresentada na Figura 74, é utilizado a relação parte-todo, onde tem o objetivo de comparar a figura 1 com a figura 2.

Figura 74 - Questão 3



3 Observe as figuras abaixo. Com dois triângulos iguais ao da figura 1, posso compor o retângulo da figura 2.

Figura 1 Figura 2

a) Escreva a fração que representa a parte que cada região triangular ocupa em relação à região retangular. $\frac{1}{2}$

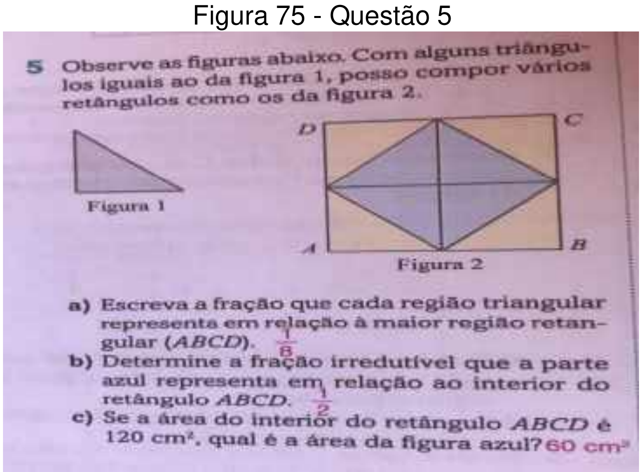
b) Se a área da região retangular é 40 m², qual é a área da região triangular? 20 m²

Fonte: Bianchini (2018b, p. 247)

Temos uma conversão do registro geométrico bidimensional para o numérico fracionário com figuras particionadas explicitamente em subfiguras com mesmo número de lados, abordando a ideia de metade e como representa-la.

No capítulo 11 sobre áreas e volumes, temos a questão 5 que traz uma figura geométrica retangular construída a partir de triângulos congruentes, conforme Figura 75.

Figura 75 - Questão 5



5 Observe as figuras abaixo. Com alguns triângulos iguais ao da figura 1, posso compor vários retângulos como os da figura 2.

Figura 1

D C A B

Figura 2

a) Escreva a fração que cada região triangular representa em relação à maior região retangular (*ABCD*). $\frac{1}{8}$

b) Determine a fração irredutível que a parte azul representa em relação ao interior do retângulo *ABCD*. $\frac{1}{2}$

c) Se a área do interior do retângulo *ABCD* é 120 cm², qual é a área da figura azul? 60 cm²

Fonte: Bianchini (2018b, p. 248)

A região retangular (ABCD) é formada por oito triângulos, onde metade foi pintado de azul e a outra metade foi pintada de amarelo, propondo ao aluno realizar a conversão do registro geométrico bidimensional para o numérico fracionário.

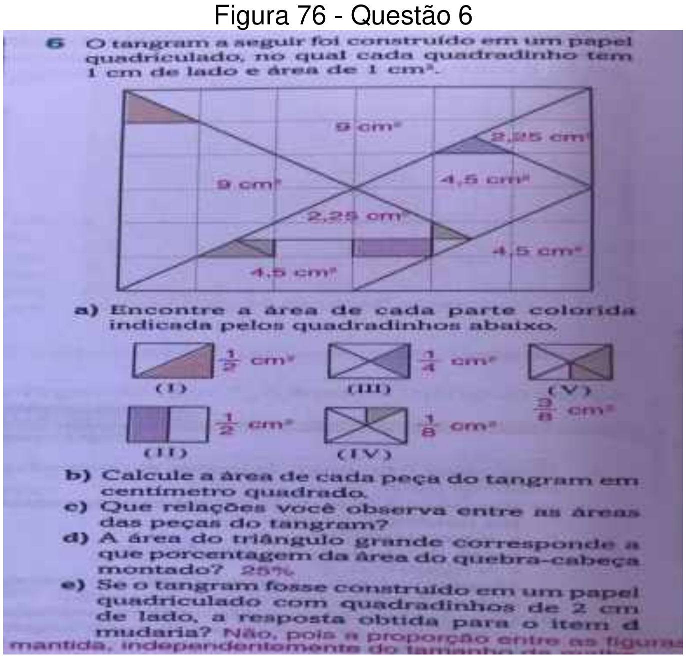
No item ‘A’ é proposto realizar a conversão da unidade parte da figura para o registro numérico fracionário, cabendo ao aluno entender que representa uma parte em oito partes que compõem o inteiro.

No item ‘B’ é proposto realizar um tratamento na fração que representa as partes do inteiro pintadas de azul, sendo assim, o aluno terá que realizar a conversão e em seguida simplificar a fração encontrada.

Para finalizar a questão, é proposto no item ‘C’ que o aluno encontre a área da figura pintada de azul, sabendo que a érea do inteiro é 120 cm², tendo apenas que o aluno perceba que (4/8) da figura está pintada de azul, ou seja, que isso representa (1/2) do inteiro, sendo assim, a área das partes pintadas de azul é metade de 120 cm².

Ainda no capítulo 11, temos a questão 6 que também utiliza o conceito de parte todo para ilustrar a área de partes das figuras geométricas de um tangram, conforme Figura 76.

Figura 76 - Questão 6


6 O tangram a seguir foi construído em um papel quadriculado, no qual cada quadradinho tem 1 cm de lado e área de 1 cm².

a) Encontre a área de cada parte colorida indicada pelos quadradinhos abaixo.

b) Calcule a área de cada peça do tangram em centímetro quadrado.

c) Que relações você observa entre as áreas das peças do tangram?

d) A área do triângulo grande corresponde a que porcentagem da área do quebra-cabeça montado? 25%

e) Se o tangram fosse construído em um papel quadriculado com quadradinhos de 2 cm de lado, a resposta obtida para o item d mudaria? Não, pois a proporção entre as figuras mantida, independentemente do tamanho

Fonte: Bianchini (2018b, p. 248)

O tangram está representado em uma malha quadriculada e é dado a área da unidade parte da figura. A unidade parte está dividida em formas diferentes em cada peça do tangram, tendo um particionamento implícito em subfiguras com número de lados diferentes.

Temos na questão a representação geométrica bidimensional da área e está sendo proposto ao aluno a conversão para o registro numérico fracionário e percentual da área da figura e de suas subfiguras.

5.2 Síntese da análise da coleção B

Na coleção analisada encontramos um total de 94 figuras geométricas que envolvem a relação parte-todo e a representação geométrica bidimensional dos números racionais. Pudemos observar que, assim como na coleção A, as principais conversões trabalhadas envolviam os registros geométrico bidimensional e numérico fracionário, conforme gráfico 2.

Gráfico 2 - Conversões entre os registros geométrico bidimensional e numérico fracionário dos números racionais encontrados na coleção B

Fonte: Autoria própria, 2021

Em comparação a coleção A, a diferença quantitativa das conversões entre os registros numérico fracionário e geométrico bidimensional (ida e volta) é menor, porém ainda não ideal segundo Duval (2012). Entretanto, ainda prevalece a conversão que tem como registro de partida o geométrico bidimensional e como registro de chegada o numérico fracionário.

Quanto ao tipo de particionamento das figuras geométricas analisadas, podemos observar no Quadro 6 a diferença absolutamente maior em favor daquelas que são totalmente particionadas.

Quadro 6 - Tipo de Figuras quanto ao particionamento

Figuras geométricas quanto ao particionamento	Quantidade de Figuras geométricas
Figuras totalmente particionadas	89
Particionamento implícito	5
Total	94

Fonte: Autoria própria, 2021

Do total das figuras geométricas analisadas, 94,7% são particionadas explicitamente. Segundo Silva (2018) o particionamento explícito é um fator que influencia o procedimento da dupla contagem, podendo gerar uma avaliação da compreensão dos conceitos relacionados a relação parte-todo dos números racionais.

O Quadro 7 apresenta os tipos de figuras geométricas totalmente particionadas, de acordo com as suas subfiguras, destacando-se a ausência das figuras geométricas explicitamente particionadas cujas subfiguras tenham número de lados diferentes.

Quadro 7 - Figuras Totalmente Particionadas

Tipos de Figuras	Quantidade de Figuras geométricas	
	Com sobreposição	**Sem sobreposição**
Subfiguras com mesmo número de lados	33	52
Subfiguras com número de lados diferentes	4	

Fonte: Autoria própria, 2021

Verificamos que das figuras que possuem subfiguras com mesmo número de lados, 61,2% não admitem sobreposição, ou seja, não é necessário qualquer tipo de tratamento na figura para que seja estabelecida a relação parte-todo, bastando que sejam apenas reconhecidas as unidades visuais necessárias para tal. Essas figuras geométricas são denominadas por Silva e Santos (2020), de ‘perceptuais’ e são classificadas como sendo de alto grau de congruência semântica em que o procedimento da dupla contagem é totalmente adequado. Podemos verificar também que apenas 4,5 % das figuras admitem tratamento figural, necessitando que o aluno tenha um olhar ampliado sobre a relação de congruência, para uniformizar as formas e áreas.

Podemos observar ainda no Quadro 7 que todas as figuras particionadas explicitamente são em subfiguras com o mesmo número de lados, o que facilita a determinação da unidade parte.

Em relação as figuras geométricas com particionamento implícito (5,3%), apenas uma delas apresenta subfiguras com número de lados diferentes, gerando um baixo grau de congruência semântica, de acordo com Silva e Santos (2020), como mostra o Quadro 8.

Quadro 8 - Figuras com Particionamento implícito

Tipos de Figuras	Quantidade de Figuras geométricas
Duas únicas subfiguras com número de lados iguais ou diferentes	-
Subfiguras com mesmo número de lados	4
Subfiguras com número de lados diferentes	1

Fonte: Autoria própria, 2021

Das subfiguras com particionamento implícito apenas uma delas ou 1,06% do total das figuras geométricas analisadas possuem subfiguras com número de lados diferentes. Para Silva e Santos (2020) essas figuras geométricas são chamadas de figuras operatórias por desconstrução das áreas e das formas. E para que seja estabelecida a relação parte-todo é necessário que seja encontrada a unidade-parte e realizado o tratamento figural de particionamento, envolvendo a desconstrução das áreas das subfiguras e das suas formas, com movimentos de translação e/ou rotação.

As figuras geométricas com particionamento implícito que possuem subfiguras com mesmo número de lados correspondem a 80% das figuras geométricas com particionamento implícito. No Quadro 9, podemos analisar algumas características dessas figuras geométricas.

Quadro 9 - Características das Figuras Geométricas com subfiguras que têm o mesmo número de lados

Tipos de figura	Quantidade de Figuras geométricas		Tratamentos Figurais	
	Com malha quadriculada	**Sem malha quadriculada**	**Sobreposição de subfiguras**	**Translação e rotação de subfiguras**
Unidade-parte é dada	-	2	-	-
Unidade-parte necessita ser encontrada	**-**	2	1	-

Fonte: Autoria própria, 2021

As questões não utilizam malha quadriculada e apenas uma admite tratamentos figurais. Podemos notar que o autor utiliza muitas figuras com as mesmas características visuais, cabendo ao professor mediador complementar com questões que utilizam a relação parte-todo, figuras que demandam de mais atenção e necessidade de realizar tratamentos, objetivando haver compreensão da equivalência das representações.

6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Nesta pesquisa, tivemos como objetivo geral analisar as características das figuras geométricas empregadas no LD para o estabelecimento da relação parte-todo e em transformações entre registros de representações dos números racionais que envolvem o registro de representação geométrico bidimensional.

Para alcançar tal objetivo, analisamos as características visuais das figuras geométricas empregadas nas questões que envolvem o estabelecimento da relação parte-todo dos números racionais, e nas conversões que envolviam o registro geométrico bidimensional dos números racionais. Para isso, delimitamos a análise em livros do 6º e 7º anos do ensino fundamental de duas coleções aprovadas no PNLD.

Podemos concluir da análise da coleção A que, não é trabalhado de forma igualitária a conversão de ida e volta entre os registros geométrico bidimensional e numérico fracionário dos números racionais. Segundo Duval (2012) é indispensável que sejam propostas atividades que envolvam conversões de ida e volta entre registros de representações semióticas do objeto matemático, pois se configuram como processos distintos e necessários para que o sujeito consiga transitar de forma espontânea entre esses registros e alcance a compreensão do objeto matemático.

Podemos verificar ainda um alto nível de congruência semântica na maioria das questões analisadas, não possibilitando tratamentos figurais e estimulando o procedimento da dupla contagem. Sendo assim, acreditamos que mesmo o aluno acertando no estabelecimento da relação parte-todo e posterior conversão, não há garantia que de fato tenha compreendido a equivalência das representações semióticas.

Do total de questões analisadas na coleção A, 83% utilizam figuras totalmente particionadas e destas, 58% não admitem nenhum tipo de particionamento. Das figuras com particionamento implícito, apenas 26,3% ou 4% do total de figuras geométricas pesquisadas são classificadas com um baixo nível de congruência semântica, ou seja, são figuras que necessitam tratamentos para o estabelecimento da relação parte-todo e conversão para outro registro.

Podemos concluir também que a coleção B apresenta no geral as mesmas características da coleção A, pois também apresenta diferença entre as conversões de ida e volta entre os registros analisados e as figuras geométricas em sua maioria apresentam alto grau de congruência semântica com o procedimento da dupla contagem.

Das 94 figuras analisadas, 94,7% são totalmente particionadas e destas, 58,4% não admitem nenhum tipo de particionamento. Enquanto que entre as figuras com particionamento incompleto, apenas 20% tem subfiguras com número de lados diferentes, evidenciando que o autor trabalha a relação parte-todo de forma que não prioriza o tratamento figural e utilizando muitas situações com o objetivo apenas de exemplificar conceitos.

Como contribuição para o ensino aprendizagem de matemática, este trabalho evidencia que o livro didático não deve ser o único recurso didático a ser utilizado pelo professor que necessita ter um olhar crítico e buscar envolver outros recursos que vise a complementaridade das ideias discutidas nos mesmos.

Esta pesquisa tem suas limitações e estudos posteriores podem ser desenvolvidos, no sentido de abranger os demais anos escolares e outras coleções da Educação Básica para uma análise mais completa acerca das características das figuras geométricas utilizadas em livros didáticos para trabalhar a relação parte-todo e conversões que envolvam o registro geométrico bidimensional dos números racionais.

7 REFERÊNCIAS

BIANCHINI, E. Matemática Bianchini: Componente curricular Matemática, 6º ano do ensino fundamental – 9. ed. – São Paulo: Moderna, 2018a.

______. Matemática Bianchini: Componente curricular Matemática, 7º ano do ensino fundamental – 9. ed. – São Paulo: Moderna, 2018b.

BITTENCOURT, C. M. F. **O livro didático entre textos e imagens.** In: BITTENCOURT, Circe Maria F. (org.). O saber histórico na sala de aula. 6. ed. São Paulo: Contexto, 2002. p. 69-90.

BRASIL. Fundo Nacional de Desenvolvimento da Educação (FNDE). **Programa Nacional do Livro Didático – PNLD.** Brasília: Ministério da Educação, Secretaria de Educação Básica, 2014.

______. **Guia de livros didáticos:** PNLD 2012. Matemática / Brasília: Ministério da Educação, Secretaria de Educação Básica, 2011.

______. **Resolução N. 42**, de 28 de agosto de 2012. Dispõe sobre o Programa Nacional do Livro Didático (PNLD) para a educação básica. Alterada pelas Resoluções nº 22, de 7 de junho de 2013, e n. .44 de 13.de novembro de 2013.

CAMPOS, T.; MAGINA, S. & NUNES, T. (2006). **O professor polivalente e a fração: conceitos e estratégias de ensino.** Educação Matemática e Pesquisa, São Paulo, v.8, n.1, p 125-136. Disponível em: http://revistas.pucsp.br/emp/issue/archive. Acesso em: 07 out 2021.

CORNÉLIO, S. D'A. V. **Perspectiva do letramento:** mudanças e permanências nos livros didáticos de alfabetização. Espírito Santo, 2015. Disponível em: http://repositorio.ufes.br/bitstream/10/2237/1/tese_8851_Tese%20Shenia%20Venturim%20Corn%C3%A9lio.pdf. Acesso em: 19 fev. 2021.

DUVAL, R. **Registros de representação semiótica e funcionamento cognitivo do pensamento.** REVEMAT. (Trad. Méricles T. Moretti). Florianópolis Florianópolis, SantaCatarina, v. 7, n. 2, p.266-297, 2012b. Disponívelem:https://periodicos.ufsc.br/index.php/revemat/issue/archive. Acesso em: 0f out 2021.

______. **Semiosis y Pensamiento Humano.** Registros Semióticos y Aprendizajes Intelectuales. trad. Myriam Veja Rastrepo. Universidad Del Valle. 2004.

______. Ver e ensinar a matemática de outra forma: Entrar no modo matemático de pensar: os registros de representações semióticas. 1ª ed. São Paulo: PROEM, 2011.

GAY, M. R. G.; SILVA, W. R. Araribá Mais: Componente curricular Matemática, 6º ano do ensino fundamental – 1. ed. – São Paulo: Moderna, 2018a.

______. Araribá Mais: Componente curricular Matemática, 7º ano do ensino fundamental – 1. ed. – São Paulo: Moderna, 2018b.

GIL, A. C. **Métodos e técnicas de pesquisa social**. 7. ed. São Paulo: Ed. Atlas, 2019.

MARCONI, M. A.; LAKATOS, E. M. **Fundamentos de metodologia científica**. 8ª ed. São Paulo: Editora Atlas, 2017.

MELO, C. I. B.; LOPES, T. M. R.; OLIVEIRA. J. L. **Análise crítica do processo de escolha do livro didático de Matemática na EEF José Jucá, no município de Quixadá-CE**. In: Revista Thema. v. 14. n.4. p. 100-113. 2017.

OLIVEIRA, E. M. Q. **O uso do livro didático de Matemática por professores do ensino fundamental.** Dissertação (Mestrado em Educação). UFPE. Recife, 2007.

OLIVEIRA, J. N. **Dificuldades na aprendizagem dos números racionais**: confrontando dois níveis de escolaridade. São Paulo, 2016. Disponível em: http://www.sbem.com.br/enem2016/anais/pdf/5901_2523_ID.pdf. Acesso em: 28 Out. 2021.

PRODANOV, C. C.; FREITAS, E. C. F. **Metodologia do Trabalho Científico**: métodos e técnicas da pesquisa e do trabalho acadêmico. 2. ed. Novo Hamburgo: Universidade Feevale, 2013.

SILVA, F. A. F. **Graus de não congruência semântica nas conversões entre os registros geométrico bidimensional e simbólico fracionário dos números racionais.** Dissertação (Doutorado em ensino de ciências e matemática). UFRP. Recife, 2018.

SILVA, F. A. F.; MORETTI, M. T. **Características visuais das figuras geométricas Empregadas no estudo da relação parte-todo dos Números racionais.** In: Florilégio de pesquisas que envolvem a Teoria semio-cognitiva de aprendizagem matemática de Raymond Duval. organizadores, Méricles Thadeu Moretti, Celia Finck Brandt. – Florianópolis. Ed. REVEMAT/UFSC, 2020.

SILVA, F.A.F.; SANTOS, M.C. **Proposição de graus de não congruência semântica nas conversões entre os registros geométrico bidimensional e simbólico fracionário dos números racionais**. INTHERMATS. V.1, N1, p. 174-196, julh-dez, 2020.

ROMANATTO, M. C. **Número Racional**: Relações necessárias à sua compreensão. Campinas, 1997. 158p. Tese (Doutorado em Educação). Faculdade de Educação, Universidade Estadual de Campinas, 1997Romanato(1997).

VIDAL, C. S. **O processo de escolha dos livros didáticos**, numa escola pública. 2016. 63f. Trabalho de Conclusão de Curso - Licenciatura em Matemática, Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Curitiba, 2016.

INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA DA PARAÍBA
Campus Cajazeiras
Rua José Antônio da Silva, 300, Jardim Oásis, CEP 58.900-000, Cajazeiras (PB)
CNPJ: 10.783.898/0005-07 - Telefone: (83) 3532-4100

Documento Digitalizado Ostensivo (Público)

Trabalho de conclusão de curso

Assunto:	Trabalho de conclusão de curso
Assinado por:	Marcio Oliveira
Tipo do Documento:	Anexo
Situação:	Finalizado
Nível de Acesso:	Ostensivo (Público)
Tipo do Conferência:	Cópia Simples

Documento assinado eletronicamente por:

- **Francisco Marcio de Oliveira, ALUNO (201322020159) DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA - CAJAZEIRAS**, em 29/11/2021 18:01:40.

Este documento foi armazenado no SUAP em 29/11/2021. Para comprovar sua integridade, faça a leitura do QRCode ao lado ou acesse https://suap.ifpb.edu.br/verificar-documento-externo/ e forneça os dados abaixo:

Código Verificador: 384948
Código de Autenticação: f69efff84e