



**INSTITUTO FEDERAL DA PARAÍBA
CAMPUS CAJAZEIRAS
CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA**

FRANCISCO JOSÉ NONATO

**A IMPORTÂNCIA DOS TRAÇOS AUXILIARES E DOS
QUADRILÁTEROS CÔNCAVOS ESPECIAIS NA
GEOMETRIA PLANA E SUAS APLICAÇÕES**

CAJAZEIRAS

2021

FRANCISCO JOSÉ NONATO

A IMPORTÂNCIA DOS TRAÇOS AUXILIARES E DOS
QUADRILÁTEROS CÔNCAVOS ESPECIAIS NA GEOMETRIA PLANA
E SUAS APLICAÇÕES

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado
junto ao **Curso de Licenciatura em Matemática** do **Instituto Federal da Paraíba**,
como parte dos requisitos para a obtenção do
título de **Licenciado em Matemática**.

Orientador: Prof. Me. Leonardo Ferreira Soares

Cajazeiras

2021

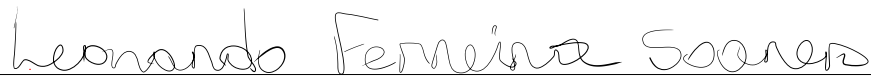
FRANCISCO JOSÉ NONATO

**A IMPORTÂNCIA DOS TRAÇOS AUXILIARES E DOS
QUADRILÁTEROS CÔNCAVOS ESPECIAIS NA GEOMETRIA PLANA
E SUAS APLICAÇÕES**

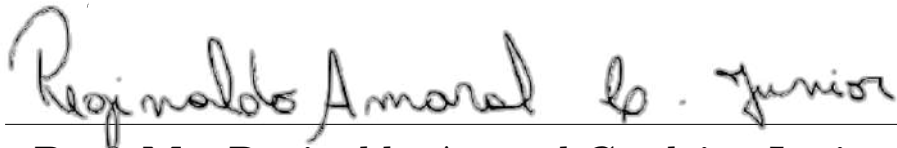
Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao programa de
**Curso de Licenciatura em Matemática do Instituto
Federal da Paraíba**, como parte dos requisitos para a
obtenção do título de **Licenciado em Matemática**.

Data de aprovação: 18/11/2021

Banca Examinadora:



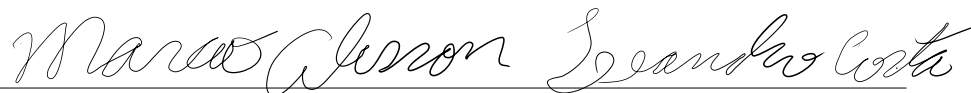
Prof. Me. Leonardo Ferreira Soares
Instituto Federal da Paraíba - IFPB



Prof. Me. Reginaldo Amaral Cordeiro Junior
Instituto Federal da Paraíba - IFPB



Prof. Esp. Edmar Oliveira Silva
Instituto Federal da Paraíba - IFPB



Prof. Me. Márcio Alisson Leandro Costa
Instituto Federal do Amazonas - IFAM

IFPB /Campus Cajazeiras
Coordenação de Biblioteca
Catalogação na fonte: Daniel Andrade CRB-15/593

N899i

Nonato, Francisco José

A importância dos traços auxiliares e dos quadriláteros côncavos especiais na geometria plana e suas aplicações / Francisco José Nonato; orientador Leonardo Ferreira Soares.- 2021.

66 f. : il.

Orientador: Leonardo Ferreira Soares.

TCC (Licenciatura em Matemática) – Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia da Paraíba, Cajazeiras, 2021.

1. Geometria plana 2 Traços auxiliares 3. Quadriláteros côncavos especiais I. Título

CDU 514(0.067)

Dedico aos meus pais, irmãs e todos os educadores da graduação por proporcionarem grandes momentos de sabedorias e conhecimentos.

AGRADECIMENTOS

Ao senhor Deus por estar sempre presente, guiando cada momento da minha vida.

Aos meus pais e irmãs que contribuíram intensamente com seus ensinamentos, os quais foram indispensáveis na minha formação humana.

Ao meu orientador, Me. Leonardo Ferreira Soares por toda a dedicação, paciência e apoio fornecido no decorrer de todo este tempo disponibilizado para a realização deste trabalho.

Aos membros da banca examinadora, Prof. Me. Reginaldo Amaral Cordeiro Junior, Prof. Esp. Edmar Oliveira Silva e Prof. Me. Márcio Alisson Leandro Costa, pela disposição em contribuírem com seus conhecimentos neste momento.

Aos amigos e amigas da licenciatura por suas contribuições ao longo do curso.

A todos professores que contribuíram direta ou indiretamente para a realização deste momento em minha vida profissional.

A todos os meus agradecimentos!

“Educar verdadeiramente não é ensinar fatos novos ou enumerar fórmula prontas, mas sim preparar a mente para pensar.”

Albert Einstein

RESUMO

A Geometria Plana desde muito tempo influencia no cotidiano humano com suas aplicações, indo de medições simples até a resolução de problemas mais complexos. Obter a solução de alguns problemas geométricos que envolvem figuras planas nem sempre ocorre de forma imediata, sendo necessário fazer uso de construções de segmentos de retas ou traços auxiliares que permitam deduzir novas informações acerca do problema e assim, chegar à solução. Neste sentido, o presente estudo parte dos seguintes questionamentos: Quais são os traços auxiliares mais notáveis? Como devemos fazer para perceber qual o traço auxiliar escolher para que possamos usar na resolução de certos problemas de Geometria Euclidiana Plana? O presente Trabalho de Conclusão de Curso intitulado “A importância dos Traços Auxiliares e Quadriláteros Côncavos Especiais na Geometria Plana e suas Aplicações”, tem por objetivo estudar a construção de traços auxiliares e quadriláteros côncavos especiais, abordando várias de suas aplicações na resolução de alguns problemas de geometria. Para tanto, a metodologia utilizada está caracterizada em aplicada, descritiva, qualitativa, dedutivo e bibliográfica. Serão apresentados alguns personagens históricos e alguns conceitos geométricos primordiais para o desenvolvimento da teoria estudada, em especial, sobre os triângulos e quadriláteros, seguidos das ideias de traços auxiliares e posteriormente, suas construções em figuras planas como ferramenta suporte para calcular ângulos, comprimentos de segmentos e áreas. Neste estudo, foi possível constatar que a escolha dos traços utilizados na resolução de problemas, estão relacionados com os conhecimentos acerca dos triângulos isósceles, triângulos equiláteros e congruência de triângulos e etc.

Palavras-chave: Geometria Plana; Traços Auxiliares; Quadriláteros Côncavos Especiais.

ABSTRACT

Plane Geometry has long influenced human daily life with its applications, ranging from simple measurements to solving more complex problems. But reaching the solution of some geometrical problems involving plane figures does not always occur immediately, it is necessary to make use of constructions of straight segments or auxiliary features that allow to deduce new information about the problem and reach the solution. In this way, this study starts from the following questions: What are the most notable auxiliary lines? How should we proceed to figure out which auxiliary feature to choose so we can use it in solving certain problems of Plane Euclidean Geometry? The present Course Conclusion Paper entitled "The importance of Auxiliary Features and Special Concave Quadrilaterals in Plane Geometry and their Applications", aims to study the construction of auxiliary features and special concave quadrilaterals, addressing several of their applications in solving some problems of geometry. Therefore, the methodology used is characterized as applied, descriptive, qualitative, deductive and bibliographical. They will be presented some historical characters and some primary geometric concepts for the development of the studied theory, in particular about triangles and quads, followed by auxiliary lines ideas and later, its constructions on flat figures as a support tool to calculate angles, segments lengths and areas. In this study, it was possible to verify that the choice of the lines used in problem solving are related to the knowledge about isosceles triangles, equilateral triangles and congruence of triangles, etc.

Keywords: Plane Geometry; Auxiliary Lines; Special Concave Quadrilaterals;

LISTA DE FIGURAS

Figura 2.1 – Reprodução de uma Parte do Papiro de Moscou	18
Figura 2.2 – Reprodução de uma Parte do Papiro de Rhind	19
Figura 2.3 – Evolução das construções geométricas	20
Figura 3.1 – Exemplos de triângulos	22
Figura 3.2 – Triângulo retilíneo	23
Figura 3.3 – Triângulo escaleno	23
Figura 3.4 – Triângulo isósceles	24
Figura 3.5 – Triângulo equilátero	24
Figura 3.6 – Triângulo acutângulo	24
Figura 3.7 – Triângulo retângulo	25
Figura 3.8 – Triângulo obtusângulo	25
Figura 3.9 – Congruência caso ALA	26
Figura 3.10–Congruência caso LAL	26
Figura 3.11–Congruência caso LLL	27
Figura 3.12–Congruência hipotenusa - ângulo	28
Figura 3.13–Congruência hipotenusa - cateto	28
Figura 3.14–Ceviana no triângulo	29
Figura 3.15–Mediana no triângulo	29
Figura 3.16–Mediatriz no triângulo	30
Figura 3.17–Altura no triângulo	30
Figura 3.18–Bissetriz interna de um ângulo	31
Figura 3.19–Bissetriz externa no triângulo	31
Figura 3.20–Soma dos ângulos internos	32
Figura 3.21–Teorema do ângulo externo	32
Figura 3.22–Teorema do triângulo isósceles	33
Figura 3.23–Teorema da base média do triângulo	33
Figura 3.24–Triângulos notáveis exatos	34
Figura 3.25–Triângulos notáveis aproximados	35
Figura 4.1 – Traço da ceviana	36
Figura 4.2 – Traço da ceviana	36
Figura 4.3 – Traço da ceviana	37
Figura 4.4 – Completando triângulos isósceles	37
Figura 4.5 – Traço completando triângulos isósceles	38
Figura 4.6 – Traço completando triângulos isósceles	38
Figura 4.7 – Construindo triângulo equilátero	39
Figura 4.8 – Construindo triângulo equilátero	39

Figura 4.9 – Construindo triângulo equilátero	40
Figura 4.10–Propriedade da bissetriz	40
Figura 4.11–Propriedade da bissetriz	41
Figura 4.12–Propriedade da bissetriz	41
Figura 4.13–Buscando congruência CASO I	42
Figura 4.14–Buscando congruência CASO I	42
Figura 4.15–Buscando congruência CASO I	43
Figura 4.16–Buscando congruência CASO II	43
Figura 4.17–Buscando congruência CASO II	44
Figura 4.18–Buscando congruência CASO II	44
Figura 4.19–Buscando congruência CASO III	45
Figura 4.20–Buscando congruência CASO III	45
Figura 4.21–Buscando congruência CASO III	45
Figura 4.22–Buscando congruência CASO IV	46
Figura 4.23–Buscando congruência CASO IV	46
Figura 4.24–Buscando congruência CASO IV	47
Figura 4.25–Traço do ângulo simétrico CASO I	48
Figura 4.26–Traço do ângulo simétrico CASO I	48
Figura 4.27–Traço do ângulo simétrico CASO I	48
Figura 5.1 – Exemplo de quadriláteros	49
Figura 5.2 – Quadriláteros convexo	50
Figura 5.3 – Quadriláteros côncavo	50
Figura 5.4 – Traço do ângulo simétrico CASO II	51
Figura 5.5 – Traço do ângulo simétrico CASO II	51
Figura 5.6 – Traço do ângulo simétrico CASO II	52
Figura 5.7 – Primeiro caso de quadriláteros côncavos especiais	53
Figura 5.8 – Primeiro caso de quadriláteros côncavos especiais	53
Figura 5.9 – Segundo caso de quadriláteros côncavos especiais	54
Figura 5.10–Segundo caso de quadriláteros côncavos especiais	54
Figura 5.11–Problema 1	55
Figura 5.12–Solução do Problema 1	55
Figura 5.13–Problema 2	56
Figura 5.14–Solução do Problema 2	56
Figura 5.15–Problema 3	57
Figura 5.16–Solução do Problema 3	57
Figura 5.17–Problema 4	58
Figura 5.18–Solução do Problema 4	58
Figura 5.19–Solução do Problema 5	59
Figura 5.20–Problema 6	60

Figura 5.21–Solução do Problema 6	60
Figura 5.22–Problema 7	61
Figura 5.23–Solução do Problema 7	62
Figura 5.24–Problema 8	62
Figura 5.25–Solução do Problema 8	63
Figura 5.26–Problema 9	63
Figura 5.27–Solução do Problema 9	64
Figura 5.28–Problema 10	64
Figura 5.29–Solução do Problema 10	65

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	16
2	GEOMETRIA COMO FRUTO DA EVOLUÇÃO HUMANA	18
3	A TEORIA DE TRIÂNGULOS	22
3.1	Triângulo	22
3.2	Triângulo Retilíneo	22
3.3	Classificação de Triângulos	23
3.4	Principais Casos de Congruências de Triângulos	25
3.5	Linhas Notáveis em Triângulos	29
3.6	Teoremas Importantes Envolvendo Triângulos	31
3.7	Triângulos Notáveis	34
4	TRAÇOS AUXILIARES	36
4.1	Primeiro Critério - Traço da Ceviana	36
4.2	Segundo Critério - Completando Triângulo Isósceles	37
4.3	Terceiro Critério - Construindo Triângulo Equilátero	38
4.4	Quarto Critério - Propriedade da Bissetriz	40
4.5	Quinto Critério - Buscando Congruência	42
4.6	Sexto Critério - Traço do Ângulo Simétrico	47
5	QUADRILÁTEROS CÔNCAVOS ESPECIAIS	49
5.1	Quadriláteros	49
5.2	Classificação dos Quadriláteros	50
5.3	Traços em Quadrilátero Côncavo	51
5.4	Quadriláteros Côncavos Especiais	52
5.5	Aplicações	54

6	CONSIDERAÇÕES FINAIS	66
	REFERÊNCIAS	67

1 INTRODUÇÃO

O ensino de alguns dos conceitos da Geometria Euclidiana Plana deixa muitas lacunas no modo como é ensinado nos livros didáticos do ensino fundamental e médio. Quando o assunto são os conhecimentos que envolvem critérios sobre traços auxiliares e quadriláteros côncavos especiais dentro da Geometria Euclidiana Plana, essas lacunas apresentam-se ainda mais acentuadas na literatura matemática brasileira. Isso porque, nota-se nos livros didáticos nacionais uma maior ênfase aos quadriláteros convexos, sendo os conhecimentos de quadriláteros côncavos especiais não abordados.

Nessa perspectiva, este trabalho consiste na apresentação da teoria sobre traços auxiliares e quadriláteros côncavos especiais, aplicando-a na resolução de problemas fornecendo assim uma complementação no ensino de geometria plana para auxiliar os professores de matemática e conseqüentemente ampliarão o conhecimento dos alunos do ensino fundamental e médio brasileiro.

Como forma de alcançar este propósito, ou seja, a construção de um material complementar para o ensino de geometria plana, ao longo do trabalho expomos as definições, teoremas sobre o objeto de estudo e aplicações com uma linguagem formal e compatível para esse público alvo. Apresenta-se uma revisão dos conceitos, definições e alguns teoremas fundamentais sobre a teoria de triângulos apresentados nos livros de geometria plana nacionais. Além disso, explanaremos os conceitos da teoria de triângulos como a ideia de triângulos retângulos notáveis, os principais critérios de traços auxiliares e quadriláteros côncavos especiais abordados em livros internacionais de geometria, como por exemplo (BARCENA, 2004), (BASTIDAS, 2017), (BASTIDAS, 2010) e (EDITORES, 2012), livros peruanos de geometria. Os peruanos que têm sua importância marcada na história da matemática devido dentre tantas contribuições, serem um dos principais contribuintes para o desenvolvimento da teoria de traços auxiliares e quadriláteros côncavos especiais.

Devido à relevância desses assuntos, a teoria de traços auxiliares e quadriláteros côncavos especiais são usadas como base para elaboração de questões dos principais exames de admissão nas universidades do Peru. Pensando nessa aplicabilidade, surge de forma natural as seguintes perguntas: Quais são os traços auxiliares mais notáveis? Como devemos fazer para perceber qual o traço auxiliar escolher para que possamos usar na resolução de certos problemas de Geometria Euclidiana Plana?

No sentido de facilitar a compreensão e o entendimento do estudo, após o capítulo introdutório, encontra-se o segundo capítulo, no qual há uma breve apresentação de momentos e personagens importantes dentro da história da geometria plana.

O terceiro capítulo destina-se a revisão, abordando os conceitos e definições básicos que são fundamentais dentro da teoria de triângulos e imprescindíveis posteriormente para o entendimento das construções em figuras.

O quarto capítulo, encontrar-se destinado à abordagem de traços auxiliares, a explanação dos principais critérios de traços em triângulos, bem como a aplicação desse conhecimento direcionado para resolução de problemas de geometria plana, os quais seriam trabalhosos ou quase impossível de se obter solução sem fazer uso de traços auxiliares.

No quinto capítulo dissertamos sobre quadriláteros, expondo a definição de quadriláteros convexos e côncavos, com direcionamento maior para os quadriláteros côncavos especiais, os quais receberam especial atenção no momento das demonstrações de teoremas fundamentais que os cercam e que antecederam as aplicações que envolve cálculos de ângulos, comprimentos de segmentos, perímetro e áreas em algumas figuras planas.

Por fim, encontram-se apresentadas as considerações finais acerca da pesquisa desenvolvida, baseado nas literaturas consultadas, as quais constam em seguida, nas referências.

2 GEOMETRIA COMO FRUTO DA EVOLUÇÃO HUMANA

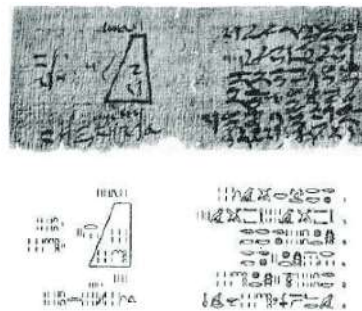
A falta de domínio ou a própria ausência de escrita de alguns povos antigos, fizeram com que muitos conhecimentos transmitidos de forma oral fossem perdidos entre essas civilizações ao longo da história, tendo como consequência uma ausência de registros neste momento da história da humanidade. No campo Matemático, essa escassez de registro, faz refletir sobre a importância dessa área de conhecimento mesmo que os praticantes dessa época não tenham deixado anotações, assim como vista por (BOYER, 1974). “Afirmações sobre as origens da matemática seja da aritmética, seja da geometria são necessariamente arriscados, pois os primórdios do assunto são mais antigos que a arte de escrever.” (BOYER, 1974, p. 04)

No campo da geometria, ainda segundo (BOYER, 1974), autoridades como o historiador Heródoto e o filósofo Aristóteles, não tinham plena certeza de origens mais antigas, sendo que para eles, os egípcios e babilônicos foram os precursores desse conhecimento na matemática. Assim, enquanto que para Heródoto a geometria teve sua origem nas práticas cotidianas da necessidade de fazer novas medições de terras após cada inundação anual no vale do rio, para Aristóteles teria sido a classe sacerdotal como forma de lazer que deu origem a esse estudo.

Essa ideia apresentada por (BOYER, 1974), a qual a geometria tem suas origens intimamente ligada à práticas de medições, está em consonância com (EVES, 2011), uma vez que segundo ele, os conhecimentos iniciais geométricos na civilização estão fortemente relacionados com mensuração práticas.

A geometria mesmo com esse aspecto voltado para problemas do cotidiano e com características agrárias, já apresentava relevante importância, pois de acordo com (EVES, 2011), esses conhecimentos de geométricos envolvendo relações de mensuração necessárias para o cálculo de áreas de terras e volumes de grão, ganharam espaço nos problemas contidos nos documentos da época, como os papiros Moscou e Rhind.

Figura 2.1 – Reprodução de uma Parte do Papiro de Moscou



Fonte: (BOYER, 1974)

Figura 2.2 – Reprodução de uma Parte do Papiro de Rhind

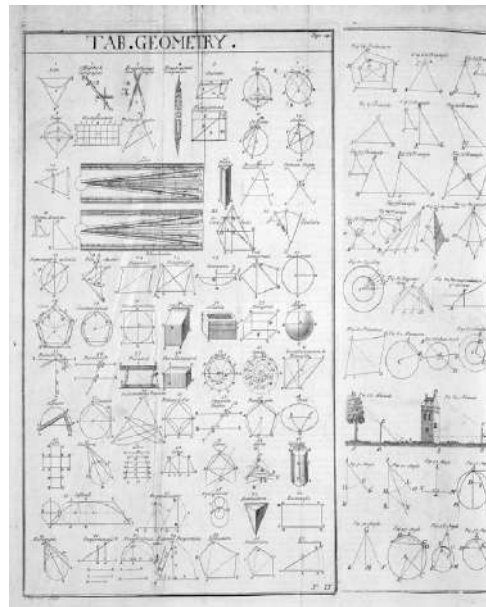


Fonte: (MOL, 2013)

Neste momento da história da humanidade, o conhecimento geométrico até então formulado e que era usado com frequência nos problemas diários, apresentava-se desprezado de elevado rigor dedutivo ou demonstrativo. Somente mais tarde com Tales de Mileto (624-548 a. C), a geometria passou a ter um certo rigor, assim como exposto por (EVES, 2011). “Segundo a tradição, a geometria demonstrativa começou com Tales de Mileto, um dos “sete sábios” da Antiguidade, durante a primeira metade do sexto século a.C.” (EVES, 2011, p. 94)

É perceptível que o exposto por (EVES, 2011), apresenta-se em harmonia com a concepção de (BOYER, 1974), quando este retrata a positiva credibilidade que foi dado ao matemático Tales de Mileto, na Grécia, como fruto dos esforços e organização. Estes aspectos conseqüentemente o levaram à formulação do teorema que até os dias atuais recebe seu nome, o famoso teorema de Tales.

Figura 2.3 – Evolução das construções geométricas



Fonte: (REES, 1819)

Mais tarde, com Pitágoras, considerado uma das maiores personagens da matemática, a geometria ganha maior realce com o famoso teorema de Pitágoras, empregado em problemas envolvendo triângulos retângulos. Na concepção de (BOYER, 1974), devido a primeira demonstração do teorema ter sido dado pelos pitagóricos, o nome desse matemático ficou marcado na história com esse teorema, não sendo possível dizer com precisão se a demonstração foi dada pelo próprio Pitágoras.

Com o passar do tempo, a cada momento os esforços direcionavam a geometria para caráter científico. A grande contribuição da obra “Os Elementos” de Euclides, a qual expõe ao mundo, foi uma geometria sistematizada e axiomática. Apesar disso, (BOYER, 1974) ressalta que mesmo diante da notoriedade de Euclides após publicar “Os elementos”, são mínimas as informações pessoais que se tem em relação a esse matemático, até mesmo o lugar onde nasceu não estar associado ao seu nome.

Conforme (EVES, 2011), Euclides dedicou boa parte de sua atenção aos conceitos da geometria plana e espacial. Todos esses conhecimentos geométricos, encontram-se dispostos praticamente em quase todas as partes de sua obra, a qual é composta de 13 livros. Sua dedicação em organizar e construir novos textos o fez um dos mais significativos e fundamentais da geometria plana e espacial.

Praticamente todos os matemáticos que viveram depois de Euclides, bem como os conhecimentos produzidos por esses, foram e são influenciados por sua obra, “Os elementos”. Mesmo que algumas revisões e possíveis melhoramentos de certos conceitos tenham sido feitos posteriormente por outros sábios da matemática.

Com a demanda do mundo moderno, segundo (EVES, 2011), novos desafios envol-

vendo os conhecimentos no campo da geometria euclidiana plana surgiram, principalmente no tocante à preocupação de um desenvolvimento rigoroso de textos didáticos sobre geometria plana. Neste contexto, surge o estudo sobre a teoria de traços auxiliares e quadriláteros côncavos especiais e suas aplicações.

Os matemáticos peruanos, apresentam-se como os principais grandes contribuintes para o desenvolvimento dessa teoria sobre traços auxiliares e quadriláteros côncavos especiais. Além de ser ensinada no ensino secundário, é fortemente utilizada na elaboração de questões de exames de admissão em universidades do país. Segundo (BASTIDAS, 2010), os traços auxiliares são frutos do raciocínio humano que visa buscar propriedades que estão fortemente ligadas à congruência de figuras.

(BASTIDAS, 2010), em um segundo momento, evidencia que outros traços além daqueles estabelecidos pela literatura, podem ser criados dependendo do problema a ser resolvido e da sensibilidade da pessoa que se propõe resolvê-lo.

No princípio, (EDITORES, 2012), apresenta-se em consonância com outras obras de autores como (MORGADO A.C.; WAGNER, 2002), (DOLCE O. POMPEO, 2013), (BARBOSA, 2012), podendo ser encontrados nestas obras conceitos e definições acerca de triângulos e teoremas envolvendo propriedades em torno das principais cevianas, tais como altura, bissetriz, mediana e mediatriz. Além disso, esses autores em suas obras, trabalham a ideia de base média em triângulos.

Com uma leitura consistente e aprofundada na literatura, percebe-se nas obras de (BASTIDAS, 2010) e (EDITORES, 2012), ideias além desses conceitos abordados em livros didáticos brasileiros. As obras peruanas trazem ideias sobre triângulos retângulo notáveis, traços em algumas figuras e traços em quadriláteros côncavos especiais.

Nessa perspectiva, entendendo essa demanda nesta área da matemática é que apresentamos os próximos capítulos, com conhecimentos de geometria plana que tiveram origem com esses precursores matemáticos.

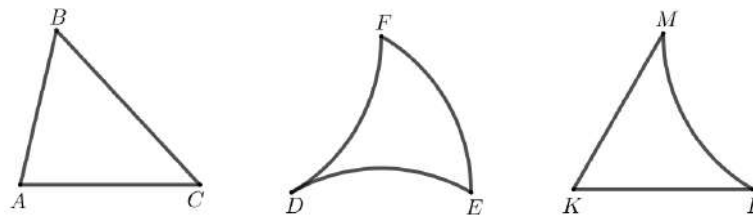
3 A TEORIA DE TRIÂNGULOS

Neste capítulo trataremos de revisar no campo da Geometria Euclidiana Plana, os principais conceitos, definições e propriedades que envolve a teoria de triângulos. Iremos apresentar a prova de algumas propriedades e teoremas, estes que serão úteis no momento das aplicações. As ideias apresentadas neste capítulo são baseadas nas obras de (BARBOSA, 2012), (BASTIDAS, 2017), (BASTIDAS, 2010), (MORGADO A.C.; WAGNER, 1990) e (EDITORES, 2012).

3.1 TRIÂNGULO

Definição 1. Dados três pontos não colineares e todos contidos no mesmo plano, à união desses pontos por meio de segmentos retilíneo ou curvilíneo, chama-se triângulo.

Figura 3.1 – Exemplos de triângulos



Fonte: Arquivo Pessoal

O $\triangle ABC$ é denominado triângulo retilíneo, pois, para unir seus pontos foram empregados segmentos de retas.

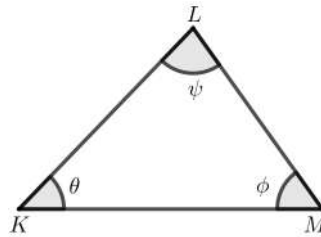
O $\triangle DEF$ recebe o nome de triângulo curvilíneo porque se utiliza segmentos de linhas curvas para unir seus pontos.

O $\triangle KLM$ é conhecido como triângulo mixtilíneo porque se utiliza tanto de segmentos de linhas retas quanto segmentos de linhas curvilíneas.

3.2 TRIÂNGULO RETILÍNEO

Na Figura 3.2 consta um triângulo retilíneo e os seus principais elementos.

Figura 3.2 – Triângulo retilíneo



Fonte: Arquivo Pessoal

Elementos do Triângulo

- **Vértices:** os pontos K, L e M são vértices do triângulo ΔKLM .
- **Lados:** os segmentos \overline{KL} , \overline{LM} e \overline{KM} são lados do triângulo ΔKLM .
- **Ângulos:** os ângulos $L\widehat{K}M = \theta$, $K\widehat{L}M = \psi$ e $L\widehat{M}K = \phi$ são ângulos internos do ΔKLM .

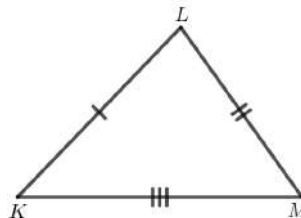
3.3 CLASSIFICAÇÃO DE TRIÂNGULOS

Na geometria, os triângulos podem apresentar características próprias quanto as medidas de seus lados ou quanto as medidas angulares. Devido à essas características, esses triângulos recebem nomes especiais.

I. QUANTOS AOS LADOS

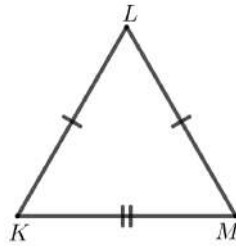
Triângulo Escaleno : É aquele triângulo cujos lados são de diferentes medidas.

Figura 3.3 – Triângulo escaleno



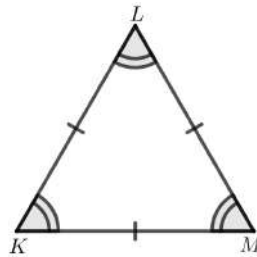
Fonte: Arquivo Pessoal

Triângulo Isósceles: É aquele triângulo que apresenta somente dois lados com medidas iguais. Em todo triângulo isósceles o lado com medida distinta dos demais, recebe o nome de base, enquanto os lados de medidas iguais se denomina lados laterais.

Figura 3.4 – Triângulo isósceles

Fonte: Arquivo Pessoal

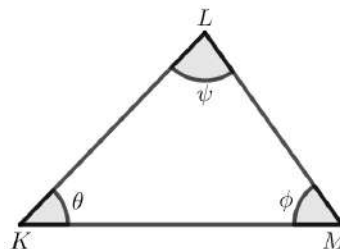
Triângulo Equilátero: É aquele triângulo cujos lados são todos de mesma medida. Por outro lado, seus ângulos internos possuem medidas angulares iguais.

Figura 3.5 – Triângulo equilátero

Fonte: Arquivo Pessoal

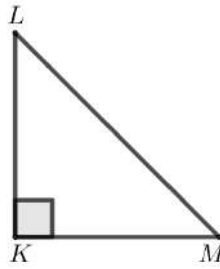
II. QUANTOS AOS ÂNGULOS

Triângulo Acutângulo: É aquele triângulo em que tomando qualquer um de seus ângulos internos, sua medida é sempre maior que 0° e menor que 90° .

Figura 3.6 – Triângulo acutângulo

Fonte: Arquivo Pessoal

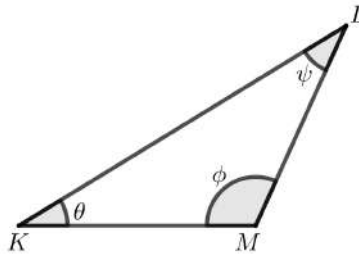
Triângulo Retângulo: É aquele triângulo em que apresenta um de seus ângulos medindo 90° .

Figura 3.7 – Triângulo retângulo

Fonte: Arquivo Pessoal

Observe que $\widehat{LKM} = 90^\circ$, então ΔKLM é um triângulo retângulo em K .

Triângulo Obtusângulo: É o triângulo que apresenta um ângulo interno maior que 90° e menor que 180° .

Figura 3.8 – Triângulo obtusângulo

Fonte: Arquivo Pessoal

Note o ângulo \widehat{KML} é maior que 90° , sendo desta forma o ΔKLM classificado como triângulo obtusângulo.

3.4 PRINCIPAIS CASOS DE CONGRUÊNCIAS DE TRIÂNGULOS

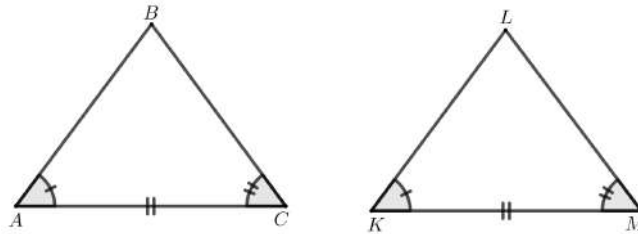
Ao compararmos dois triângulos podemos encontrar características comuns em ambos. Este fato permite dizer se os triângulos são ou não congruentes entre si. Dizemos que dois triângulos quaisquer são congruentes, se for verificado um dos seguintes casos abaixo.

CASO I. Dois triângulos são congruentes se têm as medidas de dois de seus ângulos homólogos¹ congruentes e lado homólogo congruente compreendido entre esses ângulos.

¹ Homólogos é o plural de homólogo. O mesmo que: análogos, correspondentes, idênticos, parecidos ou semelhantes.

Veja na Figura 3.9, os triângulos $\triangle ABC$ e $\triangle KLM$ são congruentes. Desta forma escrevemos $\triangle ABC \equiv \triangle KLM$.

Figura 3.9 – Congruência caso ALA



Fonte: Arquivo Pessoal

O fato que $\triangle ABC \equiv \triangle KLM$, ocorreu devido a observação das seguintes correspondências:

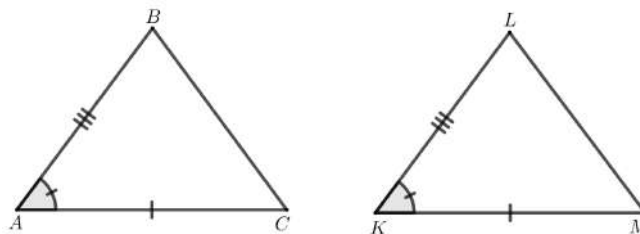
- $\widehat{BAC} \equiv \widehat{LKM}$
- $\overline{AC} \equiv \overline{KM}$
- $\widehat{ACB} \equiv \widehat{KML}$

Neste caso, tem-se uma congruência de triângulos pelo caso (Ângulo - Lado - Ângulo) ou mais costumeiramente abreviado por (ALA).

CASO II. Dois triângulos são congruentes se têm as medidas de dois lados homólogos congruentes e também o ângulo homólogo compreendido entre esses lados forem iguais.

Note que na Figura 3.10, $\triangle ABC$ e $\triangle KLM$ são congruentes

Figura 3.10 – Congruência caso LAL



Fonte: Arquivo Pessoal

A congruência neste caso ocorreu baseado nas seguintes correspondências:

- $\overline{AB} \equiv \overline{KL}$
- $\widehat{BAC} \equiv \widehat{LKM}$

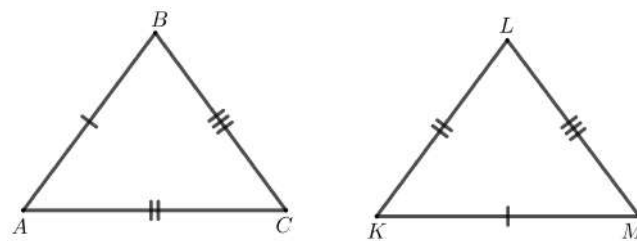
- $\overline{AC} \equiv \overline{KM}$

Neste caso, tem-se uma congruência de triângulos pelo caso (Lado - Ângulo - Lado) ou mais costumeiramente abreviado por (*LAL*).

CASO III. Dois triângulos são congruentes se seus três lados são respectivamente congruentes.

Veja na Figura 3.11, $\triangle ABC$ e $\triangle KLM$ são congruentes.

Figura 3.11 – Congruência caso LLL



Fonte: Arquivo Pessoal

Podendo ser observado as seguintes correspondências:

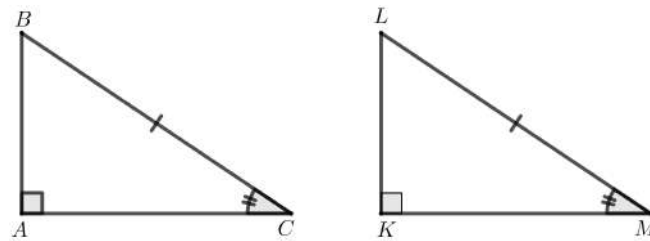
- $\overline{AB} \equiv \overline{KM}$
- $\overline{BC} \equiv \overline{LM}$
- $\overline{AC} \equiv \overline{KL}$

Neste caso, tem-se uma congruência de triângulos pelo caso (Lado - Lado - Lado) ou (*LLL*).

CASO IV. Dois triângulos retângulos são congruentes se a hipotenusa e um ângulo agudo são respectivamente congruentes.

Observe na Figura 3.12, $\triangle ABC$ e $\triangle KLM$ são congruentes.

Figura 3.12 – Congruência hipotenusa - ângulo



Fonte: Arquivo Pessoal

Os triângulos são congruentes devido a observação das seguintes correspondências:

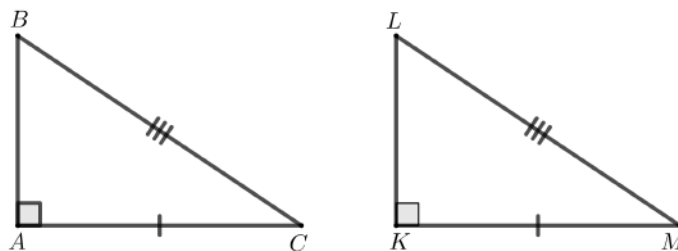
- $\widehat{ACB} \equiv \widehat{KML}$
- $\overline{BC} \equiv \overline{LM}$
- $\widehat{BAC} \equiv \widehat{LKM} = 90^\circ$

Neste caso, tem-se uma congruência de triângulos pelo caso (Hipotenusa - Ângulo).

CASO V. Dois triângulos retângulos são congruentes se a hipotenusa e um cateto forem respectivamente congruentes.

Veja na Figura 3.13 os ΔABC e ΔKLM são congruentes.

Figura 3.13 – Congruência hipotenusa - cateto



Fonte: Arquivo Pessoal

Devido ser observado as seguintes correspondências:

- $\overline{BC} \equiv \overline{LM}$
- $\overline{AC} \equiv \overline{KM}$
- $\widehat{BAC} \equiv \widehat{LKM} = 90^\circ$

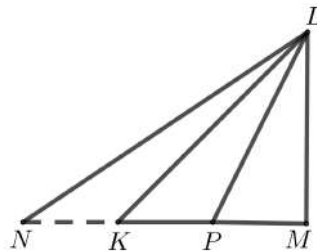
Neste caso, tem-se uma congruência de triângulos pelo caso (Hipotenusa - Cateto).

3.5 LINHAS NOTÁVEIS EM TRIÂNGULOS

Denomina-se Linha Notável, aquele segmento de reta que apresenta-se com dada frequência em triângulos, portando algumas informações úteis para a resolução de determinados problemas.

- **Ceviana:** Define-se ceviana como todo segmento de reta que une um vértice do triângulo com um ponto qualquer do segmento oposto.

Figura 3.14 – Ceviana no triângulo

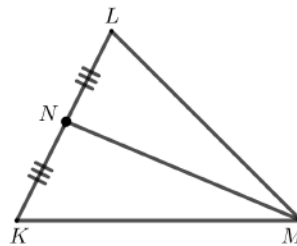


Fonte: Arquivo Pessoal

Considerando o $\triangle KLM$ na Figura 3.14, tem-se por definição que os segmentos \overline{LP} e \overline{LN} são cevianas. Sendo importante lembrar que o \overline{LP} é uma ceviana interior e \overline{LN} é uma ceviana exterior ao triângulo.

- **Mediana:** É aquele segmento que une qualquer um dos vértices com o ponto médio do seu lado oposto.

Figura 3.15 – Mediana no triângulo

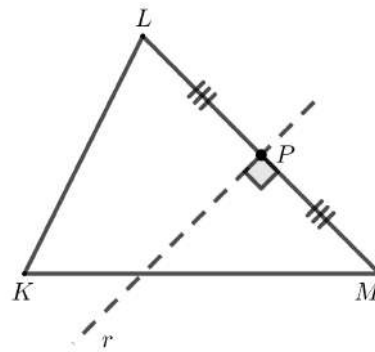


Fonte: Arquivo Pessoal

Neste caso, tem-se que \overline{MN} é uma mediana relativa ao lado \overline{KL} do triângulo. Diante disso, podemos, em todo triângulo, caso seja desejável, traçar as três medianas relativas a cada lado.

- **Mediatriz:** Dados dois pontos A e B de um plano, o segmento de reta perpendicular no ponto médio de \overline{AB} , chama-se mediatriz.

Figura 3.16 – Mediatriz no triângulo

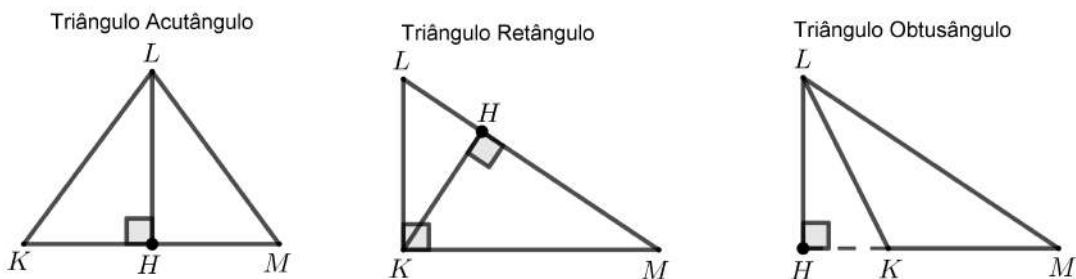


Fonte: Arquivo Pessoal

Analisando a figura acima, como a reta r é perpendicular ao lado \overline{LM} em P , ponto médio de \overline{LM} , diz-se que a reta r é uma mediatriz no triângulo. Vale ressaltar que em todo triângulo, é possível traçar as três mediatrizes relativas a cada um de seus lados.

- **Altura:** É o segmento de reta que tem extremidades em um dos vértices e é perpendicular ao lado ou prologamento desse lado oposto ao vértice considerado inicialmente como origem.

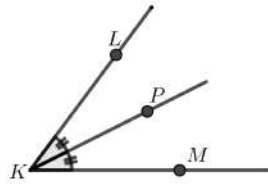
Figura 3.17 – Altura no triângulo



Fonte: Arquivo Pessoal

- **Bissetriz Interna:** É o segmento de reta que divide em dois ângulos congruentes o menor ângulo formado por duas semirretas de mesma origem.

Figura 3.18 – Bissetriz interna de um ângulo



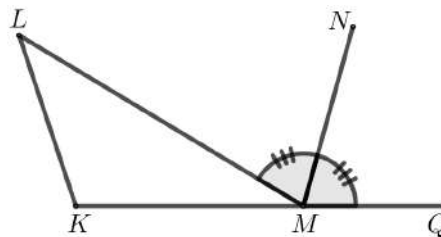
Fonte: Arquivo Pessoal

Na Figura 3.18, \overline{KP} é a bissetriz interna do \widehat{LKM} .

- **Bissetriz Externa:** É o segmento de reta que divide um ângulo externo em dois ângulos congruentes.

Na Figura 3.19, considerando o ângulo \widehat{LMQ} externo ao ΔKLM analisado, percebe-se que \overline{MN} é uma bissetriz externa.

Figura 3.19 – Bissetriz externa no triângulo



Fonte: Arquivo Pessoal

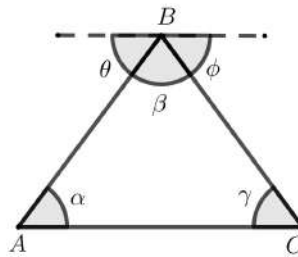
3.6 TEOREMAS IMPORTANTES ENVOLVENDO TRIÂNGULOS

Definição 2. Os ângulos formados pelas retas r, s e t pertencentes ao mesmo plano, onde r e s não possuem pontos em comum e t intercepta r e s em dois pontos distintos, estando estes ângulos entre r e s , e de lados distintos da reta t , chama-se ângulos alternos internos.

Teorema 3. Em todo triângulo a soma das medidas dos ângulos internos é igual 180° .

Demonstração: Seja o seguinte ΔABC , traçando por B uma reta paralela ao segmento \overline{AC} .

Figura 3.20 – Soma dos ângulos internos



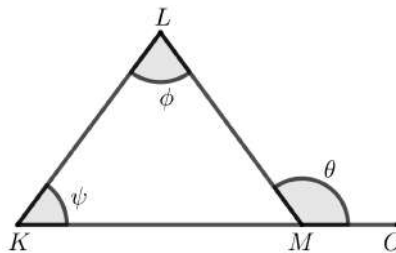
Fonte: Arquivo Pessoal

Tem-se que $\theta + \beta + \phi = 180^\circ$, e ainda ocorre que $\alpha = \theta$ e $\gamma = \phi$ ângulos alternos internos. Logo, $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$. ■

Teorema 4. *A medida de um ângulo externo de um triângulo é igual à soma dos dois ângulos internos não adjacentes a ele.*

Demonstração: De fato, analisando o triângulo abaixo,

Figura 3.21 – Teorema do ângulo externo



Fonte: Arquivo Pessoal

tem-se, $\psi + \phi + \widehat{LMO} = 180^\circ$ e $\theta + \widehat{KML} = 180^\circ$

Como consequência ao igualar essas igualdades, encontra-se,

$$\psi + \phi + \widehat{KML} = \theta + \widehat{KML}$$

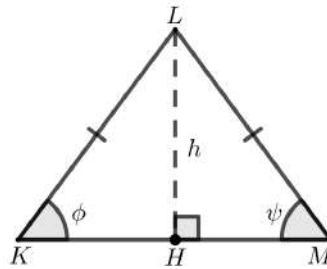
Logo, $\psi + \phi = \theta$. ■

Teorema 5. *Em todo triângulo isósceles os ângulos da base são iguais.*

Demonstração: Considerando $\triangle KLM$ isósceles logo abaixo, traçando \overline{LH} mediana relativa ao segmento \overline{KM} .

Tem-se $\overline{HK} \equiv \overline{HM}$, pelo propriedade da mediana.

Figura 3.22 – Teorema do triângulo isósceles



Fonte: Arquivo Pessoal

Desta forma, $\triangle K LH$ e $\triangle M HL$ são congruentes pelo caso (LLL) e portanto $\widehat{L\hat{K}H} \equiv \widehat{L\hat{M}H}$.

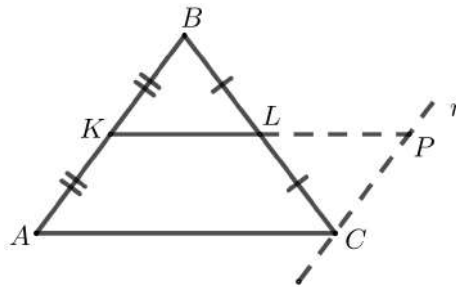
■

Definição 6. Todo segmento de reta que apresenta suas extremidades sendo os pontos médios de dois dos lados de um triângulo é denominado base média do triângulo.

Teorema 7. Em um triângulo qualquer, a base média é sempre paralela ao terceiro lado.

Demonstração: No $\triangle ABC$, considerando K e L respectivamente pontos médios dos lados \overline{AB} e \overline{BC} . Ao traçar uma reta r paralela ao lado \overline{AB} passando C e prolongar o segmento \overline{KL} base média no $\triangle ABC$, até o ponto P em r , tem-se que:

Figura 3.23 – Teorema da base média do triângulo



Fonte: Arquivo Pessoal

Observando $\triangle BLK$ e $\triangle CLP$, percebe-se:

- $\widehat{K\hat{L}B} \equiv \widehat{P\hat{L}C}$ (ângulos opostos pelo vértice)
- $\overline{LB} \equiv \overline{LC}$
- $\widehat{L\hat{B}K} \equiv \widehat{L\hat{C}P}$ (ângulos alternos internos)

Assim, os triângulos $\triangle BLK$ e $\triangle CLP$ são congruentes pelo caso (ALA). Logo $\overline{CP} \equiv \overline{BK} \equiv \overline{AK}$ e $\overline{LP} \equiv \overline{KL}$.

Como $\overline{CP} // \overline{AK}$ e $\overline{CP} \equiv \overline{AK}$ tem-se $ACPK$ é um paralelogramo, como consequência $\overline{KP} // \overline{AC}$ e $\overline{KP} \equiv \overline{AC}$. Observando que $\overline{KL} // \overline{KP}$ e $\overline{KP} // \overline{AC}$, pela propriedade da transitividade temos, $\overline{KL} // \overline{AC}$. ■

Teorema 8. *Em um triângulo qualquer, a base média mede metade do comprimento do terceiro lado.*

Demonstração: Na Figura 3.23, \overline{KL} é base média do $\triangle ABC$, relativa ao lado \overline{AC} . Observando que $\overline{KP} \equiv \overline{AC}$ e $\overline{KP} = \overline{KL} + \overline{LP}$, além disso, por congruência $\overline{KL} \equiv \overline{LP}$, logo $\overline{KP} = \overline{KL} + \overline{KL} = 2\overline{KL}$. Desta forma, $\overline{KP} = 2\overline{KL} = \overline{AC}$, como consequência $\overline{KL} = \frac{\overline{AC}}{2}$. ■

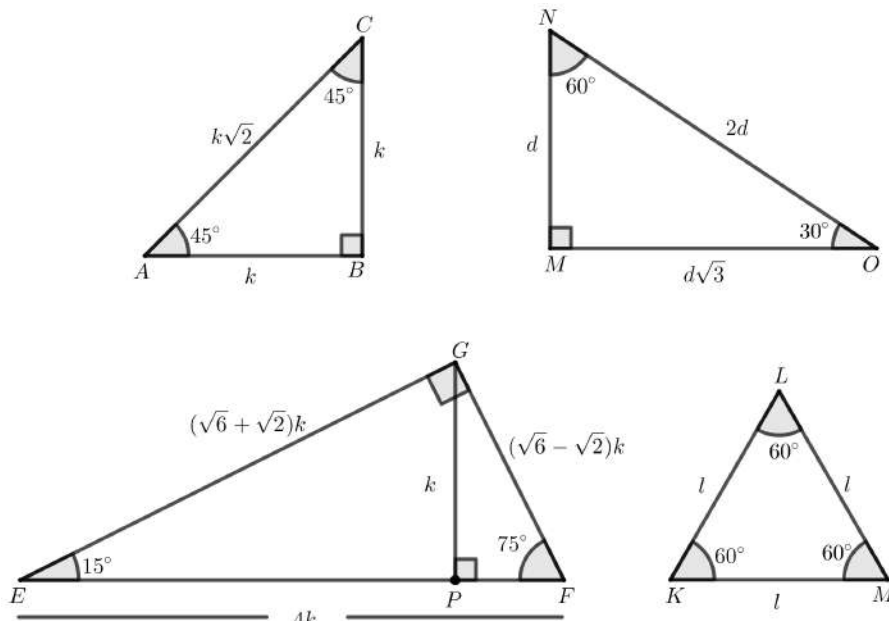
3.7 TRIÂNGULOS NOTÁVEIS

Devido a frequência com que alguns triângulos retângulos aparecerem ao longo das resoluções de problemas, estes recebem o nome de triângulos notáveis. Nestes tipos de triângulos, segundo (BASTIDAS, 2010), conhecendo as medidas dos ângulos é possível deduzir as razões entre as medidas dos seus lados e vice-versa.

Assim, temos os exemplos abaixo.

Triângulos Notáveis Exatos

Figura 3.24 – Triângulos notáveis exatos



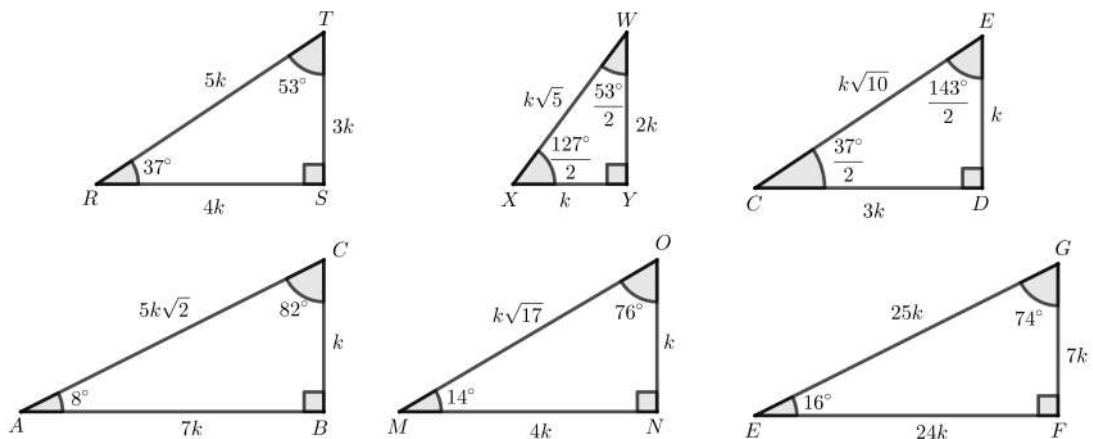
Fonte: Arquivo Pessoal

Observação 9. Na Figura 3.24, o ΔKLM é triângulo equilátero, a presença frequente deste triângulo em exercícios, o faz estar entre os triângulo notável exatos.

Vale ressaltar a relação existente entre catetos e hipotenusa de cada triângulo retângulo notável. No ΔABC do tipo 45° e 45° , sua hipotenusa é igual a medida de um dos catetos, multiplicado por $\sqrt{2}$. O ΔMNO retângulo, com ângulos agudos de 30° e 60° , apresenta sua hipotenusa medindo duas vezes o menor cateto, sendo este cateto oposto ao ângulo 30° , enquanto neste mesmo triângulo, o maior cateto e oposto ao ângulo de 60° , mede $\sqrt{3}$ vezes a medida do menor cateto. Considerando o ΔEFG retângulo, de ângulos agudos medindo 15° e 75° , sua hipotenusa mede quatro vezes a medida da altura relativa a ela, o menor cateto e oposto ao ângulos 15° mede $(\sqrt{6} - \sqrt{2})$ vezes a altura relativa à hipotenusa, enquanto que o maior cateto e oposto ao ângulo de 75° apresenta como medida $(\sqrt{6} + \sqrt{2})$ vezes a medida da altura relativa à hipotenusa.

Triângulos Notáveis Aproximados

Figura 3.25 – Triângulos notáveis aproximados



Fonte: Arquivo Pessoal

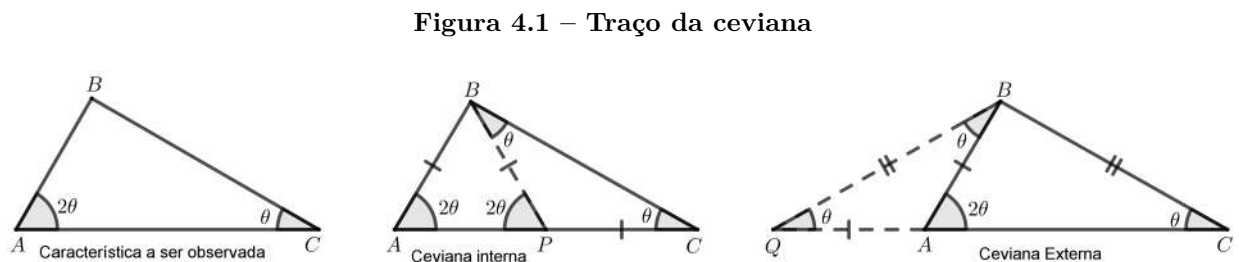
O termo triângulos notáveis aproximados faz referência as medidas dessas figuras. Ao tomar qualquer um dos triângulos acima e calcular o seno ou cosseno desses ângulos, obtemos medidas aproximadas de seus lados. Ou conhecendo somente as medidas dos lados, é possível obter com uma calculadora a medida aproximadas do seus ângulos. Em virtude do frequente uso em resoluções de problemas trata-se estes triângulos sendo de medidas “exatas”.

4 TRAÇOS AUXILIARES

Neste capítulo, estudaremos alguns traços auxiliares que podem ser realizados em figuras planas, em especial no triângulo. Com isso, traços auxiliares são segmentos de retas construídas internas ou externas em figuras planas, que permitem deduzir novas informações e possibilitem chegar à solução do problema de forma direta ou indiretamente. A construção desses traços partem de algumas características denominadas critérios, os quais as figuras inicialmente apresentam. Vejamos alguns exemplos fundamentados em (BARCENA, 2004), (BASTIDAS, 2017), (BASTIDAS, 2010) e (EDITORES, 2012)

4.1 PRIMEIRO CRITÉRIO - TRAÇO DA CEVIANA

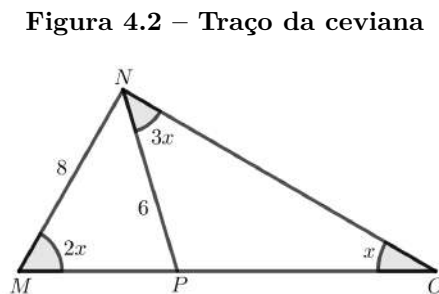
Este traço é recomendado quando observa-se em triângulos uma relação entre dois de seus ângulos internos da seguinte forma, 1 para 2. Em outras palavras, quando $B\hat{A}C = 2\theta$ e $B\hat{C}A = \theta$, um ângulo interno é o dobro do outro. Ao traçar uma ceviana interna ou externa, tem-se por objetivo construir triângulo isósceles interno ou externo, como mostra a Figura 4.1 abaixo.



Fonte: Arquivo Pessoal

A partir disso, é possível fazer deduções usando o teorema do ângulo externo e congruência de triângulos.

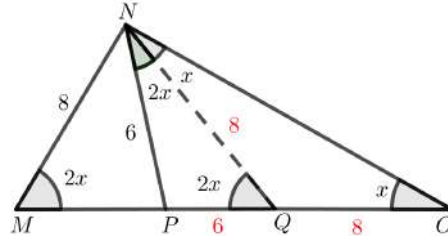
Exemplo 1: Na figura abaixo calcule \overline{PO} , com $\overline{MN} = 8$ cm e $\overline{NP} = 6$ cm.



Fonte: Arquivo Pessoal

Solução: Observando que $\widehat{NMO} = 2\widehat{NOM}$, traçando \overline{NQ} com $Q \in \overline{PO}$, tal que $\overline{NQ} \equiv \overline{MN}$, e completando ângulos, conforme a Figura 4.3 a seguir.

Figura 4.3 – Traço da ceviana



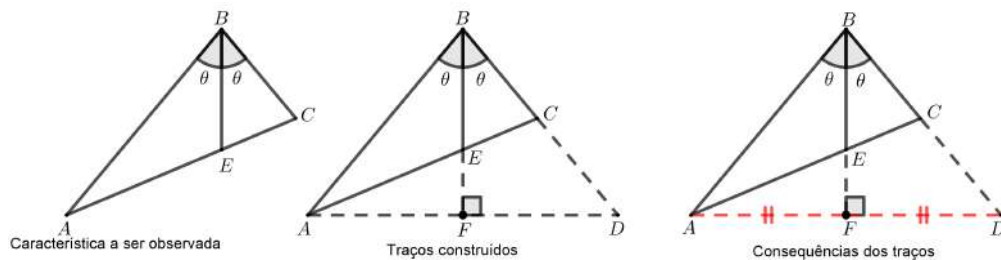
Fonte: Arquivo Pessoal

Note que $\triangle MNQ$ é isósceles com $\overline{NQ} \equiv \overline{MN} = 8$ cm. Por outro lado, o $\triangle NPQ$ é isósceles, onde $\overline{PQ} \equiv \overline{NP} = 6$ cm. No $\triangle NQO$ isósceles, ocorre $\overline{QO} \equiv \overline{NQ} = 8$ cm. Desta forma, $\overline{PO} = \overline{PQ} + \overline{QO} = 6 + 8 = 14$ cm.

4.2 SEGUNDO CRITÉRIO - COMPLETANDO TRIÂNGULO ISÓSCELES

Quando no problema que está sendo resolvido, for observado em um triângulo uma bissetriz interna, é possível completar o triângulo, fazendo surgir um triângulo isósceles e o prolongamento da bissetriz.

Figura 4.4 – Completando triângulos isósceles

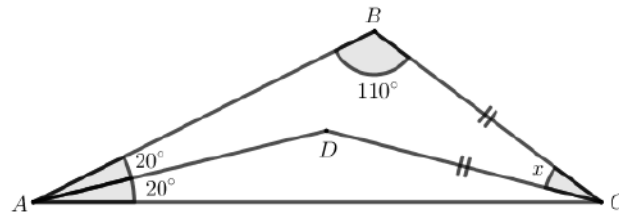


Fonte: Arquivo Pessoal

Observe que surge como consequência $\overline{AB} \equiv \overline{BD}$ e $\overline{AF} \equiv \overline{FD}$. A partir disso, podem ser completados ângulos e exploradas propriedades da reta bissetriz que será simultaneamente mediatriz, mediana e altura em triângulos isósceles.

Exemplo 2: Calcule o valor de x na figura a seguir, sabendo que $\widehat{BAC} = 40^\circ$ e \overline{AD} é a bissetriz do \widehat{BAC} .

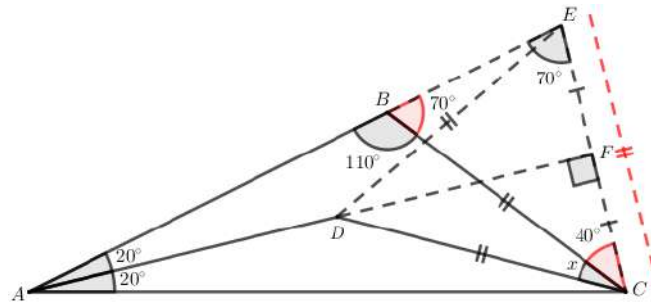
Figura 4.5 – Traço completando triângulos isósceles



Fonte: Arquivo Pessoal

Solução: Percebendo que \overline{AD} é bissetriz do \widehat{BAC} , podemos completar o $\triangle ACE$. Prolongando \overline{AB} no sentido de B até um ponto E , tal que $\overline{AE} \equiv \overline{AC}$, traçando \overline{CE} e prolongando \overline{AD} no sentido de D até F , ponto médio de \overline{CE} . Completando ângulos, temos:

Figura 4.6 – Traço completando triângulos isósceles



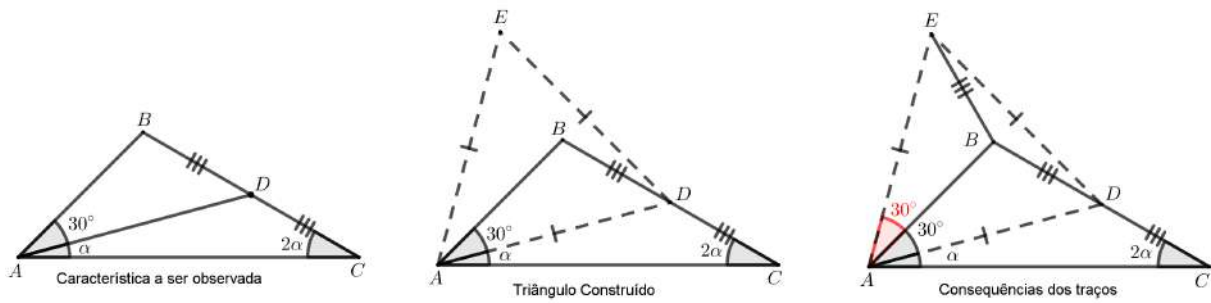
Fonte: Arquivo Pessoal

Note que o $\triangle BCE$ é isósceles com $\overline{BC} \equiv \overline{CE}$, com isso, traçando \overline{DE} , ocorre que $\triangle DFC \equiv \triangle DFE$ pelo caso (LAL) , logo $\overline{DE} \equiv \overline{DC}$. Disso, ocorre $\triangle DEC$ é equilátero, pois $\overline{CD} \equiv \overline{DE} \equiv \overline{EC}$. Logo, $\widehat{DCE} = 60^\circ = x + 40^\circ$, sendo desta forma $x = 20^\circ$.

4.3 TERCEIRO CRITÉRIO - CONSTRUINDO TRIÂNGULO EQUILÁTERO

Na abordagem de problemas em que seja observado um ângulo de 30° , lembrando da relação existente entre os ângulos 30° e 60° , pois o ângulo 30° é metade do ângulo 60° , é indicado construir um triângulo equilátero externo que envolva o ângulo 30° inicialmente observado.

Figura 4.7 – Construindo triângulo equilátero

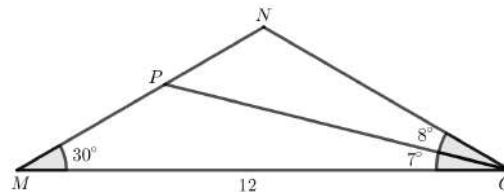


Fonte: Arquivo Pessoal

Como consequência, surge o segmento de reta \overline{AB} que é bissetriz, mediatriz, mediana e altura simultaneamente. Além disso, por meio das propriedades dessa reta, podem ser deduzidas novas informações acerca do problema.

Exemplo 3: Qual o valor de \overline{MN} , sabendo que $\overline{MO} = 12$ cm, na figura abaixo.

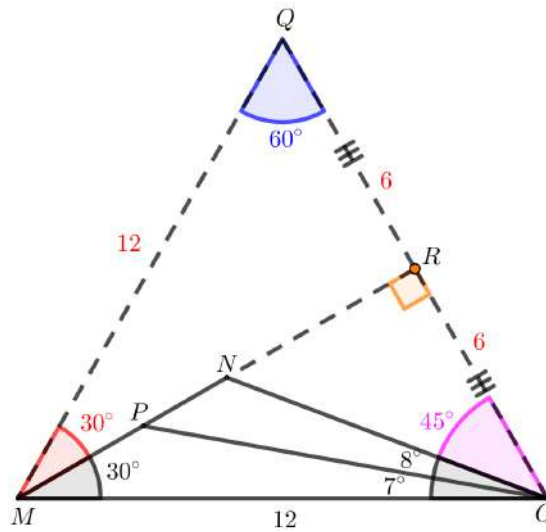
Figura 4.8 – Construindo triângulo equilátero



Fonte: Arquivo Pessoal

Solução: Observando $\widehat{NMO} = 30^\circ$, pode-se construir o ΔMQO equilátero, tomando um ponto Q externo ao ΔMNO conforme a figura abaixo, tal que $\overline{MQ} \equiv \overline{QO} \equiv \overline{MO} = 12$ cm e prolongando \overline{MN} no sentido de N até o ponto $R \in \overline{QO}$, temos:

Figura 4.9 – Construindo triângulo equilátero



Fonte: Arquivo Pessoal

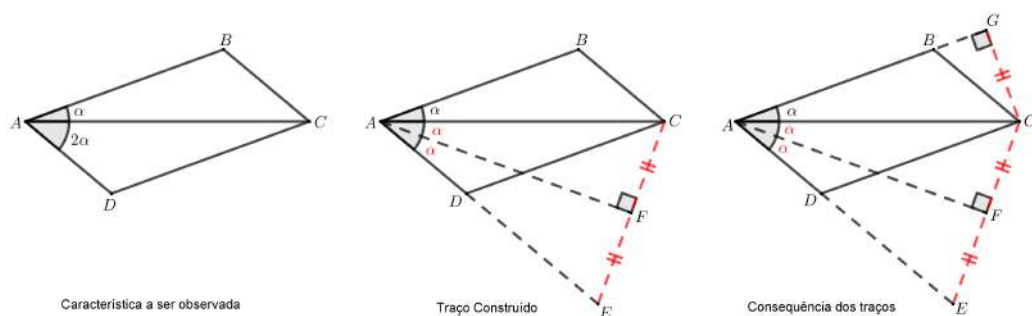
Como consequência dos traços, ΔMQR é um triângulo notável 30° e 60° , onde $\overline{MQ} = 12$ cm, logo $\overline{QR} = 6$ cm e $\overline{MR} = 6\sqrt{3}$ cm. Além disso, o ΔNRO é um triângulo notável de ângulos agudos de 45° , com isso $\overline{NR} \equiv \overline{RO} = 6$ cm.

Portanto, $\overline{MN} = \overline{MR} - \overline{NR} = 6\sqrt{3} - 6 = 6(\sqrt{3} - 1)$ cm.

4.4 QUARTO CRITÉRIO - PROPRIEDADE DA BISSETRIZ

Ao encontrar nos problemas, ângulos adjacentes iguais à \widehat{BAC} e \widehat{DAC} , no qual um ângulo é o dobro, recomenda-se traçar a bissetriz no maior ângulo e posteriormente buscar completar um triângulo isósceles. Com isso, ao traçar a altura do triângulo ΔABC adjacente ao triângulo isósceles anteriormente construído, tem-se como consequência três triângulos congruentes.

Figura 4.10 – Propriedade da bissetriz

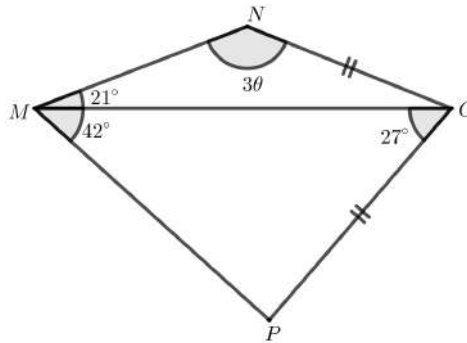


Fonte: Arquivo Pessoal

Percebendo congruência entre os novos $\triangle EFA$, $\triangle CFA$ e $\triangle GCA$ formados, novas informações serão obtidas.

Exemplo 4: Na figura abaixo, sabendo que $P\widehat{M}O = 2N\widehat{M}O = 42^\circ$ e $\overline{NO} \equiv \overline{OP}$. Encontre o valor de θ

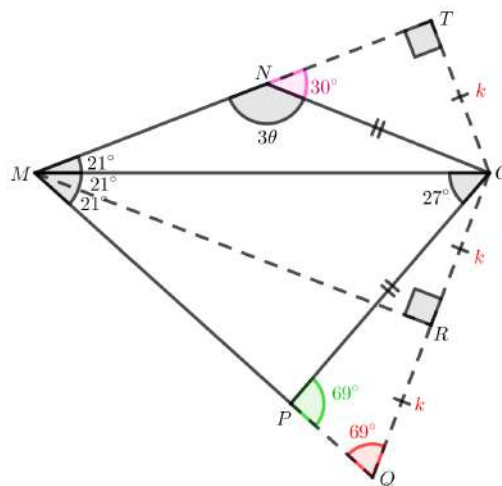
Figura 4.11 – Propriedade da bissetriz



Fonte: Arquivo Pessoal

Solução: Como $P\widehat{M}O = 2N\widehat{M}O$ e como também eles são ângulos adjacentes, pode-se traçar a bissetriz de $P\widehat{M}O$. Prolongando \overline{MP} no sentido de P até o ponto Q , tal que $\overline{MQ} \equiv \overline{MO}$ e traçando \overline{OQ} que intersecta no ponto R a bissetriz do $P\widehat{M}O$, completa-se o $\triangle MOQ$, obtendo $\overline{OR} \equiv \overline{RQ} = k$, $O\widehat{Q}P = 69^\circ$ e como $O\widehat{P}Q$ é externo ao $\triangle MOP$ tem-se que $O\widehat{P}Q = 69^\circ$.

Figura 4.12 – Propriedade da bissetriz



Fonte: Arquivo Pessoal

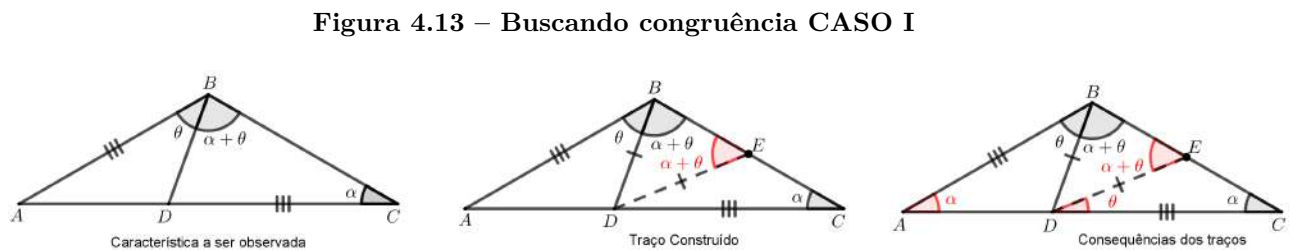
Logo, $\triangle POQ$ é isósceles, com $\overline{PO} \equiv \overline{OQ} = 2k$. Prolongando \overline{MN} no sentido N e traçando \overline{OT} altura do $\triangle MNO$, ocorre $\triangle RMO \equiv \triangle TMO$ pelo caso (ALA). Disso $\overline{OT} \equiv \overline{OR} = k$.

Observando que $\overline{NO} \equiv \overline{OP} = 2k$ e $\overline{OT} = k$, temos que $\triangle NOT$ é triângulo notável 30° e 60° , com $T\hat{N}O = 30^\circ$. Desta forma, $3\theta + 30^\circ = 180^\circ \Rightarrow 3\theta = 150^\circ \Rightarrow \theta = 50^\circ$.

4.5 QUINTO CRITÉRIO - BUSCANDO CONGRUÊNCIA

Quando analisando o problema a ser resolvido, forem observados triângulos adjacentes apresentando um lado igual, recomenda-se construir um dos traços expresso logo abaixo, com o objetivo de buscar congruência. A aplicação desse critério pode ocorrer em quatro casos como pode ser visto a seguir:

CASO I - Sendo observado um ângulo interno $D\hat{B}C$ que é a soma de dois outros ângulos. Deve-se traçar uma ceviana interna no triângulo, construindo desta forma um triângulo isósceles $\triangle BDE$ tal que o ângulo interno que é a soma de dois outros ângulos, seja um dos ângulos da base desse novo triângulo construído.

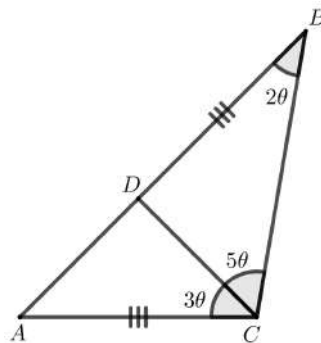


Fonte: Arquivo Pessoal

Completando ângulos, percebe-se como consequência a congruência entre os triângulos $\triangle ABD$ e $\triangle CDE$ pelo caso (LAL).

Exemplo 5: Encontre o valor de $A\hat{D}C$, na figura abaixo.

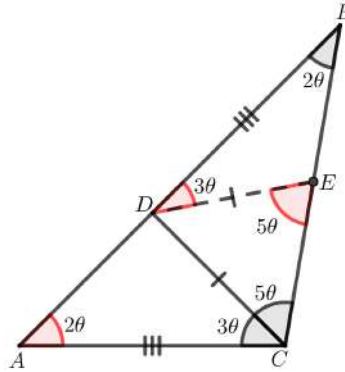
Figura 4.14 – Buscando congruência CASO I



Fonte: Arquivo Pessoal

Solução: Percebendo que \widehat{BCD} é soma dos ângulos \widehat{ACD} e \widehat{CBD} , traçando \overline{DE} com $E \in \overline{BC}$ tal que $\triangle CDE$ seja isósceles de base \overline{CE} e $\widehat{DEC} \equiv \widehat{DCE} = 5\theta$.

Figura 4.15 – Buscando congruência CASO I

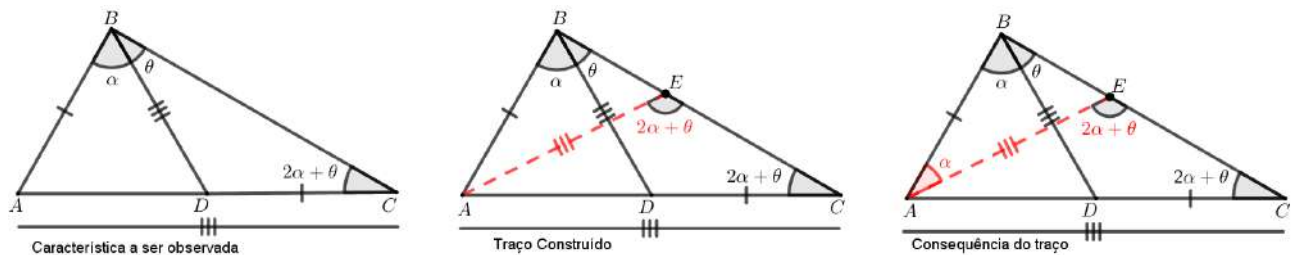


Fonte: Autor

Pelo teorema do ângulo externo, $\widehat{BDE} = 3\theta$, e ocorre $\triangle ACD \equiv \triangle BDE$ pelo caso (LAL). $\widehat{DBE} \equiv \widehat{CAD} = 2\theta$. No $\triangle ABC$, temos que $2\theta + 2\theta + 3\theta + 5\theta = 180^\circ$. Sendo que $12\theta = 180^\circ \Rightarrow \theta = 15^\circ$. Como $\widehat{ADC} = 7\theta$, pois é externo ao $\triangle BCD$, concluímos que o valor de $\widehat{ADC} = 7 \cdot (15^\circ) = 105^\circ$.

CASO II - Se forem percebidas em um $\triangle ABC$ as configurações abaixo, ou seja, $\overline{AB} \equiv \overline{CD}$, $\overline{BD} \equiv \overline{AC}$ e $\widehat{ACB} = 2\widehat{ABD} + \widehat{DBC}$, é recomendado traçar uma ceviana \overline{AE} com $E \in \overline{BC}$ construindo um triângulo isósceles $\triangle AEC$ com ângulos da base iguais a $2\alpha + \theta$.

Figura 4.16 – Buscando congruência CASO II

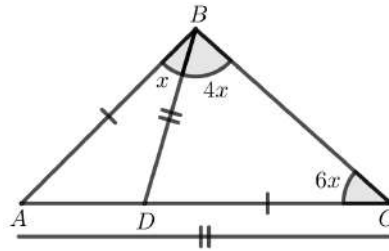


Fonte: Arquivo Pessoal

Após completar ângulos, obtém-se como consequência, a congruência entre os triângulos $\triangle ABD$ e $\triangle EAB$ pelo caso (LAL).

Exemplo 6: Calcule x , sabendo que $\overline{BD} \equiv \overline{AC}$ no $\triangle ABC$ abaixo:

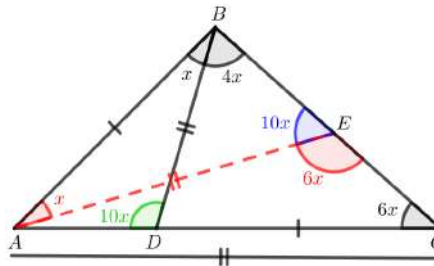
Figura 4.17 – Buscando congruência CASO II



Fonte: Arquivo Pessoal

Solução: Observando que $\overline{AC} \equiv \overline{BD}$ e $\widehat{ACB} = 2\widehat{ABD} + \widehat{DBC}$, pode-se traçar \overline{AE} com $E \in \overline{BC}$, tal que $\overline{AE} \equiv \overline{AC}$, obtendo $\triangle EAC$ isósceles de base \overline{CE} , completando ângulos obtém a figura abaixo:

Figura 4.18 – Buscando congruência CASO II

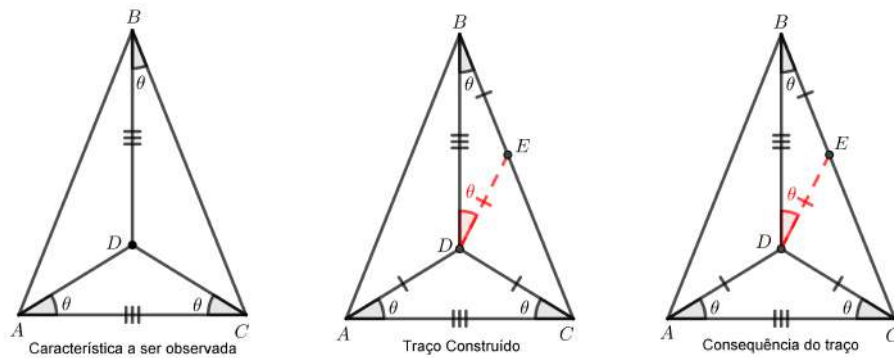


Fonte: Arquivo Pessoal

Como $\overline{AE} \equiv \overline{AC}$ e $\overline{AC} \equiv \overline{BD}$, logo $\overline{AE} \equiv \overline{BD}$, ocorrendo assim, $\triangle ABD \equiv \triangle EAB$ pelo caso (LAL). Assim, $\widehat{ADB} \equiv \widehat{AEB}$. Nota-se que $\widehat{ADB} = 10x$, pois é externo ao $\triangle BDC$, e por congruência temos que $\widehat{AEB} = 10x$. Desta forma, no $\triangle EAB \Rightarrow 10x + 4x + x + x = 180^\circ \Rightarrow 16x = 180^\circ \Rightarrow x = 11^\circ 25'$.

CASO III - Ao ser observado no interior de um $\triangle ABC$ um ponto D , onde as medidas de $\overline{AD} \equiv \overline{DC}$ e $\overline{BD} \equiv \overline{AC}$ recomenda-se tomar $E \in \overline{BC}$ e traçar \overline{DE} , uma ceviana formando um triângulo isósceles $\triangle BDE$, onde o ângulo \widehat{CBD} seja um dos ângulos da base do novo triângulo construído.

Figura 4.19 – Buscando congruência CASO III

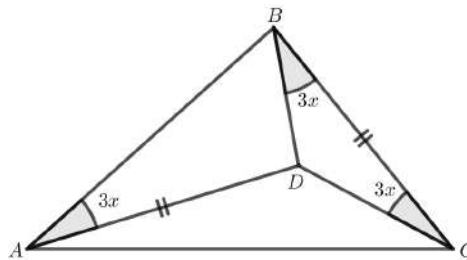


Fonte: Arquivo Pessoal

Como consequência, ocorre a congruência entre triângulos $\triangle ADC$ e $\triangle BDE$ pelo caso (ALA) permitindo obter novas informações acerca do problema.

Exemplo 7: No $\triangle ABC$ isósceles de base \overline{BC} logo abaixo, determine o valor de x .

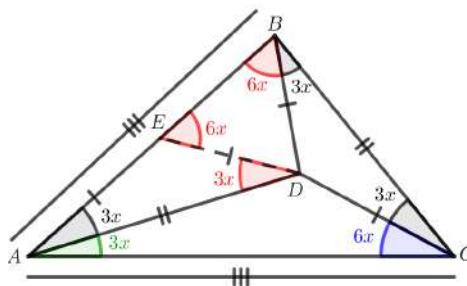
Figura 4.20 – Buscando congruência CASO III



Fonte: Arquivo Pessoal

Solução: Analisando, $\triangle BCD$ é isósceles, com $\overline{BD} \equiv \overline{CD}$. Traçando \overline{DE} com $E \in \overline{AB}$ tal que $\overline{AE} \equiv \overline{DE}$ tem que $\triangle ADE$ isósceles de base \overline{AD} , completando ângulos obtemos;

Figura 4.21 – Buscando congruência CASO III

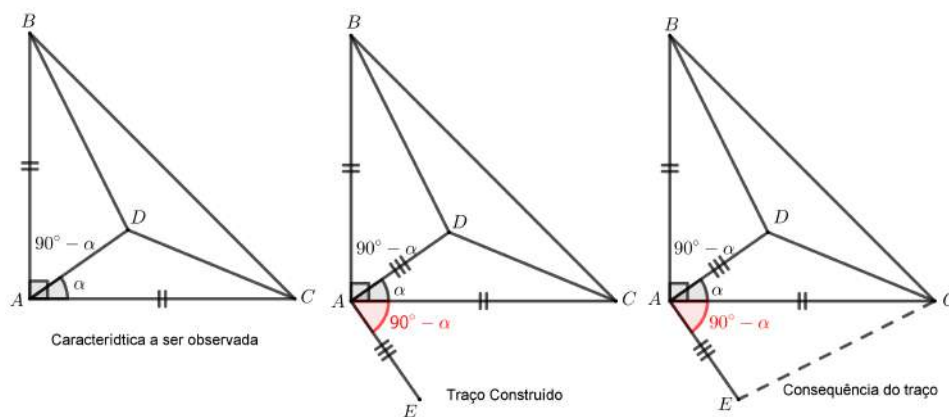


Fonte: Arquivo Pessoal

Observando a $\triangle ADE \equiv \triangle BDC$ pelo caso (ALA), tem que $\overline{BD} \equiv \overline{DE}$. Pelo teorema do ângulo externo $\widehat{BED} = 6x$, como $\triangle BDE$ é isósceles, logo $\widehat{DBE} = 6x$. Nota-se que $\triangle ABC$ é isósceles, com $\overline{AB} \equiv \overline{AC}$, ocorrendo que $\triangle ABD \equiv \triangle ACD$ pelo caso (LLL), sendo $\widehat{DAC} \equiv \widehat{DAB} = 3x$ e $\widehat{ACB} \equiv \widehat{ABC} = 6x + 3x$. Desta forma no $\triangle ABC$, somando os ângulos $3x + 3x + 6x + 3x + 3x + 6x = 180^\circ \Rightarrow 24x = 180^\circ \Rightarrow x = 7^\circ 30'$.

CASO IV - Em um triângulo retângulo de catetos iguais, ao perceber um ângulo agudo interno definido $\widehat{CAD} = \alpha$, seu complemento pode ser usado para construir um triângulo externo.

Figura 4.22 – Buscando congruência CASO IV

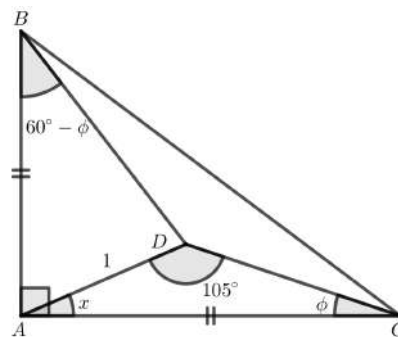


Fonte: Arquivo Pessoal

Com isso, obtemos posteriormente a congruência entre triângulos formado $\triangle DAB$ e $\triangle CAE$ pelo caso (LAL).

Exemplo 8: Na figura abaixo, calcule $\overline{AD} + \overline{BD} + \overline{DC}$, sabendo que $\overline{AD} = 1$ cm.

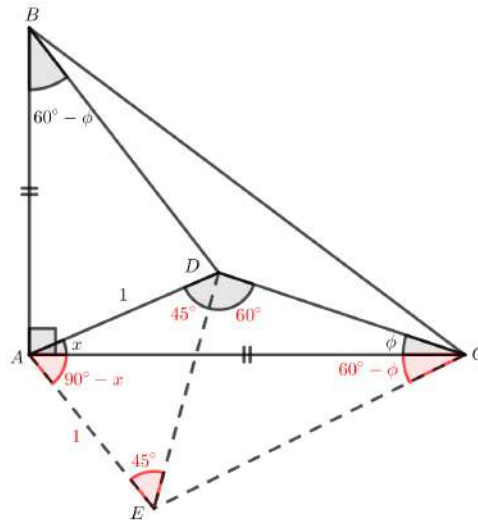
Figura 4.23 – Buscando congruência CASO IV



Fonte: Arquivo Pessoal

Solução: Observando que $\widehat{BAD} = 90^\circ - x$, traçando $\overline{AE} \equiv \overline{AD}$ tal que $\widehat{CAE} = 90^\circ - x$, ao construir \overline{EC} ocorre $\triangle CAE \equiv \triangle BAD$ pelo caso (LAL), logo $\overline{BD} \equiv \overline{EC}$.

Figura 4.24 – Buscando congruência CASO IV



Fonte: Arquivo Pessoal

Observe que $\widehat{DAE} = 90^\circ$ e $\widehat{DCE} = 60^\circ$. Traçando \overline{DE} , tem que $\triangle DAE$ é um triângulo notável 45° e 45° , logo $\overline{DE} = \sqrt{2}$ cm. No $\triangle CDE$, $\widehat{CDE} = 60^\circ$ e $\widehat{DCE} = 60^\circ$, com isso, \widehat{DEC} será 60° . Como consequência $\triangle CDE$ é equilátero, assim $\overline{CD} \equiv \overline{CE} \equiv \overline{DE} = \sqrt{2}$ cm. Como $\overline{BD} \equiv \overline{CE}$ tem que $\overline{BD} = \sqrt{2}$ cm.

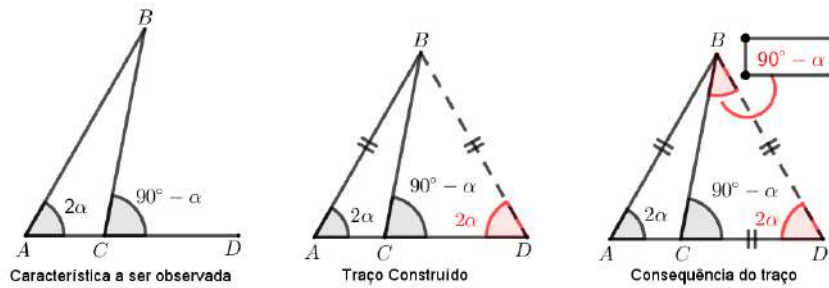
Logo, $\overline{AD} + \overline{BD} + \overline{DC} = 1 + \sqrt{2} + \sqrt{2} = (1 + 2\sqrt{2})$ cm.

4.6 SEXTO CRITÉRIO - TRAÇO DO ÂNGULO SIMÉTRICO

O critério do ângulo simétrico pode ser utilizado em dois casos. O primeiro caso é observado em triângulos, enquanto o segundo caso ocorre em quadriláteros côncavos. Veja abaixo o primeiro caso.

CASO I - Em problemas onde um triângulo $\triangle ABC$ apresente um ângulo interno $\widehat{BAC} = 2\alpha$ e um ângulo externo $\widehat{BCD} = 90^\circ - \alpha$ pode ser construído um traço \overline{BD} tomando-se um ponto externo D pertencente ao prolongamento de \overline{AC} no sentido de C , tal que $\overline{AB} \equiv \overline{BD}$ formando $\triangle ABD$ isósceles, com ângulos da base iguais a 2α .

Figura 4.25 – Traço do ângulo simétrico CASO I

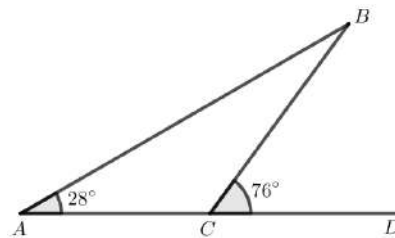


Fonte: Arquivo Pessoal

Completando ângulos pode ser deduzido novo triângulo isósceles interno.

Exemplo 9: Quanto mede \overline{AB} na figura abaixo, sabendo que \overline{BC} mede 14 cm.

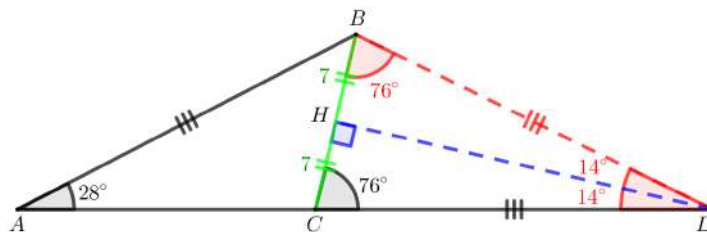
Figura 4.26 – Traço do ângulo simétrico CASO I



Fonte: Arquivo Pessoal

Solução: Observando a relação entre $\widehat{BAC} = 28^\circ = 2 \cdot (14^\circ)$ e $\widehat{BCD} = 76^\circ = 90^\circ - 14^\circ$, então pelo Caso I visto anteriormente temos que $\alpha = 14^\circ$. Traçando \overline{BD} , com D pertencente ao prolongamento de \overline{AC} no sentido de C tal que $\overline{BD} \equiv \overline{AB}$ e $\widehat{BDC} \equiv \widehat{BAD} = 28^\circ$ ao completar ângulos, ocorre:

Figura 4.27 – Traço do ângulo simétrico CASO I



Fonte: Arquivo pessoal

Traçando a altura \overline{DH} do $\triangle BCD$ isósceles de base \overline{BC} , tem-se que $\overline{BH} \equiv \overline{CH} = 7$ cm e $\widehat{BDH} \equiv \widehat{HDC} = 14^\circ$. Por outro lado, os triângulos $\triangle BDH$ e $\triangle CDH$ são notáveis com ângulos aproximados de 14° e 76° em consequência $\overline{BH} = 7$ cm e $\overline{BD} = 7\sqrt{17}$ cm. Diante disso, concluímos que $\overline{AB} \equiv \overline{BD} = 7\sqrt{17}$ cm.

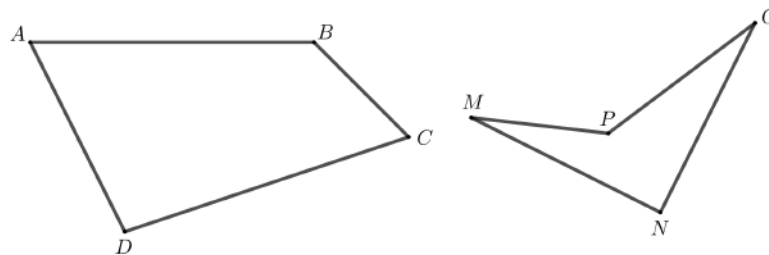
5 QUADRILÁTEROS CÔNCAVOS ESPECIAIS

Neste capítulo trataremos sobre quadriláteros convexos e côncavos, dando maior atenção aos quadriláteros não convexo (côncavos). As definições e conceitos trabalhados nesta seção foram influenciados por obras de (EDITORES, 2012), (DOLCE O. POMPEO, 2013), (MORGADO A.C.; WAGNER, 2002) e (DANTE, 2013).

5.1 QUADRILÁTEROS

Definição 10. Considerando os pontos A, B, C e D contidos em um único plano, todos distintos e três deles não colineares, o encontro dos quatro segmentos de retas \overline{AB} , \overline{BC} , \overline{CD} e \overline{AD} , tal que estes interceptam apenas em suas extremidades, denomina-se quadrilátero.

Figura 5.1 – Exemplo de quadriláteros



Fonte: Arquivo Pessoal

Na Figura 5.1, tem-se $ABCD$ um quadrilátero formado pela união dos segmentos \overline{AB} , \overline{BC} , \overline{CD} e \overline{AD} , enquanto que $MNOP$ é um quadrilátero construído pelos segmentos \overline{MN} , \overline{NO} , \overline{OP} e \overline{PM} .

Elementos nos Quadriláteros

Analisando a Figura 5.1, podemos destacar importantes elementos.

Os pontos A, B, C e D são vértices do quadrilátero $ABCD$. Ao passo que M, N, O e P , são vértices do quadrilátero $MNOP$.

Os segmentos \overline{AB} , \overline{BC} , \overline{CD} e \overline{AD} são os lados do quadrilátero $ABCD$. Considerando $MNOP$, seus lados são os segmentos \overline{MN} , \overline{NO} , \overline{OP} e \overline{PM} .

Os ângulos internos \widehat{DAB} , \widehat{ABC} , \widehat{BCD} , \widehat{CDA} e \widehat{PMN} , \widehat{MNO} , \widehat{NOP} , \widehat{OPM} , pertencem respectivamente aos quadriláteros $ABCD$ e $MNOP$.

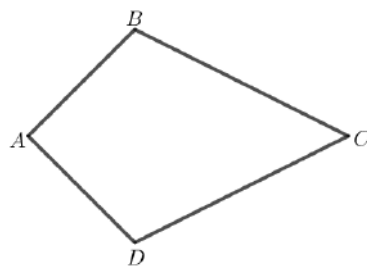
5.2 CLASSIFICAÇÃO DOS QUADRILÁTEROS

I. QUADRILÁTERO CONVEXO

Definição 11. Um quadrilátero é denominado convexo quando tomados dois pontos internos quaisquer e ao unirmos esses pontos o segmento resultante estiver inteiramente contido na figura.

A Figura 5.2 mostra um exemplo de quadriláteros convexo.

Figura 5.2 – Quadriláteros convexo



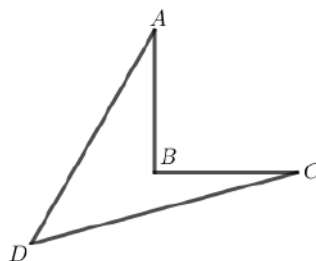
Fonte: Arquivo Pessoal

Pensando em facilitar a compreensão dessa definição por parte do leitor, apresenta-se a concepção de (DANTE, 2013): de um modo informal, um quadrilátero chama-se quadrilátero convexo quando todos os seus vértices apontam para a sua região externa.

II. QUADRILÁTERO NÃO CONVEXO (CÔNCAVO)

Definição 12. Uma quadrilátero que não for convexo é denominado côncavo.

Figura 5.3 – Quadriláteros côncavo



Fonte: Arquivo Pessoal

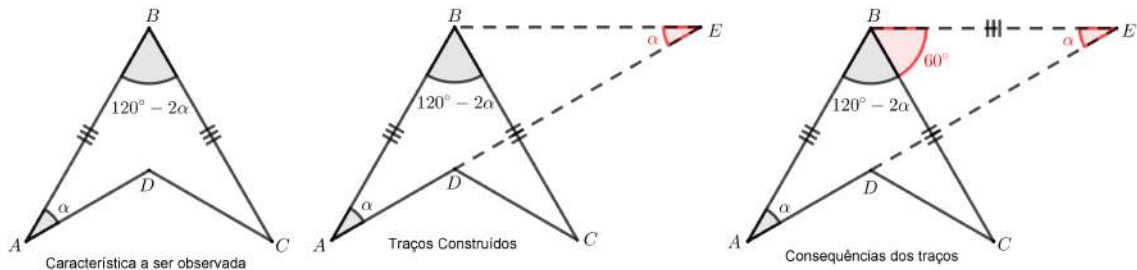
Diante da caracterização exposta por (DANTE, 2013) no item anterior, é possível facilmente identificar a natureza da Figura 5.3, visto que um de seus vértices não está apontando para região externa da figura, caracterizando desta forma um quadrilátero não convexo (côncavo).

5.3 TRAÇOS EM QUADRILÁTERO CÔNCAVO

Este traço consiste no segundo caso do sexto critério do capítulo 4.

Quando for possível observar um quadrilátero côncavo $ABCD$, $\overline{AB} \equiv \overline{BC}$, ou seja, dois lados iguais e o ângulo compreendido entre esses lados medir $\widehat{ABC} = 120^\circ - 2\alpha$, com $\widehat{BAD} = \alpha$ é possível construir um triângulo isósceles $\triangle ABE$ com os ângulos da base iguais a α .

Figura 5.4 – Traço do ângulo simétrico CASO II

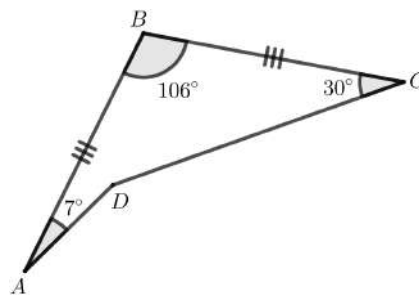


Fonte: Arquivo Pessoal

Isso permitirá novas deduções que direcionará à solução do problema.

Exemplo 10: Ache o valor do segmento \overline{DC} , sabendo que $\overline{AB} \equiv \overline{BC} = 3$ cm.

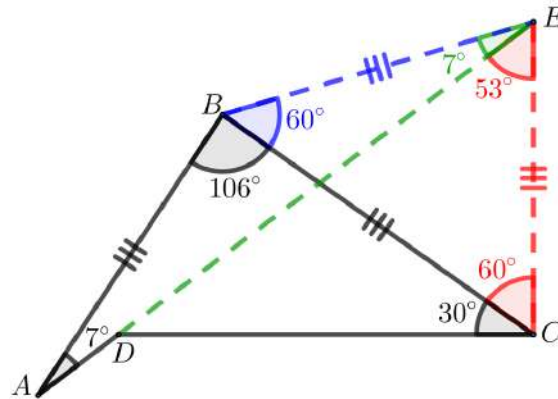
Figura 5.5 – Traço do ângulo simétrico CASO II



Fonte: Arquivo Pessoal

Solução: Nota-se que $ABCD$ é um quadrilátero com $\overline{AB} \equiv \overline{BC}$ e $\widehat{ABC} = 120^\circ - 2(\widehat{BAC})$. Diante disso, prolongando \overline{AD} no sentido de D , tomando o ponto externo E sobre este prolongamento e traçando \overline{BE} , tal que $\overline{BE} \equiv \overline{AB}$, logo $\triangle ABE$ é isósceles de base \overline{AE} e $\widehat{BED} \equiv \widehat{BAD} = 7^\circ$, conforme Figura 5.6:

Figura 5.6 – Traço do ângulo simétrico CASO II



Fonte: Arquivo Pessoal

Como a soma dos ângulos internos do $\triangle ABE$ é igual a 180° concluímos que $\widehat{CBE} = 60^\circ$ e ao traçarmos \overline{CE} temos que $\triangle BEC$ é equilátero, logo $\widehat{BCE} \equiv \widehat{BEC} = 60^\circ$. Em consequência $\overline{CE} \equiv \overline{BC} \equiv \overline{AB} = 3 \text{ cm}$. Analisando $\triangle CDE$, ocorre que $\widehat{DEC} = 60^\circ - 7^\circ = 53^\circ$ e $\widehat{DCE} = 30^\circ + 60^\circ = 90^\circ$. Desta forma, $\triangle DCE$ é um triângulo retângulo notável com ângulos aproximados de 37° e 53° , diante disso, $\overline{CE} = 3 \text{ cm}$ e $\overline{CD} = 4 \text{ cm}$.

5.4 QUADRILÁTEROS CÔNCAVOS ESPECIAIS

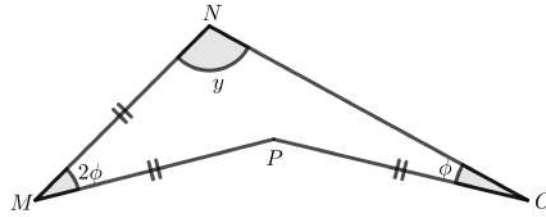
Existem alguns quadriláteros côncavos que apresentam características e propriedades que os diferenciam dos demais côncavos. Essas relações podem envolver três dos seus lados e seus ângulos internos respectivamente. O frequente uso desses quadriláteros como ferramenta na resolução de problemas de geometria plana, os fazem receber o nome de quadriláteros côncavos especiais. A seguir, alguns desses quadriláteros e suas propriedades.

PRIMEIRO CASO DE QUADRILÁTEROS CÔNCAVOS ESPECIAIS

Teorema 13. *Em todo quadrilátero côncavo especial $MNOP$ no qual $\overline{MN} \equiv \overline{MP} \equiv \overline{PO}$ com $\widehat{PON} = \phi$ e $\widehat{NMP} = 2\phi$ resulta que $\widehat{MNO} = 120^\circ - \phi$.*

Conforme Figura 5.7.

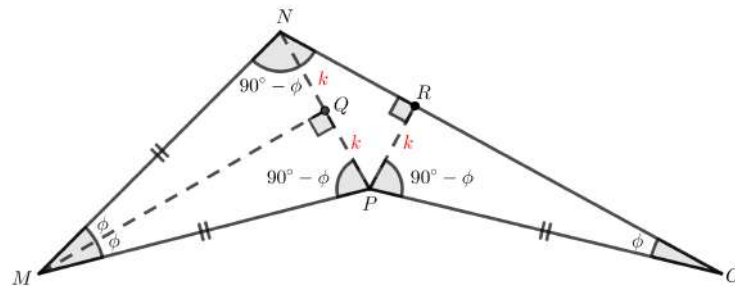
Figura 5.7 – Primeiro caso de quadriláteros côncavos especiais



Fonte: Arquivo Pessoal

Demonstração: De fato, usando traços auxiliares podemos traçar o segmento \overline{NP} , obtendo como consequência $\triangle MNP$ isósceles de base \overline{NP} . Além disso, teremos $\widehat{MNP} = \widehat{MPN} = 90^\circ - \phi$. Traçando no $\triangle MNP$ a bissetriz do $\widehat{NMP} = 2\phi$, temos simultaneamente a altura e mediana desse triângulo, com Q sendo o ponto médio de \overline{NP} , obtendo assim, $\triangle MNQ \cong \triangle MPQ$, com isso $\overline{NQ} \cong \overline{QP}$. No $\triangle NOP$ traçando a altura \overline{PR} relativa ao lado \overline{NO} surgem os triângulos $\triangle PRO \cong \triangle MNQ \cong \triangle MQP$ pelo caso (ALA), conforme a Figura 5.8 abaixo:

Figura 5.8 – Primeiro caso de quadriláteros côncavos especiais



Fonte: Arquivo Pessoal

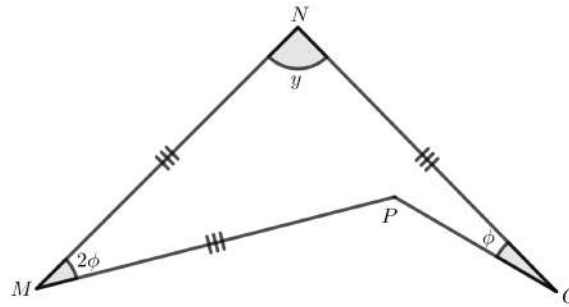
Em consequência de $\triangle PRO \cong \triangle MNQ \cong \triangle MQP$, temos que $\overline{NQ} \cong \overline{QP} \cong \overline{PR} = k$. Note que $\triangle NPR$ é um triângulo retângulo notável 30° e 60° , com $\widehat{PNR} = 30^\circ$. Desta forma, temos que $\widehat{MNO} = \widehat{MNP} + \widehat{ONP} = (90^\circ - \phi) + 30^\circ = 120^\circ - \phi$. ■

SEGUNDO CASO DE QUADRILÁTEROS CÔNCAVOS ESPECIAIS

Teorema 14. *Em todo quadrilátero côncavo especial MNOP, no qual $\overline{MP} \cong \overline{MN} \cong \overline{NO}$ com $\widehat{PON} = \phi$ e $\widehat{NMP} = 2\phi$ resulta que $\widehat{MNO} = 120^\circ - 2\phi$.*

Conforme Figura 5.9

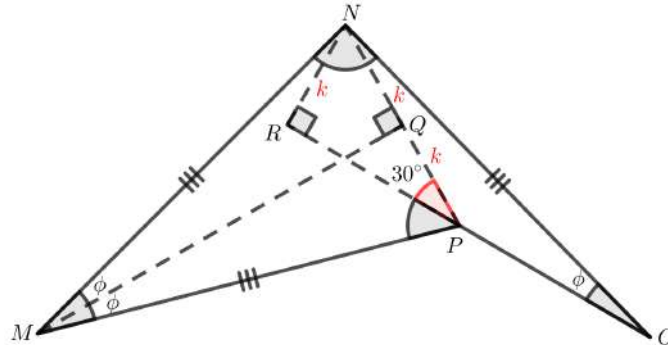
Figura 5.9 – Segundo caso de quadriláteros côncavos especiais



Fonte: Arquivo Pessoal

Demonstração: Traçando o segmento \overline{NP} , observa-se $\triangle MNP$ isósceles de base \overline{NP} e $M\hat{N}P \equiv M\hat{P}N = 90^\circ - \phi$. Tomando um ponto $Q \in \overline{NP}$ tal que \overline{MQ} seja bissetriz de $N\hat{M}P$, temos o triângulo retângulo $\triangle NMQ \equiv \triangle PMQ$ pelo caso (LAL), logo $\overline{NQ} \equiv \overline{PQ}$. Prolongando \overline{OP} no sentido de P até um ponto R tal que $\overline{NR} \perp \overline{OR}$ e traçando \overline{NR} que é a altura do $\triangle OPN$, com isso, $\triangle NOR \equiv \triangle MPQ$ pelo caso (ALA), em consequência temos $\overline{PQ} \equiv \overline{NR} = k$. Conforme a Figura 5.10

Figura 5.10 – Segundo caso de quadriláteros côncavos especiais



Fonte: Arquivo Pessoal

Ao analisar o $\triangle NPR$, nota-se um triângulo retângulo notável 30° e 60° , sendo possível deduzir que o ângulo $N\hat{P}R = 30^\circ$. Agora, note que o ângulo $N\hat{P}R = 30^\circ$ é externo ao $\triangle NPO$, pelo teorema do ângulo externo ocorre que $P\hat{N}O = 30^\circ - \phi$. Diante disso, concluímos que $M\hat{N}O = M\hat{N}P + O\hat{N}P = (90^\circ - \phi) + (30^\circ - \phi) = 120^\circ - 2\phi$. ■

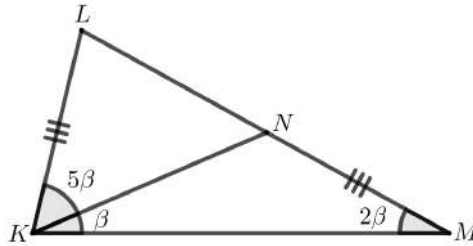
5.5 APLICAÇÕES

No capítulo 4 e posteriormente nas seções 5.3 e 5.4 do capítulo 5, discutimos os principais critérios norteadores na construção de traços auxiliares em figuras geométricas planas. Nesta seção, damos prosseguimento no estudo de traços auxiliares com aplicações

em problemas que visam obter medida de ângulo, comprimentos de segmento ou áreas de uma região. Diante disso, vejamos algumas aplicações.

Problema 1: No triângulo ΔKLM abaixo, $\overline{KL} \equiv \overline{MN}$, calcule o valor de $\widehat{K\hat{N}L}$ em graus.

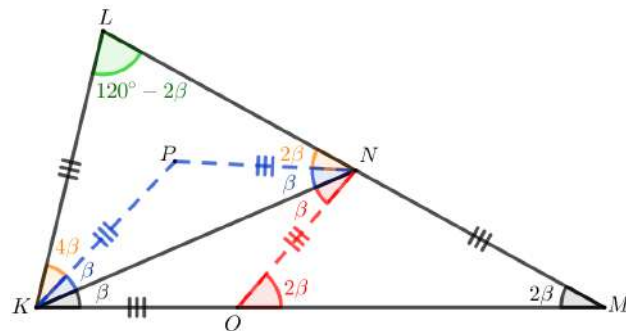
Figura 5.11 – Problema 1



Fonte: Arquivo Pessoal

Solução: Analisando o ΔKMN , ocorre que $\widehat{LNK} = 3\beta$ pois é externo ao ΔKMN . Além disso, $\widehat{NMK} = 2\widehat{NKM}$ e tomando um ponto $O \in \overline{KM}$ podemos traçar uma ceviana \overline{NO} interna ao ΔKMN tal que $\widehat{NOM} = 2\beta$. Daí, concluímos que ΔKON e ΔMNO são isósceles, com $\overline{MN} \equiv \overline{NO} \equiv \overline{KO}$.

Figura 5.12 – Solução do Problema 1

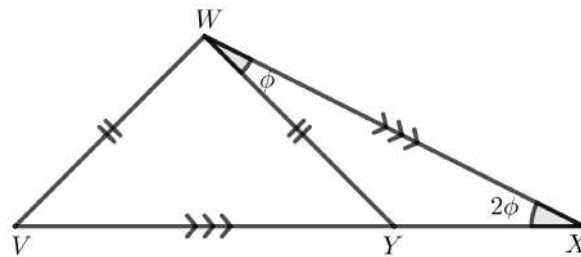


Fonte: Arquivo Pessoal

Refletindo o ΔKON no interior do ΔKLN com o objetivo de encontrar um quadrilátero côncavo especial $LKPN$. Observe que a figura $KPNL$ é um quadrilátero côncavo especial do primeiro caso, pois $\overline{LK} \equiv \overline{KP} \equiv \overline{PN}$ e $\widehat{PKL} = 2\widehat{PNL} = 4\beta$ daí concluímos que $\widehat{KLN} = 120^\circ - 2\beta$. Logo, somando os ângulos internos do ΔKLM obtemos: $(120^\circ - 2\beta) + 2\beta + 6\beta = 180^\circ \Rightarrow 6\beta = 60^\circ \Rightarrow \beta = 10^\circ$. Desta forma $\widehat{K\hat{N}L} = 3\beta = 3 \cdot 10^\circ = 30^\circ$.

Problema 2: Encontre o perímetro do ΔVWX na Figura 5.13 abaixo, sabendo-se que $\overline{VW} \equiv \overline{WY}$ e $\overline{VY} \equiv \overline{WX} = 10$ cm.

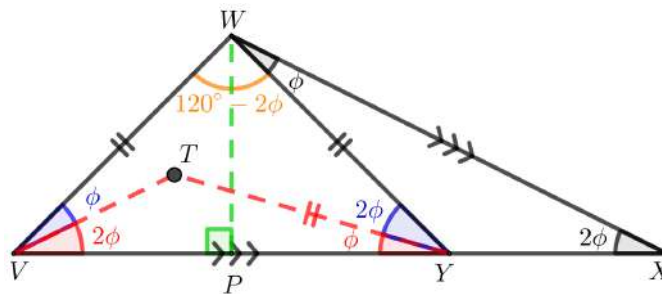
Figura 5.13 – Problema 2



Fonte: Arquivo Pessoal

Solução: Observe que o $\triangle VWY$ é isósceles de base \overline{VY} e $\widehat{WY} \equiv \widehat{VY} = 3\phi$, pois \widehat{VY} é ângulo externo de $\triangle XYW$. Como $\overline{WX} \equiv \overline{VY}$, pode-se buscar no interior do $\triangle VWY$ um quadrilátero côncavo especial. Construindo o $\triangle VTY \equiv \triangle XYW$, conforme a Figura 5.14 abaixo:

Figura 5.14 – Solução do Problema 2

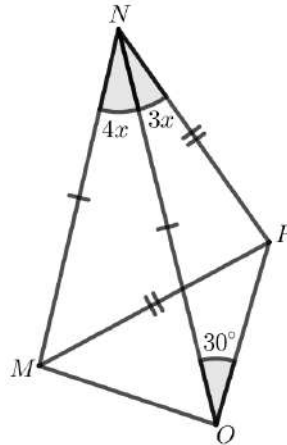


Fonte: Arquivo Pessoal

Percebemos que $VTYW$ é um quadrilátero côncavo especial do segundo caso, pois $\overline{VW} \equiv \overline{WY} \equiv \overline{YT}$ e $\widehat{WYT} = 2\widehat{WYT} = 2\phi$ em consequência $\widehat{YWV} = 120^\circ - 2\phi$. Diante disso, somando os ângulos internos de $\triangle VWX$, obtemos; $(120^\circ - 2\phi) + \phi + 2\phi + 3\phi = 180^\circ \Rightarrow 4\phi = 60^\circ \Rightarrow \phi = 15^\circ$. Desta forma, $\widehat{WY} = 45^\circ$ e $\widehat{XV} = 30^\circ$. Ao traçar a altura \overline{WP} do $\triangle WVY$ temos que $\triangle WPX$ é triângulo retângulo notável 30° e 60° , como $\overline{WX} = 10$ cm, obtemos $\overline{WP} = 5$ cm e $\overline{PX} = 5\sqrt{3}$ cm. Por outro lado, $\triangle VPW$ é triângulo retângulo notável 45° e 45° e como $\overline{WP} = 5$ cm, concluímos que $\overline{VW} = 5\sqrt{2}$ cm e $\overline{VP} = 5$ cm. Com isso, o perímetro do $\triangle VWX$ será: $\overline{VW} + \overline{WX} + \overline{XP} + \overline{PV} = 5\sqrt{2} + 10 + 5\sqrt{3} + 5 = [15 + 5(\sqrt{2} + \sqrt{3})]$ cm.

Problemas 3: No quadrilátero abaixo, temos que $\overline{MN} \equiv \overline{NO}$ e $\overline{MP} \equiv \overline{NP}$. Encontre o valor de $M\hat{O}N$.

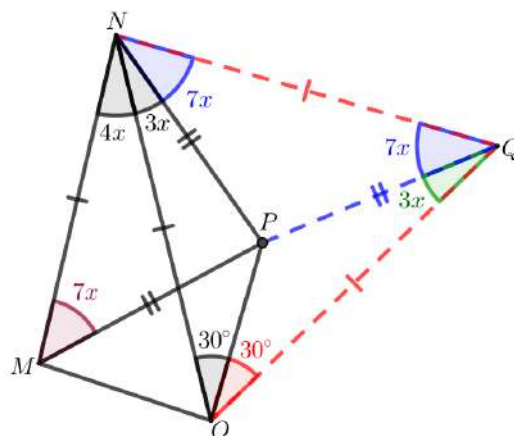
Figura 5.15 – Problema 3



Fonte: Arquivo Pessoal

Solução: Analisando o ΔNPO temos que $N\hat{O}P = 30^\circ$. Logo, tomando o ponto Q externo ao quadrilátero $MNPO$ conforme Figura 5.16, de modo que $\overline{QN} \equiv \overline{NO} \equiv \overline{OQ}$ obtemos o ΔNOQ equilátero.

Figura 5.16 – Solução do Problema 3



Fonte: Arquivo Pessoal

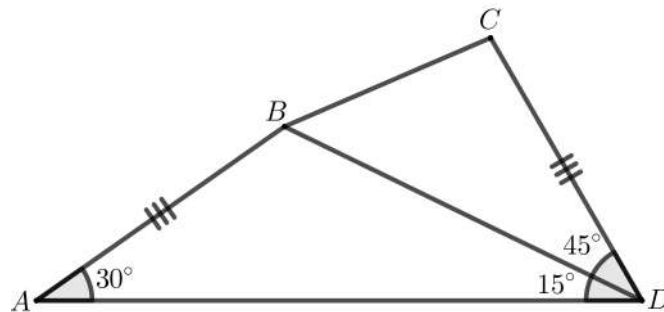
No ΔMNP isósceles de base \overline{MN} tem que $N\hat{M}P \equiv P\hat{N}M = 7x$. Ao traçar \overline{PQ} obtemos $\overline{PQ} \equiv \overline{NP}$ tendo como consequência $\Delta NPQ \equiv \Delta MNP$ pelo caso (LLL) e com isso, $P\hat{N}Q \equiv P\hat{Q}N \equiv N\hat{M}P = 7x$. No ΔNOQ equilátero temos $Q\hat{N}O = (3x + 7x) = 10x = 60^\circ$, ou seja, $x = 6^\circ$. Diante disso, $M\hat{N}O = 4x = 4 \cdot 6^\circ = 24^\circ$. No ΔMNO isósceles

de base \overline{MO} a soma dos seus ângulos internos será $24^\circ + \widehat{NOM} + \widehat{NMO} = 180^\circ$. Como $\widehat{NOM} \equiv \widehat{NMO}$ tem que $24^\circ + 2(\widehat{NOM}) = 180^\circ$, ou seja, $2(\widehat{NOM}) = 156^\circ \Rightarrow \widehat{NOM} = 78^\circ$.

Observação 15. Apesar dos pontos M, P e Q parecerem ser colineares devido à construção, eles não são, pois caso fossem implicaria que o ângulo \widehat{NPM} seria externo ao $\triangle NQP$ o que nos daria $\widehat{NPM} = 14x$ e soma dos ângulos internos do $\triangle NMP$ seria $7x + 3x + 4x + 14x = 180^\circ \Rightarrow x = \frac{45^\circ}{7} \approx 6^\circ 42'$.

Problema 4: Calcule a área do quadrilátero $ABCD$ abaixo, sabendo-se que $\overline{AB} \equiv \overline{CD}$ e $\overline{BC} = 6\sqrt{2}$ cm.

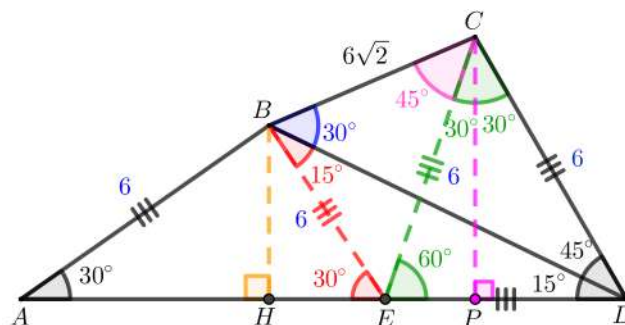
Figura 5.17 – Problema 4



Fonte: Arquivo Pessoal

Solução: Observando no $\triangle ABD$ que $\widehat{BAD} = 2 \cdot \widehat{ADB}$ e traçando \overline{BE} com $E \in \overline{AD}$ tal que $\overline{BE} \equiv \overline{AB} \Rightarrow \overline{BE} \equiv \overline{ED}$ o que nos diz que $\triangle ABE$ isósceles de base $\overline{AE} \Rightarrow \widehat{AEB} = 30^\circ$. No $\triangle BDE$ temos que $\widehat{AEB} = \widehat{EBD} + \widehat{EDB} \Rightarrow 30^\circ = \widehat{EBD} + 15^\circ \Rightarrow \widehat{EBD} = 15^\circ$ então

Figura 5.18 – Solução do Problema 4



Fonte: Arquivo Pessoal

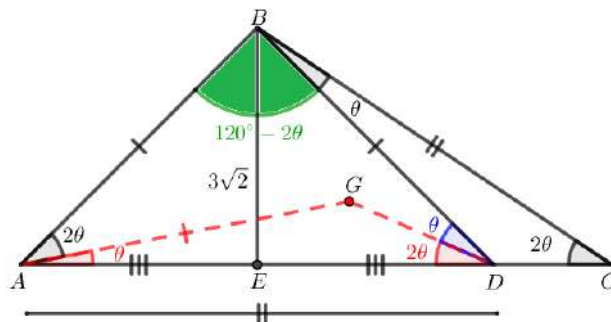
$\overline{BE} \equiv \overline{ED} \Rightarrow \widehat{ADC} = 60^\circ$ e $\overline{ED} \equiv \overline{CD}$ e agora traçando \overline{EC} temos que $\triangle CDE$ é equilátero. Note que $\widehat{BEC} = 90^\circ$ o que implica que o $\triangle BCE$ é retângulo isósceles de ângulos agudos de 45° com a hipotenusa $\overline{BC} = 6\sqrt{2}$ cm $\Rightarrow \overline{AB} \equiv \overline{BE} \equiv \overline{EC} \equiv \overline{CD} \equiv \overline{DE} = 6$ cm. Traçando no $\triangle ABE$ a altura \overline{BH} obtemos o $\triangle ABH$ retângulo notável 30° e 60° , onde $\overline{BH} = 3$ cm

e $\overline{AH} = 3\sqrt{3}$ cm. Perceba que o $\triangle ABE$ é isósceles de base \overline{AE} e \overline{BH} é a altura e mediana, daí temos que $\overline{AH} \equiv \overline{HE} = 3\sqrt{3}$ cm. Além disso, $\overline{AE} = \overline{AH} + \overline{HE} = 3\sqrt{3} + 3\sqrt{3} = 6\sqrt{3}$ cm. Traçando a altura \overline{CP} do $\triangle CDE$ temos que $\overline{CP} = 3\sqrt{3}$ cm. Como a área A de um triângulo pode ser calculada pela fórmula $A = \frac{b \cdot h}{2}$ onde b e h são respectivamente sua base e sua altura. Decompondo a área do quadrilátero $ABCD$ como sendo a soma das áreas dos triângulos ABE , CDE e BCE e denotando as suas respectivas áreas como sendo $[ABCD]$, $[ABE]$, $[CDE]$ e $[BCE]$ então $[ABCD] = [ABE] + [CDE] + [BCE] = \left(\frac{3 \cdot 6\sqrt{3}}{2}\right) + \left(\frac{6 \cdot 3\sqrt{3}}{2}\right) + \left(\frac{6 \cdot 6}{2}\right) = 9\sqrt{3} + 9\sqrt{3} + 18 = 18(1 + \sqrt{3}) \text{ cm}^2$.

Problema 5: Considere $\triangle ABC$ tal que os pontos $D, E \in \overline{AC}$ e a mediana \overline{BE} do $\triangle ABD$ mede $3\sqrt{2}$ cm, $\overline{AD} \equiv \overline{BC}$, $\widehat{BCA} = 2\widehat{CBD}$ e $\widehat{BAC} = 3\widehat{CBD}$. Calcule a área do $\triangle ABD$.

Solução: Esboçando o $\triangle ABC$ conforme o enunciado e analisando-o temos que $\overline{AD} \equiv \overline{BC}$. Além disso, $\widehat{ADB} = 3\theta$ pois é externo ao $\triangle BCD$. Tomando o ponto G interno ao $\triangle ABD$ tal que $\overline{AG} \equiv \overline{BD}$ e $\overline{GD} \equiv \overline{DC}$, o que implica que $\triangle ADG \equiv \triangle BCD$ pelo caso (LLL), logo $\widehat{GAD} = \theta$ e $\widehat{GDA} = 2\theta$.

Figura 5.19 – Solução do Problema 5



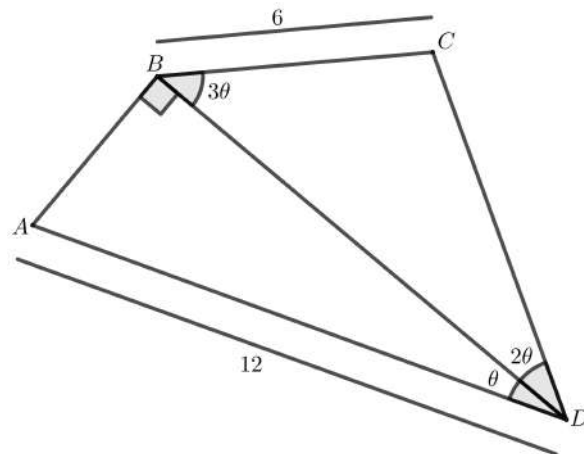
Fonte: Arquivo Pessoal

Observando o quadrilátero $ABDG$ resta-se configurado o segundo caso de quadrilátero côncavo especial. Logo, $\widehat{ABD} = 120^\circ - 2\theta$, assim, a soma dos ângulos internos do $\triangle ABC$ é dada por $3\theta + 2\theta + 120^\circ - 2\theta + \theta = 180^\circ \Rightarrow 4\theta = 60^\circ \Rightarrow \theta = 15^\circ$. Nota-se no $\triangle ABD$ que os $\triangle ABE \equiv \triangle BDE$ pelo caso (LLL) e $\widehat{AEB} \equiv \widehat{DEB} = 90^\circ \Rightarrow \overline{AE} \equiv \overline{DE} \equiv \overline{BE} = 3\sqrt{2}$ cm, com isso, $\overline{AD} = 6\sqrt{2}$ cm. Então a área desejada será dada por:

$$[ABD] = \frac{\overline{AD} \cdot \overline{BE}}{2} = \frac{6\sqrt{2} \cdot 3\sqrt{2}}{2} = \frac{36}{2} = 18 \text{ cm}^2$$

Problema 6: Encontre o valor da área do quadrilátero $ABCD$ abaixo, sabendo que $\overline{AD} = 2\overline{BC} = 12$ cm.

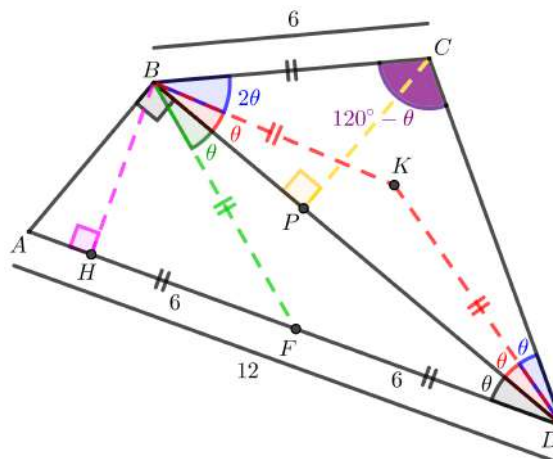
Figura 5.20 – Problema 6



Fonte: Arquivo Pessoal

Solução: Analisando $\triangle ABD$ e traçando \overline{BF} tal que F seja o ponto médio de \overline{AD} . Como \overline{BF} é a mediana relativa à hipotenusa do $\triangle ABD$ retângulo ocorre que $\overline{AF} \equiv \overline{DF} \equiv \overline{BF} = 6$ cm, além disso, $\triangle BFD$ é isósceles de base \overline{BD} e $F\hat{B}D \equiv F\hat{D}B = \theta$.

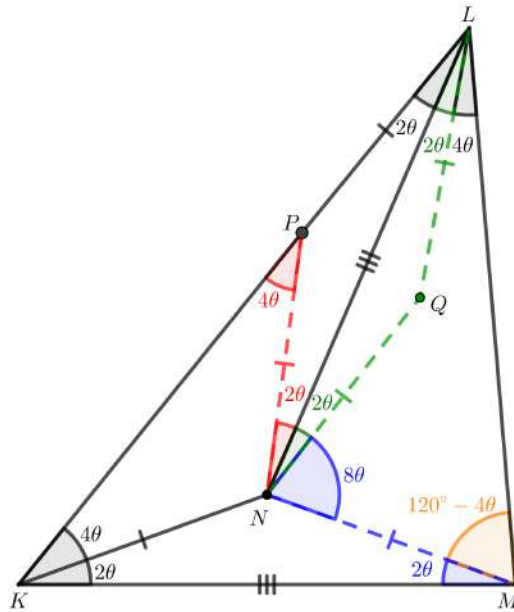
Figura 5.21 – Solução do Problema 6



Fonte: Arquivo Pessoal

Diante disso, tomando o ponto K interior ao $\triangle BCD$ tal que $\overline{KB} \equiv \overline{KD} \equiv \overline{BF} \Rightarrow \triangle BKH \equiv \triangle BKF$ pelo caso (LLL) e $K\hat{B}D \equiv K\hat{D}B = \theta$. Como consequência dessa construção notamos a configuração do primeiro caso de quadrilátero côncavo especial, logo $B\hat{C}D = 120^\circ - \theta$. Desta forma, no $\triangle BCD$ temos que, $3\theta + 2\theta + 120^\circ - \theta = 180^\circ \Rightarrow 4\theta = 60^\circ \Rightarrow \theta = 15^\circ$. Com isso, nota-se que o $\triangle ABD$ é um retângulo notável com ângulos de 15° e 75° e por propriedade, sabemos que a altura $\overline{BH} = \frac{\overline{AD}}{4} = \frac{12}{4} = 3$ cm. Além disso no $\triangle BCD$ traçando \overline{CP} obtemos que o $\triangle BCP$ retângulo notável com ângulos agudos

Figura 5.23 – Solução do Problema 7

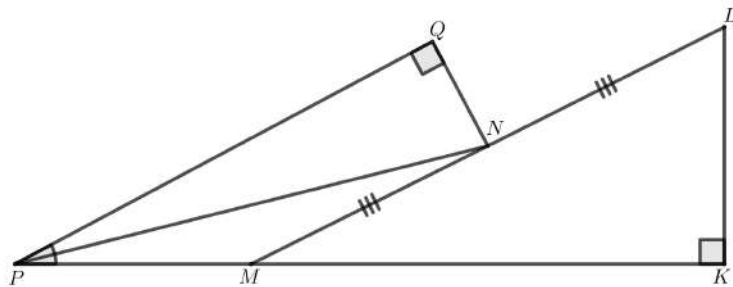


Fonte: Arquivo Pessoal

Analisando a figura acima, temos que $\widehat{NLM} = 6\theta$ e $\widehat{LNM} = 10\theta$ e refletindo o $\triangle NPL$ em relação ao segmento \overline{LN} no interior do $\triangle NLM$ surge o $\triangle NQL \equiv \triangle NPL \Rightarrow \widehat{NLQ} \equiv \widehat{LNQ} = 2\theta$. Diante disso, como consequência, o quadrilátero $LQNM$ é côncavo especial do primeiro caso, sendo assim, $\widehat{LMN} = 120^\circ - 4\theta$. No $\triangle KLM$ a soma dos ângulos internos será: $2\theta + 4\theta + 2\theta + 6\theta + 2\theta + 120^\circ - 4\theta = 180^\circ \Rightarrow 12\theta = 60^\circ \Rightarrow \theta = 5^\circ$. Desta forma, o $\widehat{LKM} = 6\theta = 6 \cdot (5^\circ) = 30^\circ$.

Problema 8: Na figura abaixo, sabendo que $\overline{KL} = 20$ cm, \overline{NP} bissetriz do $\widehat{MPQ} = 28^\circ$ e N o ponto médio de \overline{ML} . Calcule o perímetro do $\triangle NPQ$.

Figura 5.24 – Problema 8

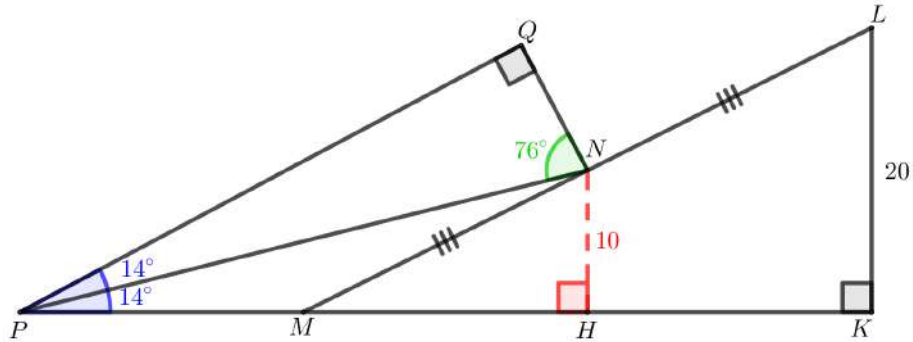


Fonte: Arquivo Pessoal

Solução: Observando que \overline{NP} é bissetriz de \widehat{MPQ} , temos que $\widehat{NPQ} \equiv \widehat{NPM} = 14^\circ$. Além

disso, traçando \overline{NH} paralela à \overline{KL} , obtemos que $\triangle NPQ \equiv \triangle NPH$ pelo caso (hipotenusa - Ângulo), logo $\overline{NH} \equiv \overline{NQ}$.

Figura 5.25 – Solução do Problema 8

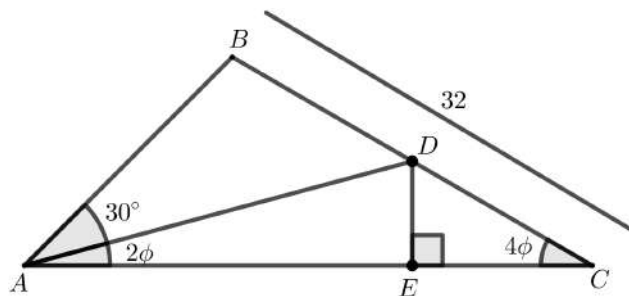


Fonte: Arquivo Pessoal

Analisando $\triangle KLM$, nota-se que \overline{NH} é base média do triângulo KLM e portanto, $\overline{NH} = \frac{LK}{2} \Rightarrow \overline{NH} = \frac{20}{2} = 10$ cm. Por congruência ocorre $\overline{NQ} \equiv \overline{NH} = 10$ cm. Note que o $\triangle NPQ$ é retângulo aproximado com ângulos de 14° e 76° , daí, resulta que $\overline{NQ} = 10$ cm, $\overline{PQ} = 40$ cm e $\overline{NP} = 10\sqrt{17}$ cm. Desta forma, o perímetro desejado é $\overline{NQ} + \overline{PQ} + \overline{NP} = 10 + 40 + 10\sqrt{17} = (50 + 10\sqrt{17})$ cm.

Problema 9: Encontre o valor de \overline{DE} , sabendo que D é ponto médio $\overline{BC} = 32$ cm e $D\hat{C}A = 2D\hat{A}C = 4\phi$.

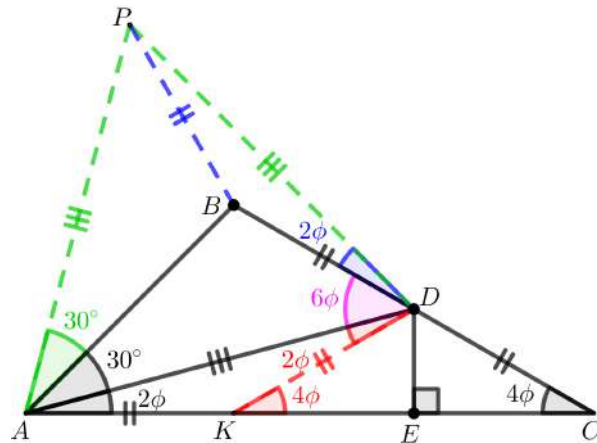
Figura 5.26 – Problema 9



Fonte: Arquivo Pessoal

Solução: Pelo enunciado da questão temos que $D\hat{C}A = 2D\hat{A}C$. Diante disso, traçando a ceviana interna \overline{DK} , onde $K \in \overline{AC}$ tal que $\overline{DK} \equiv \overline{DC}$, ocorre que o $\triangle DCK$ é isósceles, logo $D\hat{K}C \equiv D\hat{C}K = 4\phi$. Observando $D\hat{K}C = 4\phi$ externo ao $\triangle ADK \Rightarrow A\hat{D}K = 2\phi$, obtemos o $\triangle ADK$ isósceles. Além disso, $A\hat{D}B = 6\phi$, pois é externo ao $\triangle ACD$.

Figura 5.27 – Solução do Problema 9

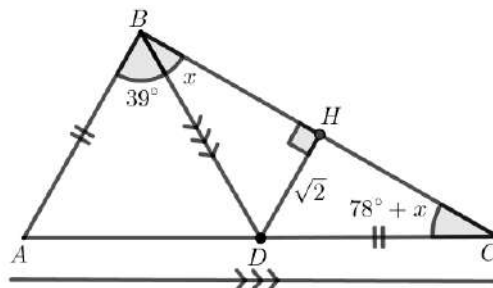


Fonte: Arquivo Pessoal

Verificando que $\widehat{BAD} = 30^\circ$, pode-se tomar o ponto P externo ao $\triangle ABC$ tal que $\overline{AP} \equiv \overline{AD} \equiv \overline{DP}$, resulta em $\triangle ADP$ equilátero. Ao traçar \overline{PB} temos que $\overline{PB} \equiv \overline{BD}$, pois o ponto B pertence à mediatriz \overline{AP} do $\triangle ADP$. Analisando os triângulos $\triangle ADK$ e $\triangle BDP$, observamos a congruência pelo caso (LLL). Assim, $\widehat{BDP} \equiv \widehat{ADK} = 2\phi$. Como $\triangle ADP$ é equilátero, tem que $\widehat{ADP} = 6\phi + 2\phi = 60^\circ \Rightarrow 8\phi = 60^\circ \Rightarrow \phi = \frac{15^\circ}{2}$. Nota-se no $\triangle CDE$ que $\widehat{ECD} = 4\phi = 4 \cdot \frac{15^\circ}{2} = 30^\circ$, sendo assim, um triângulo retângulo notável 30° e 60° com $\overline{DC} = \frac{32}{2} = 16$ cm. Com isso, obtemos $\overline{DE} = \frac{\overline{DC}}{2} = \frac{16}{2} = 8$ cm.

Problema 10: No $\triangle ABC$ abaixo, temos que $\widehat{BHD} = 90^\circ$, $\overline{AB} \equiv \overline{CD}$, $\overline{BD} \equiv \overline{AC}$ e $\overline{DH} = \sqrt{2}$ cm. Determine o valor da medida do segmento \overline{AC} .

Figura 5.28 – Problema 10

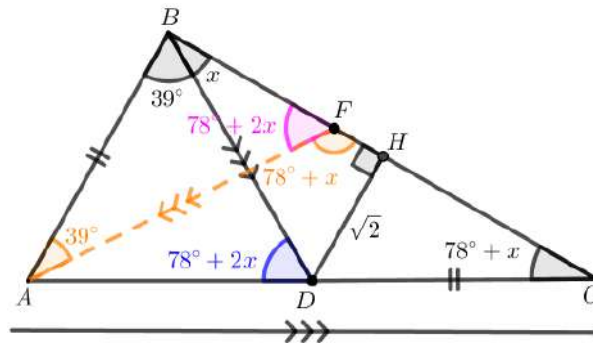


Fonte: Arquivo Pessoal

Solução: Pelo enunciado da questão sabemos que $\overline{AB} \equiv \overline{CD}$ e $\overline{BD} \equiv \overline{AC}$, além disso, $\widehat{ACB} = 2(\widehat{ABD}) + x$. Então, traçando $\overline{AF} \equiv \overline{AC}$ tal que $F \in \overline{BC}$ o que nos diz que o

$\triangle CAF$ isósceles de base \overline{FC} e $\widehat{AFC} = 78^\circ + x$

Figura 5.29 – Solução do Problema 10



Fonte: Arquivo Pessoal

Sendo $\widehat{AFC} = 78^\circ + x$ externo ao $\triangle ABF$, daí $\widehat{BAF} = 39^\circ$. Analisando $\triangle ABD$ e $\triangle BAF$ observamos que $\triangle ABD \equiv \triangle BAF$ pelo caso (LAL), logo $\widehat{AFB} \equiv \widehat{ADB}$. Nota-se que \widehat{ADB} é externo ao $\triangle CBD$, assim $\widehat{ADB} = 78^\circ + 2x$. Por congruência $\widehat{AFB} = 78^\circ + 2x$. Somando os ângulos internos do $\triangle ABF$ temos que $39^\circ + 39^\circ + x + 78^\circ + 2x = 180^\circ \Rightarrow 156^\circ + 3x = 180^\circ \Rightarrow 3x = 24^\circ \Rightarrow x = 8^\circ$. Nota-se então que o $\triangle BDH$ é retângulo notável aproximado com ângulos de 8° e 82° . Desta forma, $\overline{BD} = \sqrt{2} \cdot 5\sqrt{2} \Rightarrow \overline{BD} = 10$ cm. Como por hipótese inicial $\overline{BD} \equiv \overline{AC} \Rightarrow \overline{AC} = 10$ cm.

6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

No primeiro momento da pesquisa, constatou-se no ensino da geometria plana na perspectiva do currículo das escolas brasileiras, diversas lacunas, as quais dificultavam na resolução de alguns problemas, sendo que algumas delas poderiam ser sanadas com o ensinamento de uma abordagem teórica mais apurada e aprofundada, a exemplo da teoria de traços auxiliares e quadriláteros côncavos especiais. Neste sentido, fez-se necessário o estudo sobre a teoria de traços auxiliares e quadriláteros côncavos especiais na resolução de problemas de geometria plana.

O presente trabalho teve como objetivo, abordar a teoria de traços auxiliares e quadriláteros côncavos especiais, voltando-se para diversas aplicações desse conhecimento em resolução de problemas de geometria plana. Diante disso, constata-se que o objetivo foi inicialmente atingido, pois abordamos e enfatizamos a construção de traços auxiliares e quadriláteros côncavos especiais sob a perspectiva de alguns autores encontrados na literatura matemática peruana, reconhecidos no âmbito acadêmico por suas contribuições no que tange aos traços auxiliares na área da Geometria Plana.

Visto que a construção de traços auxiliares e quadriláteros côncavos em figuras planas constitui um desafio para muitos educadores, na referida pesquisa, evidenciamos e discutimos critérios para construção desses traços em triângulos e quadriláteros, enfatizamos as potencialidades básicas dos triângulos isósceles, equiláteros e congruência de triângulos, potencialidades essas capazes de possibilitar aos educadores e alunos a percepção do melhor traço ou traços a serem aplicados em alguns problemas.

Contudo, mesmo diante da ampla pesquisa realizada sobre o objeto de estudo, não foi possível esgotar toda a literatura existente a seu respeito. Em consequência disso, pensando na sua importância e pouca explanação até então, evidencia-se diversas outras possibilidades para novas pesquisas, seja na busca por novos critérios de traços e aplicações em outras figuras ou na criação de novos materiais didáticos sobre traços.

Dessa forma, espera-se que o presente estudo venha contribuir nas práticas pedagógicas de docentes e na aprendizagem dos discentes, ajudando-os na construção de um ensino de geometria plana cada vez mais interessante, desafiador e potencializador do pensamento crítico geométrico.

REFERÊNCIAS

- BARBOSA, J. L. M. **Geometria Euclidiana Plana**. 11°. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2012.
- BARCENA, J. L. M. **Construcciones en Triángulos**. 1°. ed. Lima, Peru: Impecus, 2004.
- BASTIDAS, J. O. **Geometría 3 Congruencia de Triángulos**. Lima, Peru: Cuzcano, 2010.
- BASTIDAS, J. O. **Geometría 2 Triángulos**. 1°. ed. Lima, Peru: Cuzcano, 2017.
- BOYER, C. B. **História da Matemática**. 1°. ed. Tradução: Elza F. Gomide, São Paulo: Edgar Blücher, 1974.
- DANTE, L. R. **Matemática: Contextos e Aplicações**. 1°. ed. São Paulo: Ática, 2013.
- DOLCE O. POMPEO, J. N. **Fundamentos da Matemática Elementar**. 9°. ed. São Paulo: Atual, 2013.
- EDITORES, A. F. D. I. E. **Geometría: Una Visión de La Planimetría**. 2°. ed. Lima, Peru: Lumbreras, 2012.
- EVES, H. **Introdução à história da matemática**. 5°. ed. Campinas, SP: Editora da UNICAMP, 2011.
- MOL, R. S. **Introdução à história da matemática**. Belo Horizonte, MG: CAED-UFMG, 2013.
- MORGADO A.C.; WAGNER, E. J. M. **Geometria I**. 5°. ed. Rio de Janeiro: Francisco Alves, 1990.
- MORGADO A.C.; WAGNER, E. J. M. **Geometria II**. Edição original. Rio de Janeiro: F.C & Z Livros, 2002.
- REES, A. **The Cyclopaedia; or, Universal Dictionary of Arts, Sciences, and Literature**. London: V. 1. Longman, Hurst, Rees, Orme Brown, 1819.

Documento Digitalizado Restrito

Entrega do TCC Versão Final

Assunto: Entrega do TCC Versão Final
Assinado por: Francisco Nonato
Tipo do Documento: Relatório
Situação: Finalizado
Nível de Acesso: Restrito
Hipótese Legal: Informação Pessoal (Art. 31 da Lei no 12.527/2011)
Tipo do Conferência: Cópia Simples

Documento assinado eletronicamente por:

- Francisco José Nonato, ALUNO (201712020028) DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA - CAJAZEIRAS, em 30/11/2021 09:28:46.

Este documento foi armazenado no SUAP em 30/11/2021. Para comprovar sua integridade, faça a leitura do QRCode ao lado ou acesse <https://suap.ifpb.edu.br/verificar-documento-externo/> e forneça os dados abaixo:

Código Verificador: 385349

Código de Autenticação: ac48b209ff

