INSTITUTO FEDERAL
Paraíba
Campus Cajazeiras

INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA DA PARAÍBA
CURSO SUPERIOR DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

DÉLIO DE ARRUDA ALMEIDA

MODELAGEM MATEMÁTICA E EQUAÇÕES DIFERENCIAIS: aplicações para o Ensino Médio

CAJAZEIRAS - PB
2021

DÉLIO DE ARRUDA ALMEIDA

MODELAGEM MATEMÁTICA E EQUAÇÕES DIFERENCIAIS: aplicações para o Ensino Médio

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Curso Superior de Licenciatura em Matemática do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia da Paraíba (IFPB), como requisito parcial para obtenção do título de Licenciado em Matemática.

Orientador: Prof. Me. Geraldo Herbetet de Lacerda

IFPB
Campus Cajazeiras
Coordenação de Biblioteca
Catalogação na fonte: Daniel Andrade CRB-15/593

A447m

Almeida, Délio de Arruda

Modelagem matemática e equações diferenciais: aplicações para o ensino médio / Délio de Arruda Almeida; orientador Geraldo Herbetet de Lacerda.- 2021.
55 f.: il.

Orientador: Geraldo Herbetet de Lacerda.
TCC (Licenciatura em Matemática) – Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia da Paraíba, Cajazeiras, 2021.

1. Equações diferenciais ordinárias 2. Modelagem Matemática 3. Metodologias de ensino 4. Formação de professore 5. Aprendizagem efetiva I. Título.

517.9(0.067)

DÉLIO DE ARRUDA ALMEIDA

MODELAGEM MATEMÁTICA E EQUAÇÕES DIFERENCIAIS: aplicações para o Ensino Médio

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Curso Superior de Licenciatura em Matemática do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia da Paraíba (IFPB), como requisito parcial para obtenção do título de Licenciado em Matemática.

Orientador: Prof. Me. Geraldo Herbetet de Lacerda

Aprovado em: 30/ 11/ 2021

BANCA EXAMINADORA:

Geraldo H. Lacerda

Prof. Me. Geraldo Herbetet de Lacerda
Instituto Federal da Paraíba

Francisco Aureliano Vidal

Prof. Me. Francisco Aureliano Vidal
Instituto Federal da Paraíba

José Doval Nunes Martins

Prof. Me. José Doval Nunes Martins
Instituto Federal da Paraíba

Dedico este trabalho a minha mãe Maria Anildete Neves de Arruda Almeida (in memorian), que sempre cobrou dos seus filhos um curso superior, independente da área que fosse.

AGRADECIMENTOS

A princípio e por princípios, agradeço a Deus pela dádiva da vida, pela graça da capacitação e aptidão que me fizeram chegar até aqui, por iluminar meus caminhos me permitindo superar todos os desafios impostos pela vida, por ter feito o homem um ser racional e lhe permitir conceber a Matemática.

Agradeço a minha esposa, Iarla Gabrielle Soares Lúcio, pelos auxílios a mim prestados durante as pesquisas, pela paciência nos momentos de estresse, pelos cafés e pela compreensão de minha ausência em momentos familiares.

Agradeço aos meus companheiros de serviço, Ferreira, André, Cajú, Rivonaldo e J Leite, que muitas vezes me substituíram para que eu conseguisse concluir este trabalho.

Agradeço aos meus colegas de curso, Amabel, Dorgivan, Josenildo, Márcio e demais colegas pelos conselhos e união durante os desafios que o curso de Licenciatura em Matemática nos propôs.

Agradeço aos meus professores, cada um com sua particularidade, contribuindo para minha formação, em especial ao Prof. Me. Francisco Aureliano Vidal, coordenador do curso de Licenciatura em Matemática, por sua preocupação com o nível do curso e suas orientações em assuntos pertinentes ao curso e extracurriculares que abrilhantam a minha formação.

Agradeço ao meu orientador, Prof. Me. Geraldo Herbetet de Lacerda, um conterrâneo ao qual devoto todo o meu apreço por ser esta pessoa dedicada, capacitada e humilde; responsável por me apresentar a Modelagem Matemática desde o início dos estágios e por sugerir a ideia básica deste trabalho. Agradeço-lhe também por toda sua paciência, benevolência e compreensão, por ter sido, durante todo o curso e mais ainda nesta orientação, a mão amiga que me auxiliou nos momentos mais difíceis. Obrigado! Prof. Geraldo.

Finalmente, agradeço a todos que compõem o IFPB, campus Cajazeiras, por desempenharem um excelente papel, mantendo a integralidade institucional e possibilitando a realização de sonhos.

Faça as coisas o mais simples que puder, porém não as mais simples
Albert Einstein

RESUMO

A Modelagem Matemática vem se constituindo uma das mais importantes tendências metodológicas da atualidade, podendo ser aprimorada por outras tendências e potencializada pelas Equações Diferenciais Ordinárias e suas aplicações. Neste contexto, este trabalho de cunho teórico tem o propósito de apresentar sugestões e aplicações de Modelagem Matemática com Equações Diferenciais Ordinárias para o Ensino Médio, aqui definimos a importância de um ensino de Matemática voltado para a solução de problemas cotidianos, com a utilização da Modelagem Matemática e Equações Diferenciais Ordinárias como metodologia de ensino, onde o intuito maior é valorizar e possibilitar uma melhor conexão entre Matemática de sala de aula e os anseios sociais. Entretanto, o sistema impõe limitações refletidas na prática docente dos professores de Matemática e nessa perspectiva, esta literatura trabalha articulações entre as etapas de Modelagem Matemática que são aprimoradas pela Equações Diferenciais para que estas atinjam as perspectivas do sistema e assim contribuam para a formação de professores e para aprendizagem efetiva de conceitos matemáticos por parte dos alunos, tornado estes cidadãos autônomos e críticos.

Palavras-chave: Modelagem Matemática. Equações Diferenciais Ordinárias. Metodologia de Ensino. Formação de Professores. Aprendizagem Efetiva.

ABSTRACT

Mathematical Modeling has become one of the most important methodological trends today, which can be improved by other trends and enhanced by Ordinary Differential Equations and their applications. In this context, this theoretical work aims to present suggestions and applications of Mathematical Modeling with Ordinary Differential Equations for High School, here we define the importance of teaching Mathematics aimed at solving everyday problems, with the use of Modeling Mathematics and Ordinary Differential Equations as a teaching methodology, where the main aim is to enhance and enable a better connection between classroom mathematics and social concerns. However, the system imposes limitations reflected in the teaching practice of Mathematics teachers and in this perspective, this literature works articulations between the stages of Mathematical Modeling that are improved by Differential Equations so that they reach the perspectives of the system and thus contribute to teacher education and for the effective learning of mathematical concepts by the students, making these citizens autonomous and critical.

Keywords: Mathematical Modeling. Ordinary Differential Equations. Teaching Methodology. Teacher training. Effective Learning.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1 – Maquete 15
Figura 2 – Telhado 17
Figura 3 – Vão da casa 18
Figura 4 – Inclinação 18
Figura 5 – Flow 24
Figura 6 – Gráfico da primitiva e sua derivada 26
Figura 7 – Derivada de e^{5x} 27
Figura 8 – Secante com pontos distantes 29
Figura 9 – Secante com pontos próximos 29
Figura 10 – Reta tangente 30
Figura 11 – Taxa de variação 30
Figura 12 – Área retangular 31
Figura 13 – Distanciamento das raízes 32
Figura 14 – Fixação do eixo de simetria 32
Figura 15 – Translação vertical 34
Figura 16 – Translações 34
Figura 17 – Translação Horizontal 35
Figura 18 – Cartas de Baralho 47
Figura 19 – Quantidade de casos por mês 48
Figura 20 – Casos acumulados 49
Figura 21 – Casos de Covid-19 pelo modelo de Malthus 50
Figura 22 – Casos de Covid-19 pelo modelo de SIR 51

SUMÁRIO

	Introdução	11
1	METODOLOGIA	13
1.1	Justificativa de escolha do tema e objetivos da pesquisa	13
2	MODELAGEM MATEMÁTICA	15
2.1	Modelagem Matemática como Tendência Metodológica	19
2.1.1	Planejamentos	20
2.1.2	Roteiro de um plano de curso baseado em Modelagem Matemática	21
2.1.3	Roteiro de um plano de Ensino baseado em Modelagem Matemática	23
2.1.3.1	Avaliação	25
2.2	Modelagem Matemática com EDO	26
2.3	Aplicações de EDO no processo de Modelagem Matemática no Ensino Médio	28
2.3.1	Funções Quadráticas	31
2.3.2	Capitalização de Juros	36
2.3.3	Dinâmica Populacional	37
2.3.4	Decaimento radioativo	38
2.3.5	Aquecimento/resfriamento	40
2.3.6	Função horária da posição	42
3	ANÁLISE E DISCUSSÃO DOS RESULTADOS	45
3.1	Modelagem Matemática Crítica	46
4	CONSIDERAÇÕES FINAIS	52
	REFERÊNCIAS	53

INTRODUÇÃO

O presente trabalho é uma pesquisa bibliográfica que visa identificar as contribuições de atividades de Modelagem Matemática com Equações Diferenciais em problemas de aplicações referentes ao Ensino Médio. Para tanto, a fundamentação teórica apoia-se em estudos sobre diversas concepções de Modelagem Matemática, sobretudo a abordagem defendida por Bassanezzi (2002) e concebida na perspectiva educacional por Biembengut (2016).

A pesquisa foi realizada sob uma abordagem qualitativa e os dados analisados foram obtidos por meio de livros físicos e virtuais, artigos, sites governamentais entre outros. O produto final, resultado deste trabalho, é um material didático direcionado a professores da Educação Básica e de Equações Diferenciais que desenvolvem atividades de Modelagem Matemática envolvendo Equações Diferenciais Ordinárias.

Começamos um primeiro momento, refletido no segundo capítulo, com a Modelagem como necessidade humana, como parte do processo de sobrevivência, pois somos seres extremamente adaptáveis e esta Modelagem faz parte deste processo de adaptação. Demonstramos aqui, que a prática da Modelagem está arraigada ao nosso cotidiano se tornando um processo cognitivo, abstraído das teorias, o que não nos permite vislumbrar que modelamos até nos mais simples atos, como quando alteramos as proporções de uma receita, por exemplo.

Na continuidade do segundo capítulo demonstramos que a Modelagem não é exclusivamente Matemática, mas que no intuito de aprimorar o processo foi inserido a esta os rigores matemáticos e esta passa a ser entendida como Modelagem Matemática. O intuito deste capítulo é demonstrar que a Modelagem Matemática vem de uma base simples que pode ser usada com um facilitador no processo de ensino aprendizagem, não para fazermos o mais fácil, mas para fazer de forma simples o que parece ser complexo e é por isso que introduzimos, diante do trabalho de Maria Salett Biembengut (1997), o conceito do "faz casinha", transcrito em um dos seus trabalhos, trabalhado aqui na forma de maquetes para identificar os pensamentos matemáticos existentes nas coisas mais simples, pensamentos estes repletos de possibilidades a serem aprimoradas diante de problemas complexos.

Cientes de que o curso de Licenciatura em Matemática está estritamente voltado para a formação, ainda que inicial, do professor e que esta se dá em vários aspectos, seja pela prática pedagógica, pela educação matemática em si ou pela didática, onde todos os saberes estão voltados à prática da docência, destacamos um estudo mais aprofundado da Modelagem Matemática como alternativa pedagógica viável, com planejamentos articulados para vislumbrar o cotidiano de forma idiossincrática, promovendo uma matemática modeladora, capaz de subsidiar o indivíduo e torna-lo um cidadão autônomo e crítico.

Um segundo momento deste trabalho se dá a partir do capítulo três, onde explanamos as Equações Diferenciais Ordinárias (EDOs) como subsidiadoras da Modelagem Matemática no processo de ensino e aprendizagem no Ensino Médio, estando estas como promotoras do conhecimento e facilitadoras do processo, tanto no desenvolvimento quando na validação, o que traz agilidade e sana parcialmente a problemática do cronograma em relação a Modelagem Matemática.

Neste trabalho trouxemos as EDOs com uma visão voltada para aplicações no Ensino Médio, mas salientamos, ao leitor, a necessidade de um conhecimento prévio sobre limites, derivadas e Equações Diferenciais a fim de uma melhor compreensão. Ainda nesta ótica demonstramos que as EDOs podem e são usadas em várias fases do ensino, ainda que de forma velada e pronta, mas que o conhecimento das mesmas pode aprimorar os processos de ensino-aprendizagem e Modelagem Matemática. Na continuidade, diante da proposta de abrirmos um leque de aplicações com o intuito de facilitar o processo de Modelagem, trouxemos aqui algumas aplicações de EDOs para o Ensino Médio.

Concluímos o trabalho com a Modelagem Crítica, não só como resultado do processo, mas como capacitação do indivíduo que passará a analisar as informações com uma ótica mais aguçada, capacitado a identificar condicionantes que alteram o resultado e que podem ser alterados para se obter determinados resultados. A Modelagem Crítica será o nosso ápice do processo e o objetivo final deste trabalho.

1 METODOLOGIA

Diante as potencializações impostas pela Modelagem Matemática ao processo de ensino-aprendizagem e a percepção do quanto as Equações Diferenciais Ordinárias podem facilitar, agilizar e aprimorar o entendimento proporcionado pela Modelagem, ainda cientes da escassez de literaturas que remetessem esses qualificadores ao educação básica, decidimos estender estes conceitos, através de pesquisas bibliográficas ao Ensino Médio.

O presente trabalho está dividido em quatro capítulos, o primeiro (Introdução) onde referenciamos o trabalho por inteiro e traçamos o percurso do mesmo fazendo breves transcrições do que está referenciado em cada capítulo. O segundo capítulo, baseado em literaturas sobre Modelagem Matemática e Equações Diferenciais Ordinárias, traz as definições desta enquanto metodologia científica e como tendência metodológica, assim como explanações sobre Modelagem com Equações Diferencias Ordinários e algumas aplicações. O terceiro capítulo traz as discussões impostas pelos capítulos anteriores e conceitua a Modelagem Matemática Crítica, por fim concluímos com um quarto capítulo transcrevendo os resultados encontrados diante do trabalho.

O tipo de pesquisa foi definida pelos objetivos, sendo escolhida a que por definições apresentou os melhores resultados, sendo assim, escolhemos a pesquisa qualitativa, de acordo com as configurações destas pesquisas apresentada por Bogdan e Biklen (1982).

> A pesquisa qualitativa tem o ambiente natural como sua fonte direta de dados e o pesquisador como seu principal instrumento. [...] Os dados coletados são predominantemente descritivos. [...] A preocupação com o processo é muito maior do que com o produto. [...] O "significado"que as pessoas dão às coisas e à sua vida são focos de atenção especial pelo pesquisador. [...] A análise dos dados tende a seguir um processo indutivo.(BOGDAN; BIKLEN, 1982 apud LÜDKE; ANDRÉ, 1986, p. 11 - 13)

Ficou perceptível, em razão do que delimitamos e do referencial, que a pesquisa de âmbito qualitativo seria a mais perspicaz, atendendo a todos os anseios, pois suas características configuram o tipo de investigação inerente ao nosso trabalho.

1.1 JUSTIFICATIVA DE ESCOLHA DO TEMA E OBJETIVOS DA PESQUISA

Diante da preocupação com o cumprimento dos cronogramas estabelecidos pelo sistema educacional, uma preocupação inerente aos professores, e cientes de que a Modelagem Matemática, enquanto tendência metodológica, principalmente durante a sua implantação para turmas e/ou professores que não tem o hábito de modelar, necessita de tempo adicional é que resolvemos trabalhar aqui a Modelagem Matemática juntamente com as Equações Diferenciais Ordinárias como aprimoradoras e facilitadoras do processo de Modelagem Matemática no Ensino Médio.

Observou-se na literatura clássica que é dada pouca ênfase ao estudo da Modelagem de equações diferencias voltada para problemas do Ensino Médio. A partir daí, e com o intuito de mostrar a importância desse conteúdo para formação de professores no curso de Licenciatura em Matemática, é que essa ação se realizou e tem por base uma pesquisa bibliográfica, sendo em grande parte de cunho teórico, cujo objetivo central é ampliar e analisar as aplicações de Modelagem Matemática e Equações Diferenciais Ordinárias no Ensino Médio.

Como objetivos específicos de nossa pesquisa, propomo-nos a:

- Apresentar potencialidades e limitações no uso de Modelagem Matemática;
- Conceituar Equações Diferenciais Ordinárias com ideias básicas de aplicações;
- Apresentar a Modelagem Matemática com o uso de Equações Diferenciais Ordinárias no Ensino Médio;
- Identificar e descrever estratégias de ensino e aprendizagem com o uso de Modelagem Matemática e descrever como estas são aprimoradas com o uso de Equações Diferencias Ordinárias;
- Promover e instigar a Modelagem Matemática Crítica como ápice no processo de ensino-aprendizagem.

Diante destes objetivos, começamos configurando a Modelagem Matemática como método científico de conhecimento, como uma prática milenar que vem sendo aperfeiçoada com o tempo e o uso de novas tecnologias.

No transcorrer do trabalho passamos a analisar a Modelagem como tendência metodológica, demonstrando como o que já foi definido antes pode ser trabalhado em sala de aula, suas aplicações em um processo facilitador da aprendizagem. Em sequência definimos as configurações das Equações Diferenciais Ordinárias, abordando conceitos de caráter geral e detalhando os pontos específicos que iremos abordar durante o trabalho. Após as explanações dos conceitos de base, Modelagem Matemática e Equações Diferenciais Ordinárias, demonstraremos que estes conceitos podem se complementar ao ponto de aprimorar o processo de Modelagem e que a demonstração e/ou entendimento dessas aplicações vão aprimorar o processo educacional no Ensino Médio.

2 MODELAGEM MATEMÁTICA

A Modelagem, partindo da etimologia da palavra, é a ação de criar modelos. Se observarmos o cunho histórico, a Modelagem faz parte do processo de evolução humana, advinda da necessidade de se resolver problemas práticos de determinada época, todas as civilizações modelaram e modelam, ainda que com algumas características peculiares a cultura local, Etnomodelagem. Diante dessas observações, percebemos que a Modelagem não é peculiar a matemática, sendo empregada em diversos campos de estudos como os da física, química, biologia, geografia, engenharias e outros.

> Modelagem Matemática é a arte de expressar por intermédio de linguagem matemática situações problemas de nosso meio. Tem estado presente desde os tempos mais primitivos. Isto é, a Modelagem é tão antiga quanto a própria Matemática, surgindo de aplicações na rotina diária dos povos antigos. (BIEMBENGUT; HEIN, 2005, p.7)

Na busca por uma maior formalização à Modelagem é que inserimos a linguagem matemática e passamos a ter o que hoje conhecemos por "Modelagem Matemática". O rigor matemático enriquece o processo de Modelagem ao ponto de torná-la uma peça chave da criatividade humana.

Um exemplo bem simples, mas de cunho geral, é o das maquetes, sejam elas de casa, edifícios, cidades ou representações da criatividade humana; estas maquetes representam uma prática de modelagem, ainda que simples para um olhar desatento, pois observamos que qualquer indivíduo, dotado com um percentual satisfatório de coordenação motora, lógica e um pouco de criatividade, como a usada no artesanato, pode aparar as arestas dos componentes de uma maquete, com um utensílio de corte, e assim aperfeiçoá-la até encontrar o modelo para sua construção, observamos que este modelo aos poucos foi sendo moldado entre as adaptações, feitas em cortes, de um material de baixo custo, ao ponto de se tornar um modelo visualmente satisfatório com o qual o indivíduo pode expor o formato de construção idealizado, sendo este um modelo objeto pictórico.

Figura 1 – Maquete

Fonte: Martins (2015)

Para que estes modelos tragam uma maior eficácia no processo de edificação, ou seja, se transformem em soluções para os problemas, onde o material para construção é de alto custo e o desperdício e má aplicação poderão ocasionar problemas ainda maiores, é preciso uma matematização, uma confluência entre a criatividade lógica com a semântica formal matemática, onde o pensamento, inserido no modelo, é transcrito em símbolos, que ao ser trabalhado por axiomas matemáticos torna-se um modelo objeto conceitual, aprimorando as condição necessária para transpor-se do figurado ao real.

> Modelo Objeto é a representação de um objeto ou fato concreto; suas características são a estabilidade e a homogeneidade das variáveis. Tal representação pode ser pictórica (um desenho, um esquema compartimental, um mapa, etc.), conceitual (fórmula matemática), ou simbólica. A representação por estes modelos é sempre parcial deixando escapar variações individuais e pormenores do fenômeno ou do objeto modelado. Um modelo epidemiológico (sistema de equações diferenciais) que considera o grupo de infectados como sendo homogêneo onde todos os seus elementos têm as mesmas propriedades é um exemplo de um modelo objeto; Um desenho para representar o alvéolo usado pelas abelhas é também um modelo deste tipo. (BASSANEZI, 2002, p. 19)

Ainda diante da observação das maquetes, podemos retirar padrões na transição destas maquetes para a construção real, ou seja, teorias de cunho geral, que possam ser aplicadas a problemas que tenham as mesmas características no mundo real, independente de terem a mesma forma, obtendo o que chamamos de Modelo Teórico.

> Um modelo teórico é aquele vinculado a uma teoria geral existente – será sempre construído em torno de um modelo objeto com um código de interpretação. Ele deve conter as mesmas características que o sistema real, isto é, deve representar as mesmas variáveis essenciais existentes no fenômeno e suas relações são obtidas através de hipóteses (abstratas) ou de experimentos (reais).(BASSANEZI, 2002, p. 20)

Por exemplo:

Restringindo ainda mais a nossa observação das maquetes, vamos observar a maquete de uma casa, mas especificamente o telhado desta casa. Observamos que, no caso real, cada tipo de telha requer uma angulação específica, ou seja, o telhado deve ter uma determinada inclinação, isso por conta da espessura da telha que ao ser encaixada uma na outra cria um aclive e caso não seja cumprida a inclinação específica ocorrerá retorno da água da chuva podendo ocasionar respingos ou até mesmo goteiras. Caso a inclinação seja especificada pelo fabricante, só nos resta cumprir as especificações, mas, caso não sejam, podemos, através de modelos, gerar padrões específicos para determinados tipos de telhas e aplicar aquela angulação para qualquer telhado feito com aquele tipo de telha, transformando o aclive desta em declive.

Figura 2 – Telhado

Fonte: Sartorelli (2019)

Diante deste exemplo, em se tratando da solução do problema, podemos observar duas resoluções bem distintas, que poderiam nos nortear ao tentarmos diferenciar Matemática Aplicada de Modelagem Matemática.

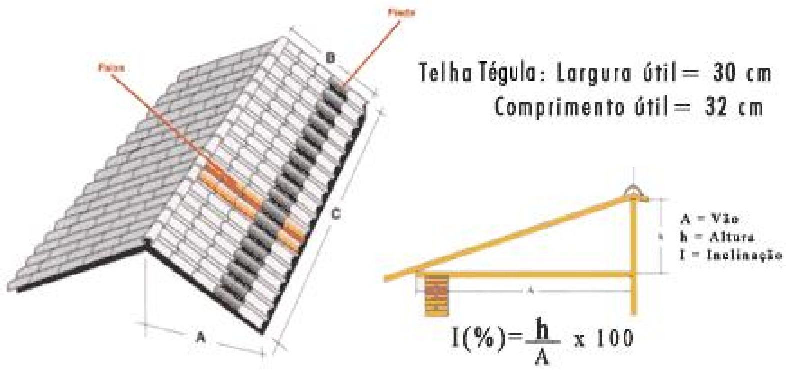
Utilizando a Matemática Aplicada, bastaria inserirmos os ângulos configurados para cada tipo de telha, ângulos estes especificados após testes no encaixe da telha, para que estas fiquem “bem casadas"e com declive, ou por especificações do fabricante, em seguida, calcularíamos através do seno a altura.

Observamos que neste caso satisfaríamos a resolução aplicando um modelo matemático pré-estabelecido para situações problemas do mundo real com a mesmas características, mas não atingiríamos o público alvo, pois geralmente os telhados são construídos por marceneiros e pedreiros, que são muito bons em inserir ângulos entre dois planos, mas quando se trata de calcular a altura através do seno, cosseno e hipotenusa; eles passam o encargo para os engenheiros.

Utilizando a Modelagem Matemática, começamos por colher os dados de erros e acertos, observando diretamente estas construções, após a criação de um banco de dados, identificaríamos o que ocasionou os erros e os acertos, em seguida, observaríamos como foi calculado os dados do acerto e excluiremos o que ocasionou os erros, configuraríamos a metodologia usada pelo construtor e, diante desta base de dados, formularíamos o nosso modelo. Após a formulação do modelo, este seria avaliado, caso o mesmo não condissesse com a realidade este seria reformulado e quantas vezes fossem necessárias reavaliado até que fosse validado. Observamos que utilizando a Modelagem Matemática, além de encontrarmos uma solução para o problema, atingiríamos o público alvo, pois as ideias inseridas no modelo partem diretamente dos mesmos.

O que acontece na realidade é que pedreiros usam porcentagem ou proporção para calcular a altura da base do triângulo formado da base retangular da casa até a parte mais alta, a base do vão até a cumieira, conforme imagem a seguir.

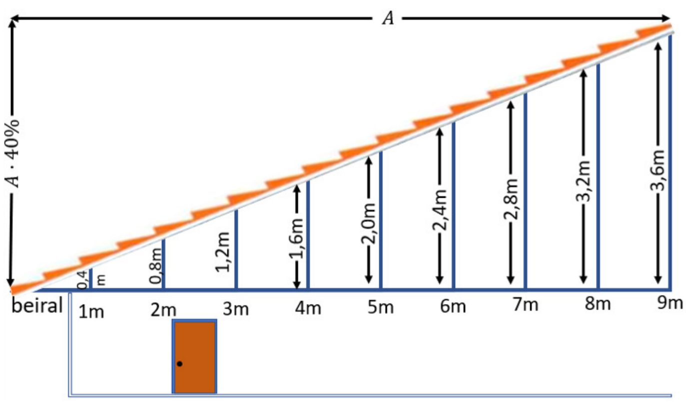
Figura 3 – Vão da casa



Fonte: Medina (2017)

É comum ainda encontrarmos os cálculos da seguinte forma: a cada metro de distância, entre a cumieira e a parte mais baixa da casa, incrementa-se o valor da inclinação referente ao metro; ou seja, se a inclinação for de 40% a cada metro se incrementa quarenta centímetros, conforme imagem a seguir.

Figura 4 – Inclinação



Fonte: Autor (2021)

Pelo exposto, fica perceptível que na Modelagem Matemática existem inúmeras formas de se chegar a um modelo e que sendo este validado sempre terá aplicabilidade, como acontece em todas as ciências de base, e o que nos leva a modelar é a adaptabilidade, uma das característica humanas primordial e essencial a sua sobrevivência, por isso, modelarmos para si, mas também para o próximo e não há uma forma de modelar definida ou definitiva, mas somos levados a modelar cada vez mais e melhor, com eficiência e praticidade de quem está inserido em um sistema capitalista e competitivo.

> Modelo matemático é um conjunto de símbolos e relações matemáticas que representam de alguma forma o objeto estudado. O modelo pode ser considerado como uma síntese de reflexão sobre alguma parte da realidade. Seu objetivo é explicar ou entender a situação estudada para, eventualmente poder agir sobre ela e, mesmo as situações mais simples fornecem motivação para uma iniciação científica. (BASSANEZI, 2002, p. 12)

Segundo Bassanezi (2002, p. 16) "a Modelagem Matemática consiste na arte de transformar problemas da realidade em problemas matemáticos e resolvê-los interpretando suas soluções na linguagem do mundo real". Assim como toda arte, embora tenhamos visto que a Modelagem Matemática se aproprie da formalização matemática com todo o seu rigor, esta é livre para criatividade humana, uma forma de se expressar matematicamente, onde "só se aprende a modelar modelando", (BASSANEZI, 2002, p. 43).

2.1 MODELAGEM MATEMÁTICA COMO TENDÊNCIA METODOLÓGICA

Diante do exposto, observamos na Modelagem Matemática características estritamente humanas, atendendo às necessidades sociais em âmbito geral, o que a tornava altamente cognitiva e cotidiana. Além de uma necessidade introdutória e indutiva ao contexto social, observamos que a Modelagem pode "ser tomada tanto como um método científico de pesquisa quanto como uma estratégia de ensino aprendizagem" (BASSANEZI, 2002, p. 16).

A necessidade de teorizar fez com que a Matemática se afastasse da Modelagem e perdesse muitas de suas características humanas, principalmente no campo educacional, onde todos os estágios do desenvolvimento psíquico intelectual são atropelados pela competitividade do capitalismo, passando assim a ser uma ciência aplicada às necessidades do sistema, que, para agilizar o processo de ensino, abstrai métodos essenciais ao processo de aprendizagem.

> De modo geral, conceitos matemáticos são aplicados de maneiras diferentes em uma variedade de disciplinas, campos e áreas de práticas extra-matemáticas. Toda vez que a matemática é usada para lidar com questões, problemas, situações e contextos em domínios fora da matemática, modelos Matemáticos e Modelagem estão necessariamente envolvidos, implícita ou explicitamente (NISS, 2018, p. 49).

Estando nas práticas vitais ao ser humano, que evolui com o decorrer do tempo, as teorias da Modelagem Matemática passam do campo científico à prática educacional e o cronograma embutido nas normas educacionais pelo sistema econômico faz com que os professores passem a adotar teorias informais nas quais a competitividade é o carro chefe. As notas no processo de avaliação passaram a ter um caráter punitivo e não avaliativo, o que simplesmente substituiu a palmatória, usada nos primórdios da educação para castigo físico, por um castigo psicológico, os alunos são levados a uma aprendizagem estritamente mecânica, onde o intuito é apenas atingir a média. A classificação por notas fez com que alguns alunos passassem a ter locais específicos dentro da sala de aula de acordo com um nivelamento fornecido pelo processo de avaliação adotado, o fundo da sala passou a ser o calabouço para os prisioneiros tidos como incapacitados. A pressão psicológica e a falta de atenção dada a estes alunos pelos colegas e, em alguns casos, pelo professor, que já não tem tempo nem interesse de escutar e se contextualizar, os leva a se afastar do carrasco e se inibirem como elementos neutros, que são naquela sala de aula.

Não temos aqui o intuito de afirmar que a Matemática inserida na sala de aula perdeu definitivamente as características humanas, até mesmo pelo fato de que as velhas metodologias nunca deixaram de existir, estando inclusive nas tipificações da Base Nacional Comum Curricular. Também não temos aqui o interesse de denegrir o valor das novas tendências de ensino, pois estas se complementam. O que queremos demonstrar é que abstrair essências desta ciência, Matemática, tira a face humana e a torna, dentro da sala de aula, uma ciência tecnicista e complexa ao ponto desta complexidade refletir em outras ciências que se subsidiam da mesma.

> Os processos matemáticos de resolução de problemas, de investigação, de desenvolvimento de projetos e da Modelagem podem ser citados como formas privilegiadas da atividade matemática, motivo pelo qual são, ao mesmo tempo, objeto e estratégia para a aprendizagem ao longo de todo o Ensino Fundamental. Esses processos de aprendizagem são potencialmente ricos para o desenvolvimento de competências fundamentais para o letramento matemático (raciocínio, representação, comunicação e argumentação) e para o desenvolvimento do pensamento computacional. (BRASIL, 2018, p. 35)

Diante deste impasse, partindo do erro para atingir o acerto em uma tentativa de resgatar o verdadeiro sentido do processo de ensino e aprendizagem, esculpindo novamente a face humana na matemática aplicada em sala de aula, é que trouxemos à tona a Modelagem Matemática, não como tendência única, mas como uma tendência que servirá de base e subsidiará tendências como Letramento Matemático, Resolução de Problemas, Etnomatemática, História da Matemática, entre outras. Para tal, estabelecemos um guia, sugerido como suporte ao planejamento das primeiras aulas, para servir como um elo de ligação capaz de aproximar, cada vez mais, o sistema educacional do seu verdadeiro objetivo, que é produzir uma aprendizagem significativa com cidadãos autônomos, livres e capacitados para solucionar problemas do dia a dia com eficácia em tempo hábil.

Ainda pensando nas dificuldades encontradas pelos professores no Ensino Médio, quando no desenvolvimento ou na validação de modelos mais complexos, traremos aqui a Modelagem aplicada em Equações Diferenciais Ordinárias, que em muitos casos, respondem, por si só, às três perguntas básicas, O quê é? Como foi criado? e pra que serve?

2.1.1 Planejamentos

Apesar de criar modelos pré-definidos de aula restringir a liberdade de pensamento, os planos de aula e de curso devem ser criados para que se planeje o passo a passo das aulas, sem pular etapas.

Nos planejamentos devemos estabelecer uma sequência cronológica, que servirá de guia a distribuição dos conteúdos e do raciocínio de forma sequencial e lógica, uma base para os primeiros passos do processo, e, de certa forma, uma pré-modelagem das teorias aos métodos de ensino envolvendo o cotidiano. Devemos sempre estar cientes que os planos são guias e não moldes, que estes deverão ser articulados, para que sejam modificados sempre que necessário, que, embora tenhamos uma sequência de conteúdos predefinidos, estes devem ser propostos pelo professor de acordo com o interesse dos alunos pelo tema, os alunos deverão sentir a necessidade e ter a curiosidade de aprender aquele dado conteúdo, alcançando assim a aprendizagem significativa, pois, como resume MOREIRA (2006, p. 38), "a aprendizagem significativa é o processo por meio do qual novas informações adquirem significado por interação (não associação) com aspectos relevantes preexistentes na estrutura cognitiva".

Outro ponto positivo nos moldes das aulas, plano de curso, plano de aula, planejamento de ensino, é que eles servirão de referência às adaptações do conteúdo, devendo ser repleto de anotações, observações e citações. O plano sempre deve ser feito pelo menor período de tempo exigido pela escola, que geralmente é o período bimestral, e deve estar em constante evolução, sofrendo modificações sempre que um fato novo surgir.

Diante do exposto, com o intuito de atender a demanda dos conteúdos propostos pela BNCC (2018) ao mesmo tempo em que estabelecemos um guia para o desenvolvimento da Modelagem Matemática, definimos um Roteiro para um plano de curso baseado em Modelagem Matemática.

2.1.2 Roteiro de um plano de curso baseado em Modelagem Matemática

1. Conhecimento dos conteúdos: devemos conhecer bem os conteúdos e o livro didático adotado pela escola, ter em mãos uma grande diversidade de livros didáticos, a fim de selecionar a melhor forma de se aplicar o conteúdo dentro de uma perspectiva local. Os livros acessórios servirão de complemento para o livro didático principal.

2. Associar os conteúdos aos hábitos locais: embora os alunos escolham os temas que querem trabalhar e estes nem sempre levarão a conteúdos específicos, o mediador deverá sempre ter um leque de possibilidades aberto, neste ponto, conceitos da Etnomodelagem e História da Matemática darão ao mediador argumentos suficientes para conduzir a turma em um processo de Modelagem que culminará em um modelo validado no menor tempo possível.

3. Cronograma: um quebra cabeça de unidades cronológicas que será montado de acordo com os roteiros tomados em sala de aula. Embora o cronograma seja traçado em uma sequência gradativa de ideias conforme as especificações da Base Nacional Comum Curricular (BNCC), com o tempo específico para cada conteúdo, ele nem sempre será cumprido nesta sequência, pois, diante da busca do cognitivo e de uma aprendizagem significativa, esta sequência será constituída de acordo com o interesse da maioria dos alunos em dados conteúdos.

4. Proposições de atividades: visando o processo de avaliação contínua, no planejamento de cada conteúdo, estabeleceremos os primeiros indicativos da aprendizagem. Neste deverão constar atividades, previamente selecionadas, estabelecidas pelo livro didático ou ao nosso critério. Estas atividades poderão ser resolvidas de forma coletiva, visando complementar a aprendizagem, neste caso o aluno deve estar ciente de que em algum momento poderá ser convidado a vir ao quadro fazer algumas explanações, esta noção forçará o aluno a participar do processo e não apenas esperar que o colega resolva as atividades; ou de forma individual, onde o aluno irá expor e praticar o que aprendeu em atividades. Nos problemas selecionados ao nosso critério, teremos atividades envolvendo problemas cotidianos dos alunos, uma ótima oportunidade para se estabelecer a interdisciplinaridade, com situações problemas trazidas de outras áreas, além do Letramento Matemático que pode ser ressaltado na confecção de relatórios complementares à atividade. Esses relatórios devem ser previamente definidos, dependendo da disponibilidade, com o professor de Português e alunos.

5. Reflexão sobre o que foi aprendido: devemos estabelecer aqui pontos a serem refletidos, visando que as explanações em sala e os relatórios fornecerão subsídios para uma boa reflexão, individual por parte do professor, que se auto avaliará, como coletiva com a turma, onde os alunos irão expor os seus conceitos sobre o novo processo, uma espécie de Feedback parcial. Os pontos a serem refletidos devem identificar se os objetivos foram alcançados, se a metodologia utilizada está sendo suficiente ou se precisa ser implementada.

6. Replanejamento do conteúdo as novas necessidade: visando à articulação do processo, cientes de que a Modelagem Matemática possa impulsionar a aprendizagem, mas não atingir níveis satisfatórios, deveremos criar espaços, ainda que não sejam usados, para implementar esta metodologia, aqui é uma ótima oportunidade para se analisar a aplicabilidade de novos recursos tecnológicos e metodologias que possam complementar o processo como a gamificação por exemplo.

7. Aplicabilidade prática do conteúdo: neste ponto o conteúdo deve ser bem trabalhado, explorando bem o cognitivo do aluno, amarrando as arestas com exemplos do cotidiano do aluno e propondo novas atividades.

8. Avaliações: embora sejam os pontos finais de cada processo, o qual detalharemos especificamente mais a frente, não podemos deixar migalhas. Alguns alunos, apesar do esforço, não atingiram um nível satisfatório e não poderão ser deixados para trás, porque este é o cume, o melhor indicativo de erro, o que ficou de fora dos rabiscos no planejamento. É a tentativa de resgatar e produzir um nivelamento nestes alunos, que conseguiram a façanha de ficar para trás diante de tanto trabalho, que nos

proporcionará o ápice da prática de modelar, pois, como dito antes, só se aprende a modelar modelando, partindo do erro para se atingir o acerto. Observando a problemática do tempo, este resgate deve ser feito fora do cronograma, mas as adaptações devem constar no planejamento, ainda que na forma de rabisco, para que o mesmo possa ser aperfeiçoado.

A aplicação deste roteiro, associado aos livros didáticos acessórios e hábitos locais, além ser um guia para os conteúdos dispostos em unidades cronológicas, abri um leque de possibilidades contendo aplicações para os conteúdos propostos pela BNCC, o que organiza, facilita e agiliza o processo de ensino-aprendizagem com Modelagem Matemática, mas para que este guia tenha maior eficácia, conduzindo aos objetivos geral e específicos de cada conteúdo e baseando-se nas técnicas de Modelagem Matemática definidas por Bassanesi (2002, p. 43) e Biembengut E Hein (2005, p. 15), definimos um roteiro para um plano de ensino baseado em Modelagem Matemática.

2.1.3 Roteiro de um plano de Ensino baseado em Modelagem Matemática

1. Definir uma situação problema: definido o tema de acordo com o interesse da turma, devemos guiar os alunos a restringi-lo, o máximo possível, até se chegar a um ponto específico, ou seja, uma situação problema.

2. Dados do problema: diante da situação problema, devemos guiar os alunos na obtenção de dados, que poderá ser feita através de pesquisas, entrevistas, gamificação ou estudo de caso; abriremos aqui o nosso leque de possibilidades, criado no item dois do plano de curso, ele nos servirá de guia na hora de especificar os tipos dados que serão colhidos.

3. Análise dos dados: os dados deverão ser transcritos e analisados pela turma de forma individual, onde cada um imprimirá conceitos de acordo com o seu cognitivo, neste ponto devemos guiar os alunos a separarem as variáveis das constantes e relacionar as mesmas com suas grandezas, em seguida os conceitos e conclusões deverão ser expostos e analisados coletivamente, neste ponto devemos guiar os alunos a comparar, caso haja, as suas conclusões com os métodos usados no mundo real, para calcular aqueles dados. Um exemplo, como mencionado antes, é o da inclinação dos telhados, de acordo com o tema escolhido existem inúmeras possibilidades para trabalharmos estes dados.

4. Pré-requisitos: para que os alunos sejam condicionados diante das necessidades que forem surgindo, com o intuito de manter a equidade e o interesse da turma, deveremos fazer as revisões dos pré-requisitos necessários, fornecendo habilidades para superar os desafios e mantendo o estado de *Flow*.

> A experiência do *Flow* caracteriza-se por uma profunda concentração em um conjunto limitado de estímulos que são aceitos pela pessoa como relevantes, ou seja, o instante em que uma pessoa está totalmente concentrada e absorta em uma atividade. Nessa circunstância, há equilíbrio entre a capacidade e o desafio, a noção de tempo é alterada, a sensação de controle é modificada, deixando de ser controlado para passar a controlar suas ações e ambiente. As atividades como artes, esportes, jogos e outras atividades de *hobbies*, fornecem um ambiente em que a curiosidade e o desafio servem de motivação e facilitam a concentração e o envolvimento. (DE CAMPOS, 2021, p. 5)

Figura 5 – Flow

Fonte: Alves (2020)

5. O Modelo: uma expressão matemática capaz de produzir resultados iguais ou aproximados ao mundo real.

6. Validação: os resultados gerados pelos modelos devem ser iguais ou aproximados ao do mundo real.

7. Conteúdo: após a validação do modelo, devemos explorar o conteúdo em que o mesmo esteja inserido, configurando-o através de livros didáticos, explorando propriedades, características e aplicabilidades que proporcione uma melhor compreensão.

8. Atividades: uma ferramenta para aprimorar o processo, devendo estar em uma sequência gradativa de ideias. Os pontos principais das atividades devem vir acompanhados de pequenos relatórios.

9. Reflexão sobre o que foi aprendido: esta reflexão é o nosso primeiro feedback da aprendizagem, nesta etapa pontos dos relatórios devem ser discutidos com toda a turma. Somente se os objetivos não forem alcançados devemos prosseguir para o próximo passo, caso contrário passamos para avaliação.

10. Replanejamento do conteúdo as novas necessidades: baseado no nosso indicativo de erro, o *feedback* das reflexões, é que devemos replanejar, este deve ser voltado para sanar as falhas. No replanejamento a metodologia deve ser aprimorada, a ludicidade explorada ao ponto de não saturar as informações produzindo o mínimo de estresse possível.

11. Aplicabilidade prática do conteúdo: neste ponto o aluno deve ser levado a perceber a aplicabilidade do conteúdo no seu cotidiano, nada que impeça de apresentar diretamente a aplicabilidade do conteúdo através de exemplos, desde que o interesse do aluno seja mantido.

12. Proposição de novas atividades: o diferencial aqui será que as atividades serão especificadas de acordo com as dificuldades encontradas pelos alunos. Neste ponto teremos subsídios suficientes para analisarmos se podemos finalizar o processo ou repetir do décimo ponto em diante até que a turma atinja maturidade suficiente para fazer uma avaliação para finalizar o processo.

13. Avaliação: devemos ter sempre em mente o que e quem está sendo avaliado.

Assim como todos os guias, com a prática, tendemos a nos desprender dos planejamentos, encarando a modelagem como um processo natural, onde somos capazes de movimentos livres, mas sempre um passo de cada vez com ideias gradativas de acordo com a nossa necessidade e baseado-se em nossa experiência em sala de aula, tentando atingir ao máximo os anseios dos alunos, planejando e replanejando sempre que necessário, procurando refletir sobre o que os alunos pensam e a forma como os demais professores agem.

Devemos sempre valorizar a troca de experiência, selecionando o que há de melhor e colocando em prática em sala de aula, nada de esconder planejamentos. A opinião extra enriquece o processo e as observações ajudam a manter o nosso trabalho em constante evolução.

Escutar sempre os alunos é uma das melhores maneiras de dar aula, partir das necessidades deles para atingir os objetivos, isto é algo que tem que ser colocado em prática. "(...) professores que não questionam provavelmente formarão alunos que não questionam. E alunos que não questionam acabam por se omitir em oportunidades de se engajarem ativamente em sua própria aprendizagem (...)" (SUTHERLAND, 2009, p. 12).

2.1.3.1 Avaliação

O aluno deve sempre associar a avaliação da aprendizagem a questionários, usados para aferir seus conhecimentos através de notas atribuídas de acordo com o seu desempenho, para que o mesmo sinta a necessidade de se capacitar e preparar-se para ser avaliado, mas o professor deve sempre lembrar que este tipo de avaliação tem suas falhas em questões como tempo, ansiedade e nervosismo. Esta, pode se tornar um objeto de tortura perdendo a sua verdadeira finalidade.

Por muitas vezes, diante de adolescente precisamos nos impor, por isso a importância da imagem tradicional da avaliação, prova, mais devemos lembrar que também queremos nos avaliar, a forma como estamos ensinando e qual o tipo de educação que estes alunos estão tendo, então o método de questionar nem sempre é eficaz, devemos mostrar para o aluno o que queremos e o que estaremos avaliando.

Devemos sempre avaliar comportamento, coleguismo, respeito ao próximo e a aprendizagem efetiva dos conteúdos ministrados. Esta avaliação deve vir de forma espontânea como relatórios sobre a atividade, resolução de problemas no quadro e durante as atividades, somente quando a maior parte da turma concordar através de propostas do professor, que indicará o que vai ser cobrado e como vai ser cobrado, e quando o mesmo perceber que a turma vai se sentir bem para fazer uma avaliação é que esta deve ser aplicada. Embora seja implementada por relatórios, TIs ou aplicativos, a avaliação sempre terá em sua essência características do método tradicional.

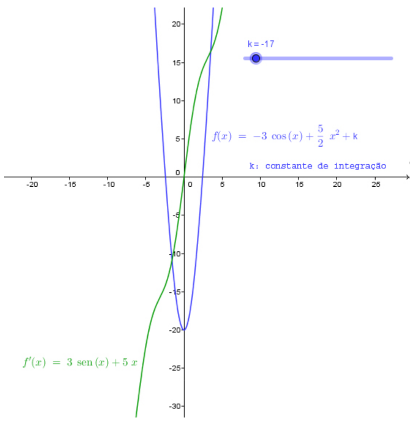
2.2 MODELAGEM MATEMÁTICA COM EDO

As equações diferenciais ordinárias são ricas em aplicações em diversas áreas do conhecimento como a Física, Biologia, Química entre outras; o que as tornam um complemento perfeito para o processo de modelagem. Estas equações envolvem funções e suas derivadas, onde a ideia básica é que são equações em que a incógnita é uma função, ou seja, uma relação representada por uma equação onde a incógnita envolvida não é um valor numérico, mas uma função, como a exemplo:

$$f'(x) = 3\sin x + 5x$$

Aqui temos a derivada de uma função composta por outras funções de variável x, onde o que queremos descobrir é quem é a primitiva, quem é a $f(x)$ cuja derivada é igual a $3\cos(x) + 5x$. Neste caso, um simples problema de integração, onde $f(x) = \int f'(x)dx$, e desta forma calculamos a primitiva ou simplesmente a descobrimos com o auxílio de calculadora científica ou aplicativos, como o Geogebra, onde obtivemos como resultado $f(x) = -3\cos(x) + \frac{5}{2}x^2 + k$, sendo k uma constante de integração, conforme Figura 6.

Figura 6 – Gráfico da primitiva e sua derivada



Fonte: Autor (2021)

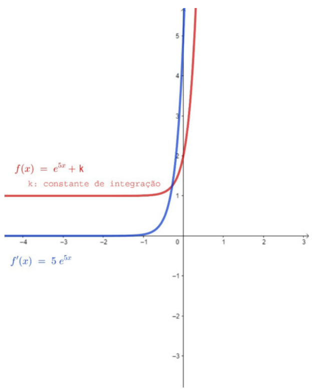
Salientamos que nosso objetivo não é trabalhar com Equações Diferencias Ordinárias em um contexto geral, embora façamos algumas abordagens em torno desse conteúdo necessárias para atingir os nossos objetivos, abstrairemos alguns conceitos relacionados diretamente ao cálculo destas equações, ficando o estudo destes como pré-requisito para uma melhor compreensão deste trabalho.

Observamos que alguns conceitos de EDO, embora não sejam empregados diretamente no processo de modelagem, servem como facilitador do mesmo na resolução de problemas, como a exemplo:

$$f'(x) = 5f(x).$$

Onde a derivada não é igual a *5x*, mas a cinco vezes a própria função, o que já não é tão óbvio e nos deparamos com o seguinte problema: qual é a função que ao derivarmos dá 5 vezes ela própria. Diferente de "$5x$" que quando integrada resulta em "$\frac{5}{2}x^2$", uma forma de primitivar o polinômio, caímos aqui em um caso especial, mais sofisticado, onde $D_x e^u = e^u D_x u$, a derivada da função exponencial de base e, é ela mesma multiplicada pela derivado do seu expoente, obtendo como solução $f(x) = e^{5x} + k$, tendo k como constante de integração.

Figura 7 – Derivada de e^{5x}



Fonte: Autor (2021)

Outro ponto importante a se ressaltar é que a derivada é taxa de variação de uma grandeza. Não precisamos pensar muita para perceber que na natureza há inúmeras situações onde a ideia de taxa de variação pode ser empregada, é por isso que equações diferenciais representa uma parte da Matemática extremamente rica, aparecendo nas seguintes aplicações: no estudo de finanças, na taxa de variação de preço, na taxa de variação de uma moeda e na taxa de um ativo, entre outras; na propagação de doenças, aparece na taxa de variação do número de pessoas infectadas, que é justamente a medida da propagação da doença; em crescimento populacional, que é a taxa de variação da população, uma mensuração que aparece o tempo inteiro em estudos populacionais; em radioatividade, onde temos a taxa de variação do material radioativo que há em um elemento. Portanto temos uma gama de exemplos, envolvendo derivadas e equações diferenciais dentro dessa ideia de taxa de variação, que podemos usar na Modelagem Matemática.

Como ressaltamos anteriormente, ao definirmos modelagem, não precisamos trabalhar com o problema real na íntegra, na sua complexidade total, nós precisamos de uma solução aproximada do problema, em geral, se você souber a resposta de um problema real dentro de uma certa margem de erro, você tem uma situação confortável, onde se consegue prever o resultado real de forma satisfatória. Na engenharia é muito comum se falar no coeficiente de segurança de uma determinada ação, justamente porque você tem uma margem de erro com que você trabalha, porque as suas soluções são aproximadas. Ainda assim, não é fácil obter soluções aproximadas e o que fazemos, ou o que os cientistas, tecnólogos e engenheiros fazem é transformar o problema real em um problema mais simples, em um problema sintético, veja, por exemplo, a mecânica newtoniana é uma aproximação mais simples da realidade, tanto que um tempo depois tivemos que corrigi-la, tivemos que fazer a mecânica relativística. De forma similar, a mecânica newtoniana, encontramos esses problemas reais na natureza, então trocamos por um problema mais simples, que é o problema aproximado, e geralmente, se conseguimos resolver o problema aproximado, conseguiremos resolver o problema real.

Vejamos o caso da mecânica newtoniana, conseguimos resolver diversos problemas da mecânica segundo newton, seguindo o princípio de que precisávamos de uma solução aproximada para um problema real e conseguimos uma solução real de um problema aproximado, embora pareça um jogo de palavras, se trata de uma metodologia extremamente eficaz quando solução real do problema aproximado pode ser usada como solução aproximada do problema real. É isso que fazemos frequentemente na mecânica, nas tecnologias, na ciência e é isso que chamamos de modelagem. A mecânica newtoniana, onde a realidade foi simplificada para obtenção de uma solução aproximada dos resultados encontrados no mundo real, nada mais é do que um exemplo de modelagem, pois temos a solução e ela funciona muito bem como solução aproximada para se fazer muitas coisas no mundo real.

2.3 APLICAÇÕES DE EDO NO PROCESSO DE MODELAGEM MATEMÁTICA NO ENSINO MÉDIO

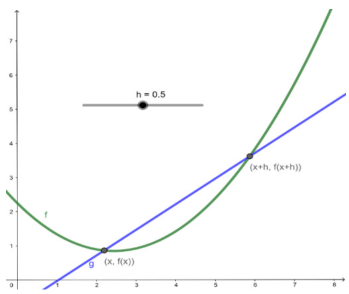
Antes das aplicações, para uma melhor compreensão, vamos nos situar em um contexto histórico.

Newton e Leibniz foram os primeiros a resolver problemas relacionados ao cálculo, entre eles o da reta tangente. Em 1665, Newton já tinha resolvido o problema da reta tangente para uma função $f(x)$ qualquer, já Leibniz não podemos precisar quando o mesmo começou a trabalhar com o problema da reta tangente, o que podemos garantir é que ele foi o primeiro a publicar em 1684, então deduzimos que o primeiro a resolver o problema foi Newton, mas o primeiro a publicar foi Leibniz e por este motivo, já que os dois resolveram o problema de maneira independente, creditamos a estes o desenvolvimento do cálculo.

> Não entraremos aqui em discussões sobre a infeliz polêmica Newton-Leibniz. A opinião generalizada hoje é que ambos criaram o cálculo independentemente. Embora a descoberta de Newton seja anterior, Leibniz foi o primeiro a publicar seus resultados. Se Leibniz não era tão profundo em matemática quanto Newton, era talvez mais eclético, e embora inferior ao seu rival inglês como analista e físico-matemático, era provavelmente dotado de uma imaginação mais aguda e um sentido superior quanto à forma matemática (EVES, 1995, p. 444).

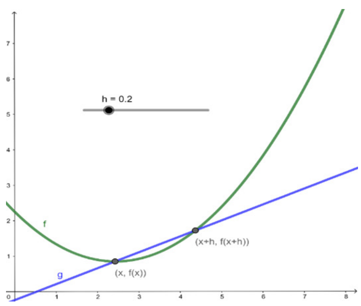
Diante do problema da reta tangente em que dado uma função $f(x)$ e escolhendo um ponto qualquer, sobre o seu gráfico, qual seria a inclinação da reta tangente ao gráfico de $f(x)$ neste ponto, a solução de Newton e Leibniz se deu da seguinte forma: definimos uma reta secante sobre o gráfico de $f(x)$, basta que escolhamos ao acaso dois pontos, $(x, f(x))$ e $(x+h, f(x+h))$, onde h é a distância entre as abscissas e pela equação fundamental da reta, $f(x+h) - f(x) = m[(x+h) - x]$, onde m é o coeficiente angular, estabelecemos a sua função, cientes de que a tangente é a reta que toca apenas um ponto em dada região do gráfico e que cada vez que reduzimos o h, o ponto $(x+h, f(x+h))$ se aproxima de $(x, f(x))$, basta que consigamos reduzir este h ao ponto em que o $(x+h, f(x+h))$ sobrescreva o $(x, f(x))$, conforme a sequência de imagens a seguir.

Figura 8 – Secante com pontos distantes



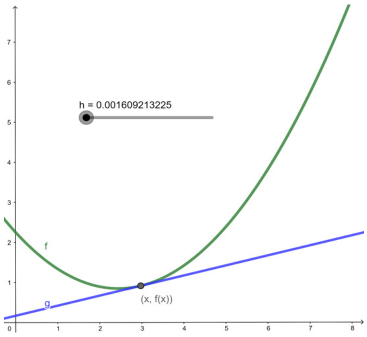
Fonte: Autor (2021)

Figura 9 – Secante com pontos próximos



Fonte: Autor (2021)

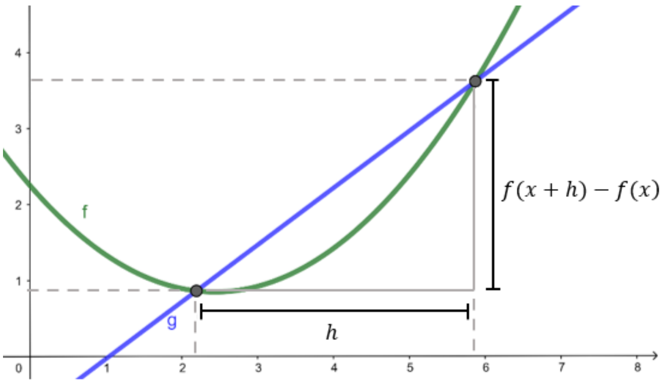
Figura 10 – Reta tangente



Fonte: Autor (2021)

Ante o exposto,

Figura 11 – Taxa de variação



Fonte: Autor (2021)

temos que:

$$f(x+h) - f(x) = m[(x+h) - x]$$

$$f(x+h) - f(x) = m \cdot h$$

$$m = \frac{f(x+h) - f(x)}{h}.$$

Logo, a taxa de variação média é:

$$m_{sec} = \frac{f(x+h) - f(x)}{h}.$$

Assim sendo, fica notório que ao se estabelecer o limite, quando h tente a zero, teremos a inclinação da reta tangente em $f(x)$ no ponto x, tendo assim a taxa de variação instantânea:

$$m_{tan} = f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}.$$

Diante desta compreensão, cientes de que essas taxas de variações podem e devem ser aplicadas em qualquer curva, vejamos algumas aplicações.

2.3.1 Funções Quadráticas

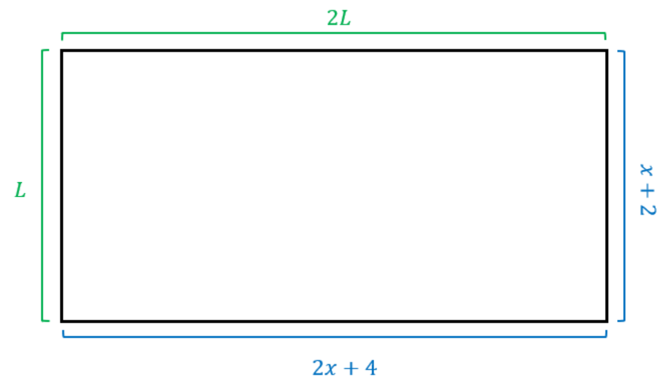
Observando que entre as competências específicas para o Ensino Médio encontramos funções quadráticas, tipificada na BNCC "(EM13MAT503) Investigar pontos de máximo ou de mínimo de funções quadráticas em contextos envolvendo superfícies, Matemática Financeira ou Cinemática, entre outros, com apoio de tecnologias digitais." (BRASIL, 2018, p.35). Vejamos como as EDOs podem e devem ser usadas para aprimorar o processo de ensino aprendizagem de funções quadráticas.

"A área de um círculo é dada em função da medida r do raio, ou seja, $S = f(r) = \pi r^2$, que é uma função quadrática"(DANTE, 2010, p. 153), um dos exemplos típicos do cálculo de áreas usando funções quadráticas, o que deixa notório a aplicabilidade de funções quadráticas no cálculo de áreas.

> As funções quadráticas são uma classe de funções muito utilizadas em problemas de cálculo de área, em cálculos de erro, no estudo do movimento de projéteis, entre outros [...]podemos dizer que uma função quadrática $f : R \longrightarrow R$ é aquela cuja lei de formação é $f(x) = ax^2 + bx + c$ com $a \neq 0$. Os valores a, b e c são denominados coeficientes e ax^2 é o termo dominante (DIAS, 2016, p. 38).

Vejamos o seguinte problema, precisamos calcular a área de uma casa de modo que a mesma fique bem centralizada e siga as mesmas proporções de um dado terreno que tem o formato retangular com lados $x + 2$ e $2x + 4$. Vejamos agora como devemos proceder para encontrar os resultados, começando por um esboço do terreno, representado na Figura 12.

Figura 12 – Área retangular



Fonte: Autor (2021)

Observamos que a área da casa, assim como a do terreno, podem ser representadas por uma função quadrática do tipo $f(x) = ax^2 + bx + c$, sendo essa formada pela multiplicação do lado menor $x + 2$ pelo lado maior $2x + 4$. Assim temos:

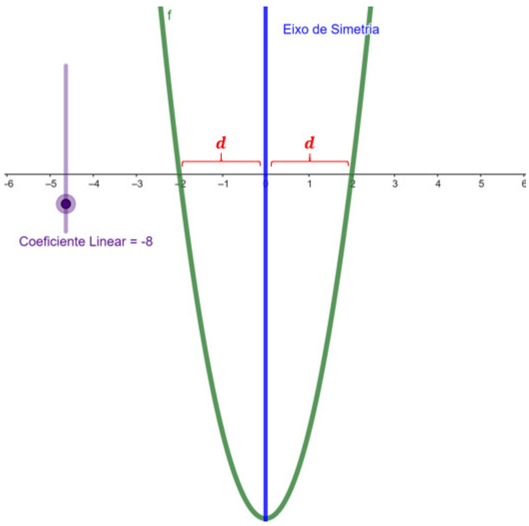
$$f(x) = (x + 4)(2x + 8)$$

Logo,

$$f(x) = 2x^2 + 8x + 8$$

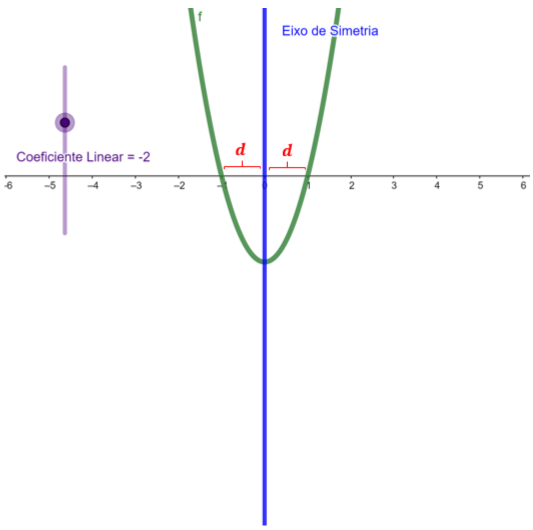
Em análise aos gráficos das funções quadráticas, facilmente podemos perceber que o ponto de máximo ou ponto de mínimo de uma função é o ponto do vértice da parábola, (x_v, y_v), e que este ponto será de máximo quando a parábola tiver concavidade voltada para baixo e de mínimo quando a parábola tiver concavidade para cima, além do fato de que o mesmo é o único ponto da parábola que está inserido no eixo de simetria, sendo assim, podemos demonstrar e calcular este ponto através da fórmula de Bháskara, usando a seguinte definição:

Figura 13 – Distanciamento das raízes



Fonte: Autor (2021)

Figura 14 – Fixação do eixo de simetria



Fonte: Autor (2021)

A distância “d”, entre cada uma das raízes reais e o eixo de simetria é a mesma, ou seja, tanto o eixo como a coordenada x do vértice, x_v, se encontram na média das raízes reais, sendo assim basta calcular a mesma, o que de forma genérica teríamos:

$$x_v = \frac{\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} + \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}}{2}$$

$$x_v = \frac{\frac{-2b}{2a}}{2} \Rightarrow x_v = \frac{-2b}{4a}$$

$$x_v = \frac{-b}{2a}$$

Substituindo na função temos que:

$$y_v = a\left(\frac{-b}{2a}\right)^2 + b \cdot \frac{-b}{2a} + c \Rightarrow y_v = a\left(\frac{b^2}{4a^2}\right) - \frac{b^2}{2a} + c \Rightarrow y_v = \frac{b^2}{4a} - \frac{2b^2}{4a} + \frac{4ac}{4a}$$

$$y_v = \frac{-b + 4ac}{4a} \Rightarrow y_v = \frac{-(b - 4ac)}{4a} \Rightarrow y_v = \frac{-\Delta}{4a}$$

Nas observações da parábola formada pelo gráfico da função $f(x) = 2x^2 + 8x + 8$, percebemos que ao alterar o coeficiente linear produzimos uma translação vertical na parábola, que permanecerá no mesmo eixo de simetria, ou seja, podemos alterar este coeficiente linear ao ponto em que o vértice coincidirá com o eixo das abscissas.

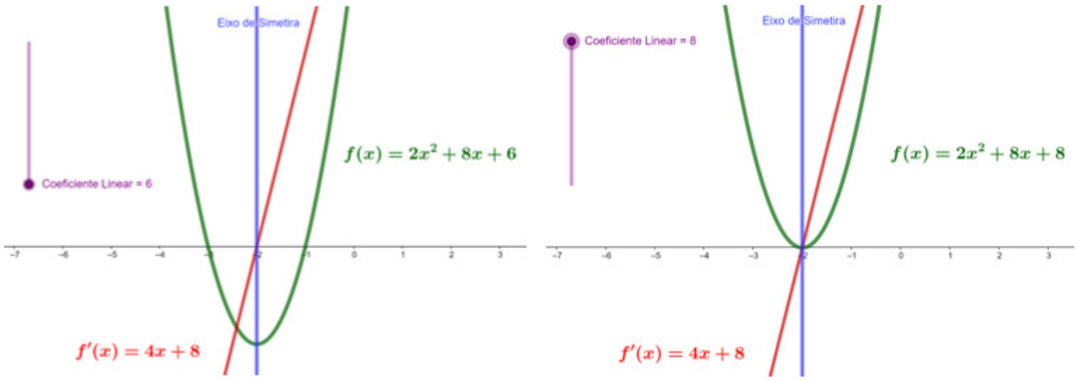
Observamos que:

> Por uma equação diferencial de 1.^{a} ordem entendemos uma equação do tipo $\frac{dy}{dx} = F(x, y)$ ou $y' = F(x, y)$ onde $F(x, y)$ é uma função definida em um aberto Ω do R^2. Uma função $y = y(x)$ definida em um intervalo aberto I é uma solução dessa equação se, para todo x em I, ocorrer $y'(x) = F(x, y(x))$. [...] uma solução $y = y(x)$ da equação $\frac{dy}{dx} = 3x + 5$ que satisfaça a condição inicial $y(0) = 2$. [...] é uma função [...] cuja derivada seja $3x + 5$. Então, $y = \int(3x + 5)dx = \frac{3}{2}x^2 + 5x + k$, k constante, é a solução da equação. Segue que $y = \frac{3}{2}x^2 + 5x + 2$ é uma solução satisfazendo a condição dada. (GUIDORIZZI, 2015, p. 174 - 175)

A forma mais simples de uma EDO é $y' = f(x)$, onde $f(x)$ é continua em um intervalo I, que tem como solução geral $y(x) = \int f(x)dx$, sendo a constante de integração determinada por $y(x_0) = y_0$.

Percebemos, ainda diante do nosso problema, onde $f(x) = 2x^2 + 8x + 8$, uma solução para EDO, $y\prime = F(x, y) = 4x + 8$, que mesmo alterando o coeficiente linear, uma constante, a reta produzida pelo gráfico da EDO não se altera e corta o eixo de simetria no ponto de ordenada $y = 0$, conforme a Figura 15.

Figura 15 – Translação vertical



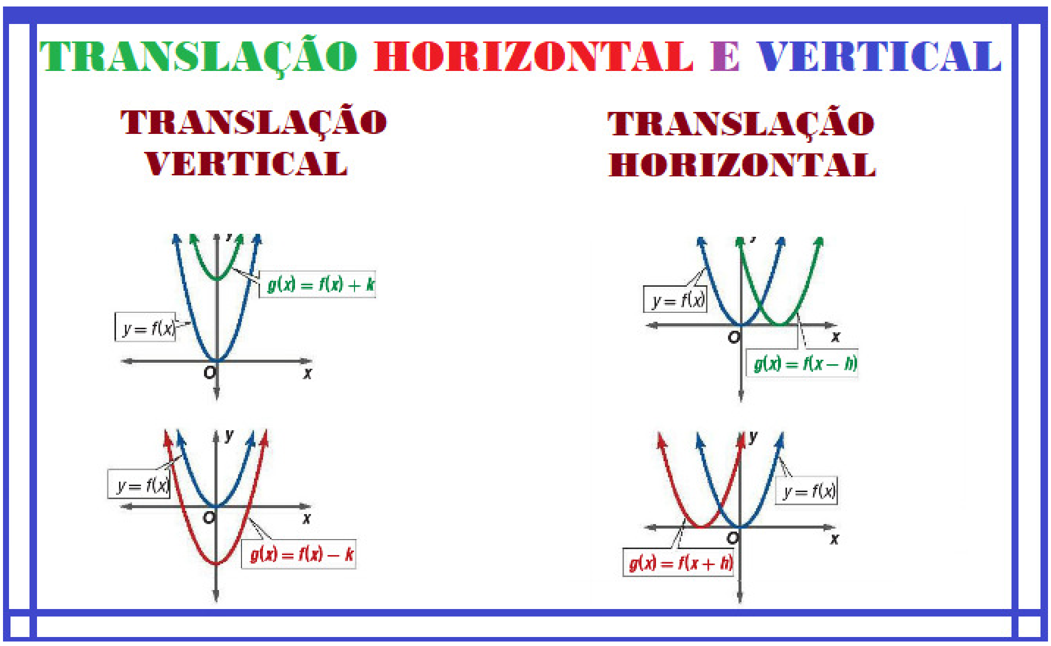
Fonte: Autor (2021)

Sendo assim para descobrirmos a abscissa do vértice basta que igualemos a EDO a zero, neste caso fazendo $4x + 8 = 0$, o que implica que $x = -2$, sendo o pondo de mínimo da função quadrática.

Concebendo a forma genérica da função quadrática, $f(x) = ax^2 + bx + c$, como primitiva, teremos a EDO, $f'(x) = 2ax + b$, a qual igualada a zero teremos $2ax + b = 0 \Rightarrow 2ax = -b \Rightarrow x = \frac{-b}{2a}$, o mesmo resultado da media das raízes reais, obtidas com a fórmula de Bháskara.

Diante do processo de modelagem a EDO além de ser usada para aprimorar o conhecimento, memorização e obtenção de fórmulas, pode ser usada na etapa de validação da obtenção do ponto de máximo ou de mínimo e das translações horizontais e verticais.

Figura 16 – Translações



Fonte: Cortês (2019)

Observamos que ao incrementar, com uma constante k com a distância que queremos transladar horizontalmente, o coeficiente linear da reta gerada pela EDO, podemos encontrar a sua função primitiva que terá o ponto do vértice no local que desejarmos, como exemplo genérico teríamos:

$$x = \frac{-b}{2a} + k \Rightarrow x = \frac{2ak - b}{2a} \Rightarrow 2ax = 2ak - b \Rightarrow 2ax + b - 2ak = 0$$

Logo,

$$f'(x) = 2ax + b - 2ak$$

Assim sendo, teríamos:

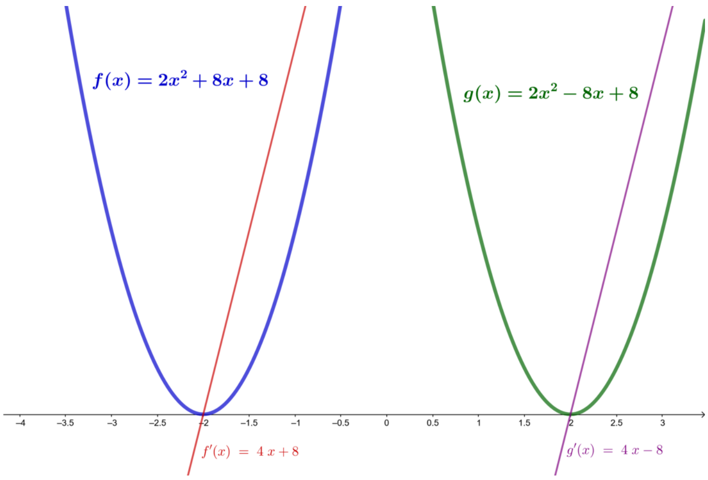
$$\int f'(x)dx = \int (2ax + b - 2ak)dx$$

$$f(x) = ax^2 + (b - 2ak)x + c$$

Usando o nosso exemplo anterior, $f(x) = 2x^2 + 8x + 8$, que por hora passaremos a chamar de $g(x)$, para em seguida compararmos os gráficos, onde conhecemos a constante de integração, 8, e queremos transladar quatro unidades na abscissa, $k = 4$, teremos:

$$g(x) = 2x^2 + (8 - 2 \cdot 2 \cdot 4)x + 8$$
$$g(x) = 2x^2 - 8x + 8$$

Figura 17 – Translação Horizontal



Fonte:Autor (2021)

2.3.2 Capitalização de Juros

No processo de capitalização de juros a equação que rege este fenômeno, no qual os juros são contínuos, é uma equação diferencial de primeira ordem.

> A taxa de variação do valor do investimento é $\frac{dS}{dt}$, e essa quantidade é igual à taxa segundo a qual os juros acumulam, que é a taxa de juros r vezes o valor atual do investimento $S(t)$. Então, $\frac{dS}{dt} = rS$ é a equação diferencial que governa o processo. Suponha que sabemos também o valor do investimento em algum instante particular, digamos $S(0) = S_0$. Então a solução do problema de valor inicial fornece o saldo total $S(t)$ na conta em qualquer instante t. Esse problema de valor inicial pode ser resolvido facilmente, já que a equação diferencial é linear e separável. Logo, resolvendo as equações, encontramos $S(t) = S_0e^{rt}$. Portanto, uma conta bancária com juros capitalizados continuamente cresce exponencialmente (BOYCE; DIPRIMA, 1985, p. 41 - 42).

Sendo,

$$\frac{dS}{dt} = r \cdot S,$$

a EDO que governa o processo, r é a taxa de juros e o S a quantidade de dinheiro num instante t, ou seja, o valor em dinheiro cresce a uma taxa proporcional a quantia S presente no instante t. Então para resolver esta Equação Diferencial, uma equação separável, vamos deixar dS com S e o r com dt, desta forma teremos:

$$\frac{dS}{S} = r \cdot dt$$

Integrando nos dois membros, para se obter a primitiva, teremos:

$$\int \frac{dS}{S} = \int rdt$$

Logo,

$$\ln S + c_4 = rt + c_3 \Rightarrow \ln S = rt + c_2$$

$$e^{\ln S} = e^{rt+c_2} \Rightarrow S = ce^{rt}$$

Assim temos que:

$$S(t) = ce^{rt}$$

Exemplo:

Suponha que uma aplicação renda juros continuamente. Qual será o saldo após 12 meses se:

a) A taxa de juros for 2% a.m. e o depósito inicial de R$ 100,00?

Neste caso faremos,

$$S(0) = R\$ \ 100,00,$$

já que o depósito inicial foi de $R\$ \ 100,00$, e.

$$r = 2\% \ a.m.,$$

pois a taxa de juros é 2% ao mês. Sendo o deposito inicial efetuado no tempo zero, $t = 0$, temos:

$$S(0) = ce^{0,02 \cdot 0} \Rightarrow 100 = ce^0 \Rightarrow c = R\$ \ 100,00.$$

Logo, após 12 meses, $t = 12$, o saldo resultará em:

$$S(12) = 100e^{0,02 \cdot 12} \Rightarrow S(12) = 100e^{0,24} \Rightarrow S(12) \cong R\$ \ 127,12.$$

Nos dando como solução para o problema, após 12 meses, o saldo de $R\$ \ 127,12$.

b) A taxa de juros for de 4% a.m. e o depósito inicial for R$ 100,00?

Aqui também faremos,

$$S(0) = R\$ \ 100,00,$$

já que o depósito inicial foi de $R\$ \ 100,00$, e.

$$r = 4\% \ a.m.,$$

pois a taxa de juros é de 4% ao mês. Sendo o deposito inicial efetuado no tempo zero, $t = 0$, temos:

$$S(0) = ce^{0,04 \cdot 0} \Rightarrow 100 = ce^0 \Rightarrow c = R\$ \ 100,00.$$

Logo, após 12 meses, $t = 12$, o saldo resultará em:

$$S(12) = 100e^{0,04 \cdot 12} \Rightarrow S(12) = 100e^{0,48} \Rightarrow S(12) \cong R\$ \ 161,61.$$

Nos dando como solução para o problema, após 12 meses, o saldo de $R\$ \ 161,61$.

2.3.3 Dinâmica Populacional

O modelo de dinâmica populacional é similar ao processo de capitalização de juros, diferenciado pelo P no lugar do S, onde P representa a população no instante t, também é feita por diferenciais separáveis. Assim temos:

$$\frac{dP}{dt} = K \cdot P$$

Onde chegaremos a uma fórmula similar a encontrada para capitalização de juros.

$$\frac{dP}{P} = kdt$$

A qual, sendo integrada em ambos os membros, teremos:

$$\ln P + c_4 = kt + c_3 \Rightarrow \ln P = kt + c_2$$

Onde aplicando a operação inversa, $e^{lnP} = e^{kt+c_2}$, chegamos a: $P = ce^{kt}$.

Este modelo foi proposto por Thomas Malthus em 1978 e o crescimento é proporcional à população total em cada instante. Esse modelo é muito simplista e ignora fatores que são relevantes na estimativa, não considerando, por exemplo, a situação econômica do país e as taxas de natalidade, mortalidade entre outras informações que são pertinentes ao modelo.

Vejamos agora uma aplicação desta dinâmica populacional:

Uma cultura tem inicialmente P_0 bactérias. Em $t = 1h$ o número de bactérias é $\frac{3}{2}P_0$. Considerando que a taxa de crescimento é proporcional a $P(t)$, determine o tempo necessário para triplicar o número de bactérias.

Como a taxa de crescimento é proporcional a população $P(t)$, temos que o problema é modelado pela equação diferencial $\frac{dP}{P} = kdt$, cuja solução de dada pelo termo geral $P = ce^{kt}$. Sabendo que $P(0) = P_0$ e que $P(1) = \frac{3}{2}P_0$, teremos para o tempo inicial, $t = 0$, que: $P(0) = ce^{k \cdot 0} \Rightarrow P_0 = ce^0 \Rightarrow c = P_0$, logo a nossa constante c é igual a P_0, que substituindo no termo geral teremos: $P(t) = P_0 \cdot e^{k \cdot t}$.

Como foi dado no enunciado que $P(1) = \frac{3}{2}P_0$, substituindo no termo geral termos: $\frac{3}{2}P_0 = P_0 \cdot e^k \Rightarrow e^k = \frac{3}{2}$.

Sendo assim basta aplicar a operação inversa, onde teremos, $\ln e^k = \ln \frac{3}{2} \Rightarrow k = \ln \frac{3}{2}$, para obtermos o valor de k, sendo $k \cong 0,4055$, que substituindo no termo geral teremos: $P(t) = P_0 \cdot e^{0,4055t}$.

Neste caso, para encontrarmos o tempo necessário para que a população triplique faremos, $3P_0 = P_0 \cdot e^{0,4055t} \Rightarrow e^{0,4055t} = 3$, onde aplicando a inversa teremos, $\ln e^{0,4055t} = \ln 3 \Rightarrow 0,4055t \cong 0,1 \Rightarrow t \cong 2,71h$.

Portanto o tempo necessário para que a população triplique é de $2,71h$.

2.3.4 Decaimento radioativo

> (EM13CNT103) Utilizar o conhecimento sobre as radiações e suas origens para avaliar as potencialidades e os riscos de sua aplicação em equipamentos de uso cotidiano, na saúde, no ambiente, na indústria, na agricultura e na geração de energia elétrica. (BRASIL, p.555, 2016).

Similar aos modelos anteriores, no decaimento radioativo mudamos apenas a varável para A, onde A é a quantidade de elemento radioativo presente no instante t, sendo este apenas implementado pelo fato de que cada elemento tem um tempo de meia vida, tempo necessário para que metade dos átomos presentes em uma amostra radioativa desintegre-se.

Sendo assim temos que:

$$\frac{dA}{dt} = k \cdot A$$

Onde chegaremos a uma fórmula similar a encontrada para capitalização de juros.

$$\frac{dA}{A} = kdt.$$

A qual, sendo integrada em ambos os membros, teremos:

$$lnA + c_4 = kt + c_3 \Rightarrow lnA = kt + c_2.$$

Onde aplicando a operação inversa, $e^{lnA} = e^{kt+c_2}$, chegamos a:

$$A(t) = ce^{kt}.$$

Assim sendo, para um tempo inicial zero, $t = 0$, teremos:

$$A\left(0\right) = ce^{k \cdot 0} \Rightarrow A\left(0\right) = c.$$

Logo,

$$A\left(t\right) = A\left(0\right) e^{kt}.$$

Sendo o tempo de meia vida metade do valor inicial, $\frac{A(0)}{2}$, aplicando-se ao termo geral, teremos:

$$\frac{A\left(0\right)}{2} = A\left(0\right) e^{kt_m}.$$

Onde, t_m será o tempo da meia vida e desenvolvendo os cálculos encontramos que:

$$e^{kt_m} = \frac{1}{2}\ .$$

aplicando a operação inversa, $\ln e^{kt_m} = \ln \frac{1}{2}$, teremos:

$$t_m \cong -\frac{0,69}{k}.$$

Observação:

Como se trata de um decaimento a constante k será negativa, ficando o tempo do decaimento radioativo positivo, como não poderia deixar de ser.

Vejamos agora um problema envolvendo decaimento radioativo:

O isótopo de chumbo, Pb-209, decai a uma taxa proporcional à $A(t)$ e tem meia-vida, t_m, de $3,3h$. Se houver inicialmente $1g$ de chumgo, quanto tempo levará para que 90% decaia?

Sabendo que o isótopo de chumbo decai a uma taxa proporcional à $A(t)$, sendo a sua a meia vida de 3,3 horas, ou seja, $t_m = 3,3h$, para encontrarmos a constante de proporcionalidade em relação ao tempo, aplicaremos este valor ao termo geral do tempo de meia vida, onde teremos:

$$3,3h \cong -\frac{0,69}{k} \Rightarrow k \cong -\frac{0,69}{3,3} \Rightarrow k \cong -0,21$$

Portando a constante k de proporcionalidade da meia vida do chumbo, $Pb-209$, é $-0,21$.

Sendo a quantia inicial de $1g$, $A_0 = 1g$, para encontrarmos a quantidade resultante após um decaimento de 90% faremos:

$$A\left(t\right) = A\left(0\right) - 90\% = 1 - \frac{90}{100} = 0,1g$$

Logo a quantia final será de $0,1g$, ou seja, $A\left(t\right) = 0,1g$.

Agora basta substituirmos os valores encontrados no termo geral do decaimento radioativo, onde teremos:

$$0,1 = 1 \cdot e^{-0,21t}$$

Aplicando a função inversa:

$$\ln 0,1 = \ln e^{-0,21t}$$

Logo,

$$-0,21t \cong -2,3 \Rightarrow t \cong 11h$$

Portanto leva $11h$ para que o decaimento radioativo de uma grama de chumbo seja de 90%.

2.3.5 Aquecimento/resfriamento

Pela lei de Aquecimento/Resfriamento de Newton temos que o aquecimento/resfriamento é proporcional a diferença entre a temperatura inicial do corpo, T, e a temperatura do meio ambiente, T_m, sendo assim modelada pela EDO:

$$\frac{dT}{dt} = k(T - T_m)$$

Assim sendo, temos:

$$\frac{dT}{T - T_m} = kdt$$

Logo,

$$\ln(T - T_m) + c_4 = Kt + c_3$$

$$\ln(T - T_m) = Kt + c_2$$

Aplicando a operação inversa teremos:

$$e^{ln(T - Tm)} = e^{Kt + c_2} \Rightarrow T - Tm = c \cdot e^{kt}.$$

Deixando a temperatura em função do tempo temos:

$$T(t) = T_m + ce^{kt}$$

Vejamos um exemplo:

Um termômetro é removido de uma sala onde a temperatura ambiente é de 70°F e levado para fora, onde a temperatura é de 10°F. Após meio minuto, o termômetro indica 50°F. Qual será a leitura em $t = 1min$?

Como $T(t)$ é a função que rege a temperatura em função do tempo, onde $T\left(t\right) = Tm + ce^{kt}$, sendo a temperatura inicial igual a 70°F, temos que:

$$70 = 10 + ce^{k \cdot 0} \Rightarrow 70 - 10 = c \Rightarrow c = 60.$$

Sabendo que, ao ser levado para fora, onde a temperatura é de 10°F, $Tm = 10$°F, após meio minuto o termômetro indica 50°F, $T\left(\frac{1}{2}\right) = 50$°F, faremos:

$$50 = 10 + 60e^{k \cdot \frac{1}{2}}.$$

Logo,

$$50 - 10 \ = 60e^{\frac{k}{2}} \Rightarrow \frac{50 - 10}{60} = e^{\frac{k}{2}} \Rightarrow e^{k/2} = \frac{2}{3}.$$

Aplicando a função inversa teremos:

$$\ln e^{k/2} = \ln \frac{2}{3} \ \Rightarrow \frac{k}{2} = \ln \frac{2}{3} \Rightarrow k = 2 \ln \frac{2}{3} \Rightarrow k = \ln \left(\frac{2}{3}\right)^2 \Rightarrow k = \ln \frac{4}{9}.$$

Sendo a constante $k = \ln \frac{4}{9}$, para descobrirmos a leitura após 1 minuto basta fazermos:

$$T\left(1\right) = 10 + 60e^{\ln \frac{4}{9}} \ \Rightarrow T\left(1\right) = 10 + 60 \cdot \frac{4}{9}.$$

$$T\left(1\right) \cong 36,67^o F$$

Portanto, após um minuto a temperatura será de $36,67$°F.

2.3.6 Função horária da posição

A função horária da posição é mais um exemplo de função quadrática, onde $S(t)$ representa a posição no instante t. Sendo esta composta pelo espaço inicial mais a velocidade vezes o tempo mais a metade da aceleração vezes o tempo ao quadrado.

$$S(t) = S_0 + v \cdot t + \frac{a \cdot t^2}{2}$$

Sendo $S = S(t)$, a variação instantânea da posição do móvel, $\frac{dS}{dt} = v(t)$, é a sua velocidade instantânea, por sua vez, a variação instantânea da velocidade, $\frac{dv}{dt} = \frac{d^2S}{dt^2} = a(t)$, é a sua aceleração.

Observe que na função horária da posição, $S(t)$, o espaço inicial é uma constante, logo se derivarmos esta função teremos:

$$S'(t) = v + at = v(t)$$

A mesma observação se faz em relação a função horária da velocidade, $v(t)$, onde a velocidade inicial é uma constante, logo:

$$v\prime(t) = a$$

Vejamos algumas aplicações:

Um objeto é lançado para cima do alto da tore de Pisa, tendo a sua trajetória descrita pela função $h(t) = 57 + 4t - 4,9t^2$. Qual a sua velocidade em $t = 2s$?

Observando que a trajetória do objeto lançado é descrita pela função $h(t) = 57 + 4t - 4,9t^2$, sabendo que $v(t) = h'(t)$, temos que a velocidade instantânea é $v(t) = 4 - 9,8t$.

Logo, para $t = 2$, temos: $v(2) = 4 - 9,8 \cdot 2 \Rightarrow v(2) = -15,6\ m/s$.

Portanto no instante $t = 2$ a sua velocidade será de $-15,6\ m/s$.

(Metodista-SP) Em obras da construção civil, é comum vermos um operário, no solo, lançando tijolos para outro operário, que se encontra situado no piso superior. Considerando o lançamento de cada tijolo como sendo vertical, a resistência do ar nula, a aceleração da gravidade local igual a $10\frac{m}{s^2}$ e a distância entre as mãos do operário lançador e a do operário receptor igual a $3,2m$, o valor da velocidade com que cada tijolo deve ser lançado, de modo que chegue às mãos do operário receptor com uma velocidade nula, deve ser, em $\frac{m}{s}$, de

a) 5,0

b) 6,0

c) 7,0

d) 8,0

e) 9,0

Tendo pelo enunciado que a gravidade local é igual a 10 m/s^2, ou seja, $g = a = 10\ m/s^2$, e a distância entre as mão do operário lançador e a do operário receptor é igual a $3,2m$, ou seja, $\Delta S = 3,2m$, tomando o espaço inicial, ou seja, as mãos do operário lançador como zero, $S_0 = 0$, temos que $S(t) = 0$, sendo este deslocamento regido pela função horária da posição, $S(t) = S_0 + v \cdot t + \frac{a \cdot t^2}{2}$, substituiremos os valores encontrados nesta. Assim teremos:

$$3,2 = 0 + V_0 t + \frac{10 \cdot t^2}{2} \quad (I)$$

Sendo a velocidade instantânea $V(t) = S'(t)$, temos que: $V(t) = V_0 - 10t$.
Sendo a velocidade nula na chegada temos: $V_0 - 10t = 0$.
Logo,

$$V_0 = 10t \ (II)$$

Substituindo (II) em (I) temos:

$$3,2 = 10t \cdot t - 5t^2 \Rightarrow \ 5t^2 = 3,2 \Rightarrow t^2 = \frac{3,2}{5} \ \Rightarrow t = 0,8 \quad (III)$$

Substituindo (III) em (II) temos:

$$V_0 = 10 \cdot 0,8 \Rightarrow V_0 = 8m/s$$

Portanto o valor com que cada tijolo deve ser lançado é de $8m/s$.

Observação: Esta solução é apenas para exemplificar a aplicação, pois poderíamos solucionar o problema usando a Equação de Torricelli, onde teríamos:

$$V^2 = V_0^2 + 2(-10)(3,2 - 0) \Rightarrow V_0^2 = 64 \Rightarrow V_0 = \sqrt{64} \Rightarrow V_0 = 8$$

(FMS) Um corpo em queda livre, sujeito à acelaração gravitacional $g = 10\frac{m}{s^2}$, passa por um ponto A com velocidade de $10\frac{m}{s}$ e por um ponto B com velocidade de $50\frac{m}{s}$. A distância entre os pontos A e B é

a) 100 m

b) 120 m

c) 140 m

d) 160 m

e) 240 m

Diante do enunciado temos que a aceleração gravitacional de um corpo em queda livre é 10 m/s^2, ou seja, $g = a = 10\ m/s^2$, que este corpo passa por um ponto A com velocidade de 10 m/s e por um ponto B com velocidade de 50 m/s. Sendo a trajetória deste deslocamento regida pela função horária da posição, $S\,(t) = S_0 + v \cdot t + \frac{a \cdot\ t^2}{2}$, tomando o ponto A como espaço inicial, sendo este igual a zero, $S_0 = 0$, substituiremos os valores, ficando com a seguinte função:

$$S\,(t) = 0 + 10t + \frac{10}{2}t^2 \Rightarrow S\,(t) = 10t + 5t^2 \quad (I).$$

Sendo a velocidade instantânea $V\,(t) = S'\,(t)$, temos que: $V\,(t) = 10t + 10$.

Sendo a velocidade em B igual a 50 m/s, $V\,(t) = 50$, temos: $10t + 10 = 50$.

Logo, $10t = 50 - 10 \Rightarrow t = 40/10 \ \Rightarrow t = 4\ (II)$.

Substituindo (II) em (I) temos:

$$S\,(4) = 10\ \cdot 4 + 5\ \cdot 4^2\ \Rightarrow S\,(4) = 40 + 80\ \Rightarrow S\,(4) = 120.$$

Como tomamos A como espaço inicial, sendo este igual a zero, $S_0 = 0$, temos que $\Delta S = 120m$.

Portanto a distância entre A e B é de 120 metros.

Observação: Esta solução é apenas para exemplificar a aplicação, pois poderíamos solucionar o problema usando a Equação de Torricelli, $V^2 = V_0^2 + 2a\Delta S$, onde substituindo os dados teríamos:

$50^2 = 10^2 + 2(10)\Delta S \Rightarrow 2500 = 100 + 20\Delta S$

$20\Delta S = 2500 - 100 \Rightarrow \Delta S = \frac{2400}{20} \Rightarrow \Delta S = 120m$

3 ANÁLISE E DISCUSSÃO DOS RESULTADOS

Expor todas as potencialidades da Modelagem Matemática seria como tentar definir na íntegra o que é Matemática, então o que apresentamos aqui são eventuais possibilidades, trocando a parte pelo todo em uma amostra representativa onde não só demostramos a necessidade desta técnica para educar, mas para vida. Embora os rigores matemáticos tenham sido implantados na modelagem esta se dá de forma natural, simples como parte integrante da criatividade humana, sendo que ninguém pode ser forçado a modelar, a modelagem tem que ser uma expressão onde o autor imprime a idiossincrasia de forma espontânea, mas podemos expor, dar a este, a sensação de criadores, autores ao veem a sua criação trazendo benefícios, sejam estes de forma individual ou coletiva e desta forma a modelagem é indissociável da Educação Matemática em qualquer nível ou contexto. É por esta ótica que nos propomos e estamos propondo aqui a ideia de implantar a modelagem de forma contínua em todos os níveis da educação.

Diante do exposto, onde evidenciamos a necessidade da Modelagem Matemática como tendência metodológica, não de forma isolada, mas como uma base para outras tendências como a Pesquisa, a História da Matemática, o Letramento Matemático a Resolução de Problemas entre outras. Demonstramos que é inviável para o sistema educacional separar a Modelagem Matemática da Educação Matemática, assim como é inviável propor ementas para serem cumpridas em tempo recorde, onde a preocupação não é a educação em si, mas o cumprimento de um direito estampado na Constituição Federal, sendo assim cabem aos educadores se adaptarem as imposições do sistema.

A Modelagem Matemática demanda tempo, principalmente quando os elos do sistema educacional estão quebrados, seja pelo discente sem interesse e ainda com dificuldades para modelar, seja pelo docente sem prática ou mesmo pela falta de aparatos e tecnologias educacionais. Sendo assim o tempo é um dos condicionantes que limita o processo de modelagem e é por este motivo que este trabalho vem trazer não só um leque de possibilidades de aplicações com Modelagem Matemática, mas um potencializador do processo, as Equações Diferenciais Ordinárias, ainda que em um contexto simplificado, pois este trabalho é voltado para aplicações no Ensino Médio, mas que retrata a ideia contida nestas equações que serão alavancadoras não só para Modelagem Matemática mas para todo o processo de ensino-aprendizagem. As estratégias contidas não só no conceito geral das Equações Diferenciais Ordinárias, mas em todos os conceitos por trás delas como o de derivadas, limites, operações inversas e outros, nos leva a trabalhar e analisar as variações ao nosso redor, produzindo um alto nível de conscientização no sujeito, que é aguçado a pesquisar e modelar cada vez mais, desenvolvendo assim um pensamento analítico aprimorado e porque não dizer crítico.

Enquanto educadores, buscamos produzir uma educação libertadora, uma educação capaz de transformar a realidade de indivíduos ativos e participativos na construção de um mundo melhor, essa liberdade é encontrada com a educação crítica, a qual também é proporcionada e potencializada pela Modelagem Matemática, sendo assim chamada de Modelagem Matemática Crítica.

3.1 MODELAGEM MATEMÁTICA CRÍTICA

Ao aplicarmos a Modelagem Matemática como metodologia de ensino e aprendizagem procuramos atingir o ápice, a Modelagem Matemática Crítica (MMC), trazendo para nossa prática pedagógica, enquanto professores, reflexões que possam auxiliar os alunos a analisarem criticamente o mundo no qual estão inseridos. Essa educação crítica proporcionada pela Modelagem Matemática fornece ferramentas para que os alunos, cidadãos em formação, possam atuar conscientemente como agentes transformadores do meio em que vivem.

> [...] fundamenta-se na compreensão e no entendimento da realidade na qual os alunos estão inseridos pela reflexão, análise e ação crítica sobre essa realidade. Ao emprestar-se da realidade os sistemas nela existentes, os alunos passam a estuda-los simbólica, sistemática, analítica e criticamente. Nesse caso, partindo de uma [determinada] situação-problema, os alunos podem levantar hipóteses, testá-las, corrigi-las, fazer transferências, generalizar, analisar, concluir e tomar decisões sobre o objeto estudado. (OREY; ROSA, 2007, p. 204)

Esta conscientização proporcionada pela Modelagem Matemática traz uma visão mais aguçada, uma percepção apurada de fatores condicionantes e tem um importante papel na educação crítica e na cidadania, pois auxilia os alunos a entenderem as imposições sociais ao mesmo tempo em que moldam a informação ao seu favor, de acordo com suas necessidades.

> [...] refletir sobre a realidade torna-se uma ação transformadora que procura reduzir seu grau de complexidade permitindo aos alunos explicá-la, entendê-la, manejá-la e encontrar soluções para os problemas que nela se apresentam. (OREY; ROSA, 2007, p. 204)

Para melhor compreendermos como estes condicionantes, muitas vezes impostos por fatores sociais, podem nos induzir a erros imperceptíveis, vamos a uma análise gradativa de como processamos as informações.

Nõa imortpa a oderm das ltreas drtneo das pvaralas, bsata que a pmrireia e a úmtila ltrea etjasem no lguar crteo e vcoê enednte tduo o que etsá erctiso. O que esse trecho de texto revela é que nos atemos a ideia inicial e um resultado satisfatório, a resolução ou o percurso para obtenção do resultado não importa.

O mesmo acontece quando são misturados letras e números, pois também é **F4C1L L3R QU4LQU3R M3N5AG3M S3M P3NS4R MU170**, com imagens, por exemplo a Figura 18

Figura 18 – Cartas de Baralho

Fonte: Autor (2021)

Uma sequência de naipes de paus, paus, ouros e espada, com o naipe de espada virado e pintado de vermelho, para vermos copas, e por fim, para percebermos o condicionamento da nossa mente, repleta de pensamos lineares, onde durante o pensamento seguimos uma sequência lógica imposta pelos condicionantes que podem nos induzir ao engano. Vejamos o seguinte problema: três amigos foram a uma lanchonete, chegando lá pediram o mesmo tipo de lanche, ao terminarem um dos amigos gritou: garçom a conta? Imediatamente o garçom somou a conta e respondeu: trinta reais, os amigos levantaram e cada um sacou dez reais e entregou ao garçom, que retornou ao balcão e entregou ao dono da lanchonete o dinheiro e a comanda para conferência, após conferir o dono da lanchonete chamou o garçom e disse, você somou errado, a conta só deu 25 reais, volte lá e devolva cinco. Ruim de conta, mas "esperto", o garçom percebeu que os cinco reais não dariam a divisão exata por três amigos e logo colocou dois reais no bolço e devolveu um real a cada amigo. Agora vamos pensar um pouco, se cada amigo deu dez reais e recebeu um de troco, então pagou nove, três vezes nove é vinte e sete, mais dois que o garçom colocou no bolso, vinte e nove, para trinta falta um, então onde está o outro real?

É comum enxergarmos as coisas sempre na forma em que costumamos encontrá-las ou enxergarmos o que queremos ver, e isto nos leva a tirar conclusões precipitadas. Nos naipes, geralmente nove de dez erram, o que não acontece com uma criança de oito anos que aprendeu há pouco tempo os nomes dos naipes e ainda está associando a forma e a cor aos nomes. Como a nossa mente está condicionada a reconhecer como vermelho somente ouro e copas, e o formato de copa se parece com o de espada, tiramos conclusões precipitadas e geralmente nos equivocamos. O mesmo acontece com o problema acima, certos da exatidão Matemática não nos atemos ao fato de que os dois reais do garçom esta inserido nos vinte e sete, pois a conta só deu vinte e cindo, sendo que os vinte e sete da conta deve ser adicionado aos três de troco, dando assim trinta.

Estes condicionantes são muito usados pela politicalha, na estatística, por exemplo, pagam pesquisas para serem realizadas em seus redutos políticos, fornecendo assim uma amostra viciada e induzindo o eleitor ao lado que, segundo as pesquisas, está propenso a vitória. Confiante no resultado da pesquisa o eleitor não percebe o desenvolvimento fraudulento da mesma e apenas confiante no resultado toma a decisão de forma equivocada.

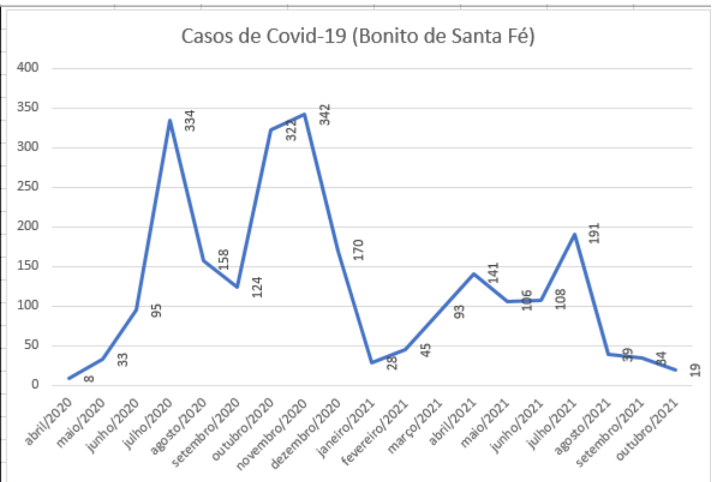
Na educação, estando com a mente condicionada pela competitividade do sistema, o professor cria teorias informais para avaliar e involuntariamente separa os alunos retardatários dos demais, tirando conclusões precipitadas sobre a capacidade intelectual dos mesmos, enganando-se pela aparência, como no caso dos naipes. Este distanciamento está condicionado a variável tempo e aumenta continuamente, fazendo com que a teoria informal do professor, que avaliou o aluno como incapaz, pareça verdadeira não só aos seus olhos, mas aos olhos de todos, como no caso da lanchonete em que fomos induzidos ao erro e não conseguimos enxergar sem um olhar aguçado o equívoco.

Este fator crítico, assim como a capacidade de modelar mais e melhor, só se adquire com a prática. Vejamos agora o quanto necessitamos desenvolver este senso crítico com um exemplo envolvendo Equações Diferenciais.

Na Figura 19 abaixo temos a quantidade mensal de casos de Covid-19 em Bonito de Santa Fé no estado da Paraíba, dados fornecidos pela secretaria de saúde do município.

Figura 19 – Quantidade de casos por mês

Mês de Referência	Casos p/ mês
abril/2020	8
maio/2020	33
junho/2020	95
julho/2020	334
agosto/2020	158
setembro/2020	124
outubro/2020	322
novembro/2020	342
dezembro/2020	170
janeiro/2021	28
fevereiro/2021	45
março/2021	93
abril/2021	141
maio/2021	106
junho/2021	108
julho/2021	191
agosto/2021	39
setembro/2021	34
outubro/2021	19
Total:	2390

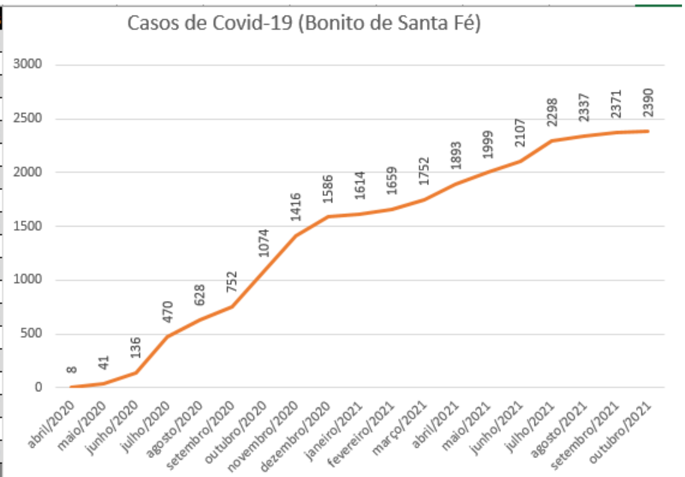


Fonte: Autor (2021)

Na próxima imagem, os mesmos dados de forma linear, de forma cumulativa um somatório dos meses anteriores com o mês atual.

Figura 20 – Casos acumulados

Mês de Referência	Quant. Casos
abril/2020	8
maio/2020	41
junho/2020	136
julho/2020	470
agosto/2020	628
setembro/2020	752
outubro/2020	1074
novembro/2020	1416
dezembro/2020	1586
janeiro/2021	1614
fevereiro/2021	1659
março/2021	1752
abril/2021	1893
maio/2021	1999
junho/2021	2107
julho/2021	2298
agosto/2021	2337
setembro/2021	2371
outubro/2021	2390
Total:	26531



Fonte: Autor (2021)

Sem uma visão crítica do que está acontecendo, diante dos dados expostos de forma linear, somos levados a aplicar o modelo de Thomas Malthus, $P = ce^{kt}$, o que pode nos levar a uma análise precipitada e equivocada dos dados, pois se aplicarmos o modelo em dados referentes aos meses de novembro, dezembro e janeiro; considerando novembro como o início da pandemia, teremos o seguinte resultado:

Dados:

Nov.: $P = 1516;\ \ t = 0$

Dez.: $P = 1586;\ \ t = 1$

Jan.: $P = 1614;\ \ t = 2$

$P = ce^{kt}$

P/ Nov. $\quad 1516 = ce^{k \cdot 0} \Rightarrow 1516 = ce^{0} \Rightarrow c = 1516$

P/ Dez. $1586 = 1516e^{k \cdot 1} \Rightarrow 1586 = 1516e^{k} \Rightarrow e^{k} = \frac{1586}{1516} \Rightarrow e^{k} \cong 1,04$

$\ln e^{k} \cong \ln 1,04 \Rightarrow k \cong 0,039$

P/Jan.

$P \cong 1516e^{0,039 \cdot 2} \Rightarrow P \cong 1516e^{0,078} \Rightarrow P \cong 1516 \cdot 1,08 \Rightarrow P \cong 1637$

Observe que o resultado é aceitável, pois se aproxima da realidade em janeiro do ano de 2020 em Bonito de Santa Fé, o que acontece é que pegamos um ponto de pico e estabelecemos como início da pandemia, mas se pegarmos o valor inicial e um ponto aleatório, como fevereiro de 2021, iremos verificar uma grande divergência em relação a realidade.

Dados:

Abril/2020: $P = 8;\ \ t = 0$

Outubro/2020: $P = 1074;\ \ t = 6$

Abril/2021: $P = 1614;\ \ t = 12$

$P = ce^{kt}$

P/ Abril/2020

$8 = ce^{k \cdot 0} \Rightarrow 8 = ce^{0} \Rightarrow c = 8$

P/ Outubro/2020

$1074 = 8e^{k \cdot 6} \Rightarrow \frac{1074}{8} = e^{6k} \Rightarrow e^{6k} = 134,25$

$\ln e^{6k} = \ln 134,25 \Rightarrow 6k \cong 4,9 \Rightarrow k \cong 0,81$

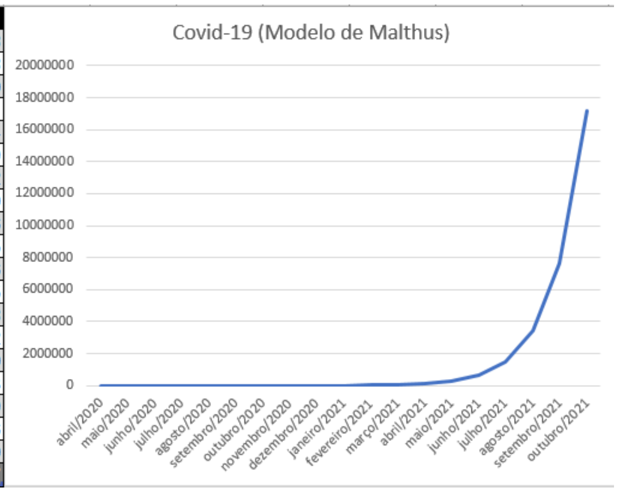
P/ Abril/2021

$P \cong 8 \cdot e^{0,81 \cdot 12} \Rightarrow P \cong 8e^{9,72} \Rightarrow P \cong 8 \cdot 16.647,24 \Rightarrow P \cong 133.178$

Observe a imagem:

Figura 21 – Casos de Covid-19 pelo modelo de Malthus

Mês de Referência	Casos Real	Malthus
abril/2020	8	8
maio/2020	41	18
junho/2020	136	40
julho/2020	470	91
agosto/2020	628	204
setembro/2020	752	459
outubro/2020	1074	1032
novembro/2020	1416	2320
dezembro/2020	1586	5216
janeiro/2021	1614	11725
fevereiro/2021	1659	26356
março/2021	1752	59245
abril/2021	1893	133178
maio/2021	1999	299372
junho/2021	2107	672960
julho/2021	2298	1512753
agosto/2021	2337	3400529
setembro/2021	2371	7644076
outubro/2021	2390	17183180
Total:	26531	38626207



Fonte: Autor (2021)

O que acontece é que este modelo não avalia os condicionantes e durante a pandemia houveram diversos condicionantes, entre eles o que chamamos de "distanciamento social", que continha a população, diminuindo assim o número de contágios, ao mesmo tempo em que tivemos eleições, que levou a população as ruas, o que é bem representado no ponto de pico.

Sendo assim, diante de uma análise crítica da situação, poderíamos usar um modelo que representasse alguns destes condicionantes, ficando ele assim.

A população seria dividida em classes:

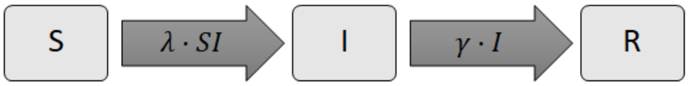
S: indivíduos suscetíveis, que podem contrair a doença;

I: indivíduos infectados, aqueles que tem a doença e podem transmitir;

R: indivíduos recuperados, aqueles que contraíram a doença, mas se recuperaram.

Observe que os indivíduos da população podem transitar entre essas categorias, sendo que os infectados precisam do contato para transmitir a doença, logo a número de contagio é proporcional ao número de infectados vezes o número de suscetíveis e o número de recuperados proporcional ao número de infectados, ficando assim o modelo.

Figura 22 – Casos de Covid-19 pelo modelo de SIR



Fonte: Autor (2021)

Observe que este modelo ainda seria suscetível a erros, pois teríamos que considerá taxas de natalidade ou mortalidade, entre outras, dentro destas classes, o que é viável quando se tem os dados reais para análise, mas o intuito principal aqui é demonstrar o quanto essa análise crítica é essencial nos cálculos, sejam em dinâmica populacional ou em qualquer outro, e sendo assim comprovamos a necessidade de uma educação crítica, de Modelagem Matemática Crítica em todas as fases do ensino.

4 CONSIDERAÇÕES FINAIS

As configurações da Modelagem Matemática associadas as configurações das Equações Diferenciais Ordinárias ampliam todas as perspectivas sociocríticas, favorecendo a comunicação e propiciando o diálogo em diversas esferas do conhecimento, este favorecimento aproxima cada vez mais os professores de Matemática dos alunos que sentem o prazer de aplicar em seu cotidiano o que foi aprendido em sala de aula.

O desenvolvimento das etapas da Modelagem Matemáticas faz com que professores, estudantes e a comunidade trabalhem de forma colaborativa, se apropriando do saber em busca do bem estar social. Tudo começa na primeira fase do diálogo, quando professores e alunos sentam para definir interesses, curiosidades e necessidades comuns ao grupo, esta comunicação se difunde quando o aluno planeja juntamente com o professor a pesquisa, a forma como os dados serão colhidos, e se concretiza de forma colaborativa quando os resultados alcançado se propagam e são aplicados na comunidade.

A aprendizagem estabelecida pela Modelagem Matemática torna-se cada vez mais eficaz e efetiva quando se insere as definições das Equações Diferenciais Ordinárias. A mediação propiciada pelo professor que conduz os estudantes a discutirem as suas estratégias ao mesmo tempo em que difunde o conhecimento propiciado pelas Equações Diferenciais, fazendo com que alunos explorem as variáveis dos modelos matemáticos em diversas óticas, usando a informação contidas nos meios midiáticos ao seu favor, de forma individual ou coletiva, descobrindo que a Matemática de sala de aula é concebida para ser usada em problemas do dia a dia, uma característica peculiar do cenário investigativo, que diverge do paradigma dos exercícios transcritos em livros didáticos, faz com que a aprendizagem esteja sendo sempre revidada, tornando-a eficaz e efetiva.

As Equações Diferenciais Ordinárias potencializam as perspectivas sociocríticas propiciada pela Modelagem Matemática aproximando cada vez mais a Educação Matemática escolar do contexto social no qual os estudantes estão inseridos, promovendo um estreitamento na relação entre o conhecimento propiciado em sala de aula com os recursos e as necessidades do nosso tempo. É dada ao estudante, que diante do processo de Modelagem Matemática assume uma postura de pesquisador, autonomia para buscar o saber e este consequentemente aumenta o nível de consciência e passa a assumir uma postura sociocrítica.

A percepção de uma nova postura sociocrítica estabelecida pela Modelagem Matemática traz a necessidade de implementações a esta em relação a uma educação crítica e este aperfeiçoamento se dá quanto através das Equações Diferenciais Ordinários os alunos passam a perceber e trabalhar com os condicionantes impostos por fatores sociais, aprimorando essa modelagem para o que conhecemos como Modelagem Matemática Crítica.

REFERÊNCIAS

ALVES, J. V. *Teoria do Flow*. 2020. Disponivel em: <https://www.orcestra.com.br/post/ a-psicologia-dos-desafios-cotidianos-teoria-do-flow-e-a-gamificação>. Acesso em: 29/10/2021. Citado na página 24.

BASSANEZI, R. C. *Ensino-aprendizagem com modelagem matemática*: uma nova estratégia. São Paulo: Ed. Contexto, 2002. Citado 5 vezes nas páginas 11, 16, 18, 19 e 23.

BIEMBENGUT, M. S. Modelagem na educação matemática e na ciência. *São Paulo: Livraria da Física*, 2016. Citado na página 11.

BIEMBENGUT, M. S.; HEIN, N. *Modelagem Matemática no Ensino*. 4. ed. São Paulo: Ed. Contexto, 2005. Citado 2 vezes nas páginas 15 e 23.

BIEMBENGUT, M. S. et al. Qualidade no ensino de matemática na engenharia: uma proposta metodológica e curricular. 1997. Citado na página 11.

BOGDAN, R.; BIKLEN, S. K. *Qualitative Research for Education*. Boston: Allyn and Bacon, 1982. Citado na página 13.

BOYCE, W. E.; DIPRIMA, R. C. *Equações diferenciais elementares e problemas de valores de contorno*. [S.l.]: Guanabara Dois, 1985. Citado na página 36.

BRASIL. Ministério da educação. *Base Nacional Comum Curricular*, Brasília, 2018. Citado 2 vezes nas páginas 20 e 21.

CORTêS, R. *Translação Vertical e Horizontal das Funções*. 2019. Disponivel em: <https://geniodamatematica.com.br/translacao-vertical-e-horizontal/>. Acesso em: 31/10/2021. Citado na página 34.

DANTE, L. R. Matemática: contexto e aplicações. matemática ensino médio. *São Paulo. Ed. Ática,*, v. 1, 2010. Citado na página 31.

DE CAMPOS, A. M. A. Teoria do flow: construção de jogos para a aprendizagem da matemática. *Encontro de Ludicidade e Educação Matemática*, 2021. Citado na página 24.

DIAS, J. F. *Métodos quantitativos*. [S.l.]: Ed. Educacional, 2016. Citado na página 31.

EVES, H. W. *Introdução à História da Matemática. Tradução: Hygino H. Domingues*. Campinas: Ed. Unicamp, 1995. Citado na página 29.

GUIDORIZZI, H. L. *Um curso de cálculo, vol. 4* . Rio de Janeiro: Ed. LTC, 2015. Citado na página 33.

LÜDKE, M.; ANDRÉ, M. E. D. A. A análise de dados e algumas questões relacionadas à objetividade e à validade nas abordagens qualitativas. *Pesquisa em educação: abordagens qualitativas. São Paulo: EPU*, 1986. Citado na página 13.

MARTINS, G. *Custo construção*. 2015. Disponivel em: <https://engenheirodecustos.com.br/orcamento-parametrico-cub/custo-construcao>. Acesso em: 12/09/2021. Citado na página 15.

MEDINA, A. B. *Inclinação do telhado*. 2017. Disponivel em: <https://silo.tips/download/orientaoes-tecnicas-1-composiao-do-telhado>. Acesso em: 22/10/2021. Citado na página 18.

MOREIRA, M. A. *A teoria da aprendizagem significativa e sua implementação em sala de aula*. [S.l.]: Editora Universidade de Brasília, 2006. Citado na página 21.

NISS, M. Models and modelling in mathematics education. *Mathematics Education*, p. 49–52, 2018. Citado na página 19.

OREY, D. C.; ROSA, M. A dimensão crítica da modelagem matemática: ensinando para a eficiência sociocrítica. *Horizontes*, v. 25, n. 2, p. 197–206, 2007. Citado na página 46.

SARTORELLI, K. *Como é feito um telhado*. 2019. Disponivel em: <https://100pepinos.com.br/como-e-feito-um-telhado>. Acesso em: 17/10/2021. Citado na página 17.

SUTHERLAND, R. *Ensino eficaz de matemática*. [S.l.]: Ed. Artmed, 2009. Citado na página 25.

INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA DA PARAÍBA
Campus Cajazeiras
Rua José Antônio da Silva, 300, Jardim Oásis, CEP 58.900-000, Cajazeiras (PB)
CNPJ: 10.783.898/0005-07 - Telefone: (83) 3532-4100

Documento Digitalizado Ostensivo (Público)

Trabalho de Conclusão de Curso de Délio de Arruda Almeida

Assunto:	Trabalho de Conclusão de Curso de Délio de Arruda Almeida
Assinado por:	Délio Almeida
Tipo do Documento:	Anexo
Situação:	Finalizado
Nível de Acesso:	Ostensivo (Público)
Tipo do Conferência:	Cópia Simples

Documento assinado eletronicamente por:

- **Délio de Arruda Almeida**, **ALUNO (201812020012) DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA - CAJAZEIRAS**, em 14/12/2021 20:11:28.

Este documento foi armazenado no SUAP em 14/12/2021. Para comprovar sua integridade, faça a leitura do QRCode ao lado ou acesse https://suap.ifpb.edu.br/verificar-documento-externo/ e forneça os dados abaixo:

Código Verificador: 399951
Código de Autenticação: 27435ac5b2