INSTITUTO FEDERAL
Paraíba
Campus Campina Grande

INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA DA PARAÍBA

CURSO SUPERIOR DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

JESUS CAMILO DUARTE NETO

DERIVADAS E APLICAÇÕES

CAMPINA GRANDE - PB

SETEMBRO/2022

JESUS CAMILO DUARTE NETO

DERIVADAS E APLICAÇÕES

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado no Curso Superior de Licenciatura em Matemática do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia da Paraíba (IFPB), como requisito parcial para obtenção do título de Licenciado em Matemática.

Orientador: Prof. Me. Orlando Batista de Almeida

D966d Duarte Neto, Jesus Camilo.
Derivadas e aplicações / Jesus Camilo Duarte Neto. - Campina Grande, 2022.
64 f. : il.

Trabalho de Conclusão de Curso (Curso de Licenciatura em Matemática) - Instituto Federal da Paraíba, 2022.
Orientador: Prof. Me. Orlando Batista de Almeida.

1. Matemática- Ensino 2. Derivadas ordinárias 3. Teorema 4. Demonstrações e aplicações I. Título.

CDU 51

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
SECRETARIA DE EDUCAÇÃO PROFISSIONAL E TECNOLÓGICA
INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA DA PARAÍBA
CAMPUS CAMPINA GRANDE

JESUS CAMILO DUARTE NETO

DERIVADAS E APLICAÇÕES

Trabalho de Conclusão de Curso, aprovado como requisito parcial para a obtenção de graduação em Licenciatura em Matemática pelo Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia da Paraíba – Campus Campina Grande.

Habilitação: Licenciatura

Data da aprovação

09 / 09 / 2022.

BANCA EXAMINADORA:

Orlando Batista de Almeida

ORIENTADOR: Prof. Me. Orlando Batista de Almeida - IFPB

Cicero da Silva Pereira

AVALIADOR: Prof. Me. Cicero da Silva Pereira – IFPB

Vinicius Costa de Alencar

AVALIADOR: Prof. Me. Vinícius Costa de Alencar – IFPB

AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente a Deus, pela minha vida, e por me ajudar a ultrapassar todos os obstáculos encontrados, não somente no período do curso de Matemática, mas ao longo de toda minha vida.

Agradeço ao meu orientador, o Professor Me. Orlando Batista de Almeida por ter aceitado acompanhar-me neste projeto. A sua grande dedicação foi essencial para a minha motivação conforme que as dificuldades surgiam ao longo da caminhada.

Agradeço a minha família principalmente a minha esposa Viviane que sempre esteve ao meu lado.

Expresso minha gratidão a todos os profissionais do curso de Matemática da Instituto Federal de Campina Grande-PB por todo o suporte que me deram ao longo da construção do meu trabalho.

Aos professores do curso de Matemática que me muniram de todas as bases necessárias para a realização deste trabalho, agradeço com profunda admiração pelo vosso profissionalismo.

A todos os professores e também ao corpo funcional do IFPB, que são muito atenciosos e prestativos com todos os alunos.

Aos auxílios oferecidos pelo IFPB, que é um apoio muito especial para todos os estudantes e que contribuíram para minha formação.

Aos membros da banca que com gentileza se colocaram à disposição para cooperarem com sabedoria na construção desse trabalho.

O conhecimento serve para encantar as pessoas, não para humilhá-las.

Mario Sérgio Cortella

RESUMO

Este trabalho apresenta como tema principal o estudo das derivadas ordinárias. No desenvolvimento do trabalho de caráter bibliográfico foi feita uma abordagem da teoria de modo simples, objetivo e prático, mas, sempre com o rigor matemático exigido, seguindo para aplicações práticas sobre o tema, foram apresentadas definições, exemplos, observações, teoremas, demonstrações e aplicações sobre derivadas.

Palavras-chave: Derivadas Ordinárias. Teoria, Teoremas, Demonstrações e Aplicações.

ABSTRACT

This work presents as its main theme the study of ordinary derivatives. In the development of the bibliographic work, the theory was approached in a simple, objective and practical way, but, always with the required mathematical rigor, moving on to practical applications on the subject, definitions, examples, observations, theorems, demonstrations and derivative applications.
Keywords: Ordinary Derivatives. Theory, Theorems, Demonstrations and Applications.

NOTAÇÕES

Notação	**Significado**
$f(x)$	Função de x
$\in$	Pertence
$\mathbb{R}$	Reais
$\lim_{x \to x_0}$	Limite
f'	Derivada
$\sin x$	Função Seno de x
$\cos x$	Função Cosseno de x
$\sqrt[3]{9}$	Raiz
Δ	Delta
$\frac{dv}{dx}$	Derivada
ln	Logaritmo Neperiano
e	Número de Euler

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

SUMÁRIO

1. INTRODUÇÃO

Este trabalho traz como proposta uma abordagem sobre derivadas, fazendo uma introdução inicial e detalhada com o objetivo principal de trazer uma contribuição embasada sobre os conceitos de derivada bem como algumas aplicações práticas. Sendo o Cálculo Diferencial e Integral, o assunto onde as derivadas estão inseridas, um dos instrumentos mais comumente utilizados pelas áreas das ciências exatas para resolver a complexidade de diversos problemas. Assim, o Cálculo é considerado um dos conteúdos matemáticos mais influentes no desenvolvimento científico e tecnológico atual. Para conseguir um estudo sobre a gênese do Cálculo, precisaríamos de uma busca ampla em que resultado constituiria num texto longo que estaria fora do objetivo deste trabalho no geral. O início da derivada e o seu crescimento se funde com o do cálculo, pois o cálculo nasceu com o desenvolvimento da derivada e do integral. A autoria do desenvolvimento do cálculo é tema bastante discutido, pois uns defendem que foi o matemático inglês Sir Isaac Newton que o desenvolveu, enquanto outros creditam ao filósofo e polímata (indivíduo que estuda ou que conhece muitas ciências) alemão Gottfried Wilhelm Leibniz como o criador do cálculo. Porém, deve-se saber que os dois colaboraram bastante para o cálculo. O conceito de derivada que conhecemos origina-se de Leibniz, inclusive as notações mais usuais e nomenclatura. Nesse sentido, a questão que norteia o presente instrumento é apresentar um acessível trabalho a alunos e docentes em início de suas funções sobre os conceitos das derivadas e apresentar também aplicações. Objetivando a compreensão que facilitará o entendimento das derivadas e suas aplicações o trabalho parte inicialmente da apresentação dos conceitos prévios que auxiliarão posteriormente nas demonstrações. Daí, partiremos para uma parte mais teórica referente as derivadas com teoremas, exemplos e demonstrações. Para finalizar trabalharemos algumas aplicações das derivadas, utilizadas em várias áreas do conhecimento.

Figura 1 – Issac Newton (esquerda) e Leibniz (direita)

Fonte: Revista Galileu

2. CONTEXTUALIZAÇÃO HISTÓRICA

O que o torna o cálculo infinitesimal tão versátil é a grande variedade de áreas em que pode ser aplicado, como na matemática, na física, na tecnológica e na economia. A derivada é, por exemplo, um conceito fundamental da física, pois explica acelerações, velocidades instantâneas e forças. (GALILEU). E por volta de 300 anos atrás Sir Issac Newton e Gottfried Wilhelm Leibniz (que também era filósofo) travavam uma notável luta pela paternidade do cálculo infinitesimal. Por causa disto Newton disse a famosa frase: "Os segundos inventores não têm direitos".

Isaac Newton foi um matemático, físico, astrônomo, teólogo e autor, nasceu na Inglaterra numa aldeia no condado de Lincolnshire. Seu pai, também chamado Isaac Newton, morreu três meses antes. Nascido prematuramente, Newton era uma criança pequena por conta de sua prematuridade. Dos doze anos até os dezessete anos Newton foi educado na escola The King's School, em Grantham, que ensinava latim e grego e provavelmente transmitia uma base significativa de matemática. Em junho de 1661 foi admitido no Trinity College, Cambridge o qual faz parte da Universidade de Cambridge, na cidade de Cambridge, Reino Unido. Passou quatro anos em Cambridge e recebeu seu grau de Bacharel em Artes, em 1665. Tornou-se amigo do Professor Isaac Barrow, que o estimulou a desenvolver suas aptidões matemáticas, tornando-o seu assistente. Entre 1665 e 1667, durante o tempo em que a universidade ficou fechada, em consequência de uma epidemia de peste bubônica que assolou a Inglaterra e matou um décimo da população, Isaac Newton teve que voltar para a casa da sua mãe. Foi neste período, Newton fez as descobertas mais importantes para a ciência: descobriu a lei fundamental da gravitação, imaginou as leis básicas da Mecânica e aplicou-as aos corpos celestes, inventou os métodos de cálculo diferencial e integral, além de estabelecer os alicerces de suas grandes descobertas ópticas. Em 1667, quando a universidade reabriu, Newton voltou para sua atividade secundária de ensino, mas logo progrediu e com 26 anos, tornou-se professor de Matemática, sucedendo seu próprio mestre e protetor Isaac Barrow. Em 1672 foi eleito para a Royal Society. Representou a universidade de Cambridge no Parlamento, por duas vezes, de 1689 e 1690 e em 1701. Foi diretor da Casa da Moeda, época em que fortaleceu a moeda e reergueu e crédito nacional. Em 1705, a rainha Ana outorgou a Newton o título de “Sir”. Foi o primeiro cientista a receber tal honraria (FRAZÃO). Isaac Newton Passou o resto de sua vida científica ampliando suas descobertas entre elas a invenção de um novo sistema matemático de cálculo infinitesimal também conhecido como derivadas. Sir Isaac Newton, apesar de célebre, vivia sozinho, isolado e não se dava bem em sociedade. Ainda assim, quando faleceu aos 84 anos de idade, tinha um status glorioso na Inglaterra e seu funeral foi digno de um rei (FRAZÃO).

Figura 2 - Estátua de Isaac Newton, em Cambridge, Reino Unido.
Fonte: Ebiografia.

Por outro lado, nesta disputa temos Gottfried Leibniz (1646-1716) um filósofo e matemático alemão, estudioso do cálculo integral e também do cálculo binário, que seria futuramente importante para o embasamento dos programas de computadores. Nasceu em Leipzig, na Alemanha, em 1 de julho de 1646. Foi criado pela mãe ao ficar órfão de pai muito cedo. Entrou na escola Nicolau com apenas sete anos. Estudou latim e grego e adquiriu conhecimento de forma autodidata. Aos 14 anos, entrou precocemente na Universidade de Leipzig e graduou-se em filosofia. Em 1663, recebeu o grau de mestre em filosofia. Em 1666, publicou sua tese “Dissertação sobre a arte combinatória”. Na Universidade de Altdorf, recebeu o doutorado em Direito. Em Londres, participou da Royal Society e foi eleito membro, depois de exibir a sua invenção, a máquina de calcular. Desenvolveu o teorema fundamental do cálculo, publicado em 1677 e devidamente aplicado na Europa, embora Newton já tivesse estudos não publicados sobre o assunto (FRAZÃO). Faleceu em Hanôver na Alemanha, no dia 14 de novembro de 1716, vítima de uma crise de gota foi sepultado num funeral vazio, cujo único presente era seu secretário.

Figura 3 - Gottfried Wilhelm von Leibniz
Fonte: Ecalculo

O primeiro trabalho sobre Cálculo Diferencial foi publicado por Leibniz em 1684, antes mesmo do que Newton, sob o longo título Nova methodus pro maximis et minimis, itemque tangentibus, qua nec irrationales quantitates moratur. Nesse trabalho apareceram as fórmulas da derivada do produto e derivada do quociente. Apesar das disputas, tanto Newton quanto Leibniz aceitaram a relevância do "concorrente". Leibniz disse: Considerando a Matemática desde o início do mundo até a época de Newton, o que ele fez é sem dúvida a melhor metade. Newton, por sua vez, na primeira edição do Principia, admitiu que Leibniz tinha um método semelhante ao seu. Excepcionalmente, na terceira edição, posteriormente ao ápice das desavenças, Newton retirou a referência a Leibniz. Mas, o desenvolvimento do Cálculo não parou neles e continuou com muitos outros matemáticos, como, por exemplo, Jacques Bernoulli, Johann Bernoulli, Euler, d'Alembert, Lagrange e Cauchy (ECALCULO.USP).

3. OBJETIVOS

Objetivo geral:

- Demonstrar as regras de derivação e utilizá-las em aplicações práticas.

Objetivos específicos:

- Apresentar aplicações das derivadas em matemática e também em outras áreas do conhecimento.

- Fazer uma apresentação do objeto de estudo derivada com uma abordagem clara, sem menosprezar o rigor matemático, mas exposto de várias formas, numa sequência lógica e didática para a compreensão do assunto derivadas.

4. METODOLOGIA

Este trabalho tem como metodologia a revisão bibliográfica e será apresentado em duas etapas: a primeira versa sobre a apresentação dos conceitos de uma forma geral, como definições, propriedades e exemplos inerentes ao objeto matemático em estudo para esse trabalho, seguindo pelo desenvolvimento de algumas aplicações práticas desse importante conteúdo, que é o estudo das derivadas.

5. DERIVADAS

Neste capítulo será apresentado a definição da derivada de uma função em um ponto, o seu significado geométrico e cinemático, a definição geral da derivada ordinária de uma função e, em seguida, serão feitas as derivadas de algumas funções elementares importantes, junto com suas demonstrações, donde será formalizada as regras práticas da determinação da derivada de uma função, com isso, chegando ao que é conhecido na literatura como regras de derivação.

5.1 DERIVADA DE UMA FUNÇÃO EM UM PONTO

5.1.1 DEFINIÇÃO DE DERIVADA DE UMA FUNÇÃO EM UM PONTO

Seja $f(x)$ uma função definida em um intervalo I e $x_0$um ponto de I, com $I \subset \mathbb{R}$. Para todo $x \in$ I e $x_0 \neq x$, considere a função:

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

que é denominada de razão incremental da função $f(x)$relativa ao ponto x_0.

Geometricamente:

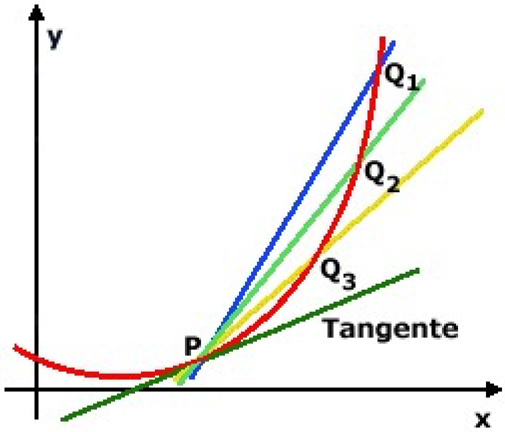

Figura 4 - Quociente de Newton

Fonte: Uel.br

A função $f(x)$ é derivável no ponto x_0, se existir e for finito o limite

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

O valor do limite, que indicaremos por $f'(xo)$ é denominado derivada da função $f\ (x)$ no ponto x_0, isto é,

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0},$$

caso o limite exista.

Importante:

Se o limite definido acima não existir ou existir e for $+\infty$ ou $-\infty$, diremos que a função $f\ (x)$ não é derivável no ponto x_0, isto é, não existe $f'(x_0)$.

Exemplo 1

Considere a função $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^2$, calcular sua derivada no ponto $x_0 = 2$.

Solução Vamos determinar a razão incremental da função $f(x)$ no ponto $x_0 = 2$.

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=\frac{x^2-4}{x-2}=\frac{(x+2).(x-2)}{x-2}=x+2$$

Sendo a derivada de $f(x)$ no ponto x_0 = 2, definida por

$$f'(2)=\lim_{x\to 2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2} \quad temos \quad f'(2)=\lim_{x\to 2}(x+2)=2+2=4$$

Dessa forma, temos que a função $f\ (x)\ =\ x^2$ é derivável no ponto x_0= 2 e sua derivada nesse ponto é $f'\ (2)\ =\ 4$.

Exemplo 2

Considere a função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f\ (x)\ =\ x^3$, calcular sua derivada no ponto $x_0\ =\ 1$.

Solução

Vamos determinar a razão incremental da função f (x) no ponto $x_0\ =\ 1$.

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\frac{x^3-1}{x-1}=\frac{(x-1).(x^2+x+1)}{x-1}$$

Sendo a derivada de $f(x)$ no ponto $x_0=1$, definida por

$$f'(1)=\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1} \ temos\ f'(1)=\lim_{x\to 1}(x^2+x+1)=3$$

Dessa forma, temos que a função $f(x)=x^3$ é derivável no ponto $x_0=1$ e sua derivada nesse ponto é $f'(1)=3$.

Exemplo 3

Considere a função f : ℝ → ℝ definida por $f\ (x)=\ sen\ x$, calcular a sua derivada no ponto $x_0=a$.

Solução

Vamos determinar a razão incremental da função $f\ (x)$ no ponto x_0 = a.

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=\frac{senx-sena}{x-a}=\frac{2sen\left(\frac{x-a}{2}\right).\cos\left(\frac{x+a}{2}\right)}{x-a}$$

Sendo a derivada de $f\ (x)$ no ponto x_0= a, definida por

$$f'(a)=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a} \quad temos \quad f'(a)=\lim_{x\to a}\left[\frac{2sen\left(\frac{x-a}{2}\right).\cos\frac{x-a}{2}}{x-a}\right]$$

ou ainda, podemos escrever

$$f'(a)=\lim_{x\to a}\left[\frac{2sen\left(\frac{x-a}{2}\right)}{\frac{x-a}{2}}.\cos\left(\frac{x-a}{2}\right)\right]$$

Aplicando a propriedade do limite do produto, obtemos,

$$f'(a)=\lim_{x\to a}\frac{sen\left(\frac{x-a}{2}\right)}{\frac{x-a}{2}}.\lim_{x\to a}\cos\left(\frac{x-a}{2}\right)\ (I)$$

Para calcular o limite $\lim_{x\to a}\frac{sen\left(\frac{x-a}{2}\right)}{\frac{x-a}{2}}$, vamos considerar $\frac{x-a}{2}=t$ e, assim, temos que, quando x tende para a, t tende para zero, ou seja,

$$x\to a\Rightarrow\frac{x-a}{2}\to 0\Rightarrow t\to 0,$$

e utilizando o resultado do limite fundamental em (I), $\lim_{t\to 0}\frac{sent}{t}=1$, segue que,

$$f'(a)=\lim_{t\to 0}\frac{sen\ t}{t}.\lim_{x\to a}\cos\left(\frac{x+a}{2}\right)$$

Logo,

$$f'(a)=1.\cos\left(\frac{a+a}{2}\right)$$

Portanto,

$$f'(a)=\cos a$$

Dessa forma, temos que a função $f\ (x) = senx$ é derivável no ponto x_0 = a e sua derivada nesse ponto é $f'(a) = \cos a$.

Exemplo 4

Considere a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f\ (x) = cosx$, calcular a sua derivada no ponto x_0 = a.

Solução

Vamos determinar a razão incremental da função f (x) no ponto x_0 = a.

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \frac{cosx - cosa}{x-a} = \frac{-2.sen\left(\frac{x+a}{2}\right).sen(\frac{x-a}{2})}{x-a}$$

Sendo a derivada de f (x) no ponto x_0 = a, definida por:

$$f'(a) = \lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

Temos

$$f'(a) = \lim_{x\to a} \left[\frac{2sen\left(\frac{x-a}{2}\right).\mathrm{sen}\left(\frac{x-a}{2}\right)}{x-a}\right]$$

ou ainda, podemos escrever

$$f'(a) = -\lim_{x\to a} \left[\frac{sen\left(\frac{x-a}{2}\right)}{\frac{x-a}{2}}.\mathrm{sen}\left(\frac{x-a}{2}\right)\right]$$

Aplicando a propriedade do limite do produto, obtemos,

$$f'(a) = -\lim_{x\to a} \frac{sen\left(\frac{x-a}{2}\right)}{\frac{x-a}{2}}.\lim_{x\to a} \mathrm{sen}\left(\frac{x-a}{2}\right) \quad (II)$$

Para calcular o limite $\lim\limits_{x\to a} \frac{sen\left(\frac{x-a}{2}\right)}{\frac{x-a}{2}}$, vamos considerar $\frac{x-a}{2} = t$ e, assim, temos que, quando x tende para a, t tende para zero, ou seja,

$$x \to a \Rightarrow \frac{x-a}{2} \to 0 \Rightarrow t \to 0,$$

e utilizando o resultado do limite fundamental em (II), $\lim\limits_{t\to 0} \frac{sent}{t} = 1$, segue que,

$$f'(a) = -\lim_{t\to 0} \frac{sen\, t}{t} . \lim_{x\to a} \text{sen}\left(\frac{x+a}{2}\right)$$

Logo,

$$f'(a) = -1. \text{sen}\left(\frac{a+a}{2}\right)$$

Portanto

$$f'(a) = -\text{sen}\, a.$$

Dessa forma, temos que a função $f\ (x) =\ cos\, x$ é derivável no ponto x_0 = a e sua derivada nesse ponto é $f'\ (a) =\ -sen\ a$.

Exemplo 5

Considere a função f : ℝ → ℝ definida por $f\ (x)\ =\ \sqrt[3]{x}$, verificar se existe sua derivada no ponto x_0 = 0.

Solução

Vamos determinar a razão incremental da função $f\ (x)$ no ponto x_0 = 0.

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{0}}{x - 0} = \frac{\sqrt[3]{x}}{x} = \sqrt[3]{\frac{x}{x^2}} = \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}$$

Sendo a derivada de $f\ (x)$ no ponto x_0 = 0, definida por

$$f'(0) = \lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0} \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}, temos\ que\ f'(0) = +\infty$$

Dessa forma, temos que a função $f\ (x) = \sqrt[3]{x}$ NÃO é derivável no ponto $x_0 = 0$.

Derivadas Laterais

Definição

Se o limite da razão incremental existir apenas para $x \to x_0$ pela esquerda ou pela direita, diremos que a derivada é LATERAL.

Derivada à Esquerda dex_0

$$f'_-(x_0) = \lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Derivada à Direita de x_0

$$f'_+(x_0) = \lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Importante

Se$f'_-(x_0) = f'_+(x_0)$, diremos que a função $f\ (x)$ é derivável no ponto x_0, e mais

$$f'(x_0) = f'_-(x_0) = f'_+(x_0)$$

Se existirem $f'_-(x_0)\ e\ f'_+(x_0)$, mas

$$f'_-(x_0) \neq f'_+(x_0)$$

Então, não existe $f'(x_0)$.

Exemplo 6

Considere a função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f\ (x) = |x|$, calcular a derivada no ponto $x_0 = 0$.

Solução

Vamos determinar a razão incremental da função $f\ (x)$ no ponto $x_0 = 0$.

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\frac{|x-0|}{x-0}=\frac{|x|}{x}=\left\{\begin{matrix} 1, se\ x>0 \\ -1, se\ x<0 \end{matrix}\right\}$$

Sendo a derivada de $f(x)$ no ponto $x_0 = 0$, definida por

$$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}$$

temos que $f'_+(0)=+1$ e $f'_+(0)=-1$. Dessa forma, conclui-se que a função f (x) = $|x|$, NÃO é derivável no ponto $x_0 = 0$.

Notação de Derivada

Podemos representar a derivada da função $f\ (x)$ no ponto x_0 por:

$$y'(x_0)\ ou\ f'(x_0)$$

$$(\frac{dv}{dx})_{x=x_0}\quad ou\quad (\frac{df(x)}{dx})_{x=x_0}$$

Importantes

1) Se a função $f\ (x)$é derivável no ponto x_0, então existe e é finito o limite

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=f'(x_0)$$

2) Sendo $x-x_0=\Delta x\Rightarrow x=\Delta x+x_0$, temos que a derivada da função $f\ (x)$no ponto x_0

$$f'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

pode ser escrita como

$$f'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$

Exemplo 7

Determinar a derivada da função $f\ (x)=x^2$ no ponto x_0.

Solução

Sendo a derivada da função f (x) no ponto x_0 definida por

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(\,x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

temos que $f(x_0 + \Delta x) = (x_0 + \Delta x)^2 = x_0^2 + 2x_0\Delta x + (\Delta x)^2$

e, assim

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0}(2\,x_0 + \Delta x) = 2x_0$$

ou seja,

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0}(2x_0 + \Delta x) = 2x_0$$

Continuidade

Teorema

Se uma função $f\ (x)$ é derivável no ponto x_0 do seu domínio, então $f\ (x)$é contínua no ponto x_0.

Demonstração

Sendo $f\ (x)$uma função derivável no ponto x_0, devemos mostrar que $f\ (x)$ é contínua em x_0, isto é, temos que provar que:

(I) $f(x_0)$ Existe (Está definida);

(II) $\lim_{x \to x_0} f(x)$ Existe;

(III) $f(x_0) = \lim_{x \to x_0} f(x)$

Demonstração

Por hipótese, a função $f\ (x)$ é derivável no ponto x_0. Logo, $f'(xo)$ existe, e temos que

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} f(x)$$

de onde concluímos que $f(x_0)$ deve existir para que o limite tenha significado. Além disso, temos

$$f(x) - f(x_0) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.(x - x_0)$$

Logo, passando ao limite, na equação acima, temos

$$\lim_{x \to x_0} [f(x) - f(x_0)] = \lim_{x \to x_0} \frac{[f(x) - f(x_0)]}{x - x_0}.(x - x_0)$$

Donde segue, das propriedades dos limites

$$\lim_{x \to x_0} [f(x) - f(x_0)] = \lim_{x \to x_0} \left[\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}\right]. \lim_{x \to x_0} (x - x_0)$$

ou seja,

$$\lim_{x \to x_0} [f(x) - f(x_0)] = f'(x_0).0 = 0$$

Portanto,

$$\lim_{x \to x_0} [f(x) - f(x_0)] = 0$$

Por outro, lado temos que $\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} [f(x) - f(x_0) + f(x_0)]$

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} [f(x) - f(x_0)] + \lim_{x \to x_0} f(x_0)$$

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = 0 + f(x_0)$$

Portanto,

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0).$$

Portanto, são válidas as condições I, II e III e, com isso, concluímos que f(x) é contínua no ponto $x = x_0$.

Importante

A Recíproca desse Teorema não é verdadeira.

Exemplo 8

A função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = |x|$ é contínua no ponto $x_0 = 0$, pois

$$\lim_{x \to 0} |x| = 0 = f(0)$$

mas, no entanto, a função $f(x) = |x|$, **NÃO** é derivável no ponto x = 0, pois

$$f'_{+}(0) = +1 \quad e \quad f'_{-}(0) = -1,$$

isto é, não existe $f'(0)$.

5.2 SIGNIFICADO DA DERIVADA

5.2.1 SIGNIFICADO GEOMÉTRICO DA DERIVADA

Seja $f(x)$ uma função definida e contínua no intervalo I, seja G o seu gráfico cartesiano. Considerando-se os pontos $x \in I, e\ x_0 \in I, com\ x \neq x_0$, a reta s determinada pelos pontos P(x_0, f (x_0)) e Q(x, f (x)) é uma secante a curva G. O coeficiente angular da reta s é dado por

$$tg\alpha = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

que é exatamente a razão incremental de f (x) relativa ao ponto x_0.

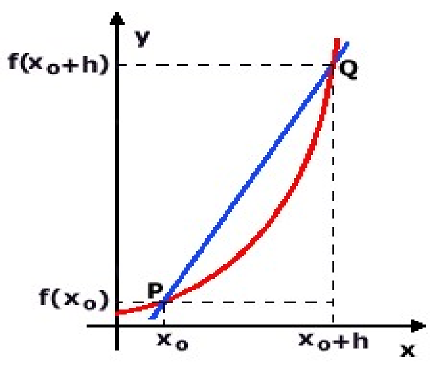

Figura 5 – Gráfico da Representação Geométrica da Derivada

Fonte: Uel.br

Se a função $f(x)$ é derivável no ponto x_0 , então para x tendendo a x_0, o ponto Q tende a aproximar-se de P e, consequentemente, a reta s tende a uma posição LIMITE t, que é por definição, a tangente geométrica à curva G no ponto P. Donde se conclui, que a existência de $f'(x_0)$ significa que a curva G tem tangente única em P.

O coeficiente angular da reta t é dado por

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

e a equação da reta t, tangente ao gráfico de G no ponto P é definida por

$$y - f(x_0) = f'(x_0).(x - x_0).$$

Conclusão

A derivada de uma função $f(x)$, quando existe, assume em cada ponto x_0 do seu domínio um único valor, que é o coeficiente angular da reta tangente ao gráfico cartesiano de $f(x)$ no ponto de abscissa x_0.

Exemplo 9

Determinar a equação da reta tangente à parábola de equação $f(x) = x^2$ em seu ponto de abscissa $x_0 = 2$.

Solução

Temos que,

$$x_0 = 2 \ \rightarrow f(2) = 2^2 = 4 \ \rightarrow P(2{,}4)$$

Como a derivada de $f(x) = x^2$ é $f'(x) = 2x$, logo no ponto de abscissa $x_0 = 2$ temos que a sua derivada é

$$f'(2) = 2.2 = 4.$$

Assim, a equação da reta tangente é dada por $y - f(2) = f'(2).(x - 2)$, ou seja,

$$y - 4 = 4.(x - 2).$$

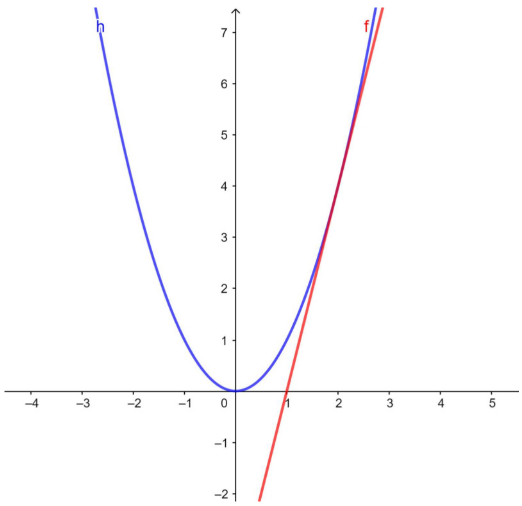

Figura 6: Reta Tangente a Curva de uma função

Fonte: Autoria Própria

5.2.2 SIGNIFICADO FÍSICO OU CINEMÁTICO DA DERIVADA

Consideremos uma partícula em movimento no espaço, suponhamos que, x_0 tempo t, $\vec{\alpha}(t)$ é o vetor posição da partícula com relação a um sistema de coordenadas. Ao variar o tempo t, a extremidade livre do vetor $\vec{\alpha}(t)$descreve a trajetória C da partícula. Suponhamos que a partícula esteja em P no tempo t e em Q no tempo $t + \Delta t$. Então $\Delta\vec{\alpha} = \vec{\alpha}(t + \Delta t) - \vec{\alpha}(t)$ representa o deslocamento da partícula de P para Q, ocorrida no intervalo de tempo Δt.

A taxa média de variação de $\vec{\alpha}(t)$ no intervalo Δt é dada por

$$\vec{V}_m = \frac{\vec{\alpha}(t + \Delta t) - \vec{\alpha}(t)}{\Delta t}$$

E é denominada velocidade média da partícula no intervalo de tempo Δt. A velocidade instantânea da partícula no tempo t, que denotamos por $\vec{V}(t)$ é definida pelo limite

$$\vec{V}(t) = \lim_{\Delta t \to 0} V_m = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{\alpha}(t + \Delta t) - \vec{\alpha}(t)}{\Delta t}$$

caso o limite exista.

Solução

Portanto, quando $\vec{\alpha}(t)$ é derivável, a velocidade instantânea da partícula é dada por

$$\vec{V}(t) = \alpha'(t)$$

Da mesma forma, temos que a aceleração média da partícula é dada por

$$a_m = \frac{\vec{V}(\alpha + \Delta t) - \vec{V}(t)}{\Delta t}$$

Portanto, se $\vec{V}(t)$ é derivável, a aceleração instantânea da partícula é dada por

$$\vec{a}(t) = \vec{V}'(t)$$

Importante

$$\vec{a} = \vec{V}(t) = \alpha''(t)$$

$$\vec{a} = \frac{d\vec{V}(t)}{dt} = \frac{d^2Vt}{dt^2}$$

Aplicação

Determinar o vetor velocidade e o vetor aceleração de uma partícula que se move segundo a lei $\vec{\alpha}(t) = cos2t\vec{\imath} + sen2t\vec{\jmath} + \vec{k}$.

Mostrar que, o vetor velocidade é perpendicular ao vetor posição e que o vetor aceleração é perpendicular ao vetor velocidade.

Solução

$$\vec{V}(t) = \vec{\alpha}'(t) = (-2sen2t, 2cos2t, 0) = -2sen2t\vec{\imath}\,.\,2cos2t\vec{\jmath}$$

$$\text{e } \vec{a}(t) = -4\cos 2t\,\vec{\imath} - 4sen\;2t\vec{\jmath}$$

Sabemos que, dois vetores são perpendiculares, se o seu produto escalar é nulo.

Assim,

$$\vec{\alpha}(t).V(t) = (cos2t, sen2t, 1).(-2sen2t, 2cos2t, 0)$$

$$\vec{\alpha}(t).V(t) = -2sen2tcos2t + 2sen2t\,.cos2t + 0$$

$$\vec{\alpha}(t).\vec{V}(t) = 0$$

E

$$\vec{V}(t).\vec{a}(t) = (-2sen2t, 2cos2t, 0).(-4cos2t, -4sen2t, 0)$$

$$\vec{V}(t).\vec{a}(t) = 8sen2tcos2t - 8sen2t\,.cos2t + 0$$

$$\vec{V}(t).\vec{a}(t) = 0$$

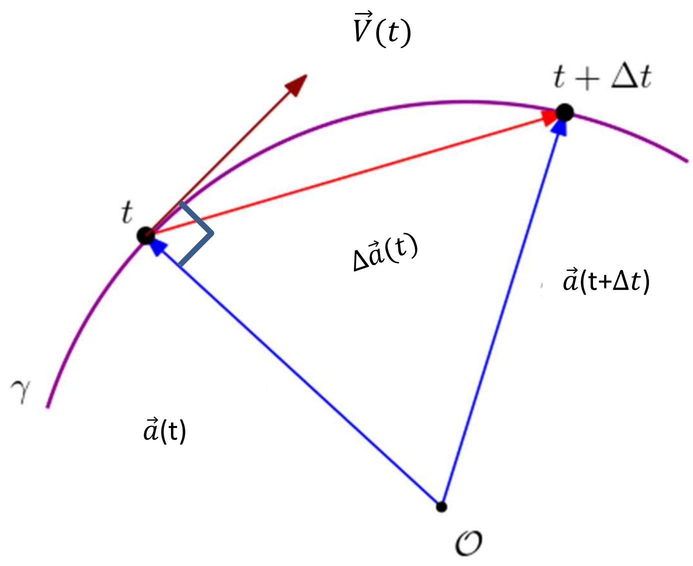

Figura 7: Significado Cinemático da Derivada

Fonte: Autoria Própria

5.3 DERIVADA GLOBAL DE UMA FUNÇÃO

Definição

Considere a função real $y = f(x)$ definida num intervalo real aberto $]a, b[$ com $a\ e\ b$ pertencentes aos reais $e\ a < b$, define-se a derivada da função $y = f(x)$, como sendo a função $f'\ (x)$ tal que seu valor em qualquer ponto do seu domínio é definido por

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \to \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x},$$

Caso exista, esse limite apresentado acima.

Consideração Importante

Definição

Dizemos que uma função real $y = f(x)$ definida num intervalo real aberto $]a, b[$ com a e b pertencentes aos reais e $a < b$ é derivável, quando a função $y = f(x)$ admite derivada em todos os pontos do seu domínio.

Exemplo 10

Determinar, pela definição de derivada, a derivada da função $f(x) = x^2 + 3x$

Solução

Sendo a derivada da função $f(x)$ definida por

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x) + \Delta x - f(x)}{\Delta x}$$

temos que,

$$f(x + \Delta x) = (x + \Delta x)^2 + 3(x + \Delta x),$$

ou ainda,

$$f(x + \Delta x) = x^2 + 2x\Delta x + (\Delta x)^2 + 3x + 3\Delta x,$$

assim,

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{x^2 + 2x\Delta x + (\Delta x)^2 + 3x + 3\Delta x - x^2 - 3x}{\Delta x}$$

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x(2x + \Delta x + 3)}{\Delta x}$$

ou seja,

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} (2x + \Delta x + 3)$$

$$f'(x) = 2x + 3$$

Exemplo 11

Determinar, pela definição de derivada, a derivada da função $f(x) = \sqrt{x}$.

Solução

Sendo a derivada da função $f(x)$ definida por

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

temos que,

$$f(x + \Delta_x) = \sqrt{x + \Delta_x}$$

assim,

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \left(\frac{\sqrt{x + \Delta x} - \sqrt{x}}{\Delta x}\right)$$

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \left(\frac{\sqrt{x + \Delta x} - \sqrt{x}}{\Delta x}\right) . \left(\frac{\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x}}{\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x}}\right)$$

ou seja,

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta x\, (\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x})}$$

ou ainda,

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x}}$$

Portanto,

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

5.4 ÁLGEBRA DAS DERIVADAS OU REGRAS DE DERIVAÇÃO

A partir desse momento, será dado destaque a derivada de algumas funções importantes para que se possa aos poucos adquirir o conhecimento mais geral sobre derivadas ordinárias, ou seja, derivadas estudadas sobre o conjunto dos números reais ($\mathbb{R}$).

5.4.1 FUNÇÃO CONSTANTE

Para uma função constante a sua derivada é zero, isto é, se c é uma constante real e $f(x) = c$, para todo $x \in \mathbb{R}$, então $f'(x) = 0$.

Simbolicamente, $f(x) = c \Rightarrow f'(x) = 0$.

Demonstração

Calculando a derivada pela definição e estabelecendo a veracidade da regra.

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{c - c}{\Delta x} = 0$$

Então,

$$f(x) = c \to f'(x) = 0$$

Exemplo 12

Sabendo que $f(x) = 4$, definida para todo $x \in \mathbb{R}$, determinar a sua derivada.

Solução

Pela regra apresentada temos que, $f'(x) = 0$.

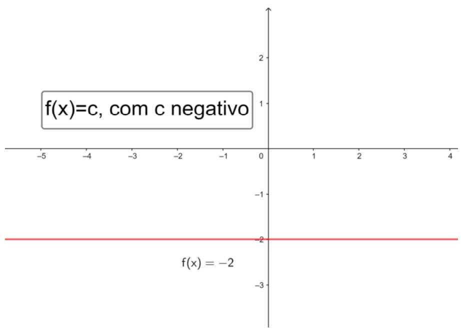

Figura 8 – Gráfico da Função Constante

Fonte: Autoria Própria

5.4.2 FUNÇÃO LINEAR

A derivada da função linear é o coeficiente angular apresentado na função, isto é, se $f\ (x)\ =\ ax$ definida para todo $x \in \mathbb{R}$ com a sendo uma constante real e **a** diferente de zero, então $f'\ (x)\ =\ a$.

Em símbolos:

$$f\ (x)\ =\ ax\ \ \Rightarrow\ f'\ (x)\ =\ a.$$

Demonstração

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to} \frac{[a(x + \Delta x)] - [ax]}{\Delta x}$$

$$\lim_{\Delta x \to} \frac{ax + a\Delta x - ax}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} a = a$$

Então,

$$f(x) = ax \Rightarrow f'(x) = a$$

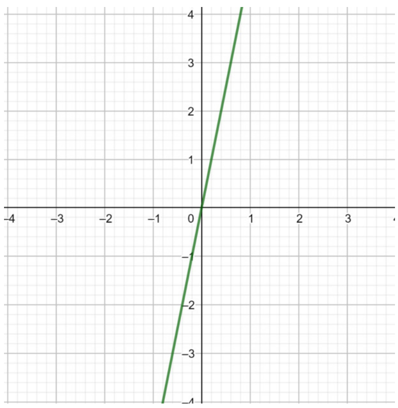

Figura 9 – Gráfico Função Linear

Fonte: Autoria Própria

Exemplo 13

Sabendo que $f\ (x)\ =\ 4x$, definida para todo $x \in \mathbb{R}$, determinar a sua derivada.

Solução:

Pela conclusão da regra apresentada temos que $f'(x) = 4$.

5.4.3 FUNÇÃO AFIM

A derivada da função afim é o coeficiente angular apresentado na função, isto é, se $f(x) = ax + b$ definida para todo $x \in \mathbb{R}$ com a, b constantes reais e **a** diferente de zero, então $f'(x) = a$.

Em símbolos:

$$f(x) = ax + b \Rightarrow f'(x) = a.$$

Prova,

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to} \frac{[a(x + \Delta x) + b] - [ax + b]}{\Delta x}$$

$$\lim_{\Delta x \to} \frac{ax + a\Delta x + b - ax - b}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} a = a$$

Então,

$$f(x) = ax + b \Rightarrow f'(x) = a$$

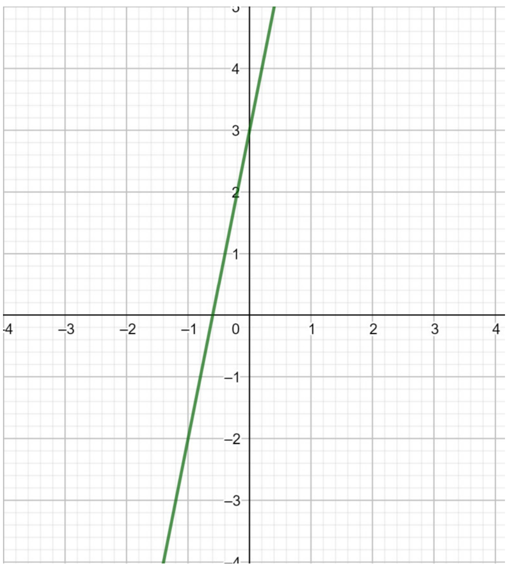

Figura 10 – Gráfico Função Afim

Fonte: Autoria Própria

Exemplo 14

Sabendo que $f\ (x)\ =\ 4x\ +\ 8$, definida para todo $x \in \mathbb{R}$, determinar a sua derivada.

Solução:

Pela regra apresentada na demonstração temos que,

$$f'\ (x)\ =\ 4.$$

5.4.5 FUNÇÃO POTÊNCIA

A derivada da função potência $f\ (x)\ =\ x^n, \forall x\ \in\ R$, que é um polinômio de grau n, é definida pelo grau n multiplicado pela expressão x^{n-1}, ou seja, se n é um número inteiro positivo e $f\ (x)\ =\ x^n, \forall x\ \in\ R,$ então $f'(x) = n.x^{n-1}$.

Simbolicamente

$$f\ (x)\ =\ x^n \Rightarrow f'(x) = n.x^{n-1}$$

Demonstração

Temos por definição que a derivada de uma função f (x) é dada por

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

Sendo $f\ (x\ +\ \Delta x)\ =\ (x\ +\ \Delta x)^{\ n}$ e desenvolvendo $(x\ +\ \Delta x)^n$ pelo Binômio de Newton,

Obtemos:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\left[\binom{n}{0}.x^n + \binom{n}{1}.x^{n-1}\Delta x + \cdots + \binom{n}{n}(\Delta x)^n\right] - x^n}{\Delta x}$$

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{x^n + \Delta x.\left[\binom{n}{1}.x^{n-1} + \cdots + \binom{n}{n}(\Delta x)^{n-1}\right] - x^n}{\Delta x}$$

logo,

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0}[n.x^{n-1} + \cdots + (\Delta x)^{n-2}.x + (\Delta x)^{n-1}]$$

Portanto,

$$f'(x) = nx^{n-1}$$

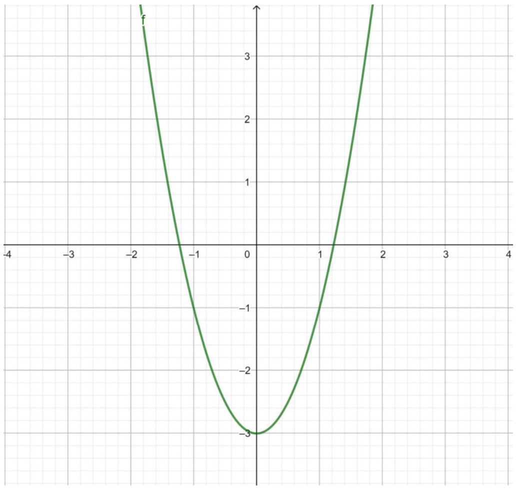

Figura 11 – Gráfico Função Potência

Fonte: Autoria Própria

Exemplo 15

Dada a função $f\ (x)\ =\ x^4$, definida para todo x ∈ R, determinar a sua derivada.

Solução:

Pela regra de derivação demonstrada para função potência podemos afirmar que,

$$f'(x) = 4.x^{4-1} \Rightarrow f'(x) = 4.x^3$$

Observação importante

Na definição, da função potência foi definido o expoente n como sendo um número natural e positivo, mas essa definição pode ser expandida para a função potência com expoente n sendo racional.

Exemplo 16

Determinar a derivada da função $f(x) = \frac{1}{x^4}$, definida para todo $x \in \mathbb{R}^*$

Solução

Utilizando a regra de derivação para função potência, obtemos:

$$f(x) = \frac{1}{x^4} \Rightarrow f(x) = x^{-4} \,,$$

logo

$$f'(x) = -4.x^{-4-1} \Rightarrow f'(x) = -4.x^{-5}$$

ou seja,

$$f(x) = \frac{-4}{x^5}$$

5.4.6 FUNÇÃO DEFINIDA POR UM PRODUTO DE UMA CONSTANTE POR OUTRA FUNÇÃO

Sejam f uma função real, c uma constante real, não nula, e g uma função definida por

$$g(x) \; = \; c.f\,(x).$$

Se, a derivada da função $f\,(x)$ existe, ou seja, $f'(x)$ existe, então

$$g'(x) = c.f'(x).$$

Nessa regra de derivação, nota-se que, se preserva a constante e o resultado da derivada é a multiplicação dessa constante pela derivada da função f .

Simbolicamente

$$g(x) = \; c.f\,(x) \; \Rightarrow \; g'(x) = c.f'(x)$$

Demonstração

Por hipótese, temos que a derivada da função $f\,(x)$ existe, e por definição a derivada da função $f\,(x)$ é dada por

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

Sendo $g(x + \Delta x) = c.f\ (x + \Delta x)$ e, como,

$$g'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{g(x + \Delta x) - g(x)}{\Delta x}$$

temos que,

$$g'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{c.f(x + \Delta x) - c.f(x)}{\Delta x}$$

Assim,

$$g'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} c.\frac{[f(x + \Delta x) - f(x)]}{\Delta x}$$

ou ainda,

$$g'(x) = c.\lim_{\Delta x \to 0} \frac{[f(x + \Delta x) - f(x)]}{\Delta x}$$

Portanto,

$$g'(x) = c.f'(x)$$

Exemplo 17

Sabendo que $f\ (x) = 4x^3$, definida para todo x ∈ R, determinar a sua derivada.

Solução:

$$f'(x) = 4.(x^3)' \Rightarrow f'(x) = 4.(3x^2) \Rightarrow f'(x) = 12.x^2$$

5.4.7 FUNÇÃO DEFINIDA POR UMA SOMA DE FUNÇÕES

Sejam $f(x)$ e $g(x)$ duas funções reais, deriváveis em qualquer ponto x do seu domínio e, seja $h(x)$ uma função definida com o mesmo domínio das funções $f(x)$ e $g(x)$ por

$$h(x) = f\ (x) + g(x).$$

Então, $h(x)$ é derivável em x e sua derivada é definida por

$$h'(x) = f'(x) + g'(x).$$

Simbolicamente

$$h(x) = f(x) + g(x) \Rightarrow h'(x) = f'(x) + g'(x)$$

Observação importante

Para essa regra de derivação, fica claro que, a derivada de uma função h, dada por uma soma algébrica das funções f e g é definida pelas somas das derivada das funções f e g, de forma que podemos afirmar que a derivada de uma soma algébrica de funções é a soma das derivadas dessas funções.

Demonstração

Por hipótese, temos que existem as derivadas das funções $f(x)$ e $g(x)$ e por definição suas derivadas são dadas, respectivamente, por

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \quad e \quad g'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{g(x + \Delta x) - g(x)}{\Delta x}$$

Sendo,

$$h(x + \Delta x) = f(x + \Delta x) + g(x + \Delta x)$$

e como,

$$h'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{h(x + \Delta x) - h(x)}{\Delta x}$$

Fazendo as devidas substituições com relação a função h obtemos,

$$h'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{[f(x + \Delta x) + g(x + \Delta x)] - [f(x) + g(x)]}{\Delta x}$$

ou ainda,

$$h'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{[f(x + \Delta x) - f(x)] + [g(x + \Delta x) - g(x)]}{\Delta x}$$

Daí, segue que:

$$h'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \to 0} \frac{g(x+\Delta x) - g(x)}{\Delta x}$$

Portanto,

$$h'(x) = f'(x) + g'(x)$$

Exemplo 18

Dada a função$f(x) = x^3 + 5senx$, determinar a sua derivada.

Solução

Fazendo uso da regra de derivação para uma função soma apresentada na demonstração, temos,

$$f'(x) = (x^3)' + (5senx)',$$

ou seja,

$$f'(x) = 3x^2 + 5cosx.$$

5.4.8 FUNÇÃO DEFINIDA POR UM PRODUTO DE FUNÇÕES

Sejam $f\,(x)$ e $g(x)$ duas funções reais deriváveis no ponto x do seu domínio e, seja $h(x)$ uma função definida pela multiplicação dessas funções, ou seja, por

$$h(x) \ = \ f\,(x).\,g(x).$$

Então, $h(x)$ é derivável em x e sua derivada é definida por

$$h'(x) \ = \ f'\,(x).\,g(x) \ + \ f\,(x).\,g'(x).$$

Simbolicamente

$$h(x) = \ f\,(x).\,g(x) \Rightarrow h'\,(x) = \ f'\,(x).\,g(x) \ + \ f\,(x).\,g'(x)$$

Demonstração

Por hipótese, temos que existem as derivadas das funções $f(x)$ e $g(x)$ e por definição suas derivadas são dadas, respectivamente, por

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} \quad e \quad g'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{g(x+\Delta x) - g(x)}{\Delta x}$$

Temos que,

$$h(x + \Delta x) = f\,(x + \Delta x).\,g(x + \Delta x) \quad e \quad h'\,(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{h(x + \Delta x) - h(x)}{\Delta x}$$

Assim,

$$h'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{[f(x + \Delta x).\,g(x + \Delta x)] - [f(x).\,g(x)]}{\Delta x}$$

Somando a expressão $-f\,(x + \Delta x).\,g(x) + f\,(x + \Delta x).\,g(x)$ ao numerador do limite acima temos que,

$$h'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x).\,g(x + \Delta x) - f(x + \Delta x).\,g(x) + f(x + \Delta x).\,g(x) - f(x).\,g(x)}{\Delta x}$$

Colocando-se em evidência as funções $f\,(x + \Delta x)\; e\; g(x)$, obtém-se:

$$h'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x).\,[g(x + \Delta x) - g(x)] + [f(x + \Delta x) - f(x)].\,g(x)}{\Delta x}$$

Logo,

$$h'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x).\,[g(x + \Delta x) - g(x)]}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \to 0} \frac{[f(x + \Delta x) - f(x)].\,g(x)}{\Delta x}$$

E aplicando as propriedades dos limites encontramos,

$$h'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} f(x + \Delta x).\,\lim_{\Delta x \to 0} \frac{[g(x + \Delta x) - g(x)]}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \to 0} \frac{[f(x + \Delta x) - f(x)]}{\Delta x}.\,\lim_{\Delta x \to 0} g(x)$$

Portanto,

$$h'(x) = f'(x).\,g(x) + f(x).\,g'(x)$$

Exemplo 19

Determinar a derivada da função $f\,(x) = x^3\,.\,senx$.

Solução

Aplicando a regra da derivada do produto para a função $f\ (x)$, temos:

$$f'(x) = (x^3)'.(senx) + x^3.(senx)'$$

ou seja,

$$f'(x) = 3x^2.senx + x^3.cosx$$

Portanto,

$$f'(x) = x^2.(3senx + xcosx)$$

5.4.9 FUNÇÃO DEFINIDA POR UMA QUOCIENTE DE FUNÇÕES

Sejam $f\ (x)$ e $g(x)$ duas funções reais, deriváveis no ponto x do seu domínio e, seja $h(x)$ uma função definida por $h(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ com $g(x) \neq 0$. Se $h(x)$ é derivável em x, então sua derivada é definida por

$$h'(x) = \frac{f'(x).g(x) - f(x).g'(x)}{[g(x)]^2}$$

Simbolicamente

$$h(x) = \frac{f(x)}{g(x)} \quad \Rightarrow \quad h'(x) = \frac{f'(x).g(x) - f(x).g'(x)}{[g(x)]^2}$$

Pela demonstração da derivada do quociente para duas funções, tem-se a regra que é definida pela derivada da função do numerador multiplicado pela função do denominador menos a função do numerador multiplicado pela derivada da função do denominador e essa diferença é dividida pelo quadrado da função do denominador.

Demonstração

Por hipótese, temos que existem as derivadas das funções $f\ (x)$ e $g(x)$ e por definição suas derivadas são definidas, respectivamente, por

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \quad e \quad g'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{g(x + \Delta x) - g(x)}{\Delta x}$$

Temos por definição que,

$$h(x+\Delta x)=\frac{f(x+\Delta x)}{g(x+\Delta x)} \quad e \quad h'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{h(x+\Delta x)-h(x)}{\Delta x}$$

Assim,

$$h'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\frac{f(x+\Delta x)}{g(x+\Delta x)}-\frac{f(x)}{g(x)}}{\Delta x}$$

ou ainda,

$$h'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{\Delta x}.\left[\frac{f(x+\Delta x).g(x)-f(x).g(x+\Delta x)}{g(x+\Delta x).g(x)}\right]$$

Somando-se $-f(x).g(x)+f(x).g(x)$ ao numerador temos que,

$$h'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{\Delta x}.\frac{f(x+\Delta x).g(x)-f(x).g(x)+f(x).g(x)-f(x).g(x+\Delta x)}{g(x+\Delta x).g(x)}$$

de onde obtém-se,

$$h'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}.g(x)-f(x).\frac{g(x+\Delta x)-g(x)}{\Delta x}}{g(x+\Delta x).g(x)}$$

Aplicando as propriedades dos limites, chega-se a expressão:

$$h'(x)=\frac{\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}.\lim\limits_{\Delta x\to 0}g(x)-\lim\limits_{\Delta x\to 0}f(x).\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{g(x+\Delta x)-g(x)}{\Delta x}}{g(x+\Delta x).g(x)}$$

Portanto,

$$h'(x)=\frac{f'(x).g(x)-f(x).g'(x)}{[g(x)]^2}$$

Exemplo 20

Determinar a derivada da função $f\ (x)\ =\ \frac{senx}{x}$

Solução

Aplicando a regra da derivada do quociente para a função $f\ (x)$, temos:

$$f'(x) = \frac{(senx)'.x - senx.(x)'}{(x)^2} = \frac{cosx.x - senx.1}{(x)^2}$$

Portanto,

$$f'(x) = \frac{xcosx - senx}{x^2}$$

5.4.10 FUNÇÃO COMPOSTA

Considere as funções $y = g\,(u)$ e $u = f\,(x)$ tais que o domínio da função u se encontra no contradomínio da função g e as derivadas das funções $\frac{dy}{du}$ e $\frac{du}{dx}$ existem, assim a função composta $y = g[f\,(x)]$ é derivável e sua derivada é definida por

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} \quad ou \quad y'(x) = g'(u).f'(x) \quad ou \quad y'(x) = g'[f(x)].f'(x)$$

Essa regra é conhecida com a regra da cadeia. Percebe-se que, nessa regra de derivação, se for considerada a função $f\,(x)$ como a função interna(dentro) na composição de $g[f\,(x)]$ e a função g como a função externa(fora), pode-se afirmar que: é a derivada da função de fora g com relação a função de dentro f multiplicada pela derivada da função de dentro f com relação a variável x.

Simbolicamente

$$y = g[f\,(x)] \quad \Rightarrow \quad y' = g'[f(x)].f'(x)$$

Exemplo 21

Determinar a derivada da função $y = sen^2x$.

Solução

Fazendo $u = senx$, obtém-se $y = u^2$. Aplicando a regra da cadeia para a função y obtemos

$$y' = (u^2)'.u' \quad \Rightarrow \quad y' = 2.u.u'\,.$$

Sendo $u' = cosx$, conclui-se que:

$$y' = 2.senx.cosx \Rightarrow y' = sen(2x).$$

Exemplo 22

Determinar a derivada da função $y = \sqrt{1+x^2}$.

Solução

Fazendo $u = 1 + x^2$ temos que $y = \sqrt{u} = u^{\frac{1}{2}}$. Aplicando a regra da cadeia para a função y temos que,

$$y' = \left(u^{\frac{1}{2}}\right)'.u' \Rightarrow y' = \frac{1}{2}.u^{\frac{-1}{2}}.u'.$$

Sendo $u' = 2x$, obtemos:

$$y' = \frac{1}{2}.(1+x^2)^{\frac{-1}{2}}.2x \Rightarrow y' = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$$

5.4.11 FUNÇÃO EXPONENCIAL

Se a função $y = f\ (x) = a^x$, definida para todo $x \in \mathbb{R}$, onde $a > 0$ e $a \neq 1$, então a função $y = f\ (x)$ é derivável em todo ponto x do seu domínio e sua derivada é definida por

$$y' = f'(x) = a^x.lna,$$

onde $ln\ a$ é o logaritmo natural de a.

Essa regra de derivação, permite concluir que a derivada da função exponencial a^x é o próprio a^x multiplicado pelo logaritmo natural da base da função exponencial.

Simbolicamente

$$y = f\ (x) = a^x \Rightarrow y' = f'(x) = a^x.lna$$

Demonstração

Por hipótese, temos que a função $y = f\ (x)$ é derivável, assim pela definição de derivada de uma função temos:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

logo,

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{a^{x+\Delta x} - a^x}{\Delta x}$$

Daí, segue:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{a^x(a^{\Delta x} - 1)}{\Delta x}$$

ou ainda:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} a^x . \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(a^{\Delta x} - 1)}{\Delta x}$$

Como o limite fundamental $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{(a^{\Delta x} - 1)}{\Delta x}$ é igual a $lna = log_e^a$, conclui-se que:

$$f'(x) = a^x . Ina$$

Exemplo 23

Dada a função $f\ (x)\ = 2^x$, definida para todo $x \in \mathbb{R}$, determinar a sua derivada.

Solução: Aplicando a regra de derivação para função exponencial obtém-se:

$$f'(x) = 2^x . In2$$

Importante

Se $f(x) = e^x$, então $f'(x) = e^x$

Prova

$$f(x) = e^x \ \Rightarrow f'(x) = e^x . lne$$

Como $lne = log_e^e = 1$, conclui-se que

$$f'(x) = e^x$$

5.4.12 FUNÇÃO LOGARÍTMICA

Seja a função $f\ (x)\ =\ log_a^x$, definida para todo $x \in \mathbb{R}^+$ onde a > 0 e a ≠ 1. A função $f\ (x)$ é derivável em todo ponto x do seu domínio e sua derivada é definida por

$$f'(x) = \frac{1}{x}.log_a^e \quad ou \quad f'(x) = \frac{1}{x.lna}$$

Essa regra de derivação permite concluir que, a derivada da função logarítmica de x (logaritmando) na base a é definido como o inverso do logaritmando x multiplicado pelo logaritmo de e na base a ou é igual o inverso do logaritmando x multiplicado pelo logaritmo natural de $\boldsymbol{a}$**.**

Simbolicamente

$$f\ (x) = \ log_a^x \quad \Rightarrow \quad f'(x) = \frac{1}{x}.log_a^e \quad ou \quad f'(x) = \frac{1}{x.lna}$$

Demonstração

Por hipótese, temos que a função $f\ (x)$ é derivável, assim pela definição de derivada de uma função, temos:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

logo,

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{log_a^{(x+\Delta x)} - log_a^x}{\Delta x}$$

Daí, segue:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{log_a^{(\frac{x+\Delta x}{x})}}{\Delta x}$$

ou ainda:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\Delta x} log_a^{(1+\frac{\Delta x}{x})}$$

Aplicando propriedade de logaritmo, obtemos:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} log_a^{\left[(1+\frac{\Delta x}{x})^{\frac{1}{\Delta x}}\right]}$$

Agora, aplicando propriedade de limite, encontramos:

$$f'(x) = log_a^{\left[\lim_{\Delta x \to 0}(1+\frac{\Delta x}{x})^{\frac{1}{\Delta x}}\right]}$$

Assim,

$$f'(x) = log_a^{\left[\lim_{\Delta x \to 0}(1+\frac{1}{\frac{x}{\Delta x}})^{\frac{x}{\Delta x}}\right]\frac{1}{x}}$$

Escrevendo,

$$f'(x) = \frac{1}{x} log_a^{\left[\lim_{\Delta x \to 0}(1+\frac{1}{\frac{x}{\Delta x}})^{\frac{x}{\Delta x}}\right]}$$

Como o limite

$$\lim_{\Delta x \to 0}(1+\frac{1}{\frac{x}{\Delta x}})^{\frac{x}{\Delta x}} = e$$

pois, se trata de um limite fundamental, conclui-se que:

$$f'(x) = \frac{1}{x}. log_a^e$$

ou ainda,

$$f'(x) = \frac{1}{xIna}$$

Exemplo 24

Sabendo que $f(x) = log_2^x$, definida para todo $x \in \mathbb{R}_+^*$, determinar a sua derivada.

Solução:

$$f'(x) = \frac{1}{x}.log_2^e \quad ou \quad f'(x) = \frac{1}{x.ln2}$$

Importante

Se $f\ (x)\ =\ lnx$, ou seja, $f(x) = log_e^x$, então $f'(x) = \frac{1}{x}$.

Prova

$$f\ (x) =\ lnx = log_e^x \quad \Rightarrow \quad f'(x) = \frac{1}{x}.log_e^e = \frac{1}{x}.1$$

Portanto,

$$f'(x) = \frac{1}{x}$$

5.4.13 FUNÇÃO TRIGONOMÉTRICA

I) Função Seno

Seja a função $f\ (x)\ =\ senx$, definida para todo $x\ \in\ \mathbb{R}$. A função $f\ (x)$ é derivável em todo ponto x do seu domínio e sua derivada é definida por

$$f'(x) = cosx$$

Simbolicamente

$$f\ (x) =\ sen\, x \quad \Rightarrow \quad f'(x) = \cos x$$

Demonstração

Temos por definição, que a derivada de uma função $f\ (x)$ é dada por

$$f'(x) =\ \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

Sendo $f\ (x\ +\ \Delta x)\ =\ sen(x\ +\ \Delta x)$ temos que

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{sen(x + \Delta x) - \text{senx}}{\Delta x}$$

Utilizando a relação trigonométrica $sen\, p - sen\, q = sen\left(\frac{p-q}{2}\right).\cos\left(\frac{p+q}{2}\right)$ encontra-se:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2.\left[sen\left(\frac{x + \Delta x - x}{2}\right).\cos\left(\frac{x + \Delta x + x}{2}\right)\right]}{\Delta x}$$

Logo,

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{sen\left(\frac{\Delta x}{2}\right)}{\left(\frac{\Delta x}{2}\right)}.\lim_{\Delta x \to 0} \cos\left(\frac{2x + \Delta x}{2}\right)$$

utilizando o limite fundamental, $\lim\limits_{t=0} \frac{sent}{t} = 1, \text{com } \frac{\Delta x}{2} = t$

obtém-se:

$$f'(x) = \lim_{t \to 0} \frac{sen\, t}{t}.\lim_{\Delta x \to 0} \cos\left(\frac{2x + \Delta x}{2}\right)$$

Portanto,

$$f'(x) = cosx$$

II) Função Cosseno

Seja a função $f\ (x)\ =\ cosx$, definida para todo $x\ \in\ \mathbb{R}$. A função $f\ (x)$ é derivável em todo ponto x do seu domínio e sua derivada é definida por $f'\ (x)\ =\ -senx$.

Simbolicamente

$$f\ (x) = \ cosx \quad \Rightarrow \quad f'\ (x)\ =\ -senx$$

Demonstração

Temos por definição que a derivada de uma função $f\ (x)$ é dada por

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

Sendo $f\ (x\ +\ \Delta x)\ =\ cos(x\ +\ \Delta x)$ temos que

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\cos(x + \Delta x) - \cos x}{\Delta x}$$

Utilizando a relação trigonométrica $cos\ p - cos\ q = -sen\left(\frac{p+q}{2}\right).sen\ \left(\frac{p-q}{2}\right)$ encontra-se:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{-2.\left[sen\left(\frac{x + \Delta x + x}{2}\right).sen\left(\frac{x + \Delta x - x}{2}\right)\right]}{\Delta x}$$

Tem-se,

$$f'(x) = -\lim_{\Delta x \to 0} \left[\frac{sen\left(\frac{\Delta x}{2}\right)}{\frac{\Delta x}{2}}\right].\lim_{\Delta x \to 0} sen\left(\frac{2x + \Delta x}{2}\right)$$

utilizando o limite fundamental, $\lim_{t=0} \frac{sent}{t} = 1$, com $\frac{\Delta x}{2} = t$

obtém-se:

$$f'(x) = -\lim_{t \to 0} \frac{sen\ t}{t}.\lim_{\Delta x \to 0} \text{sen}\ \left(\frac{2x + \Delta x}{2}\right)$$

Portanto,

$$f'(x) = -senx$$

III) Função Tangente

Seja a função $f\ (x)\ =\ tgx$, definida para todo $x\ \in\ \mathbb{R} - \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi, \text{k} \in Z\right\}$. A função $f\ (x)$ é derivável em todo ponto x do seu domínio e sua derivada é definida por $f'(x) = sec^2x$.

Simbolicamente

$$f\ (x) = \ tg\ x \quad \Rightarrow \quad f'\ (x) = sec^2x$$

Demonstração

Sendo $f(x) = tgx$ temos da trigonometria que $f(x) = \frac{senx}{cosx}$. Aplicando a derivada do quociente para a função $f(x)$, segue

$$f'(x) = \frac{(senx)'.cosx - senx.(cosx)'}{(cosx)^2}$$

ou seja,

$$f'(x) = \frac{cosx.cosx - senx.(-senx)}{(cosx)^2}$$

Daí, segue que

$$f'(x) = \frac{cos^2x + sen^2x}{(cosx)^2} \quad \Rightarrow \quad f'(x) = \frac{1}{(cosx)^2}$$

Temos da trigonometria que, $cos^2x + sen^2x = 1$, para todo x pertencente ao conjunto dos números reais e $\frac{1}{cosx} = \sec x$.

Portanto,

$$f'(x) = sec^2x$$

IV) Função Cotangente

Seja a função $f\ (x)\ =\ cotgx$, definida para todo $x\ \in\ \mathbb{R}$. A função $f\ (x)$ é derivável em todo ponto x do seu domínio e sua derivada é definida por $f'\ (x)\ =\ -cossec^2x$.

Simbolicamente

$$f\ (x) = \ cotg\ x \quad \Rightarrow \quad f'\ (x) = -cossec^2x$$

Demonstração

Sendo $f(x) = cotgx$ temos da trigonometria que $f(x) = \frac{cosx}{senx}$. Aplicando a derivada do quociente para a função $f(x)$, segue

$$f'(x) = \frac{(cosx)'.senx - cosx.(senx)'}{sen^2x}$$

$$f'(x) = \frac{-senx.senx - cosx.cosx}{sen^2x}$$

$$f'(x) = -\frac{(sen^2x + cos^2x)}{sen^2x}$$

$$f'(x) = \ -\frac{1^2}{sen^2x}$$

$$f'(x) = -\left(\frac{1}{senx}\right)^2$$

$$f'(x) = -cossec^2x$$

V) Função Secante

Seja a função $f\ (x)\ =\ secx$, definida para todo $x\ \in\ \mathbb{R}$. A função $f\ (x)$ é derivável em todo ponto x do seu domínio e sua derivada é definida por $f'\ (x) = tgx.secx$.

Simbolicamente

$$f\ (x)\ =\ secx \Rightarrow\ f'\ (x) = tgx.secx$$

Demonstração

$$f'(x) = (secx)'$$

$$f'(x) = \ \left(\frac{1}{cosx}\right)'$$

$$f'(x) = \frac{(1)'.cosx - 1.(cosx)'}{(cosx)^2}$$

$$f'(x) = -\frac{(-senx)}{(cosx)^2}$$

$$f'(x) = \frac{senx}{cosx}.\frac{1}{cosx}$$

$$f'(x) = \ tgx.secx$$

VI) Função Cossecante

Seja a função $f\ (x) = cossecx$, definida para todo $x \in \mathbb{R}$. A função $f\ (x)$ é derivável em todo ponto x do seu domínio e sua derivada é definida por $f'\ (x) = -cotgx. cossecx$.

Simbolicamente

$$f\ (x) = cossecx \Rightarrow f'\ (x) = -cotgx. cossecx.$$

Demonstração

$$f'(x) = (cossecx)'$$

$$f'(x) = \left(\frac{1}{senx}\right)'$$

$$f'(x) = \frac{-(senx)'}{sen^2x}$$

$$f'(x) = \frac{-cosx}{sen^2x}$$

$$f'(x) = -\frac{cosx}{senx}.\frac{1}{senx}$$

$$f'\ (x) = -cotgx. cossecx.$$

5.4.14 FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS INVERSAS

I) Função Arco Seno

Se f (x) é uma função definida por $f: [-1, 1] \rightarrow [\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ sendo $f\ (x) = arcsen\, x$, então f (x) é derivável em] − 1, 1[e sua derivada é definida por

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

Simbolicamente

$$f\ (x) = \ arcsen\, x \quad \Rightarrow \ f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

Demonstração

Sabemos que

$$y = arcsenx <=> x = sen\, y \quad \text{com} \quad y \in \left[\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$

Como a derivada $(seny)$' existe, e é diferente de zero, para qualquer que seja

$y \in \left]\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ aplicando o teorema da derivada para função inversa, temos:

$$y' = \frac{1}{(cosy)'} = \frac{1}{-seny} = -\frac{1}{seny}$$

Como para $y \in \left]\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ temos que $seny = \sqrt{1 - cos^2 y}$.

Logo,

$$y' = -\frac{1}{\sqrt{1 - cos^2 y}}$$

Portanto,

$$y = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

II) Função Arco Cosseno

Se $f\ (x)$ é uma função definida por $f: [-1, 1] \ \rightarrow \ [0, \pi]$, sendo $f\ (x) \ = \ arccos\, x$, então $f\ (x)$ é derivável em $]-1, 1[$ e sua derivada é definida por

$$f'(x) = \frac{-1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

Simbolicamente

$$f\ (x) = \ arccos\ x \quad \Rightarrow \ f'(x) = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$$

Demonstração

Sabemos que $y \ = \ arccosx \ \Leftrightarrow \ x \ = \ cosy\ com\ y \ \in \ [0, \pi]$.

Como a derivada $(\cos\ y)'$ existe, e é diferente de zero, para qualquer $y \in]0, \pi[$, aplicando o teorema da derivada para função inversa temos:

$$y' = \frac{1}{(cosy)'} = \frac{1}{-seny} = \frac{1}{seny}$$

Como para $y \in]0, \pi[$ temos que $seny = \sqrt{1 - cos^2 y}$

Logo,

$$y' = -\frac{1}{\sqrt{1 - cos^2 y}}$$

Portanto,

$$y = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

III) Função Arco Tangente

Se $f\ (x)$ é uma função definida por f : $\mathbb{R} \rightarrow]\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, sendo $f\ (x) = \ arctg\ x$, então $f\ (x)$ é derivável em $\mathbb{R}$ e sua derivada é definida por

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

Simbolicamente

$$f\ (x) = \ arctg\ x \quad \Rightarrow \ f'(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

Demonstração:

Sabemos que $y = arctgx \Leftrightarrow x = tg\,y \;\; com \;\; y \in]\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$

Como a derivada $(tgy)'$ existe, e é diferente de zero, para qualquer $y \in] \frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2} [$, aplicando o teorema da derivada para função inversa temos:

$$y' = \frac{1}{(tgy)'} = \frac{'}{sec^2 y}$$

Como para $y \in] \frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2} [$ temos que $sec^2 y = 1 + tg^2 y$

Logo,

$$y' = \frac{1}{1 + tg^2 y}$$

Portanto, $y' = \frac{1}{1+x^2}$

5.4.15 DERIVADAS SUCESSIVAS

Seja f uma função real derivável em um intervalo real aberto I. Se f' também for derivável no intervalo I, então a sua derivada é chamada de derivada segunda da função f e, representamos por $f\,''(x)$, que se lê f duas linhas de x ou $\frac{d^2 f(x)}{dx^2}$, que se lê derivada segunda de f em relação a x.

Exemplo 25

Determine a primeira e a segunda derivada função f definida por

$$f\,(x) = 3x^2 + 8x - 10.$$

Solução

$$f'(x) = 6x + 8 \quad e \quad f''(x) = 6$$

Exemplo 26

Determine a primeira e a segunda derivada função f definida por $f\,(x) = tgx$.

Solução

$$f'(x) = sec^2x \quad e \quad f''(x) = 2.\sec^2 x\,.tgx$$

5.4.16 DERIVADA DE ORDEM SUPERIOR

A Derivada superior de ordem n, $n \in \mathbb{N}$, de uma função f , que indicamos por $f^{(n)}$, é derivar sucessivamente n vezes a função f .

Exemplo 27

Determine a derivada de ordem n da função $f\,(x) = 3x^5 + 8x^2 - 12x + 45$

Solução

$$f'(x) = 15x^4 + 16x - 12, \qquad f''(x) = 60x^3 + 16, \qquad f'''(x) = 180x^2,$$

$$f^{(4)}(x) = 360x, \qquad f^{(5)}(x) = 360, \qquad f^{(6)}(x) = 0$$

e, consequentemente, $f^n(x) = 0, para\ todo\ n\ \geq 6$

5.4.17 FUNÇÃO NA FORMA IMPLÍCITA

Seja a equação $F(x,y) = 0\,(1)$. Dizemos que a função $y = f\,(x)$ é definida implicitamente pela equação (1), se ao substituir $y = f\,(x)$ em (1), esta equação se transforma em uma identidade.

Exemplo 28

A equação $x^2 + \frac{1}{2}y - 1 = 0$, define implicitamente a função $y = 2.(1 - x^2)$

De fato:

Substituindo $y = 2.(1 - x^2)$ na equação $x^2 + \frac{1}{2}y - 1 = 0$, temos

$$x^2 + \frac{1}{2}.2.(1 - x^2) - 1 = x^2 + 1 - x^2 - 1 = 0$$

6.APLICAÇÕES

Aplicação 1

Uma cidade do Nordeste brasileiro foi acometida por uma epidemia de gripe viral. A Secretaria de Saúde do Município em questão calcula que o número de pessoas atingidas pela gripe depois de um tempo t (calculado em dias a partir de primeiro dia da epidemia é aproximadamente dado por $f(t) = 64t - \frac{t^3}{3}$. Tendo que se saber da propagação da epidemia no tempo, no quarto dia de epidemia, para que sejam tomadas medidas sanitárias, é necessário calcular a derivada da função $f(t)$ em relação a t.

Portanto para um tempo t, qualquer, a derivada é dada por $f'(t) = 64 - t^2$.

Como a Secretaria de Saúde Municipal necessita saber a quantidade de pessoas afetadas no quarto dia, logo $t = 4$.

Considerando $t = 4$ obtém-se a função $f'(4) = 64 - 16 = 48$.

Logo conclui-se que no quarto dia de epidemia 48 pessoas são infectadas pela gripe.

Aplicação 2

Um caçador deseja saber a temperatura de uma caça duas horas após ser colocada em câmara frigorífica para que o corte seja o ideal, ou seja, para que não haja muito sangue correndo e nem que a carne esteja dura em demasia dificultando o corte. Assim sendo, uma peça de caça animal é posta numa câmara frigorífica no instante $t = 0$. Passados algumas horas, a temperatura (T) da peça é calculada através da seguinte equação

$$T(t) = 30 - 5t + \frac{4}{t+1} \; com \quad 0 \leq t \leq 5.$$

Qual a velocidade de redução de sua temperatura após 2 horas

$$\frac{dT}{dt} = -5 + \frac{-4}{(t+1)^2}$$

$$\frac{dT}{dt_{t=2}} = -5 + \frac{-4}{(t+1)^2} = -5 - \frac{4}{9}$$

$$= -5{,}444\ °C/h$$

Ao final de duas horas na câmara frigorífica a temperatura da peça varia $-5{,}444$ graus centrígrados por hora.

Aplicação 3

A previsão do tempo é de suma importância para as áreas de agronomia, piscicultura, aeronavegação, comércio marítimo, turismo e para a garantia de segurança das populações seja humana ou animal.

Nesta aplicação temos como objetivo mostrar como o cálculo da derivada é um instrumento que auxilia na interpretação da previsão do tempo.

Sabe-se que numa determinada cidade do sudeste brasileiro depois da meia noite a temperatura varia conforme a função a seguir

$$T = 0{,}1(400 - 40t + t^2)\ 0 \leq t \leq 12$$

Ao usar a regra da derivada de uma função constante e a regra da potência, calcula-se a derivada de T em função do tempo t e têm-se

$$\frac{dT}{dt} = 0{,}1.(-40 + 2.t)$$

Aplica-se a seguir a propriedade distributiva e multiplica-se a função acima por 0,1 obtém-se:

$$\frac{dT}{dt} = -4 + 0{,}2.t$$

Como se objetiva calcular a derivada entre o período das cinco horas às seis horas, é necessário o cálculo da média destas horas. Portanto tem-se $t = 5{,}5$.

$$\frac{dT}{dt} = -4 + 0{,}2\ .5{,}5$$

$$\frac{dT}{dt} = -4 + 1{,}1$$

$$\frac{dT}{dt} = -2{,}9\ graus$$

Logo, constata-se nesta aplicação que a variação da temperatura no período das cinco horas às seis horas é de $-2{,}9$ graus. De tal modo percebe-se que a variação de temperatura neste intervalo de tempo é negativa e, consequentemente, a população poderá prevenir-se, pois a temperatura estará caindo.

Aplicação 4

Em qualquer empresa qual seja o seu tamanho, é indispensável estar atento aos custos de produção para manter os lucros e, eventualmente, expandi-los.

Esse é um fator importante para que o negócio mantenha as operações financeiramente saudáveis. Existem casos que envolvem a necessidade de se calcular a derivada para a determinação de custos de produção.

Uma fábrica de calçados na cidade Campina Grande-PB produz x calçados por dia e tem seu custo total definido por $C(x)$. É possível obter o custo marginal de produção de x unidades de acordo com a seguinte expressão a qual envolve a derivada de $C(x)$:

$$C'(x) \approx C(x + 1) - C(x)$$

Suponha que a produção da fábrica é dada pela função a seguir

$$C(x) = 10.000 + 5x + 0{,}01x^2$$

onde x é a quantidade de calçados fabricados e $C(x)$ é o custo total dado em reais.

Aplicando-se as regras de derivação obtém-se o custo de produção, que é dado por:

$$C'(x) = 5 + 0.02x$$

A referida fabrica produz 1000 calçados por dia. Os engenheiros necessitam saber o custo de produção diário. De tal modo, se quiser obter o custo de produção equivalente a 1000 calçados é necessário substituir o valor de x pela quantidade de itens, ou seja,

$$C'(1000) = 5 + 0{,}02(1000) = R\$\, 25/calçado$$

Neste caso a fabrica possui um custo de produção de 25 reais por calçado ao produzir 1000 calçados por dia.

Aplicação 5

De acordo com os engenheiros de produção de uma montadora de veículos o número de peças fabricadas nas primeiras t horas diárias de trabalho é definida pela seguinte função:

$$f(t) = \begin{cases} 50(t^2 + \mathrm{t}), \text{para } 0 \leq \mathrm{t} \leq 4 \\ 200(\mathrm{t} + 1), \text{para } 4 \leq \mathrm{t} \leq 8 \end{cases}$$

Se os engenheiros necessitarem saber a razão de produção (em peças por hora) após 3 horas de trabalho, deve se calcular a derivada da função $f(t)$ em função de t

Aplicando-se as regras de derivação obtém-se a seguinte função derivada:

$$f(t) = \begin{cases} 50(2\mathrm{t} + 1), \text{para } 0 \leq \mathrm{t} \leq 4 \\ \\ 200, \text{para } 4 \leq \mathrm{t} \leq 8 \end{cases}$$

A razão de produção após 3 horas de trabalho é dada por $f'(3)$ considerando $t < 4$.

Logo,

$$f'(3) = 50(2 \,.\, 3 + 1) = 350.$$

Após 3 horas de trabalho a razão de produção é de 350 peças por hora de trabalho. Se os engenheiros quiserem a razão de produção após 7 horas de trabalho, o cálculo da derivada é dado por f' (7) considerando $t > 4$, obtendo-se $f'(7) = 200$.

De tal modo que após 7 horas de trabalho a razão de produção é de 200 peças por hora de trabalho.

Se os engenheiros necessitem saber quantas peças serão produzidas na 8ª hora de trabalho, será necessário calcular a diferença entre a 8ª e 7ª hora de trabalho.

Empregando a função $\boldsymbol{f(t) = 200(t + 1)}$ e considerando $\boldsymbol{t = 7}$ e $\boldsymbol{t = 8}$, tem-se:

$$\boldsymbol{f(7) = 200\,(7 + 1)}$$

$$\boldsymbol{f(7) = 200.(8)}$$

$$\boldsymbol{f(7) = 1600.}$$

$$\boldsymbol{f(8) = 200(8 + 1)}$$

$$\boldsymbol{f(8) = 200.(9)}$$

$$\boldsymbol{f(8) = 1800\,.\; f(8) - f(7) = 1800 - 1600 = 200.}$$

Na 8ª hora de trabalho serão produzidas 200 peças.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Neste trabalho conseguimos apresentar uma base sólida para desenvolvermos o essencial sobre derivadas, bem como proposições, definições e teoremas necessários para a compreensão do estudo das derivadas. Também foi possível apresentar aplicações relacionadas ao estudo das derivadas, conhecer um pouco da vida e obra de grandes gênios, a saber Newton, Leibniz e as controvérsias da corrida a descoberta do cálculo. Uma das grandes dificuldades ao escrever este trabalho de conclusão de curso foi justamente a escrita pois pude perceber que é muito complexo o ato de produzir textos matemáticos com rigor, clareza e precisão, não deixando de salientar, que tive dificuldade na digitação do trabalho pois a minha compreensão ao LATEX era escassa e tive que recorrer ao WORD. O trabalho me possibilitou interagir com uma gama de conhecimentos relacionados ao cálculo diferencial e também me possibilitou atingir uma maturidade quanto a compreensão da complexa da linguagem matemática encontrada em manuais de Cálculo. Além disto, foi possível abranger mais meu conhecimento sobre a utilidade do Programa Geogebra, elevando a quantidade e qualidade as minhas ferramentas para a criação de textos matemáticos mais complexos. Pra finalizar, a construção deste trabalho de conclusão de curso fez com que eu ampliasse minha visão e provocar interesse em mim prosseguir os estudos em matemática pura e aplicada, e além disso, sempre tentando inovar e encontrar novas metodologias e práticas de como lecionar tais conteúdos facilitando assim o ensino aprendizagem dos discentes. Em tempo, este trabalho foi feito pensando em alunos e professores, que venham a trabalhar com esse tema tão instigante e importante para nossa vida, que é o estudo das derivadas.

REFERÊCIAS

ANTON, Howard. *Cálculo um Novo Horizonte* - Porto Alegre. Bookman, 2002.

BOLDRINI, J. L. et al. *Álgebra Linear*. [S.l.]: Harper & Row do Brasil, 1980. v. 3.

FLEMMING, Diva M. e GONÇALVES, Míriam. *Cálculos A e B* — São Paulo: Makron, 1992

FRAZÃO, Dilva. https://www.ebiografia.com/isaac_newton/ . Acesso em 27/08/2022

FRAZÃO, Dilva. https://www.ebiografia.com/gottfried_leibniz/ Acesso em 27/08/2022

GUIDORIZZI, Luis Hamilton, *Um Curso de Cálculo* - Rio de Janeiro: Livros Técnicos Científicos, 1995.

HOFFMANN, Laurence D. *Cálculo um curso moderno e suas Aplicações* - RJ. LTC. 2001.

HOLANDA, S. B. *Caminhos e fronteiras*. 3. ed. São Paulo: Companhia das Letras, 1994. 301 p., il., 21 cm. Inclui Índice. ISBN 85-7164-411-X.

IEZZI, Gelson. et al. Fundamentos de Matemática Elementar 1 – São Paulo. Editora Atual, 1977.

IEZZI, Gelson. et al. Fundamentos de Matemática Elementar 2 – São Paulo. Editora Atual, 1977.

IEZZI, Gelson. et al. Fundamentos de Matemática Elementar 3 – São Paulo. Editora Atual, 1977-1978.

LEITHOLD, Louis. *Cálculo com Geometria Analítica* - São Paulo: Harbra, 1977.

MUNEN, Mustafá A e FOULLIS, David J. *Cálculo* - Rio de Janeiro. Editora Guanabara Dois, 1983.

https://revistagalileu.globo.com/Ciencia/noticia/2017/08/entenda-treta-entre-newton-e-leibniz-sobre-o-calculo-infinitesimal.html. Acessado em 27/08/2022

http://ecalculo.if.usp.br/historia/leibniz.htm Acesso em 27/08/2022 https://pt.khanacademy.org/science/8-ano/clima-fenomenos-meteorologicos-previsao-tempo/fenomenos-meteorologicos-previsao-do-tempo/a/importancia-da-previsao-do-tempo#:~:text=Além%20da%20nossa%20preparação%20diária,informações%20dadas%20nas%20previsões%20meteorológicas. Acesso em 06/09/2022.

http://www.inicepg.univap.br/cd/INIC_2016/anais/arquivos/RE_0230_0047_01. Acesso em 26/08/2022

https://www.totvs.com/blog/gestao-industrial/custos-de-producao/ acesso em 06/09/2022.

https://edisciplinas.usp.br/mod/book/view.php?id=3129821&chapterid=23983 acesso em 13/09/2022

TOFFOLI, Sônia Ferreira Lopes et al. http://www.uel.br/projetos/matessencial/superior/calculo/derivada/derivada1.html. Acesso em 07/09/2022

STEWART, James. Cálculo, volume I – 5 ª Ed. São Paulo: Pioneira Thomson Learnig, 2006.

SWOKOWSKI, Earl W. *Cálculo com Geometria analítica* - São Paulo: Makron, 1994.

INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA DA PARAÍBA
Campus Campina Grande
R. Tranqüilino Coelho Lemos, 671, Dinamérica, CEP 58432-300, Campina Grande (PB)
CNPJ: 10.783.898/0003-37 - Telefone: (83) 2102.6200

Documento Digitalizado Ostensivo (Público)

Entrega de TCC

Assunto:	Entrega de TCC
Assinado por:	Jesus Neto
Tipo do Documento:	Dissertação
Situação:	Finalizado
Nível de Acesso:	Ostensivo (Público)
Tipo do Conferência:	Cópia Simples

Documento assinado eletronicamente por:

- **Jesus Camilo Duarte Neto, ALUNO (201711230017) DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA - CAMPINA GRANDE**, em 19/09/2022 15:51:41.

Este documento foi armazenado no SUAP em 24/09/2022. Para comprovar sua integridade, faça a leitura do QRCode ao lado ou acesse https://suap.ifpb.edu.br/verificar-documento-externo/ e forneça os dados abaixo:

Código Verificador: 634119
Código de Autenticação: 8039e74e34