



INSTITUTO FEDERAL
Paraíba
Campus Campina Grande

INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA DA PARAÍBA
CURSO SUPERIOR DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

FERNANDO DA SILVA FIGUEIREDO

TEOREMA DE GREEN E APLICAÇÕES

CAMPINA GRANDE - PB

2022

FERNANDO DA SILVA FIGUEIREDO

TEOREMA DE GREEN E APLICAÇÕES

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado no Curso Superior de Licenciatura em Matemática do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia da Paraíba (IFPB), como requisito parcial para obtenção do título de Licenciado em Matemática.

Orientador: Prof. Me. Orlando Batista de Almeida

F475t Figueiredo, Fernando da Silva.
Teorema de Green e aplicações / Fernando da Silva
Figueiredo. - Campina Grande, 2022.
61 f. : il.

Trabalho de Conclusão de Curso (Curso de Licenciatura
em Matemática) - Instituto Federal da Paraíba, 2022.
Orientador: Prof. Me. Orlando Batista de Almeida.

1. Teorema de Green 2. Integral 3. Vetorial 4. Divergente
5. Rotacional e aplicações I. Título.

CDU 517.3



MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
SECRETARIA DE EDUCAÇÃO PROFISSIONAL E TECNOLÓGICA
INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA DA PARAÍBA
CAMPUS CAMPINA GRANDE

FERNANDO DA SILVA FIGUEIREDO

TEOREMA DE GREEN E APLICAÇÕES

Trabalho de Conclusão de Curso, aprovado como requisito parcial para a obtenção de graduação em Licenciatura em Matemática pelo Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia da Paraíba – Campus Campina Grande.

Habilitação: Licenciatura

Data da aprovação

14 / 09 / 2022.

BANCA EXAMINADORA:

Orlando Batista de Almeida

ORIENTADOR: Prof. Me. Orlando Batista de Almeida – IFPB

Rodrigo Moura da Silva

AVALIADOR: Prof. Dr. Rodrigo Moura da Silva – IFPB

Cicero da Silva Pereira

AVALIADOR: Prof. Me. Cicero da Silva Pereira – IFPB

AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente a Deus que me deu saúde para poder estar presente nas aulas e realizar todas as atividades conseguindo cumprir todos os requisitos para a conclusão do curso.

Aos meus pais Laudevania Silva e José Hamilton que me ajudaram a contribuindo para que eu me dedicasse apenas ao curso.

Ao meu Orientador, Orlando Batista de Almeida. O qual não consigo encontrar palavras para descrever o quanto eu sou grato por tudo que ele fez para me ajudar. Agradeço demais de coração por ter me orientado, marcando aulas para que eu pudesse desenvolver o meu trabalho, além de sempre estar presente quando eu sempre necessitava tirando minhas dúvidas. Sou muito grato por tudo e pela sua vida, obrigado Orlando Batista.

Aos amigos que fiz no curso, Pedro Igor, Hozana dos Santos, Raynara dos Santos, Ray Pereira e outros colegas.

Aos professores da banca.

A todos os professores do IFPB, que são muito atenciosos e prestativos com todos os alunos.

Ao IFPB, pelos auxílios oferecidos que é um apoio muito especial para todos os estudantes. Como

Como também, agradeço ao Instituto Federal de Educação Ciência e Tecnologia da Paraíba – IFPB – campus Campina Grande, e a todos os funcionários dessa instituição que me proporcionaram um ambiente propício para o desenvolvimento do meu trabalho de conclusão de curso.

Sou muito grato por tudo, sendo assim, deixo o meu muito obrigado a todos!

A Matemática é o alfabeto com o qual Deus escreveu o Universo.
(Galileu Galilei)

RESUMO

O presente trabalho aborda como tema principal o Teorema de Green e suas aplicações. No desenvolvimento do trabalho de caráter bibliográfico, inicialmente, foi abordado um pouco da história do grande matemático George Green (1793-1841), que tanto contribuiu para o avanço da matemática, bem como, também de outras áreas do conhecimento. Foi feita uma abordagem da teoria do tema principal do trabalho de modo simples, objetivo e prático, mas sempre na observância do rigor matemático. São apresentadas definições, exemplos, teoremas, demonstrações e observações inerentes ao Teorema de Green. Alguns conteúdos são tratados de uma forma mais efetiva devido a sua importância para desenvolvimento e compreensão do tema central do trabalho, que o Teorema de Green e suas Aplicações, como: campo vetorial, curvas, parametrização de curvas, campo divergente, campo rotacional, integral de linha e, para finalizar, são mostradas algumas aplicações.

Palavras-chave: Teorema de Green, Integral, Vetorial, Divergente, Rotacional e Aplicações.

ABSTRACT

The present work deals Green's Theorem and its applications as its main theme. In the development of mathematics work too, initially, it was little historical of the great mathematics 1793-1841 of knowledge, George, who was so much drawn to the advancement of mathematics. An approach was made to the theory of the main theme of the work in a simple, objective and practical way, but always observing mathematical rigor. Green authorship, theorems, are and conditions inherent to the Theore. Some contents are treated in a more effective way due to their importance for the development and understanding of the central theme of the work, than Green's Theorem and its applications, such as: vector field, curvatures, parameterization of curves, divergent field, rotational field, line integral and, finally, are application.

Keywords: Green's Theorem, Integral, Vector, Divergent, Rotational and Applications.

NOTAÇÃO

\in	Pertence.
\mathbb{R}^2	Plano xy .
\mathbb{R}^3	Espaço xyz .
\int_a^b	Integral variando de a até b .
\Rightarrow	Implica.
\Leftrightarrow	Se, e somente se.
∇f	Gradiente da função f .
\oint_C	Integral de linha através de uma curva fechada C .
\iint_D	Integral dupla sobre a região D .
\int_C	Integral de linha através de uma curva C .
W	Dáblio. Representando o trabalho.
$\delta'(t)$	Derivada da função delta δ com relação a t .
σ	Sigma.
\vec{r}	Vetor r

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1 - Foto de George Green	14.
Figura 2 - Gráfico da curva e Vetor posição $\vec{r}(t)$	17.
Figura 3 - Gráfico da reta no plano.....	19.
Figura 4 - Gráfico da parábola no plano.....	20.
Figura 5 - Gráfico da circunferência no plano.....	20.
Figura 6 - Gráfico da elipse no plano.....	21.
Figura 7 - Gráfico da reta no espaço tridimensional.....	22.
Figura 8 - Circunferência no espaço tridimensional.....	22.
Figura 9 - Campo vetorial em \mathbb{R}^2	23.
Figura 10 - Setas tangentes a um círculo.....	24.
Figura 11 - Curvas fechadas.....	25.
Figura 12 - Curvas que não são simples.....	26.
Figura 13 - Gráfico da curva e Vetor posição $\vec{r}(t)$	27.
Figura 14 - Curva C formada por retângulos.....	39.
Figura 15 - Retângulo	39.
Figura 16 - Reta determinada pelos pontos A e B.....	41.
Figura 17 - Vetor Deslocamento (d).....	42.
Figura 18 - Gráfico da trajetória da Curva C.....	42.
Figura 19 - Gráfico da Curva C., região I.....	47.
Figura 20 - Gráfico da Curva C, região tipo II.....	51.

Figura 21 -Região D de uma coroa circular.....	53.
Figura 22 - Gráfico de uma curva orientada.....	54.
Figura 23 -Gráfico de uma região D	57.

TABELA

Tabela 1 - Tabela para o campo \vec{F}	24.
--	-----

SUMÁRIO

1. INTRODUÇÃO	13
1.1 Aspectos Históricos.....	13
1.2 Objetivos.....	15
1.3 Metodologia.....	16
1.4 Estrutura do trabalho	16
2. ALGUMAS DEFINIÇÕES IMPORTANTE PARA O DESENVOLVIMENTO DESSE TRABALHO.....	17
2.1 Campo vetorial	17
2.2.Vetor posição.....	17
2.3.Limite de uma função vetorial	18
3. CURVA	25
3.1. Parametrização.....	26
3.2. Parametrização de alguns lugares geométricos importantes	29
3.2.1 Parametrização da reta.....	29
3.2.2 Parametrização da circunferência.....	32
3.2.3 Parametrização da elipse.....	34
3.3. Campo gradiente.....	36
3.4. Campo rotacional.....	36
3.5. Campo divergente.....	37
4. INTEGRAL DE LINHA	38
4.1. Integral de linha de um campo escalar.....	39

4.2. Integral de linha (curva) de um campo (função) escalar.....	40
4.3. Integral de linha de um campo vetorial.....	42
5. TEOREMA DE GREEN.....	47
6. APLICAÇÕES.....	53
7. CONSIDERAÇÕES FINAIS.....	59
REFERÊNCIAS.....	60

1. INTRODUÇÃO

Este trabalho apresenta o Teorema de Green. E, para o seu entendimento é feita a sua demonstração de uma forma clara e objetiva, tendo em vista que as demonstrações encontradas nos livros de cálculo não abordam claramente os assuntos inerentes, necessários e essenciais para tal. Esse objeto de estudo foi uma escolha para ser o trabalho de conclusão de curso (TCC) pela sua importância e aplicação nas mais diversas áreas do conhecimento. É enfatizado, que o referido teorema que é o foco do trabalho, originalmente foi desenvolvido no contexto da teoria do eletromagnetismo, entretanto o Teorema de Green é aplicado em outras áreas do conhecimento. A abordagem do teorema é vista em livros de cálculo ou análise, trabalhado em assuntos como Cálculo Diferencial e Vetorial. Sendo, portanto, o teorema de suma importância no cálculo de áreas de figuras planas fechadas. Na parte central do trabalho será enunciado o Teorema de Green, que faz uma relação entre uma integral de linha ao longo de uma curva fechada simples C e uma integral dupla sobre a região do plano D delimitada por C , assumindo que D é constituído por todos os pontos internos de C , bem como todos os pontos de C (que será denominado de bordo ou fronteira de C), usado na matemática como ferramenta para o cálculo de áreas de figuras planas limitadas e fechadas e também tem fundamental importância na formulação de outro teorema conhecido como Teorema de Stokes, que na verdade é sua generalização. Por fim, é trabalhado a aplicação do teorema o qual é utilizado não só na matemática, mas nas mais variadas áreas do conhecimento como: na física, geografia, arquitetura, biologia, entre outras.

1.1 Aspectos Históricos

George Green nasceu em 1793 em Nottingham, na Inglaterra vitoriana, e foi o primeiro filho de um padeiro próspero, também chamado George. George pai enviou seu filho à mais cara e renomada escola de Nottingham: a Goodacre Academy. Green iniciou (e também concluiu) lá aquilo que viria a ser seu único contato conhecido com algum ambiente acadêmico durante mais de trinta anos. Seguindo o costume da época, após dois anos ele deixou a escola para ajudar seu pai na padaria que começava a prosperar.

Em 1807, a família Green havia prosperado bastante e era proprietária de vários imóveis em Nottingham. George pai comprou em um leilão uma propriedade rural em Sneinton, a poucas milhas de Nottingham, e lá construiu um moinho de milho. Tudo leva a

crer que muito cedo a maior parte dos cuidados com o moinho foi delegada a George filho e a um administrador: William Smith, cuja filha viria a ser a mãe dos sete filhos de George Green, embora ele jamais tenha se casado (tão pouco chegou a admitir esta união em alguma convivência social). Os cuidados com o moinho ocuparam boa parte de seu tempo até a morte de seus pais, que foram bem sucedidos a ponto de garantir à família um sólido patrimônio.

Em 1828, Green publica seu primeiro e mais importante trabalho. O trabalho publicado foi dedicado ao duque de New Castle *K. G* e continha resultados extremamente importantes, entre os quais aquele que hoje conhecemos como Teorema de Green. Três anos depois da sua primeira publicação Green publicou outros trabalhos sendo eles, *memoirs: Mathematica l Investigations Concerning the Lawsof the Equilibrium Fluids Analogoustoth Electric Fluid*(naquele tempo a eletricidade era entendida como resultado do fluxo de um fluido invisível), *On the Determination of the Exterior and Interior Attractions of Ellipsoids of Variable Densities* e *Researcheson the Vibrations of Pendulums in Fluid Media*.

Com efeito, em outubro de 1833, George Green iniciou sua graduação em Cambridge. Sua produção, durante a estada em Cambridge, compõe-se fundamentalmente de seis trabalhos; dois em hidrodinâmica, dois sobre reflexão e refração de som e dois sobre reflexão e refração de luz. Depois de passado um tempo em Cambridge, ele retorna a Nottingham da onde não mais sairia vindo a falecer de gripe em junho de 1841.

Figura 1: Foto de George Green



Fonte: <https://knoow.net/wp-content/uploads/2016/07/green.jpg>

O famoso e reconhecido Teorema de Green foi escrito na época com uma notação quase incompreensível para os matemáticos da época. Sabemos hoje que podemos encontrar uma formulação moderna e compreensível bem como sua demonstração.

O Teorema de Green, o qual leva seu nome, se refere a uma região fechada e limitada do plano. Em linhas gerais, afirma a igualdade entre integrais de linha e um campo vetorial na fronteira desta região e a integral dupla (no interior da região) de determinadas expressão envolvendo derivadas parciais do campo. Vemos que o teorema apresenta um conceito no qual é a região simples. Uma região no \mathbb{R}^2 é dita *simples* se a interseção de sua fronteira com qualquer reta paralela a um dos eixos coordenados ocorre no máximo duas vezes. Resumindo o Teorema se refere a união finita de regiões simples. Segundo o artigo de Heloisa B. Medeiro, título George Green, o Homem e o Teorema. O Teorema foi proposto para ser usado na teoria de eletromagnetismo, embora podemos usá-lo em inúmeras situações. Green desenvolveu trabalhos em ensaio na aplicação de análise matemática para as teorias de eletricidade e magnetismo, aplicação dos resultados preliminares na teoria de magnetismo, investigações matemáticas relativas às leis do equilíbrio de fluidos análogo ao fluido elétrico, com outras pesquisas semelhantes, na determinação das atrações exteriores e interiores de elipsóides de densidades variáveis, no movimento de ondas em um canal variável de pequena profundidade e largura, na reflexão e refração de som, nota no movimento de ondas em canais, suplementos para uma dissertação da reflexão e refração de luz, a propagação de luz em meio cristalizadas e pesquisas na vibração de pêndulos em meios fluidos. Sendo assim, os estudos de Green serviram de base para trabalhos de teoria do eletromagnetismo subsequentes de Thompson, Stokes, Rayleigh e Maxwell.

1.2 Objetivos

Objetivo geral: Apresentar e demonstrar o Teorema de Green e fazer algumas aplicações.

Objetivos específicos:

- Criar uma sequência lógica e favorável de conteúdos essenciais e necessários para demonstrar o Teorema de Green.

1.3 Metodologia

Apresentaremos algumas definições principais que servirá como base para o que será apresentado ao longo de todo trabalho e que são importantes para o embasamento e desenvolvimento do Teorema de Green, como: campo vetorial, curvas, parametrização de curvas, campo gradiente, campo rotacional e divergente que serão fundamentais e determinantes na demonstração do Teorema de Green. Para uma melhor compreensão, admite-se que o leitor já possua algum conhecimento do cálculo diferencial e integral, funções de várias variáveis, derivadas parciais e do cálculo vetorial, conteúdos que podem ser encontrados para consulta nos livros citados como referência.

1.4 Estrutura do trabalho

Visando a compreensão da estrutura que auxiliará no entendimento do Teorema de Green o trabalho está estruturado e desenvolvido da seguinte maneira no Capítulo 1 é apresentado a introdução, os aspectos históricos abordando quem foi George Green e como surgiu o Teorema de Green, são definidos os objetivos e também a metodologia a ser implantada no trabalho. No capítulo 2, serão apresentadas algumas definições importante para o desenvolvimento deste trabalho, sendo campo escalar e campo vetorial, parametrização, campo gradiente, rotacional e divergente. Capítulo 3, aborda-se sobre curvas. Capítulo 4 a integral de linha de campos escalares e campos vetoriais. No Capítulo 5 é demonstrado o Teorema de Green. Capítulo 6, serão feitas algumas aplicações do referido teorema e no Capítulo 7, são feitas as considerações finais e por conseguinte finalizamos o trabalho com as referências utilizadas para a construção do trabalho de conclusão de curso (TCC).

2. ALGUMAS DEFINIÇÕES IMPORTANTES PARA O DESENVOLVIMENTO DESSE TRABALHO

2.1 Campo Vetorial

Definição 1

Uma função cujo domínio é um conjunto de números reais e cuja imagem é um conjunto de vetores é chamada função vetorial ou campo vetorial. Uma campo vetorial definido num intervalo $I \subset \mathbb{R}$, com valores em \mathbb{R}^3 , é denotada por :

$$\vec{r}(t) = (x(t), y(t), z(t)), t \in I \quad (2.1)$$

Onde $x(t), y(t), z(t)$ são funções reais definidas em I . Para Uma função vetorial definida num intervalo $I \subset \mathbb{R}$, com valores em \mathbb{R}^2 , é denotada por :

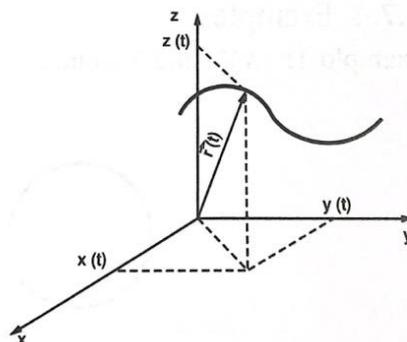
$$\vec{r}(t) = (x(t), y(t)), t \in I \quad (2.2)$$

Onde $x(t)$ e $y(t)$ são funções reais definidas em I .

2.2 Vetor Posição

Para o espaço tridimensional, o vetor $r(t)$ é representado geometricamente pelo vetor OP, onde $P = (x(t), y(t), z(t))$.

Figura 2: Gráfico da curva e Vetor posição $\vec{r}(t)$



Fonte: Gonçalves (2007, p. 29)

2.3 Limite de uma função vetorial

Definição 2

O limite de $\vec{r}(t)$ quando t se aproxima de t_1 é definido por:

$$\lim_{t \rightarrow t_1} \vec{r}(t) = (\lim_{t \rightarrow t_1} x(t), \lim_{t \rightarrow t_1} y(t), \lim_{t \rightarrow t_1} z(t)),$$

Caso os limites

$$\lim_{t \rightarrow t_1} x(t), \lim_{t \rightarrow t_1} y(t) \text{ e } \lim_{t \rightarrow t_1} z(t) \text{ existam.}$$

Definição 3

A função $\vec{r}(t)$ é contínua em $t_1 \in I$ se, e somente se,

$$\lim_{t \rightarrow t_1} \vec{r}(t) = \vec{r}(t_1).$$

Importante

Segue das definições 2 e 3, que $\vec{r}(t)$ é contínua em t_1 se, e somente se, $x(t)$, $y(t)$ e $z(t)$ são contínuas em t_1 .

Definição 4

Dizemos que o campo vetorial $\vec{r}(t)$ é contínuo em I , se $\vec{r}(t)$ é contínuo, $\forall t \in I$.

É suma importância, observar que:

Quando $\vec{r}(t)$ é contínua em I , o ponto final P do vetor $\vec{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$ descreve uma curva C no \mathbb{R}^3 , ou seja, para cada $t \in I$, obtemos um ponto $P(x, y, z) \in C$, onde

$$x = x(t), y = y(t), z = z(t) \tag{2.3}.$$

A equação (2.1) é dita uma parametrização da curva C , as equações (2.3) são chamadas de equações paramétricas para curva C e a variável t é denominado de parâmetro.

Observação

Eliminando-se o parâmetro t nas equações paramétricas como em (2.2) obtemos uma expressão cartesiana para curva C .

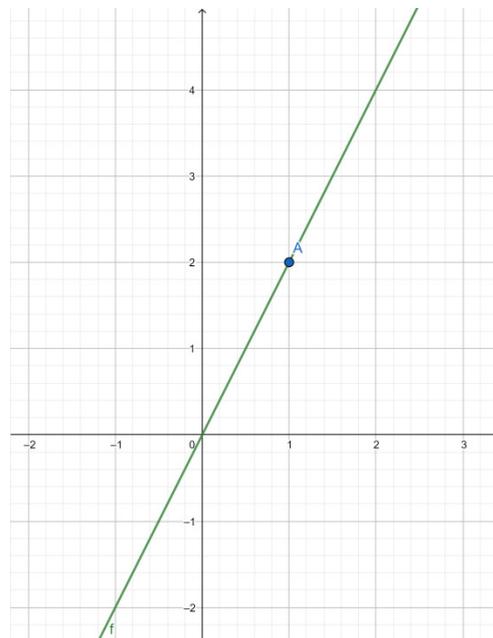
Exemplo 1: Seja α a função dada por $\vec{r}(t) = (t, 2t)$.

- Calcule $\vec{r}(0)$ e $r(1)$.
- Esboçar o gráfico do campo r .

Solução

- $\vec{r}(0) = (0,0)$ e $\vec{r}(1) = (1,2)$
- A imagem de r é a reta de equação paramétrica $\begin{cases} x = t \\ y = 2t \end{cases}$ ou a equação cartesiana $y = 2x$.

Figura 3: Gráfico da reta no plano



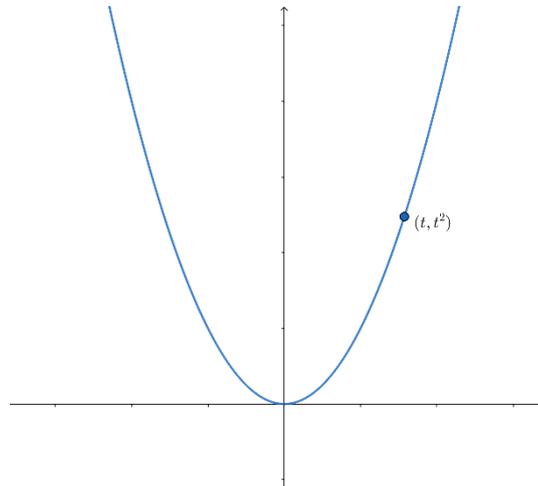
Fonte: Autoria própria

Exemplos 2: Esboçar o gráfico do campo \vec{r} , dada por $\vec{r}(t) = (t, t^2)$.

Solução

O gráfico da curva de equação paramétrica ($\vec{r}(t)$): $\begin{cases} x = t \\ y = t^2 \end{cases}$ ou de equação cartesiana $y = x^2$ é uma parábola, conforme o gráfico.

Figura 4: Gráfico da parábola no plano



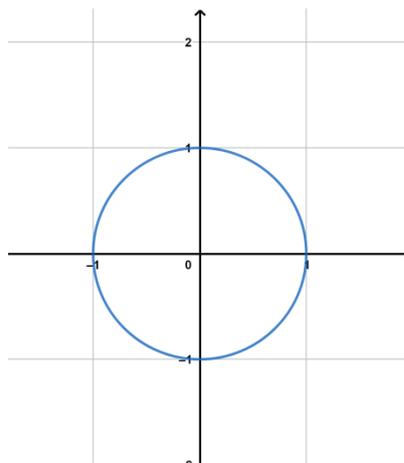
Fonte: Autoria própria

Exemplo 3: Dado o campo vetorial $\vec{r}(t) = (\cos t, \text{sen } t)$, $t \in [0, 2\pi]$. Esboçar o seu gráfico.

Solução

O gráfico de r é a curva de equação paramétrica $\begin{cases} x = \cos t \\ y = \text{sen } t \end{cases}$ ou de equação cartesiana $x^2 + y^2 = 1$, cujo gráfico é uma circunferência de centro na origem e raio 1 (unitário), conforme a figura abaixo.

Figura 5: Gráfico da circunferência no plano



Fonte: Autoria própria

Exemplo 4: Construir o gráfico da função vetorial \vec{r} , dada por $\vec{r}(t) = (3 \cos t, 4 \text{sen } t)$, $t \in [0, 2\pi]$.

Solução

Temos que

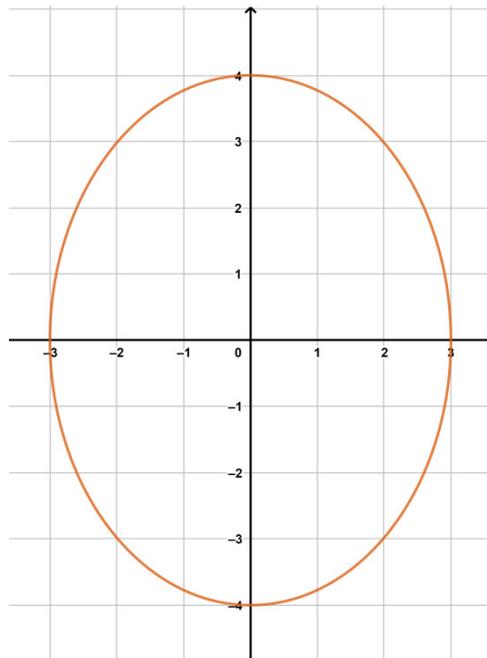
$$\begin{cases} x = 3 \cos t \\ y = 4 \operatorname{sen} t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{x}{3} = \cos t \\ \frac{y}{4} = \operatorname{sen} t \end{cases}$$

Logo,

$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} = 1.$$

Esse gráfico é uma elipse de centro na origem com eixo maior paralelo ao eixo das ordenadas medindo 8 unidades e o eixo menor medindo 6 unidades, conforme a figura abaixo.

Figura 6: Gráfico da elipse no plano



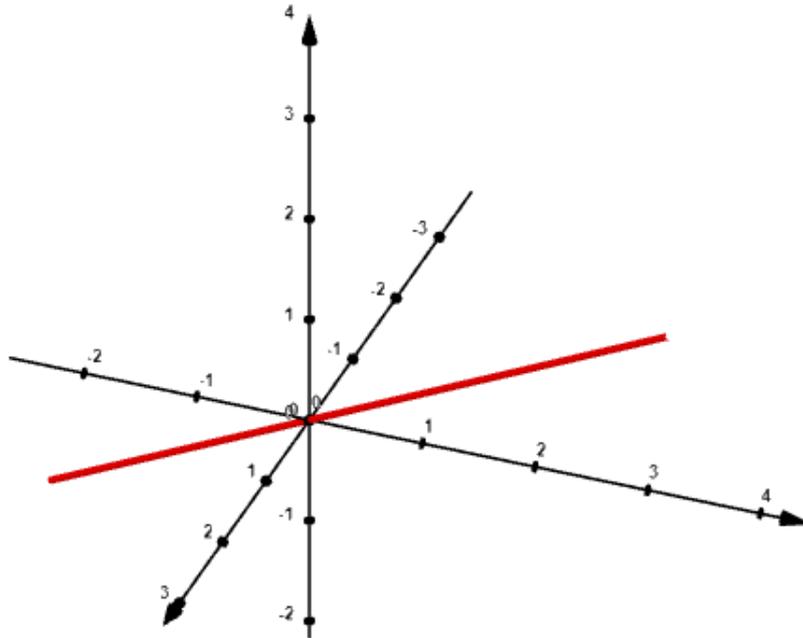
Fonte: Autoria própria

Exemplo 5: Construir o gráfico do campo definido por $\vec{r}(t) = (t, t, t)$, para todo t pertencente aos reais.

Solução

O gráfico de r é a reta de equações paramétricas $\begin{cases} x = t \\ y = t \\ z = t \end{cases}$ ou equação cartesiana $x = y = z$.

Figura 7: Gráfico da reta no espaço tridimensional



Fonte: Autoria própria

Exemplo 6: Dada a função vetorial de $\vec{r}(t) = (\cos t, \sin t, 1)$, esboçar o seu gráfico.

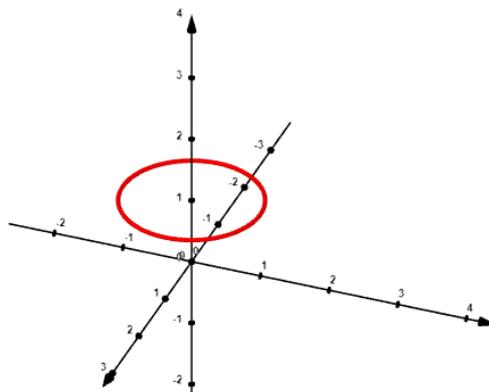
Solução

Temos que;

$$\begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t \end{cases} \Rightarrow x^2 + y^2 = 1.$$

Logo, o gráfico de \vec{r} é uma circunferência paralela ao plano xy de centro no eixo das cotas z , ou seja, $(0,0,1)$ e de raio 1.

Figura 8: Circunferência no espaço tridimensional



Fonte: Autor própria

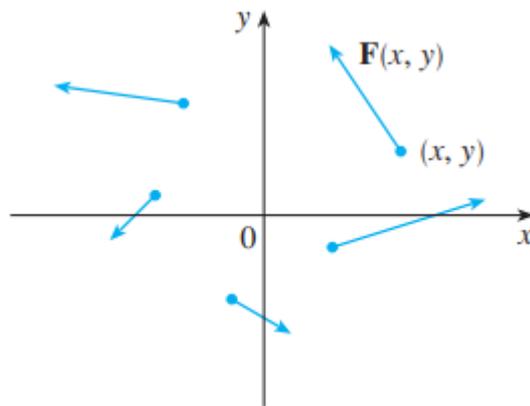
Em matemática chamamos de campo vetorial ou campo de vetores uma função cujo domínio é um subconjunto de pontos de \mathbb{R}^2 ou \mathbb{R}^3 e cuja imagem é um conjunto de vetores em \mathbb{R}^2 ou \mathbb{R}^3 . Sendo assim, podemos definir como:

Definição 5

Seja D um subconjunto em \mathbb{R}^2 (uma região plana). Um **campo vetorial em \mathbb{R}^2** é uma função \vec{F} que associa a cada ponto (x, y) em D um vetor bidimensional $\vec{F}(x, y)$.

Exemplo 7: O campo vetorial definido por $\vec{F}(x, y) = -y\vec{i} + x\vec{j}$, cujo domínio é plano e sua imagem, também é o plano. Para um melhor entendimento do comportamento do campo faz-se necessário desenhar alguns vetores desse campo vetorial. Para isso, são feitas setas para representar alguns vetores pertencentes ao campo $\vec{F}(x, y)$, para alguns pontos (x, y) do seu domínio, representando um vetor começando no ponto (x, y) . Dessa maneira podemos visualizar \vec{F} fazendo isso para alguns pontos representativos, como na Figura 9.

Figura 9: Campo vetorial em \mathbb{R}^2



Fonte: Stewart (2016, p. 957)

Como $\vec{F}(x, y)$ é um vetor bidimensional, pode-se escrevê-lo em termos de suas **funções componentes** P e Q da seguinte forma:

$$\vec{F}(x, y) = P(x, y)\vec{i} + Q(x, y)\vec{j} = \langle P(x, y), Q(x, y) \rangle$$

Para facilitar o entendimento e não carregar tanto a notação, o campo \vec{F} , será escrito sob a notação compactada da forma $\vec{F} = P\vec{i} + Q\vec{j}$.

Veja que P e Q são funções escalares de duas variáveis, portanto, algumas vezes são chamadas de campo escalares para distinguir dos campos vetoriais.

Exemplo 8: Dado o campo vetorial em \mathbb{R}^2 e definido por $\vec{F}(x, y) = -y\vec{i} + x\vec{j}$. Descrever \vec{F} esboçando alguns dos vetores $\vec{F}(x, y)$ como na Figura 10.

Resolução Uma vez que $\vec{F}(1, 0) = \vec{j}$, desenhamos o vetor $\vec{j} = \langle 0, 1 \rangle$ começando no ponto $(1, 0)$ na Tabela 1, $\vec{F}(0, 1) = -\vec{i}$, desenhamos o vetor $\langle -1, 0 \rangle$ com ponto inicial $(0, 1)$. Continuando a pensar dessa maneira, podemos calcular vários outros vetores representativos de $\vec{F}(x, y)$, como mostrado na tabela e extrair os vetores correspondentes para representar o campo vetorial na Tabela 1.

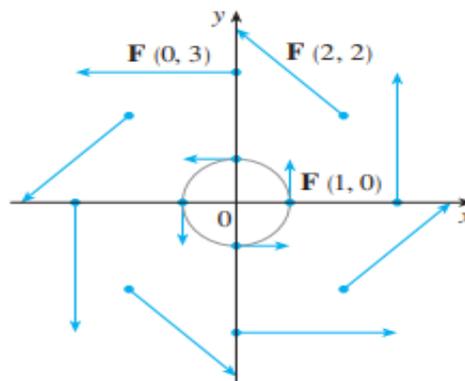
A tabela, apresenta alguns vetores representativos para o campo $\vec{F}(x, y) = -y\vec{i} + x\vec{j}$:

Tabela 1: Tabela para o campo \vec{F}

(x, y)	$\vec{F}(x, y)$	(x, y)	$\vec{F}(x, y)$
$(1, 0)$	$\langle 0, 1 \rangle$	$(-1, 0)$	$\langle 0, -1 \rangle$
$(2, 2)$	$\langle -2, 2 \rangle$	$(-2, -2)$	$\langle 2, -2 \rangle$
$(3, 0)$	$\langle 0, 3 \rangle$	$(-3, 0)$	$\langle 0, -3 \rangle$
$(0, 1)$	$\langle -1, 0 \rangle$	$(0, -1)$	$\langle 1, 0 \rangle$
$(-2, 2)$	$\langle -2, -2 \rangle$	$(2, -2)$	$\langle 2, 2 \rangle$
$(0, 3)$	$\langle -3, 0 \rangle$	$(0, -3)$	$\langle 3, 0 \rangle$

Fonte: Autoria própria

Figura 10: Setas tangentes a um círculo



Fonte: Stewart (2016, p. 949)

Reparando na Figura 10, podemos perceber que cada seta é tangente a um círculo com centro na origem. Sendo assim precisamos verificar, que cada seta é tangente a uma circunferência.

Calculando-se o produto escalar do vetor posição $v = x\vec{i} + y\vec{j}$ com o vetor $\vec{F}(x, y)$

$$v \cdot \vec{F}(x, y) = (x\vec{i} + y\vec{j}) \cdot (-y\vec{i} + x\vec{j}) = -xy + yx = 0,$$

Conclui-se que, $\vec{F}(x, y)$ é perpendicular ao vetor posição $\langle x, y \rangle$ e, portanto, tangente a circunferência com centro na origem e raio $R = \sqrt{x^2 + y^2}$. De fato: Calculando-se o módulo do vetor $\vec{F}(x, y)$ temos

$$|\vec{F}(x, y)| = \sqrt{(-y)^2 + x^2} = \sqrt{x^2 + y^2} = R$$

Portanto, do exposto acima, pode-se concluir que o comprimento de vetor $\vec{F}(x, y)$ é igual ao raio da circunferência.

3. CURVA

Definição 6

Uma curva plana é uma curva que está contida em um plano no espaço. Uma curva que não é plana chama-se curva reversa.

Definição 7

Uma curva parametrizada $\vec{r}(t)$, $t \in [a, b]$, é dita fechada se $\vec{r}(a) = \vec{r}(b)$. Se a cada ponto da curva correspondente um único valor do parâmetro t (exceto quando $t = a$ e $t = b$), dizemos que a curva é simples.

Figura 11: Curvas fechadas



Fonte: Autoria própria

Sendo assim, também teremos curvas que não são simples, sendo elas:

Figura 12: Curvas que não são simples



Fonte: Autoria própria

3.1. Parametrização

Definição 8

Parametrizar uma curva, significa colocar todas suas funções coordenadas em função de um único parâmetro.

Funções com valores vetoriais são curvas que também podem ser representadas usando equações denominadas de paramétricas. Senda assim, a ideia de parametrizar tais curvas é expressar as coordenadas x e y dos pontos do \mathbb{R}^2 sobre uma curva plana ou coordenadas x, y e z dos pontos do \mathbb{R}^3 sobre uma curva espacial como funções de uma variável t .

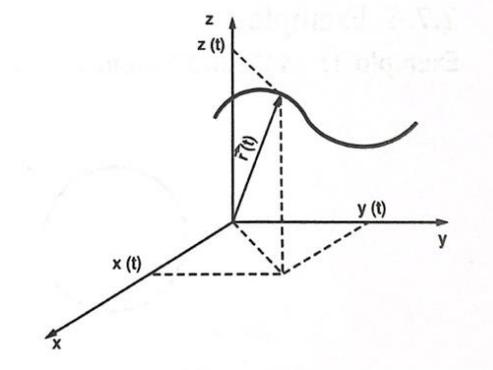
Assim sendo, sejam

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t), \end{cases} \text{ para o } \mathbb{R}^2 \text{ e } \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t), \end{cases} \text{ para o } \mathbb{R}^3 \quad (3.1)$$

Sendo x, y e z funções contínuas de uma variável t , definida para $t \in [a, b]$.

As equações (3.1) são chamadas equações paramétricas de uma curva e t é chamado parâmetro.

Quando temos as equações paramétricas de uma curva, podemos obter equações vetoriais para ela. Para isso precisamos considerar o vetor posição $\vec{r}(t)$ de cada ponto da curva. As componentes de $\vec{r}(t)$ são precisamente as coordenadas do ponto como mostrar a Figura 13.

Figura 13: Gráfico da curva e Vetor posição $\vec{r}(t)$ 

Fonte: Gonçalves (2007, p. 29)

Dáí, podemos escrever da seguinte maneira,

$$\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}, \quad a \leq t \leq b \quad (3.2)$$

Observamos que, se as funções $x = x(t)$, $y = y(t)$ e $z = z(t)$ são funções escalares, que quando aplicadas a um parâmetro t , tornam-se uma constante e a curva degenera-se em um ponto.

Exemplo 1: A equação vetorial $\vec{r}(t) = t\vec{i} + t\vec{j} + t\vec{k}$ representa uma reta, cujas equações paramétricas são

$$x(t) = t \qquad y(t) = t \qquad z(t) = t.$$

Exemplo 2: As equações paramétricas

$$\begin{cases} x = x(t) = 2 \cos t \\ y = y(t) = 2 \sin t \\ z = z(t) = 2t \end{cases}$$

Com $t \in \mathbb{R}$, representam uma curva no espaço, chamada hélice circular. A equação vetorial correspondente é

$$\vec{r}(t) = 2 \cos t \vec{i} + 2 \sin t \vec{j} + 2t \vec{k}$$

Exemplo 3: O conjunto de pontos dados pela função $y = x^2$, cujo gráfico é representado por uma parábola tem suas equações paramétricas dadas por

$$x(t) = t \quad e \quad y(t) = t^2 \quad \text{com } t \in I \subseteq \mathbb{R}.$$

Exemplo 4: O conjunto de pontos dados pela função $y = 2x + 3$, cujo gráfico é representado por uma reta tem suas equações paramétricas dadas por

$$x(t) = t \text{ e } y(t) = 2t + 3 \text{ com } t \in I \subseteq \mathbb{R}$$

Exemplo 5: O conjunto de pontos dados pela função $x^2 + y^2 = 9$, cujo gráfico é representado por uma circunferência de centro na origem e de raio igual a 3 tem suas equações paramétricas dadas por

$$x(t) = 3\cos t \text{ e } y(t) = 3\sin t \text{ com } t \in [0, 2\pi].$$

Importante

No estudo de algum sistema dinâmico, ou seja, em situações de aplicações, uma curva pode representar o movimento de uma partícula no plano ou no espaço. Sendo assim, para tal estudo, faz-se necessário representar as coordenadas da curva em função de um parâmetro, que na maioria das vezes, esse parâmetro representa o tempo e indicamos por t .

No Plano

As coordenadas x e y são representadas por meio de funções dadas por $x(t)$ e $y(t)$ com $t \in I \subseteq \mathbb{R}$. Essa representação é denominada de representação paramétrica da curva, que também pode ser chamada de caminho.

Exemplo 6: Uma partícula percorre a curva C , representada pelo trecho do gráfico da função $y = x^2$, para $-1 \leq x \leq 2$. Então, uma parametrização para essa curva é dada por

$$x(t) = t \text{ e } y(t) = t^2 \text{ com } t \in [-1, 2],$$

ou ainda,

$$C = \{(t, t^2); t \in [-1, 2]\},$$

que é a representação paramétrica do caminho C .

No Espaço

Temos que as coordenadas x, y e z são representadas por meio de funções dadas por $x(t), y(t)$ e $z(t)$ com $t \in I \subseteq \mathbb{R}$. Essa representação é denominada de representação paramétrica da curva, que também pode ser chamada de caminho.

Exemplo 7: Determinar uma parametrização para uma partícula, que percorre a curva C representada pelo gráfico das funções

$$x^2 + y^2 = 9 \quad e \quad z = 5.$$

Solução

Uma parametrização para essa curva é dada por

$$x(t) = 3\cos t, \quad y(t) = 3\sin t \quad e \quad z(t) = 5 \quad \text{com } t \in [0, 2\pi],$$

ou ainda,

$$C = \{(3\cos t, 3\sin t, 5); t \in [0, 2\pi]\},$$

que é a representação paramétrica do caminho C .

3.2 Parametrização de alguns lugares geométricos importantes

3.2.1 Parametrização da Reta

Reta Determinada por um Ponto e um Vetor Diretor No Plano

Considere a reta (s) , que passa pelo ponto $P(x_0, y_0)$ e é paralelo ao vetor $\vec{v} = (a, b)$, não nulo.

Suas equações paramétricas são dadas por

$$(\vec{r}(t)): \begin{cases} x(t) = x_0 + at \\ y(t) = y_0 + bt, \end{cases} \quad \text{com } t \in \mathbb{R}.$$

Demonstração

Se $P \in s$, então $\overrightarrow{P_0P} = t \cdot \vec{v}$ com $t \in \mathbb{R}$. Assim,

$$P - P_0 = t \cdot \vec{v} \implies P = P_0 + t \cdot \vec{v}$$

Essa equação é denominada de equações vetorial da reta.

A equação da reta pode ser descrita pelas suas equações paramétricas. Veja que

$$(x, y) = (x_0, y_0) + t \cdot (a, b) \Rightarrow (x, y) = (x_0 + a \cdot t, y_0 + b \cdot t).$$

Segue que,

$$(\vec{r}(t)): \begin{cases} x(t) = x_0 + at \\ y(t) = y_0 + bt \end{cases} \text{ com } t \in \mathbb{R}$$

A função vetorial que representa a reta no plano é dada por

$$\vec{r}(t) = (x(t), y(t))$$

Ou

$$\vec{r}(t) = (x_0 + a \cdot t, y_0 + b \cdot t)$$

Com $t \in \mathbb{R}$.

Exemplo 8: Determinar as equações paramétricas da reta, que passa pelo ponto $P_0 = (4, 2)$ e é paralela ao vetor $\vec{v} = (-1, 5)$. Descreva a função vetorial que a representa.

Solução

As equações paramétricas são dadas por:

$$(\vec{r}(t)): \begin{cases} x(t) = 4 - t \\ y(t) = 2 + 5t \end{cases} \text{ com } t \in \mathbb{R}.$$

A sua função vetorial é dada por $\vec{r}(t) = (4 - t, 2 + 5t)$ com $t \in \mathbb{R}$.

Exemplo 9: Determinar as equações paramétricas da reta, que passa pelo ponto $P_0 = (-5, 3)$ e é paralela ao vetor $\vec{v} = 2\vec{i} - 4\vec{j}$. Descreva a função vetorial que a representa.

Solução

As equações paramétricas são dadas por:

$$(\vec{r}(t)): \begin{cases} x(t) = -5 + 2t \\ y(t) = 3 - 4t \end{cases} \text{ com } t \in \mathbb{R}.$$

A sua função vetorial é dada por:

$$\vec{r}(t) = (-5 + 2t, 3 - 4t) \text{ com } t \in \mathbb{R}.$$

No Espaço

Considere a reta (s), que passa pelo ponto $P(x_0, y_0, z_0)$ e é paralelo ao vetor $\vec{v} = (a, b, c)$, não nulo. Suas equações paramétricas são dadas por

$$(\vec{r}(t)): \begin{cases} x(t) = x_0 + a.t \\ y(t) = y_0 + b.t \\ z(t) = z_0 + c.t \end{cases} \text{ com } t \in \mathbb{R}.$$

Demonstração

Se $P \in s$, então, $\overrightarrow{P_0P} = t.v$ com $t \in \mathbb{R}$. Assim,

$$P - P_0 = t.v \Rightarrow P = P_0 + t.v$$

Essa equação é denominada de equação vetorial da reta. A equação da reta pode ser descrita pelas suas equações paramétricas. Veja que,

$$(x, y, z) = (x_0, y_0, z_0) + t.(a, b, c) \Rightarrow (x, y, z) = (x_0 + a.t, y_0 + b.t, z_0 + c.t)$$

Segue que,

$$(\vec{r}(t)): \begin{cases} x(t) = x_0 + a.t \\ y(t) = y_0 + b.t \\ z(t) = z_0 + c.t \end{cases} \text{ com } t \in \mathbb{R}.$$

A função vetorial que representa a reta no espaço é dada por $\vec{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$ ou $\vec{r}(t) = (x_0 + a.t, y_0 + b.t, z_0 + c.t)$ com $t \in \mathbb{R}$.

Exemplo 10: Determinar as equações paramétricas da reta, que passa pelo ponto $P_0 = (4, 2, -5)$ e é paralela ao vetor $\vec{v} = (-1, 5, -7)$. Descreva a função vetorial que a representa.

Solução.

As equações paramétricas são dadas por:

$$(\vec{r}(t)): \begin{cases} x(t) = 4 - t \\ y(t) = 2 + 5t \\ z(t) = -5 - 7t \end{cases} \text{ com } t \in \mathbb{R}.$$

A sua função vetorial é dada por: $\vec{r}(t) = (4 - t, 2 + 5t, -5 - 7t)$ com $t \in \mathbb{R}$.

3.2.2 Parametrização da Circunferência

Definição 9

É o lugar geométrico dos pontos $P(x, y) \in \mathbb{R}^2$, cuja distância para um ponto central $C(a, b)$ é sempre constante e igual a r .

Em símbolos:

Circunferência = $\{P \in \mathbb{R}^2; \overline{CP} = r\}$.

Equação Reduzida da Circunferência

A equação da circunferência de centro $C(a, b)$ e raio r é dada por:

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2 .$$

Equação Paramétricas da Circunferência

As equações paramétricas da circunferência são dadas por:

$$\begin{cases} x = x(\theta) = a + r \cdot \cos\theta \\ y = y(\theta) = b + r \cdot \text{sen}\theta, \end{cases}$$

Com $\theta \in [0, 2\pi]$. A função vetorial que representa essa circunferência é dada por:

$$\vec{\sigma}(\theta) = (a + r \cdot \cos\theta, b + r \cdot \text{sen}\theta) \text{ com } \theta \in [0, 2\pi].$$

Demonstração

Temos que, a equação da circunferência centro $C(a, b)$ e raio r é dada por

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2 .$$

Fazendo uma comparação com a equação fundamental da trigonometria

$\cos^2\theta + \text{sen}^2\theta = 1, \forall \theta \in [0, 2\pi]$, obtemos:

$$\begin{cases} \frac{x - a}{r} = \cos\theta \\ \frac{y - b}{r} = \text{sen}\theta \end{cases}, \quad \text{com } \theta \in [0, 2\pi]$$

Portanto,

$$\begin{cases} x(\theta) = a + r \cdot \cos\theta \\ y(\theta) = b + r \cdot \text{sen}\theta' \end{cases} \quad \text{com } \theta \in [0, 2\pi]$$

Exemplo 11: Determinar as equações paramétricas da circunferência de centro no ponto $C(3,4)$ e raio $r = 5$. Descrever a função vetorial que a representa.

Solução

As equações paramétricas são dadas por:

$$\begin{cases} x(\theta) = 3 + 5 \cdot \cos\theta \\ y(\theta) = 4 + 5 \cdot \sin\theta, \end{cases}$$

Com $\theta \in [0, 2\pi]$. A função vetorial que representa essa circunferência é dada por:

$$\vec{\sigma}(\theta) = (3 + 5 \cdot \cos\theta, 4 + 5 \cdot \sin\theta) \text{ com } \theta \in [0, 2\pi].$$

Equação reduzida da circunferência

A equação da circunferência de centro na origem do plano cartesiano, ou seja, $O(0,0)$ e raio r é dada por:

$$x^2 + y^2 = r^2$$

Equações paramétricas da circunferência

As equações paramétricas da circunferência são dadas por

$$\begin{cases} x(\theta) = r \cdot \cos\theta \\ y(\theta) = r \cdot \sin\theta \end{cases}$$

com $\theta \in [0, 2\pi]$. A função vetorial que representa essa circunferência é dada por:

$$\vec{\sigma}(\theta) = (r \cos\theta, r \sin\theta), \text{ com } \theta \in [0, 2\pi].$$

Exemplo 12: Determinar as equações paramétricas da circunferência de centro no ponto $O(0,0)$ e raio 5. Descreva a função vetorial que a representa.

Solução

As equações paramétricas são dadas por:

$$\begin{cases} x(\theta) = 5 \cdot \cos\theta \\ y(\theta) = 5 \cdot \sin\theta \end{cases}$$

com $\theta \in [0, 2\pi]$. A função vetorial que representa essa circunferência é dada por:

$$\vec{\sigma}(\theta) = (5 \cos\theta, 5 \sin\theta), \text{ com } \theta \in [0, 2\pi].$$

3.2.3 Parametrização da Elipse

Definição 10

Dados dois pontos fixos F_1 e F_2 , cuja distância entre eles é $2c > 0$. Definimos Elipse como sendo o lugar geométrico dos pontos $P(x, y) \in \mathbb{R}^2$, cuja soma das distâncias dos pontos P para os pontos fixos F_1 e F_2 são sempre constante e igual $2a > 0$.

Em símbolos

$$\text{Elipse} = \{P \in \mathbb{R}^2 ; \overline{F_1P} + \overline{F_2P} = 2a\}.$$

Equação Reduzida da Elipse

A equação da elipse de centre $C(x_0, y_0)$, eixo maior que tem medida $2a$ paralelo ao eixo das abscissas e cujo eixo maior mede $2b$ é dada por:

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1$$

Equação Paramétrica da Elipse

As equações paramétricas da elipse são dadas por:

$$\begin{cases} x(\theta) = x_0 + a \cdot \cos\theta \\ y(\theta) = y_0 + b \cdot \sin\theta, \end{cases}$$

com $\theta \in [0, 2\pi]$. A função vetorial que representa essa elipse é dada por:

$$\vec{\sigma}(\theta) = (x_0 + a \cos\theta, y_0 + b \sin\theta) \text{ com } \theta \in [0, 2\pi]$$

Demonstração

Temos que, a equação da elipse centro $C(x_0, y_0)$ e eixo maior paralelo ao eixo dos x é dada por

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1$$

Fazendo uma comparação com a equação fundamental da trigonometria

$$\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1, \forall \theta \in [0, 2\pi]$$

$$\text{Obtemos: } \begin{cases} \left(\frac{x-x_0}{a}\right)^2 = (\cos\theta)^2 \\ \left(\frac{y-y_0}{b}\right)^2 = (\sin\theta)^2, \end{cases} \theta \in [0, 2\pi].$$

Logo,

$$\begin{cases} x(\theta) = x_0 + a \cdot \cos\theta \\ y(\theta) = y_0 + b \cdot \sin\theta, \end{cases} \text{ com } \theta \in [0, 2\pi]$$

Exemplo 13: Determinar as equações paramétricas da elipse de centro no ponto $C(1, 2)$, eixo maior medindo 10 *cm* paralelo ao eixo das abscissas e eixo menor medindo 6 *cm*. Descreva a função vetorial que a representa.

Solução

As equações paramétricas são dadas por:

$$\begin{cases} x(\theta) = 1 + 5\cos\theta \\ y(\theta) = 2 + 3\sin\theta \end{cases}$$

Com $\theta \in [0, 2\pi]$. A função vetorial que representa essa elipse é dada por:

$$\vec{\sigma}(\theta) = (1 + 5\cos\theta, 2 + 3\sin\theta) \quad \text{com } \theta \in [0, 2\pi].$$

Equação reduzida da elipse

A equação da elipse de centro na origem do plano cartesiano, ou seja, $O(0,0)$ e eixo maior paralelo ao eixo das abscissas é dada por

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Equações Paramétricas da Elipse

As equações paramétricas da elipse são dados por:

$$\begin{cases} x(\theta) = a \cdot \cos\theta \\ y(\theta) = b \cdot \sin\theta \end{cases}$$

com $\theta \in [0, 2\pi]$. A função vetorial, que representa essa circunferência é dada por:

$$\vec{\sigma}(\theta) = (a\cos\theta, b\sin\theta) \quad \text{com } \theta \in [0, 2\pi]$$

Exemplo 14: Determinar as equações paramétricas da elipse de centro no ponto $C(0,0)$, eixo maior medindo 10 *cm* paralelo ao eixo das abscissas e eixo menor medindo 6 *cm*. Descreva a função vetorial que a representa.

Solução

As equações paramétricas são dadas por:

$$\begin{cases} x(\theta) = 5 \cdot \cos\theta \\ y(\theta) = 3 \cdot \sin\theta \end{cases}, \text{ com } \theta \in [0, 2\pi]$$

A função vetorial que representa essa circunferência é dada por:

$$\vec{\sigma}(\theta) = (5\cos\theta, 3\sin\theta) \text{ com } \theta \in [0, 2\pi]$$

3.3 Campo gradiente

Se f é uma função escalar de duas variáveis, temos que o seu gradiente ∇f (ou $\text{grad } f$) é definido por

$$\nabla f(x, y) = f_x(x, y)\vec{i} + f_y(x, y)\vec{j}$$

Portanto, ∇f é realmente um campo vetorial gradiente.

Exemplo 15: Determinar o campo vetorial gradiente de $f(x, y) = x^2y - y^3$.

Resolução

O campo vetorial gradiente é dado por

$$\nabla f(x, y) = \frac{df}{dx}\vec{i} + \frac{df}{dy}\vec{j} = 2xy\vec{i} + (x^2 - 3y^2)\vec{j}$$

3.4 Campo Rotacional

Definição 11

Se $\mathbf{F} = P\vec{i} + Q\vec{j} + R\vec{k}$ é um campo vetorial \mathbb{R}^3 e as derivadas parciais de P, Q e R existem, então o **rotacional de \vec{F}** é o campo vetorial \mathbb{R}^3 definido por

$$\text{rot } \vec{F} = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) \vec{i} + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) \vec{j} + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \vec{k}$$

Reescrevendo a equação da definição 11 usando notação de operadores e introduzindo o operador diferencial vetorial ∇ (chamado de “del”), ficamos

$$\begin{aligned}\nabla \times \vec{F} &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} \\ &= \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)\vec{i} + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)\vec{j} + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\vec{k} \\ &= \text{rot } \vec{F}\end{aligned}$$

Ficando assim mais fácil de lembrar-se da definição pela seguinte expressão simbólica

$$\text{rot } \vec{F} = \nabla \times \vec{F} \quad (1)$$

Exemplo 16: Se $\vec{F}(x, y, z) = xz\vec{i} + xyz\vec{j} - y^2\vec{k}$, determinar $\text{rot } \vec{F}$.

Solução: Utilizando a equação obtida em (1) temos

$$\begin{aligned}\text{rot } F &= \nabla \times \vec{F} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ xz & xyz & -y^2 \end{vmatrix} \\ &= \left[\frac{\partial}{\partial y}(-y^2) - \frac{\partial}{\partial z}(xyz)\right]\vec{i} - \left[\frac{\partial}{\partial x}(-y^2) - \frac{\partial}{\partial z}(xz)\right]\vec{j} + \left[\frac{\partial}{\partial x}(xyz) - \frac{\partial}{\partial y}(xz)\right]\vec{k} \\ &= (-2y - xy)\vec{i} - (0 - x)\vec{j} + (yz - 0)\vec{k} \\ &= -y(2 + x)\vec{i} + x\vec{j} + yz\vec{k}\end{aligned}$$

2.5 Campo Divergente

Definição 12

Se $\vec{F}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}) = P(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z})\vec{i} + Q(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z})\vec{j} + R(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z})\vec{k}$ é um campo vetorial em \mathbb{R}^3 e $\partial P/\partial x$, $\partial Q/\partial y$ e $\partial R/\partial z$ existem, então o divergente de \mathbf{F} é uma função de três variáveis dadas por

$$\text{div } \vec{F} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \quad (11)$$

Observe que o $\text{rot } \vec{F}$ é um campo vetorial, mas $\text{div } \vec{F}$ é um campo escalar. Em termos do operador gradiente $\nabla = (\partial/\partial x)\vec{i} + (\partial/\partial y)\vec{j} + (\partial/\partial z)\vec{k}$, o divergente de \vec{F} pode ser escrito simbolicamente como o produto escalar de ∇ e \vec{F} :

$$\text{div } \vec{F} = \nabla \cdot \vec{F} \quad (12)$$

Exemplo 17: Sendo $\vec{F}(x, y, z) = xz\vec{i} + xyz\vec{j} - y^2\vec{k}$, determinar o $\text{div } \vec{F}$.

Solução

Pela definição 2.5 de divergente e as equações (11) ou (12), segue que

$$\text{div } \vec{F} = \nabla \cdot \vec{F} = \frac{\partial}{\partial x}(xz) + \frac{\partial}{\partial y}(xyz) + \frac{\partial}{\partial z}(-y^2) = z + xz$$

4. INTEGRAL DE LINHA

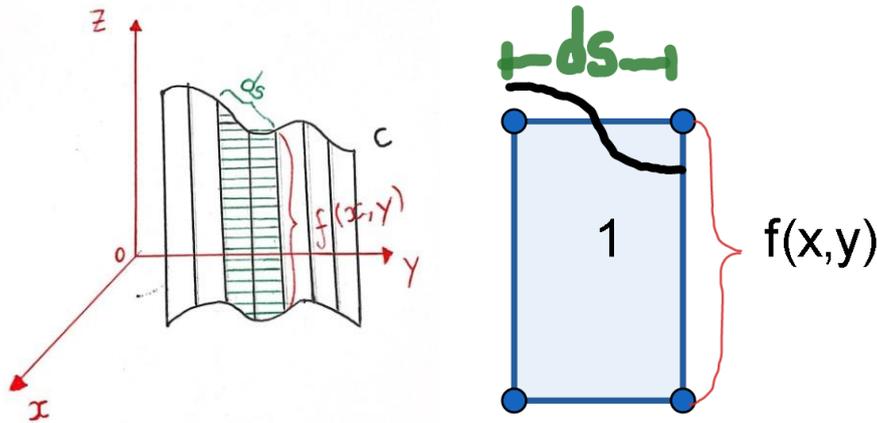
Nesta seção, serão apresentados conceitos e definições a respeito da integral de linha também conhecida como integrais curvilíneas ou integrais de curva.

Segundo Stewart (2016, p. 962) a integral de linha é semelhante à integral unidimensional, que ao invés de integrarmos sobre um intervalo $[a, b]$, a integração será sobre uma curva C . Essas integrações sobre uma curva C são chamadas de integral de linha ou também são conhecidas como integrais de curvas. No século XIX surgiram problemas envolvendo escoamento de fluidos, forças, eletricidade e magnetismo e a integral de linha surgiu nessa época para resolver esses tipos de problemas.

4.1 Integral de linha de um campo escalar

Motivação

Figura 14: Curva C formada por retângulos Figura 15: Retângulo



Fonte: Autoria própria

Temos que:

- 1) $ds = v \cdot dt$ como $v = \|\vec{\delta}'(t)\| dt$, onde $\vec{\delta}(t)$ é a parametrização da curva C . Temos que:

$$ds = \|\vec{\delta}'(t)\| dt$$

- 2) A área do retângulo 1 é dada por:

$$\text{área} = f(x, y) \cdot ds,$$

onde ds é o elemento de área.

- 3) Calculando a soma de todos os retângulos ao longo da curva C obtemos:

Integral de linha (curva) = área sob a curva C .

$$\int_C f(x, y) \cdot ds = \text{área}$$

- 4) Sendo a parametrização de C dada por $\vec{\delta}(t) = (x(t), y(t))$ com $t \in I = [a, b]$ temos:

$$\int_C f(x, y) ds = \int_a^b f(\vec{\delta}(t)) \cdot \|\vec{\delta}'(t)\| dt$$

4.2 Integral de linha (curva) de um campo (função) escalar

Definição 13

Sejam $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ uma função real e C uma curva no plano (\mathbb{R}^2), definida pela função

$$\begin{aligned}\vec{\delta}: I = [a, b] &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ t &\mapsto \vec{\delta}(t) = (x(t), y(t))\end{aligned}$$

Defini-se a integral de linha do campo f ao longo da curva C , como sendo

$$\int_C f(x, y) ds = \int_a^b f(\vec{\delta}(t)) \cdot \|\vec{\delta}'(t)\| dt$$

Exemplo 1: Calcular a integral de linha $\int_C xy^2 ds$, onde $x = \cos t$ e $y = \sin t$ com $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$.

Solução

De acordo com o enunciado da questão temos que $f(x, y) = xy^2$ e

$\vec{\delta}(t) = (\cos t, \sin t)$ com $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$, de onde concluímos que, $a = 0$ e $b = \frac{\pi}{2}$. Assim,

$$\vec{\delta}'(t) = (-\sin t, \cos t) \quad \text{e} \quad \|\vec{\delta}'(t)\| = \sqrt{(-\sin t)^2 + (\cos t)^2} = 1$$

Como

$$\int_C f(x, y) ds = \int_a^b f(\vec{\delta}(t)) \cdot \|\vec{\delta}'(t)\| dt \quad \text{temos}$$

$$f(\vec{\delta}(t)) = f(\cos t, \sin t) = \cos t \cdot \sin^2 t, \quad \text{logo} \quad \begin{cases} u = \sin t \\ du = \cos t dt \end{cases}, \quad \text{portanto}$$

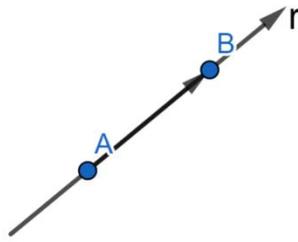
$$\int_C xy^2 ds = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos t \cdot \sin^2 t \cdot 1 \cdot dt = \int u^2 du = \frac{u^3}{3} = \frac{(\sin^3 t)}{3} \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1^3}{3} - \frac{0^3}{3} = \frac{1}{3}$$

Exemplo 2: Calcular a integral de linha $\int_C (1 + xy^2) ds$ sobre a reta de $A(0,0)$ até $B(1,2)$.

Solução

Determinando as equações paramétricas da curva C , que é a reta, que passa pelo ponto $A(0,0)$ e pelo ponto $B(1,2)$.

Figura 16: Reta determinada pelos pontos A e B



Fonte: Autoria própria

$$\vec{V} = \overrightarrow{AB} = B - A$$

$$\vec{V} = (1,2) \text{ Vetor diretor}$$

Como $\vec{\delta}(t): \begin{cases} x = x_0 + a \cdot t \\ y = y_0 + b \cdot t \end{cases}$, determinamos que,

$$\vec{\delta}(t): \begin{cases} x = 0 + 1 \cdot t \\ y = 0 + 2 \cdot t \end{cases}, \text{ ou seja, } \vec{\delta}(t): \begin{cases} x = t \\ y = 2 \cdot t \end{cases}, \text{ com } t \in [0,1],$$

ou ainda,

$$\vec{\delta}(t) = (t, 2t); t \in [0,1].$$

Sendo $f(x, y) = 1 + xy^2$, obtém-se $f(\vec{\delta}(t)) = f(t, 2t) = 1 + t \cdot (2t)^2 = 1 + 4 \cdot t^3$,

$$\vec{\delta}'(t) = (1,2) \text{ e } \|\vec{\delta}'(t)\| = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5}$$

Portanto, pela definição de integral de linha para um campo escalar segue

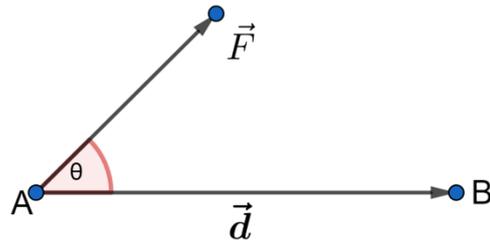
$$\int_C f(x, y) ds = \int_a^b f(\vec{\delta}(t)) \cdot \|\vec{\delta}'(t)\| dt, \text{ onde concluímos que}$$

$$\int_C (1 + xy^2) ds = \int_0^1 (1 + 4t^3) \cdot \sqrt{5} dt = \sqrt{5} \cdot [t + t^4]_0^1 = \sqrt{5} \cdot [(1 + 4^4) - (0 + 0^4)] = 2\sqrt{5}.$$

4.3 Integral de linha de um campo vetorial

- 1) Considere uma força \vec{F} , cujo deslocamento (d) se dá ao longo de uma reta

Figura 17: Vetor Deslocamento (d)



Fonte: Autoria própria

O trabalho \vec{W} realizado por esta força é dado por:

$$\vec{W} = \vec{F} \cdot \vec{d}$$

Sabe-se que, o ângulo θ formado por \vec{F} e \vec{d} é dado por:

$$\cos \theta = \frac{\vec{F} \cdot \vec{d}}{\|\vec{F}\| \cdot \|\vec{d}\|}$$

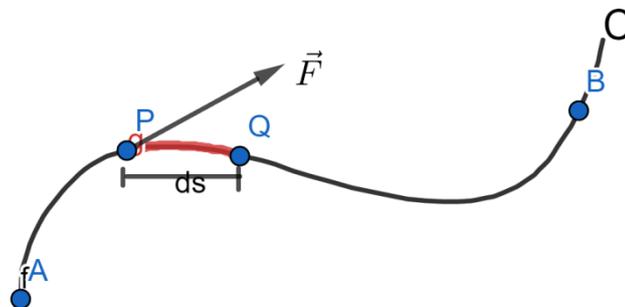
$$\vec{F} \cdot \vec{d} = \|\vec{F}\| \cdot \|\vec{d}\| \cdot \cos \theta$$

Então;

$$W = \|\vec{F}\| \cdot \|\vec{d}\| \cdot \cos \theta$$

- 2) Considere uma força \vec{F} , cujo deslocamento (d) se dá ao longo de uma curva que não é uma reta.

Figura 18: Gráfico da trajetória da Curva C



Fonte: Autoria própria

A curva C é parametrizada por $\vec{\delta}(t)$.

Assim,

$$\frac{ds(t)}{dt} = \vec{v}(t) \Rightarrow ds = \vec{v}(t) \cdot dt, \text{ sendo } \vec{v}(t) = \vec{\delta}'(t), \text{ e então}$$

Temos: $ds = \vec{\delta}'(t)dt$, agora temos que:

O trabalho realizado por \vec{F} de P para Q é dado por:

$$dw = \vec{F} \cdot ds.$$

Calculando o trabalho em toda curva C obtemos:

$$\int_C dw = \int_C \vec{F} \cdot ds$$

$$w = \int_C \vec{F} \cdot ds$$

Note que, se $\vec{F}(x, y)$ e $\vec{\delta}(t) = (x(t), y(t))$, sendo $t \in [a, b]$, então:

$$W = \int_C \vec{F}(x, y) \cdot ds$$

$$W = \int_a^b \vec{F}(\vec{\delta}(t)) \cdot \vec{\delta}'(t) dt$$

Portanto,

$$\int_C \vec{F}(x, y) ds = \int_a^b \vec{F}(\vec{\delta}(t)) \cdot \vec{\delta}'(t) dt$$

Definição 14

Considere uma curva C em \mathbb{R}^3 parametrizada por $\vec{\delta}(t) = (x(t), y(t), z(t))$ com $t \in I = [a, b]$ onde $\vec{\delta}(t)$ é de classe C^1 (tem derivada e essa derivada é contínua) e $\vec{F}(x, y, z) = (F_1(x, y, z), F_2(x, y, z), F_3(x, y, z))$ um campo vetorial contínuo definido em C . Definimos a integral de linha de \vec{F} ao longo da curva C por:

$$\int_C \vec{F} ds = \int_a^b \vec{F}(\vec{\delta}(t)) \cdot \vec{\delta}'(t) dt$$

Observações:

1) Se a curva C for fechada, isto é, $\vec{\delta}(a) = \vec{\delta}(b) = 0$, então a integral de linha de \vec{F} ao longo da curva C é denotada por $\oint_C \vec{F} \cdot ds$.

2) Se utilizarmos as componentes de \vec{F} e de $\vec{\delta}$, a integral de linha de \vec{F} ao longo da curva C será definida por:

$$\int_C \vec{F} ds = \int_a^b \vec{F}(\vec{\delta}(t)) \cdot \vec{\delta}'(t) dt$$

$$\int_C \vec{F} ds = \int_a^b (F_1(x, y, z), F_2(x, y, z), F_3(x, y, z)) \cdot (x'(t), y'(t), z'(t)) dt$$

ou

$$\int_C \vec{F} ds = \int_a^b (F_1(\vec{\delta}(t)), F_2(\vec{\delta}(t)), F_3(\vec{\delta}(t))) \cdot (x'(t), y'(t), z'(t)) dt$$

ou

$$\int_C \vec{F} ds = \int_a^b [F_1(\vec{\delta}(t)) \cdot x'(t) + F_2(\vec{\delta}(t)) \cdot y'(t) + F_3(\vec{\delta}(t)) \cdot z'(t)] dt$$

3) Temos que,

$$\vec{\delta}(t) = (x(t), y(t), z(t))$$

E

$$\vec{\delta}'(t) = (x'(t), y'(t), z'(t))$$

Como,

$$\frac{dx}{dt}(t) = x'(t) \Rightarrow dx(t) = x'(t)dt$$

$$\frac{dy}{dt}(t) = y'(t) \Rightarrow dy(t) = y'(t)dt$$

$$\frac{dz}{dt}(t) = z'(t) \Rightarrow dz(t) = z'(t)dt$$

Então

$$\int_C \vec{F}(x, y, z) ds = \int_a^b [F_1(\vec{\delta}(t)) dx(t) + F_2(\vec{\delta}(t)) dy(t) + F_3(\vec{\delta}(t)) dz(t)] dt$$

$$\int_C \vec{F} ds = \int_a^b F_1 dx + F_2 dy + F_3 dz$$

4) Quando a curva C é do plano \mathbb{R}^2 parametrizada por $\vec{\delta}(t) = (x(t), y(t))$ com $t \in [a, b]$, a integral de linha de $\vec{F}(x, y)$ ao longo da curva C é dada por:

$$\int_C \vec{F} ds = \int_a^b F_1(\vec{\delta}(t)) \cdot x'(t) dt + F_2(\vec{\delta}(t)) \cdot y'(t) dt$$

Ou

$$\int_C \vec{F} ds = \int_a^b F_1 dx + F_2 dy$$

Definição 15

Sejam $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ uma função real e C uma curva do espaço \mathbb{R}^3 , definida pela função

$$\begin{aligned} \vec{\delta}: I = [a, b] &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ t &\mapsto \vec{\delta}(t) = (x(t), y(t), z(t)) \end{aligned}$$

Definimos a integral de linha do campo f ao longo da curva C , como sendo

$$\int_C f(x, y, z) ds = \int_a^b f(\vec{\delta}(t)) \cdot \|\vec{\delta}'(t)\| dt$$

Exemplo 3: Calcule $\int_C (2 + x^2 y) ds$, onde C é a metade superior do círculo unitário $x^2 + y^2 = 1$.

Solução

Inicialmente, precisa-se das equações paramétricas para representar C . Como C é circunferência de raio unitário e centro na origem do plano cartesiano pode ser parametrizada pelas equações paramétricas

$$x = \cos t \quad e \quad y = \sin t$$

Salientando-se que, o cálculo será feito, apenas para metade superior do círculo e, é descrita pelo intervalo do parâmetro $0 \leq t \leq \pi$ (Veja a Figura 12). Portanto,

$$\begin{aligned} \int_c (2 + x^2 y) ds &= \int_0^\pi (2 + \cos^2 t \operatorname{sent}) \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt \\ &= \int_0^\pi (2 + \cos^2 t \operatorname{sent}) \sqrt{\operatorname{sen}^2 t + \cos^2 t} dt \\ &= \int_0^\pi (2 + \cos^2 t \operatorname{sent}) dt = \left[2t - \frac{\cos^3 t}{3} \right]_0^\pi \\ &= 2\pi + \frac{2}{3} \end{aligned}$$

Exemplo 4: Determine o trabalho feito pelo campo de força $\vec{F}(x, y) = x^2 \vec{i} - xy \vec{j}$ ao se mover uma partícula ao longo de um quarto de círculo $\vec{r}(t) = \cos t \vec{i} + \operatorname{sent} \vec{j}$, $0 \leq t \leq \pi/2$.

Solução

Uma vez que $x = \cos t$ e $y = \operatorname{sent}$, temos

$$\vec{F}(\vec{r}(t)) = \cos^2 t \vec{i} - \cos t \operatorname{sent} \vec{j}$$

$$\text{E } \vec{r}'(t) = -\operatorname{sent} \vec{i} + \cos t \vec{j}$$

Portanto, o trabalho realizado é

$$\begin{aligned} \int_c \vec{F} \cdot d\mathbf{r} &= \int_0^{\pi/2} \vec{F}(\vec{r}(t)) \cdot \vec{r}'(t) dt = \int_0^{\pi/2} (-2\cos^2 t \operatorname{sent}) dt \\ &= \left[2 \frac{\cos^3 t}{3} \right]_0^{\pi/2} = -\frac{2}{3} \end{aligned}$$

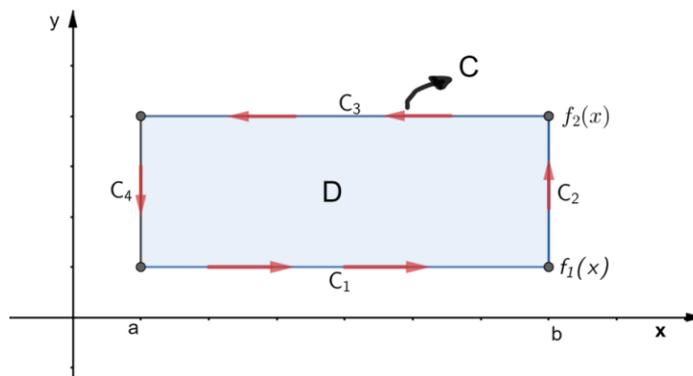
5. TEOREMA DE GREEN

Teorema de Green Seja C uma curva plana simples, fechada, contínua por parte, orientada positivamente, e seja D a região delimitada por C . Se P e Q têm derivadas parciais de primeira ordem contínuas sobre uma região aberta que contenha D , então

$$\oint_C \vec{F} dS = \int_C P dx + Q dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dA$$

onde $\vec{F}(x, y) = P(x, y) + Q(x, y)$ é um campo vetorial, que é diferenciável e suas derivadas são contínuas.

Figura 19: Gráfico da Curva C , região I



Fonte: Autoria própria

Demonstração sobre a região do tipo I:

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2: a \leq x \leq b; f_1(x) \leq y \leq f_2(x)\}$$

Demonstração do Teorema de Green:

$$\int_C P dx + Q dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dA \quad (5.1)$$

Veja que, de 1 temos:

$$\int_C P(x, y) dx + \int_C Q(x, y) dy = \iint_D \frac{\partial Q}{\partial x} dA - \iint_D \frac{\partial P}{\partial y} dA \quad (5.2)$$

Daí, devemos ter que:

$$\int_C P(x, y) dx = - \iint_D \frac{\partial P}{\partial y} dA \quad (5.3)$$

$$\int_C Q(x, y) dy = \iint_D \frac{\partial Q}{\partial x} dA \quad (5.4)$$

Vamos mostrar 3, partindo do segundo membro, temos:

$$\begin{aligned} - \iint_D \frac{\partial P}{\partial y} dA &= - \int_a^b \int_{f_1(x)}^{f_2(x)} \frac{\partial P}{\partial y} dy dx = \\ &= - \int_a^b P(x, y) \Big|_{y=f_1(x)}^{y=f_2(x)} dx \end{aligned}$$

Aplicando o Teorema Fundamental do Cálculo, para P com relação a y obtemos:

$$\int_a^b [P(x, f_2(x)) - P(x, f_1(x))] dx \quad (5.5)$$

Ou seja,

$$- \iint_D \frac{\partial P}{\partial y} dA = - \int_a^b [P(x, f_2(x)) - P(x, f_1(x))] dx \quad (5.6)$$

Por outro lado, temos que fazer a parametrização de cada uma das curvas: C_1 , C_2 , C_3 , e C_4 que compõe a curva C , isto é, $C = C_1 \cup C_2 \cup C_3 \cup C_4$.

Para C_1 , temos que: $x = t$, logo $y = f_1(t)$. Assim, sua parametrização será dada por

$$\vec{\theta}(t) = (t, f_1(t)) \text{ com } a \leq t \leq b.$$

De modo análogo, temos que para a curva C_3 , a sua parametrização será dada pela função

$$\vec{\alpha}(t) = (t, f_2(t)) \text{ com } b \leq t \leq a.$$

Para a curva C_2 , obtemos a sua parametrização dada por

$$\vec{\beta}(t) = (b, f_1(x) + (f_2(x) - f_1(x)) \cdot t) \text{ com } t \in [0, 1],$$

e já para curva C_4 , tem parametrização dada por

$$\vec{\delta}(t) = (a, f_2(x) + (f_1(x) - f_2(x)) \cdot t) \text{ com } t \in [0, 1].$$

Agora, vamos calcular a integral de $P(x, y)$ com relação x ao longo da curva C .

Sendo a curva $C = C_1 \cup C_2 \cup C_3 \cup C_4$ temos:

$$\begin{aligned} \int_C P(x, y) dx &= \int_{C_1 \cup C_2 \cup C_3 \cup C_4} P(x, y) dx = \\ &= \int_{C_1} P(x, y) dx + \int_{C_2} P(x, y) dx + \int_{C_3} P(x, y) dx + \int_{C_4} P(x, y) dx = \\ &= \int_a^b P(t, f_1(t)) \cdot x'(t) dt + \int_0^1 P(b, f_1(t)) \cdot (f_2(t) - f_1(t)) \cdot t \cdot x'(t) dt + \\ &+ \int_b^a P(t, f_2(t)) \cdot x'(t) dt + \int_0^1 (a, f_2(t)) \cdot (f_1(t) - f_2(t)) \cdot t \cdot x'(t) dt. \end{aligned}$$

Como para C_1 temos que $x'(t) = 1$, para C_2 $x'(t) = 0$, para C_3 $x'(t) = 1$ e para C_4 $x'(t) = 0$. Sendo assim, segue que:

$$\begin{aligned} &\int_a^b P(t, f_1(t)) \cdot 1 dt + \int_0^1 P(b, f_1(t)) \cdot (f_2(t) - f_1(t)) \cdot t \cdot 0 dt + \\ &+ \int_b^a P(t, f_2(t)) \cdot 1 dt + \int_0^1 (a, f_2(t)) \cdot (f_1(t) - f_2(t)) \cdot t \cdot 0 dt \end{aligned}$$

Logo

$$\begin{aligned} \int_C P(x, y) dx &= \int_a^b P(t, g_1(t)) dt + \int_b^a P(t, g_2(t)) dt = \\ &= \int_a^b P(t, f_1(t)) dt - \int_a^b P(t, f_2(t)) dt = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \int_a^b [P(t, f_1(t)) - P(t, f_2(t))] dt = \\
&= \int_a^b [P(t, f_2(t)) - P(t, f_1(t))] dt
\end{aligned} \tag{5.6}$$

De onde concluímos, a menos de um parâmetro, a identidade 5.6 pode ser escrita,

$$\int_C P(x, y) dx = - \int_a^b [P(x, f_2(x)) - P(x, f_1(x))] dx.$$

Comparando 5.5 e 5.6, temos que

$$- \iint_D \frac{\partial P}{\partial y} dA = \int_C P(x, y) dx$$

O que demonstra a equação 5.3.

Agora vamos mostra 5.4, partindo do segundo membro e usando a região do tipo II:

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : c \leq x \leq d; g_1(x) \leq y \leq g_2(x)\}$$

$$\int_C Q(x, y) dy = \iint_D \frac{\partial Q}{\partial x} dA \tag{5.4}$$

Assim temos o segundo membro

$$\begin{aligned}
\iint_D \frac{\partial Q}{\partial x}(x, y) dA &= \int_c^d \int_{g_1(y)}^{g_2(y)} \frac{\partial Q}{\partial x}(x, y) dx dy \\
&= \int_c^d Q(x, y) \Big|_{y=g_1(y)}^{x=g_2(y)} dy
\end{aligned}$$

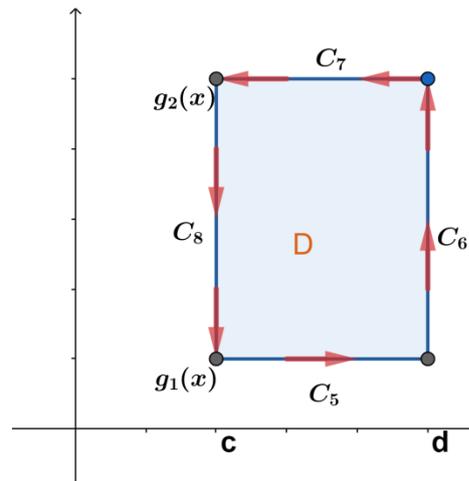
Aplicando o teorema fundamental do cálculo para Q com relação x, obtemos:

$$\int_c^d [Q(g_2(y), y) - Q(g_1(y), y)] dy,$$

Ou seja,

$$\iint_D \frac{\partial Q}{\partial y} dA = \int_c^d [Q(g_2(y), y) - Q(g_1(y), y)] dy \quad (5.7)$$

Figura 20: Gráfico da Curva C, região tipo II



Fonte: Autoria própria

Por outro lado, temos que fazer a parametrização de cada uma das curvas: C_5 , C_6 , C_7 , C_8 que compõe a curva C.

Para C_5 , temos que:

$$y = k, \text{ logo } x = f_1(k). \text{ Assim } \vec{\theta}(k) = (g_1(k), k) \text{ com } d \leq k \leq c.$$

De modo análogo, temos que para C_7 encontraremos $\vec{\alpha} = (g_2(k), k)$ com $c \leq k \leq d$

Agora fazendo a parametrização das curvas C_6 e C_8 .

Para C_6 , temos:

$$\vec{\beta}(k) = (g_1(y) + (g_2(y) - g_1(y)) \cdot k, d) \text{ com } k \in [0, 1] \text{ e para } C_8, \text{ temos:}$$

$$\vec{\delta}(k) = (g_2(y) + (g_1(y) - g_2(y)) \cdot k, c) \text{ com } k \in [0, 1].$$

Agora, vamos calcular a integral de $Q(x, y)$ com relação a Y ao longo da curva C. Fazendo $C = C_5 + C_6 + C_7 + C_8$.

$$\begin{aligned}
\int_C Q(x, y) dy &= \int_{C_5 + C_6 + C_7 + C_8} Q(x, y) dy = \\
&= \int_{C_5} Q(x, y) dy + \int_{C_6} Q(x, y) dy + \int_{C_7} Q(x, y) dy + \int_{C_8} Q(x, y) dy = \\
&= \int_c^d Q(g_1(k), k) \cdot y'(k) dk + \int_0^1 Q(g_1(k) \cdot (g_2(k) - g_1(k)) \cdot k \cdot y'(k), k) dk + \\
&+ \int_c^d Q(g_2(k), k) \cdot y'(k) dk + \int_1^0 Q(g_2(k) \cdot (g_1(k) - g_2(k)) \cdot k \cdot y'(k), k) dk.
\end{aligned}$$

Como para C_5 temos que $y'(k) = 1$, para C_6 , $y'(k) = 0$, para C_7 , $y'(k) = 1$ e para C_8 , $y'(k) = 0$.

$$\begin{aligned}
&\int_c^d Q(g_1(k), k) \cdot 1 dk + \int_0^1 Q(g_1(k) \cdot (g_2(k) - g_1(k)) \cdot k \cdot 0, k) dk + \\
&+ \int_c^d Q(g_2(k), k) \cdot 1 dk + \int_1^0 Q(g_2(k) \cdot (g_1(k) - g_2(k)) \cdot k \cdot 0, k) dk.
\end{aligned}$$

Logo

$$\begin{aligned}
\int_C Q(x, y) dy &= \int_d^c Q(g_1(k), k) dk + \int_c^d Q(g_2(k), k) dk = \\
&= \int_c^d Q(g_2(k), k) dk + \int_d^c Q(g_1(k), k) dk = \\
&\int_c^d Q(g_2(k), k) dk - \int_c^d Q(g_1(k), k) dk = \\
&= \int_c^d [Q(g_2(k), k) - Q(g_1(k), k)] dk
\end{aligned}$$

de onde concluímos, a menos de um parâmetro, a identidade 5.4 pode ser escrita,

$$\int_C Q(x, y) dy = \int_c^d [Q(g_2(y), y) - Q(g_1(y), y)] dy$$

Comparando 5.4 com 5.7, temos que

$$\iint_D \frac{\partial Q}{\partial x} dA = \int_C Q(x, y) dy$$

o que demonstra a equação 5.4.

Conforme provadas as identidades 5.3 e 5.4, podemos somá-las obtendo

$$\int_C P(x, y) dx + \int_C Q(x, y) dx = - \iint_D \frac{\partial P}{\partial y} + \iint_D \frac{\partial Q}{\partial x}$$

Logo, por propriedade para as integrais temos:

$$\int_C [P(x, y) + Q(x, y)] dx = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dA,$$

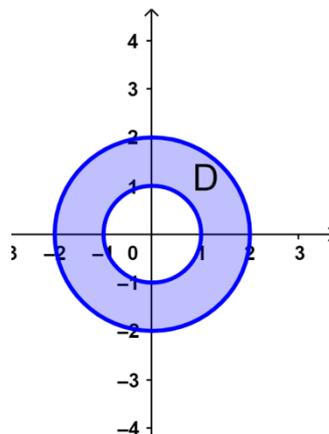
o que prova o Teorema de Green.

6. APLICAÇÕES

- 1) Calcular a integral de linha $\oint_C y^2 dx + 3xy dy$ sobre a curva definida pela região $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4, y \geq 0, -2 \leq x \leq 2\}$.

Solução

Figura 21: Região D de uma coroa circular



Fonte: Autoria própria

Temos-se que:

$$F_1(x, y) = y^2 \text{ e } F_2(x, y) = 3xy$$

$$\text{Daí } \frac{\partial F_1}{\partial y} = 2y \text{ e } \frac{\partial F_2}{\partial x} = 3y$$

Assim,

$$\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} = 3y - 2y = y$$

Fazendo a parametrização, temos:

$$x = r \cdot \cos\theta \quad 1 \leq r \leq 2$$

$$y = r \cdot \text{sen}\theta \quad 0 \leq \theta \leq \pi$$

Sendo

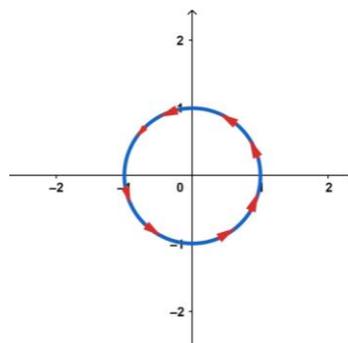
$$dA = r \cdot dr \cdot d\theta$$

Logo;

$$\begin{aligned} \oint_C y^2 dx + 3xy dy &= \iint_D \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) dA = \int_0^\pi \int_1^2 y \cdot r dr d\theta \\ &= \int_0^\pi \int_1^2 r^2 \cdot \text{sen}\theta d\theta = \int_0^\pi \left. \frac{r^3}{3} \right|_1^2 \text{sen}\theta d\theta = \frac{7}{3} \cdot \int_0^\pi \text{sen}\theta d\theta = \\ &= -\frac{7}{3} [\cos\theta] \Big|_0^\pi = -\frac{7}{3} \cdot [\cos\pi - \cos 0] = -\frac{7}{3} \cdot [-1 - 1] = \frac{14}{3}. \end{aligned}$$

- 2) Determine o trabalho realizado pelo campo de força dado pela função vetorial \vec{F} em relação a uma, partícula, que percorre uma vez o círculo $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 \leq 1\}$ no sentido anti-horário, sendo $\vec{F}(x, y) = (e^x - y^3)\vec{i} + (\cos y + x^3)\vec{j}$.

Figura 22: Gráfico de uma curva orientada



Fonte: Autoria própria

Solução

Sendo assim temos que encontrar W .

$$W = \oint_C \vec{F} ds = \iint_D \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) dA$$

$$\text{Como } \vec{F}(x, y) = (e^x - y^3)\vec{i} + (\cos y + x^3)\vec{j}$$

$$\vec{F}_1(x, y) = e^x - y^3 \quad \text{e} \quad \vec{F}_2(x, y) = \cos y + x^3$$

Fazendo a derivada parcial temos que:

$$\frac{\partial F_1}{\partial y} = -3y^2 \quad \text{e} \quad \frac{\partial F_2}{\partial x} = 3x^2$$

Parametrizando, ficamos com:

$$x = r \cdot \cos \theta \quad \text{e} \quad y = r \cdot \sin \theta$$

$$dA = r \cdot dr d\theta$$

$$\text{Senso } 0 \leq r \leq 1 \quad \text{e} \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi$$

Daí, temos que:

$$\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} = 3x^2 + 3y^2 = 3 \cdot (x^2 + y^2) = 3 \cdot r$$

Logo;

$$W = \oint_C \vec{F} ds = \iint_D \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) dA$$

$$\begin{aligned} W &= \int_0^{2\pi} \int_0^1 3r^2 \cdot r dr d\theta = \int_0^{2\pi} \frac{3r^4}{4} \Big|_0^1 d\theta = \frac{3}{4} \cdot \int_0^{2\pi} d\theta = \\ &= \frac{3}{4} \cdot \theta \Big|_0^{2\pi} = \frac{3}{4} \cdot [2\pi - 0] = \frac{3\pi}{2}. \end{aligned}$$

3) Calcule a área da circunferência de centro no ponto $P(x_0, y_0)$ e de raio unitário.

Solução

$$\text{Temos que } (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$$

$$\vec{a}(\theta) = (x_0 + r \cdot \cos \theta, y_0 + r \cdot \sin \theta)$$

Fazendo a parametrização, ficamos:

$$0 \leq \theta \leq 2\pi$$

$$x = x_0 + r \cdot \cos \theta \quad \text{e} \quad y = y_0 + r \cdot \sin \theta$$

$$dA = r \cdot dr d\theta$$

$$\text{E } \vec{F}(x, y) = (0, x)$$

$$\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} = 1 - 0 = 1$$

$$\begin{aligned} \text{Área} &= \int_0^{2\pi} \int_0^r 1 dA = \int_0^{2\pi} \int_0^r r dr d\theta = \int_0^{2\pi} \frac{r^2}{2} d\theta = \\ &= \frac{r^2}{2} \cdot \theta \Big|_0^{2\pi} = \frac{r^2}{2} \cdot [2\pi - 0] = \pi \cdot r^2 \end{aligned}$$

- 4) Calcule a área da elipse de centro no ponto $P(x_0, y_0)$ cujo eixo maior mede $2a$, paralelo ao eixo das abscissas e eixo menor medindo $2b$.

Solução

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1$$

$$\vec{\alpha}(t) = x_0 + a \cdot \cos t, y_0 + b \cdot \sin t$$

Com $0 \leq t \leq 2\pi$

$$x = x_0 + a \cdot \cos t \Rightarrow dx = -a \cdot \sin t dt$$

$$y = y_0 + b \cdot \sin t \Rightarrow dy = b \cdot \cos t dt$$

$$\vec{F}(x, y) = (0, x)$$

$$\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} = 1 - 0 = 1$$

$$\text{Área} = \iint_D 1 dA = \oint_C F_1 dx + F_2 dy$$

$$\text{Área} = \oint_0^{2\pi} 0 \cdot (-a \cdot \sin t) dt + (x_0 + a \cdot \cos t) \cdot b \cdot \cos t dt$$

$$\text{Área} = \oint_0^{2\pi} x_0 b \cos t dt + ab \cos^2 t dt$$

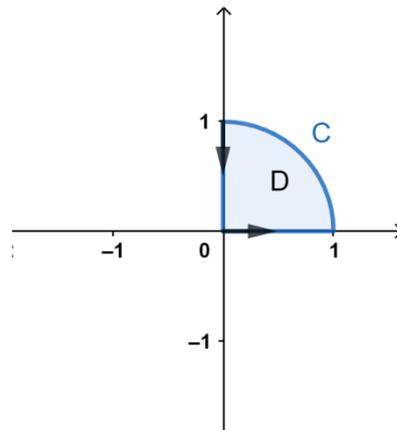
$$\text{Área} = x_0 b \cdot \sin t \Big|_0^{2\pi} + \frac{ab}{2} \cdot \left[t + \frac{\sin 2t}{2} \right]_0^{2\pi}$$

$$\text{Área} = \frac{ab}{2} \cdot [2\pi - 0]$$

$$\text{Área} = \pi ab$$

- 5) Calcular a integral de linha $\oint_C e^x \sin y dx + (e^x \cos y + x) dy$ sobre a curva definida pelo arco de circunferência $x^2 + y^2 = 1$, no primeiro quadrante, orientado no sentido anti-horário.

Figura 23: Gráfico de uma região D



Fonte: Autoria própria

Solução

Fazendo a parametrização, temos:

$$x = r \cdot \cos \theta \quad e \quad y = r \cdot \sin \theta$$

$$dA = r \cdot dr \cdot d\theta$$

Com $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ e $0 \leq r \leq 1$

Assim sendo, temos que:

$$\vec{F}_1(x, y) = e^x \sin y \quad e \quad \vec{F}_2(x, y) = e^x \cdot \cos y + x$$

Fazendo a derivada parcial ficamos com:

$$\frac{\partial F_1}{\partial y} = e^x \cdot \cos y \quad e \quad \frac{\partial F_2}{\partial x} = e^x \cdot \cos y + 1$$

Logo;

$$\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} = e^x \cdot \cos y + 1 - e^x \cdot \cos y$$

Assim,

$$\oint_C e^x \sin y \, dx + (e^x \cos y + x) \, dy = \iint_D 1 \, dx \, dy = \text{Área}(D) = \frac{\pi \cdot 1^2}{4} = \frac{\pi}{4}$$

Note que:

$$\begin{aligned} \iint_D 1 \, dx \, dy &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^1 r \, dr \, d\theta = \iint_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{r^2}{2} \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta = \frac{1}{2} \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta = \\ &= \frac{\theta}{2} \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\frac{\pi}{2}}{2} = \frac{\pi}{4} \end{aligned}$$

6) Calcular a integral de linha $\oint_C (y - e^{x^2})dx + (2x - e^{y^2})dy$ sobre a curva definida pela circunferência $x^2 + y^2 = 1$ no orientado no sentido anti-horário.

Solução

Temos que:

$$\vec{F}_1(x, y) = y - e^{x^2} \text{ e } \vec{F}_2(x, y) = 2x - e^{y^2}$$

$$\frac{\partial F_1}{\partial y} = 1 \text{ e } \frac{\partial F_2}{\partial x} = 2 \implies \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} = 2 - 1 = 1$$

$$\oint_C (y - e^{x^2})dx + (2x - e^{y^2})dy = \iint_D \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) dx dy$$

Logo;

$$\oint_C (y - e^{x^2})dx + (2x - e^{y^2})dy = \iint_D 1 \, dx dy = \text{Área}(D) = \pi \cdot 1^2 = \pi$$

7. CONSIDERAÇÕES FINAIS

Nesse trabalho, conseguimos apresentar de forma didática como construir uma base para a demonstração do Teorema de Green, bem como definições, proposições do teorema necessário para a compreensão do Teorema de Green. Também foi possível mostrar algumas aplicações desse importante do teorema, conhecer um pouco da vida e obra do grande gênio, George Green. Uma das grandes dificuldades de escrever o trabalho conclusão de curso foi justamente a escrita, uma vez que pude perceber que é muito complexo o ato de produzir textos matemático com rigor, clareza e precisão não deixando de salientar, que também tive dificuldade na digitação do trabalho pois a minha compreensão do látex era muito pouco e tive que recorrer ao Word. O trabalho me possibilitou interagir com uma gama de conhecimentos relacionados ao cálculo nas suas mais várias versões, cálculo diferencial, vetorial, integral etc. E também me levou a uma viagem para atingir uma maturidade quanto a compreensão da complexa linguagem de matemática abordada nos livros de cálculo. Além disso, foi possível apreender mais sobre a utilidade de software com Geogebra, ampliando dessa forma minhas ferramentas para a criação de texto matemático mais complexos. Por fim, a construção desse trabalho de conclusão de curso fez com que ampliasse meu campo de visão e despertar meu interesse em continuar estudando tanto a matemática pura quanto a aplicada, e além disso, sempre tentado inovar e encontrar novos métodos e práticas de como ensinar tais conteúdos e facilitando o ensino de aprendizagem dos discentes. Finalizando, esse trabalho foi realizado com pensamento voltado para alunos e professores, que venham a trabalhar com esse tema tão instigante e importante para nossa vida, que é o Teorema de Green.

REFERÊNCIAS

STEWART, James. *Cálculo: volume 2/ James Stewart*; tradução Helena Maria Ávila de Castro; revisão técnica Ricardo Miranda Martins. – São Paulo, SP: Cengage Learning, 2016.

GONÇALVES, Mirian Buss. *Cálculo B: Funções de Várias Variáveis, Integrais Múltiplas, Integrais Curvilíneas e de Superfície / 2 ed.* Mirian Buss Gonçalves, Diva Marília Flemming. – São Paulo: Pearson Prentice Hall, 2007.

STEWART, James. *Cálculo, volume 2 / James Stewart*; tradução EZ2 Translate. -- São Paulo: Cengage Learning, 2013.

THOMAS, George B. *Cálculo, volume 2 / tradução Carlos Scalici*; revisão técnica Claudio Hirofume Asano. – 12. Ed. – São Paulo: Pearson Education do Brasil, 2012.

GUIDORIZZI, Hamilton Luiz. *Um curso de cálculo. Volume 3 / 5 ed.* Rio de Janeiro: LTC, 2013.

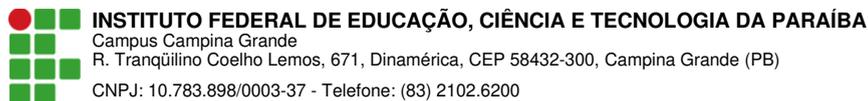
GONÇALVES, Stephanie R. *Teorema de Green e Aplicações.* São Carlos, 2021. Disponível em: https://repositorio.ufscar.br/bitstream/handle/ufscar/14569/Stephanie%20R%20Gon%C3%A7alves%20%20TCC_Teorema%20de%20Green%20e%20suas%20aplica%C3%A7%C3%B5es_vers%C3%A3o%20final.pdf?sequence. Acesso em: 12 de junho de 2022.

MEDEIROS, Heloisa B.; MENEZES, L.M.P.D.O. *George Green, o Homem e o Teorema.* S.d. Disponível em <https://repositorio.ucb.br:9443/jspui/bitstream/10869/1540/1/Alcimar%20de%20Souza%20Braga.pdf>. Acesso em: 12 de julho de 2022.

BRAGA, A. d. S. *Teorema de Green e Aplicações.* Universidade Católica de Brasília DepartamentodeMatemática., S.d. Disponível em: <https://repositorio.ucb.br:9443/jspui/bitstream/10869/1540/1/Alcimar%20de%20Souza%20Braga.pdf>. Acesso em: 12 de julho de 2022.

SILVA, Paulo Weber Pinheiro da. *Teorema de Green e Aplicações.* Monteiro, 2019. Disponível em: <https://dspace.bc.uepb.edu.br/jspui/bitstream/123456789/21419/1/PDF%20-%20Paulo%20Weber%20Pinheiro%20da%20Silva.pdf>

PINTO, Diomara. *Cálculo diferencial e integral de funções de várias variáveis.* / Diomara Pinto e Maria Cândida Ferreira Morgado. 3. Ed. 3^a. Reimpr. Rio de Janeiro. Editora UFRJ, 2005.



Documento Digitalizado Ostensivo (Público)

Entrega da versão final de TCC

Assunto: Entrega da versão final de TCC
Assinado por: Fernando Figueiredo
Tipo do Documento: Anexo
Situação: Finalizado
Nível de Acesso: Ostensivo (Público)
Tipo do Conferência: Cópia Simples

Documento assinado eletronicamente por:

- **Fernando da Silva Figueiredo, ALUNO (201821230014) DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA - CAMPINA GRANDE**, em 19/09/2022 21:37:21.

Este documento foi armazenado no SUAP em 24/09/2022. Para comprovar sua integridade, faça a leitura do QRCode ao lado ou acesse <https://suap.ifpb.edu.br/verificar-documento-externo/> e forneça os dados abaixo:

Código Verificador: 634155
Código de Autenticação: a46185bbbe

