



INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA DA PARAÍBA
CAMPUS CAMPINA GRANDE
LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

CLAUDIO DE SÁ SOARES

O TEOREMA DE STOKES E APLICAÇÕES

CAMPINA GRANDE – PB

Setembro/2022

CLAUDIO DE SÁ SOARES

O TEOREMA DE STOKES E APLICAÇÕES

Trabalho de Conclusão de Curso – TCC, apresentado ao curso de Licenciatura Plena em Matemática do Instituto Federal de Educação Ciência e Tecnologia da Paraíba, Campus Campina Grande, como requisito parcial para a obtenção do título de graduado em Licenciatura Plena em Matemática.

Orientador: Prof. Me. Orlando Batista de Almeida

CAMPINA GRANDE – PB

Setembro/2022

CLAUDIO DE SÁ SOARES

S676t Soares, Cláudio de Sá.
O teorema de Stokes e aplicações / Cláudio de Sá
Soares. - Campina Grande, 2022.
53 f. : il.

Trabalho de Conclusão de Curso (Curso de Licenciatura
em Matemática) - Instituto Federal da Paraíba, 2022.
Orientador: Prof. Me. Orlando Batista de Almeida.

1. Matemática- Ensino 2. Teorema de Stokes 3. Integral
de linha 4. Integral de superfícies I. Título.

CDU 51



MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
SECRETARIA DE EDUCAÇÃO PROFISSIONAL E TECNOLÓGICA
INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA DA PARAÍBA
CAMPUS CAMPINA GRANDE

CLÁUDIO DE SÁ SOARES

TEOREMA DE STOKES E APLICAÇÕES

Trabalho de Conclusão de Curso, aprovado como requisito parcial para a obtenção de graduação em Licenciatura em Matemática pelo Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia da Paraíba – Campus Campina Grande.

Habilitação: Licenciatura


Data da aprovação

14 / 09 / 2022.

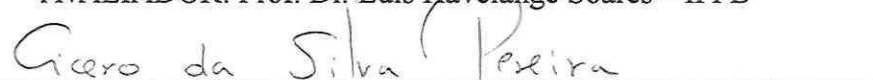
BANCA EXAMINADORA:



ORIENTADOR: Prof. Me. Orlando Batista de Almeida – IFPB



AVALIADOR: Prof. Dr. Luis Havelange Soares – IFPB



AVALIADOR: Prof. Me. Cicero da Silva Pereira – IFPB

Dedico este trabalho à minha família que sempre me apoiou nas minhas decisões e esforços para conseguir alcançar meus objetivos, especialmente ao meu pai e à minha mãe, ensinando-me valores importantes para toda a vida e a importância da educação. A eles a minha incondicional gratidão.

AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente ao nosso Criador e Misericordioso Deus por me ter concedido saúde, capacidade e determinação para superar as dificuldades durante essa caminhada.

Agradeço ao Instituto Federal de Ciências e Tecnologia da Paraíba – Campus Campina Grande, em especial ao curso de Licenciatura em Matemática e a todos os professores que o compõem, pela dedicação, profissionalismo e zelo na condução de suas aulas e ao cuidado, por vezes paternal, com seu corpo discente.

Um agradecimento especial ao meu orientador, professor e mestre, Orlando Batista de Almeida, pelo acolhimento, incentivo, ensinamentos matemáticos esclarecedores e, principalmente, por não ter me deixado desistir diante das minhas tantas dificuldades pessoais.

À minha esposa Michelle pelo apoio incondicional, sempre ao meu lado em todos os momentos da nossa vida.

Às minhas filhas, Mariana e Vitória, responsáveis pela minha eterna determinação em alcançar meus objetivos e mostrar-lhes que a educação é o caminho para nos tornarmos pessoas melhores e com mais oportunidades de uma vida melhor e digna.

Aos meus pais, por ter me concedido a vida, pela educação, pelos ensinamentos, pelos exemplos de dignidade, honestidade, humildade e amor incondicional.

Agradeço também aos meus irmãos pelo companheirismo, apoio e amizade.

Aos amigos e colegas que fiz durante a Licenciatura, sem os quais essa jornada não teria sido a mesma.

Enfim, agradeço a todos que fizeram, de algum modo, parte desta minha caminhada e conquista.

Muito obrigado!

“Todo o conhecimento humano começou com intuições, passou daí aos conceitos e terminou com ideias”.

Immanuel Kant

RESUMO

Este trabalho de conclusão de curso apresenta como tema principal o TEOREMA DE STOKES e aplicações. Os estudantes dos cursos de Ciência e Tecnologia em geral sentem uma grande dificuldade em relacionar os assuntos teóricos estudados em sala de aula com suas aplicações práticas. Este trabalho mostra algumas aplicações do Teorema de Stokes, estudado na disciplina de cálculo diferencial e integral 4, que é ofertada na grade curricular do curso de Licenciatura em Matemática do IFPB – Campus Campina Grande/PB como disciplina optativa. Os conceitos abordados nas disciplinas de cálculo são de suma importância para vários campos de atuação, seja no campo da física, da química, da biologia, das engenharias e vários outros campos, pois são os pilares de qualquer área de atuação da ciência atualmente. Neste trabalho, veremos que o Teorema de Stokes apresenta resultados aplicáveis principalmente na área de Hidrodinâmica, mas também é aplicado em áreas como Eletromagnetismo. Diante disso, configura-se importante uma construção clara e didática desse Teorema servindo de consulta para professores ou para alunos de graduação.

Palavras-chave: Teorema de Stokes, Integral de Linha, Integral de Superfície, Campo Vetorial, Parametrização, Superfície.

ABSTRACT

This course conclusion work presents the STOKES THEOREM and applications as its main theme. Students in Science and Technology courses in general find it very difficult to relate the theoretical subjects studied in the classroom to their practical applications. This work shows some applications of Stokes' Theorem, studied in the discipline of differential and integral calculus 4, which is offered in the curriculum of the Licentiate in Mathematics course at IFPB - Campus Campina Grande/PB as an optional discipline. The concepts covered in the disciplines of calculus are of paramount importance for several fields of activity, whether in the field of physics, chemistry, biology, engineering and several other fields, as they are the pillars of any area of science activity today. In this work, we will see that Stokes' Theorem presents results applicable mainly in the area of Hydrodynamics, but it is also applied in areas such as Electromagnetism. In view of this, a clear and didactic construction of this Theorem is important, serving as a consultation for professors or undergraduate students.

Keywords: Stokes' Theorem, Line Integral, Surface Integral, Vector Field, Parameterization, Surface.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Campo Vetorial em \mathbb{R}^2	17
Figura 2 – Campo vetorial em \mathbb{R}^3	17
Figura 3 - Campo vetorial dado por $\vec{r}(x, y, z) = z\hat{k}$	17
Figura 4 – Campo de velocidade de escoamento de um fluido	18
Figura 5 – Curvas no plano.....	18
Figura 6 – Curvas no espaço	19
Figura 7 – Parábola no Plano $z = 3$	21
Figura 8 – Gráfico da reta $y = 2x + 3$	21
Figura 9 – Parametrização da superfície S	26
Figura 10 – Vetores normais unitários de uma superfície S	28
Figura 11 – Superfície orientada.....	30
Figura 12 – Superfície orientada	30
Figura 13 – George Gabriel Stokes	33
Figura 14 – Superfície S orientada de vetor normal \vec{N}	34
Figura 15 – Superfície S de equação $z = g(x, y)$	35
Figura 16 – Ilustração do exemplo 17	37
Figura 17 – Curva de $r(t)$	39
Figura 18 – Círculo de raio 1.....	40
Figura 19 - Representação da circunferência C de raio a e centro na origem.....	46
Figura 20 – Elipse de centro na origem e eixo maior paralelo ao eixo x	47
Figura 21 - Região do Plano delimitada pela curva C fechada simples	49
Figura 22 – Região D do tipo I	50
Figura 23 – Ilustração do exemplo 19	52

LISTA DE ANEXOS

ANEXO A – Parametrização de algumas curvas e Integral de Linha	44
ANEXO B – Teorema de Green	49

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	12
1.1	Objetivos	12
1.1.1	Objetivo Geral	12
1.1.2	Objetivos Específicos	13
1.2	Metodologia	13
2	Conhecimentos prévios essenciais ao desenvolvimento do trabalho	13
2.1	Campo Vetorial	14
2.2	Limite, Derivada e Continuidade de Campo Vetorial	14
2.2.1	Limite de Campo Vetorial	14
2.2.2	Derivada de Campo Vetorial	15
2.2.3	Continuidade de Campo Vetorial	16
2.3	Visualização de Campo Vetorial	16
3	CURVAS	18
3.1	Curva Fechada e Curva Simples	18
3.2	Curva espacial	19
3.3	Curva Suave e Curva Regular	19
3.4	Orientação de uma Curva	20
3.5	Parametrização de uma Curva	20
3.6	Campo Gradiente	22
3.7	Campo Rotacional	23
3.8	Campo Divergente	24
3.9	Superfície	25
3.10	Parametrização de Superfície	25
3.11	Plano Tangente a uma Superfície	26
3.12	Superfície Suave	26
3.13	Superfície Suave por Partes	27
3.14	Orientação de uma Superfície	28
3.15	Integral de Superfície de Campo Escalar	28
3.16	Integral de Superfície de Campo Vetorial	29
3.17	Bordo de uma Superfície	29
4	TEOREMA DE STOKES	31
4.1	Aspectos Históricos	31

4.2	Enunciado do Teorema de Stokes	34
4.3	Demonstração de um caso especial do Teorema de Stokes.....	35
5	APLICAÇÕES DO TEORME DE STOKES.....	37
	CONSIDERAÇÕES FINAIS.....	42
	REFERÊNCIAS	43

1 INTRODUÇÃO

Este trabalho tem caráter essencialmente bibliográfico e consiste em apresentar o Teorema de Stokes, demonstrando-o de forma direta e mostrando os aspectos essenciais para sua compreensão, fazendo algumas aplicações desse importante teorema. Esse objeto de estudo foi uma escolha para o trabalho de conclusão de curso (TCC) por sua importância e aplicação nas mais diversas áreas do conhecimento, especialmente no campo da Física.

No desenvolvimento do trabalho fica claro que o Teorema de Stokes é uma generalização do Teorema de Green, na medida em que o Teorema de Green é aplicado numa região do plano (região bidimensional) e o Teorema de Stokes é aplicado numa região do espaço (região tridimensional). O Teorema de Stokes é frequentemente utilizado em problemas envolvendo campos vetoriais na resolução de problemas de fluxo em geral, em superfícies planas.

Salientamos que esse Trabalho (TCC) está dividido em cinco capítulos. No capítulo 1, é apresentada uma introdução, seguida dos objetivos e da metodologia aplicada. No capítulo 2, abordamos os conceitos de Campo Vetorial e o cálculo do limite, derivada e a continuidade de campos vetoriais. No capítulo 3, são apresentadas algumas definições que são pré-requisitos importantes e essenciais para demonstração do Teorema de Stokes, como: curvas, campo gradiente, campo rotacional, campo divergente, superfície, plano tangente a uma superfície e integral de superfície. No capítulo 4, foi apresentada uma pequena biografia do matemático George Gabriel Stokes, foi enunciado do Teoremas de Stokes e apresentada a sua demonstração. No capítulo 5, foram feitas algumas aplicações com a utilização do Teorema de Stokes. Na sequência, foram realizadas as considerações finais sobre o trabalho.

1.1 Objetivos

1.1.1 Objetivo geral

Estudar aspectos teóricos, metodológicos e epistemológicos do Teorema de Stokes e algumas de suas aplicações.

1.1.2 Objetivos específicos

- Apresentar os conhecimentos prévios, essenciais e necessários ao estudo do Teorema de Stokes;
- Estudar algumas aplicações Teorema de Stokes;
- Refletir sobre a importância do Teorema de Stokes.

1.2 Metodologia

Tendo por base o aspecto relativo à coleta de dados, esta pesquisa é do tipo bibliográfica e foi baseada em livros e artigos sobre o tema. Para o alcance dos objetivos, foi realizado de forma sistemática e clara o apontamento dos principais conceitos prévios necessários à construção do Teorema abordado. Na pesquisa bibliográfica foram utilizados autores renomados como Diomara Pinto, Eart Swokowsky, James Stewart, Flemming, dentre outros.

2 CONHECIMENTOS PRÉVIOS IMPORTANTES E ESSENCIAIS PARA O DESENVOLVIMENTO DO TRABALHO

Neste capítulo, apresentaremos os principais conceitos inerentes aos conteúdos que serão apresentados ao longo de todo o trabalho e que são importantes para o embasamento e desenvolvimento do Teorema de Stokes, como campo vetorial, curvas, parametrização de curvas, gradiente e rotacional, que serão fundamentais na demonstração do Teorema. Para uma melhor compreensão, admite-se que o leitor já possua algum conhecimento do cálculo diferencial e integral, de funções de várias variáveis, derivadas parciais e do cálculo vetorial, conteúdos que podem ser encontrados para consulta nos livros utilizados como bibliografia para a realização deste trabalho.

2.1 Campo Vetorial

Definição 1

Seja D um conjunto numa região do plano (\mathbb{R}^2). Um **campo vetorial** em \mathbb{R}^2 é uma função \mathbf{r} que associa a cada ponto (x, y) em D um vetor bidimensional $\vec{\mathbf{r}}(x, y)$. De modo análogo, seja E um subconjunto de \mathbb{R}^3 . Um **campo vetorial** em \mathbb{R}^3 é uma função \mathbf{r} que associa a cada ponto (x, y, z) em E um vetor de três dimensões $\vec{\mathbf{r}}(x, y, z)$.

Para o caso do \mathbb{R}^2 :

$$\vec{\mathbf{r}}: D \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 \text{ temos } \vec{\mathbf{r}}(x, y) = f(x, y)\hat{i} + g(x, y)\hat{j},$$

sendo f e g funções diferenciáveis.

Para o caso do \mathbb{R}^3 :

$$\vec{\mathbf{r}}: D \subseteq \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3 \text{ temos } \vec{\mathbf{r}}(x, y, z) = f(x, y, z)\hat{i} + g(x, y, z)\hat{j} + h(x, y, z)\hat{k},$$

sendo f, g e h funções diferenciáveis.

2.2 Limite, Derivada e Continuidade de um Campo Vetorial

2.2.1 Limite de um Campo Vetorial

Definição 2

Para o caso de duas dimensões, seja a função vetorial $\vec{\mathbf{r}}(t) = (f(t), g(t))$, com $t \in I \subseteq \mathbb{R}$ ou $\vec{\mathbf{r}}(t) = f(t)\hat{i} + g(t)\hat{j}$ e $a \in \mathbb{R}$.

Definimos o limite de $\vec{\mathbf{r}}(t)$ como sendo:

$$\lim_{t \rightarrow a} \vec{\mathbf{r}}(t) = \lim_{t \rightarrow a} (f(t), g(t)) = \left(\lim_{t \rightarrow a} f(t), \lim_{t \rightarrow a} g(t) \right) \text{ ou}$$

$$\lim_{t \rightarrow a} \vec{\mathbf{r}}(t) = \lim_{t \rightarrow a} [f(t)\hat{i} + g(t)\hat{j}] = \lim_{t \rightarrow a} f(t)\hat{i} + \lim_{t \rightarrow a} g(t)\hat{j}$$

De modo análogo para o caso de três dimensões:

$$\lim_{t \rightarrow a} \vec{r}(t) = \lim_{t \rightarrow a} (f(t), g(t), h(t)) = \left(\lim_{t \rightarrow a} f(t), \lim_{t \rightarrow a} g(t), \lim_{t \rightarrow a} h(t) \right) \text{ ou}$$

$$\lim_{t \rightarrow a} \vec{r}(t) = \lim_{t \rightarrow a} [f(t)\hat{i} + g(t)\hat{j} + h(t)\hat{k}] = \lim_{t \rightarrow a} f(t)\hat{i} + \lim_{t \rightarrow a} g(t)\hat{j} + \lim_{t \rightarrow a} h(t)\hat{k}$$

Exemplo 1: Sendo a função vetorial $\vec{r}(t) = (t^2 - 1, 4t + 3)$, $t \in I \subseteq \mathbb{R}$, determinar $\lim_{t \rightarrow 2} \vec{r}(t)$.

Solução:

$$\lim_{t \rightarrow 2} \vec{r}(t) = \lim_{t \rightarrow 2} (t^2 - 1, 4t + 3) = (2^2 - 1, 4(2) + 3) = (3, 11) = 3\hat{i} + 11\hat{j}.$$

2.2.2 Derivada de um campo vetorial

Definição 3

A derivada de um campo vetorial \vec{r} , denotada por $\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{r}'(t)$, é definida do mesmo modo como realizado para as funções a valores reais,

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{r}'(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\mathbf{r}(t+h) - \mathbf{r}(t)}{h} \quad (1)$$

se este limite existir.

Desta forma, podemos calcular a derivada de uma função vetorial \vec{r} pela derivação de cada componente de \vec{r} . Assim sendo, podemos escrever:

1) Se $\vec{r}(t) = f(t)\hat{i} + g(t)\hat{j}$, onde f e g são funções diferenciáveis, então

$$\mathbf{r}'(t) = f'(t)\hat{i} + g'(t)\hat{j} \quad (2)$$

2) Se $\vec{r}(t) = f(t)\hat{i} + g(t)\hat{j} + h(t)\hat{k}$, onde f, g e h são funções diferenciáveis, então

$$\mathbf{r}'(t) = f'(t)\hat{i} + g'(t)\hat{j} + h'(t)\hat{k} \quad (3)$$

Exemplo 2: Determinar:

- a) A derivada da função vetorial $\vec{r}(t) = (1 + t^3)\hat{i} + t\hat{j} + \sin 2t \hat{k}$.
 b) Encontre o vetor tangente unitário no ponto onde $t = 0$.

Solução:

- a) Conforme (3), derivando cada componente de \vec{r} , obtemos:

$$r'(t) = 3t^2\hat{i} + \hat{j} + 2 \cos 2t\hat{k}$$

- b) Uma vez que $r(0) = i$ e $r'(0) = j + 2k$, o vetor unitário da tangente no ponto $(1,0,0)$

$$\text{é } T(0) = \frac{r'(0)}{|r'(0)|} = \frac{j+2k}{\sqrt{1+4}} = \frac{1}{\sqrt{5}}j + \frac{2}{\sqrt{5}}k$$

2.2.3 Continuidade de um campo vetorial

Definição 4

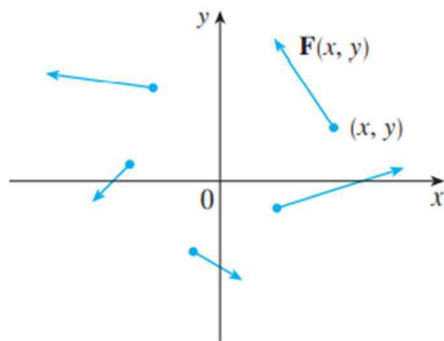
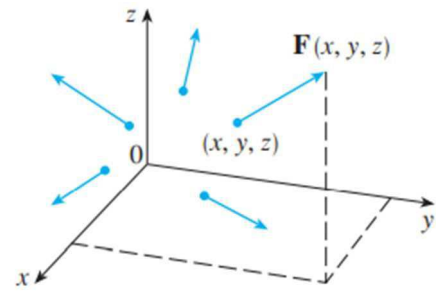
Seja uma função vetorial $\vec{r}(t)$, $t \in I \subseteq \mathbb{R}$ e seja a um elemento de I . Dizemos que a função $\vec{r}(t)$ é contínua em $t = a$, se forem atendidas as três condições:

- I) A função $\vec{r}(t)$ estiver definida em a ;
 II) $\lim_{t \rightarrow a} \vec{r}(t)$ existir;
 III) $\lim_{t \rightarrow a} \vec{r}(t) = \vec{r}(a)$

Exemplo 3: Para a função vetorial do exemplo 1, temos que ela é contínua em $t = 2$, pois $\vec{r}(2) = ((2^2 - 1), (4 \cdot 2 + 3)) = (3,11)$, que é o mesmo resultado encontrado para $\lim_{t \rightarrow 2} \vec{r}(t)$ e vemos que a função está definida para $t = 2$.

2.3 Visualização de Campo Vetorial

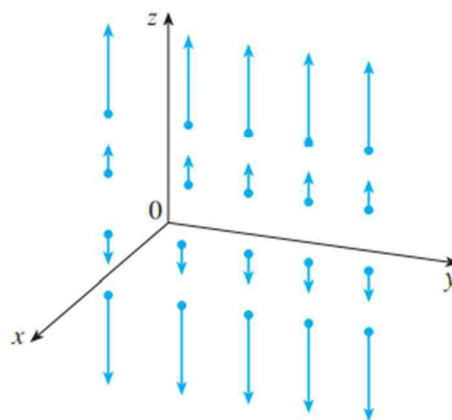
Uma forma de visualizar um campo vetorial é desenhar a seta representando o vetor $\vec{r}(x, y)$ iniciando no ponto (x, y) . Podemos visualizar \vec{r} fazendo dessa forma para alguns pontos num domínio D , como ilustra a figura 1 no caso bidimensional e a figura 2 no caso tridimensional.

Figura 1 – Campo vetorial em \mathbb{R}^2 Figura 2 - Campo vetorial em \mathbb{R}^3 

Fonte: Stewart (2016, p. 957)

Exemplo 4: Esboçar o campo vetorial em \mathbb{R}^3 dado por $\vec{r}(x, y, z) = z\hat{k}$.

Solução: As componentes na direção x e y são nulas, o que indica que os vetores são todos verticais, apresentando sentido para cima no caso da componente z positiva e para baixo no caso da componente z negativa. O comprimento aumenta quando nos distanciamos do plano xy .

Figura 3 – Campo vetorial dado por $\vec{r}(x, y, z) = z\hat{k}$

Fonte: Stewart (2016, p. 958)

Exemplo 5: Imaginemos um líquido escoando uniformemente em um cano e seja $\vec{V}(x, y, z)$ o vetor velocidade em um ponto (x, y, z) . \vec{V} associa um vetor a cada ponto (x, y, z) de certo domínio E (no interior do cano) e assim, \vec{V} é um campo vetorial chamado **campo de velocidade**. Um provável campo de velocidade está ilustrado na figura 4. A velocidade em qualquer ponto é indicada pelo comprimento da seta.

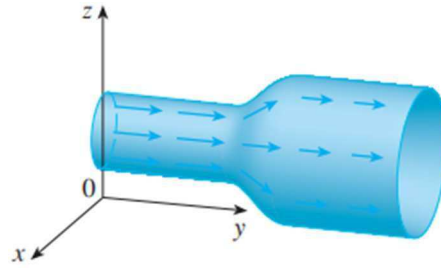


Figura 4 – Campo de velocidade do escoamento de um fluido
Fonte: Stewart (2016, p. 959)

3. CURVAS

Definição 5

Uma curva plana é um conjunto C de pares ordenados $(f(t), g(t))$, em que f e g são funções contínuas em um dado intervalo I .

Por simplicidade, referimo-nos a uma curva plana como uma **curva**. Se a curva não é plana, ela é chamada reversa.

3.1 Curva fechada e Curva Simples

Definição 6

O gráfico da curva C são todos os pontos da forma $P(t) = (f(t), g(t))$ num plano xy , com t em I . A figura 5 ilustra os gráficos de algumas curvas onde I é o intervalo fechado $[a, b]$ e $P(a)$ e $P(b)$ são os extremos da curva. Se $P(a) = P(b)$, dizemos que a **curva é fechada**. Se $P(a) = P(b)$ e C não se intercepta a si própria em nenhum outro ponto, a **curva é fechada simples**.

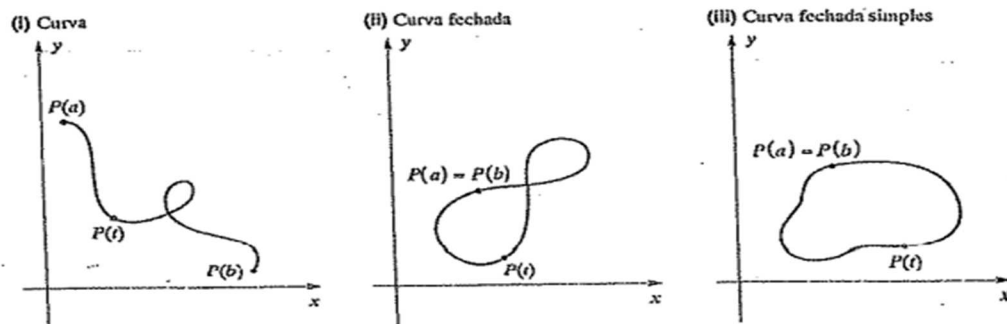


Figura 5 – Curvas no plano
Fonte: Swokowski (2ª edição, p. 160)

3.2 Curva espacial

Definição 7

De modo análogo ao plano, sejam as funções f, g e h reais e contínuas em um intervalo I . O conjunto C de todos os pontos (x, y, z) no espaço, onde

$$x = f(t), y = g(t) \text{ e } z = h(t) \quad (4)$$

com t variando em I é chamado **curva espacial**.

As equações (4) são denominadas equações paramétricas de C e t é o parâmetro. Considerando a função vetorial $\vec{r}(t) = (f(t), g(t), h(t))$, $\vec{r}(t)$ é o vetor posição do ponto $P(f(t), g(t), h(t))$ em C . Qualquer função vetorial contínua \mathbf{r} define uma curva espacial C , como ilustra a figura 6.

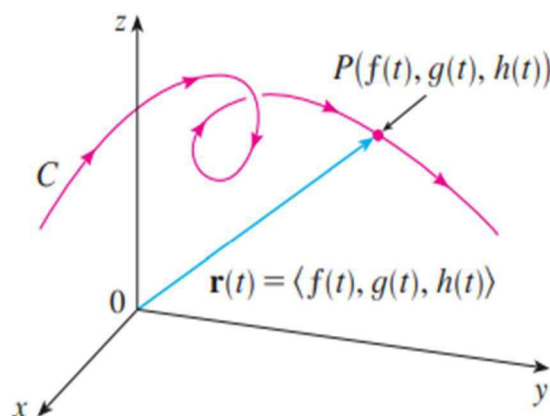


Figura 6 – Curva no espaço

Fonte: Stewart (2016, p. 959)

3.3 Curva Suave e Curva Regular

Definição 8

Uma curva C , cuja forma parametrizada é $\vec{\sigma}(t)$, é dita **curva suave** ou **regular**, se $\sigma'(t) \neq 0, \forall t \in I \subset \mathbb{R}$. Geometricamente uma curva suave é caracterizada pela ausência de pontos angulosos. Em cada um de seus pontos a curva suave tem uma tangente única que varia continuamente quando se move sobre a curva.

Uma curva é suave por partes se puder ser dividida em um número finito de curvas suaves. Por exemplo, as retas, circunferências, elipses e hélices são curvas suaves, enquanto triângulos, quadrados e ciclóides não são curvas suaves, mas sim suaves por partes.

3.4 Orientação de uma curva

Definição 9

Um ponto deslocando-se ao longo de uma curva suave C pode fazê-lo em dois sentidos possíveis. Definindo-se um deles como positivo define-se a orientação de C . Suponhamos que a curva C seja representada por

$$\vec{r}(t) = x(t)\hat{i} + y(t)\hat{j} + z(t)\hat{k}, \quad t \in [a, b].$$

Convencionamos como sentido positivo sobre C o sentido no qual a curva é traçada quando o parâmetro t cresce de a até b .

3.5 Parametrização de uma curva

Definição 10

Parametrizar uma curva é determinar as coordenadas de todos os seus pontos em função de um único parâmetro, que geralmente chamamos de t . Este parâmetro varia num intervalo de números reais. Matematicamente, podemos descrever da seguinte forma uma curva parametrizada:

Sejam um intervalo $I \subset \mathbb{R}$ e funções contínuas $f(t)$ e $g(t)$ definidas em I .

- Dizemos que a função $\sigma : I \rightarrow \mathbb{R}^2$, com $t \rightarrow (f(t), g(t))$ é uma curva parametrizada;
- O conjunto $C = \{(f(t), g(t)); t \in I\}$ (imagem da função σ) é uma ‘curva’;
- As equações definidas por $f(t)$ e $g(t)$ com $t \in I$ são denominadas de equações paramétricas da curva C .

Exemplo 6: A trajetória de uma partícula que se movimenta de acordo com a função vetorial $\vec{r}(t) = t\hat{i} + t\hat{j} + t\hat{k}$ com $t \in [-3, 3]$, representa um segmento de reta, cujas equações paramétricas são $x(t) = t$, $y(t) = t$ e $z(t) = t$.

Exemplo 7: A equação vetorial $\vec{r}(t) = t\hat{i} + t^2\hat{j} + 3\hat{k}$ representa uma parábola no plano $z = 3$.

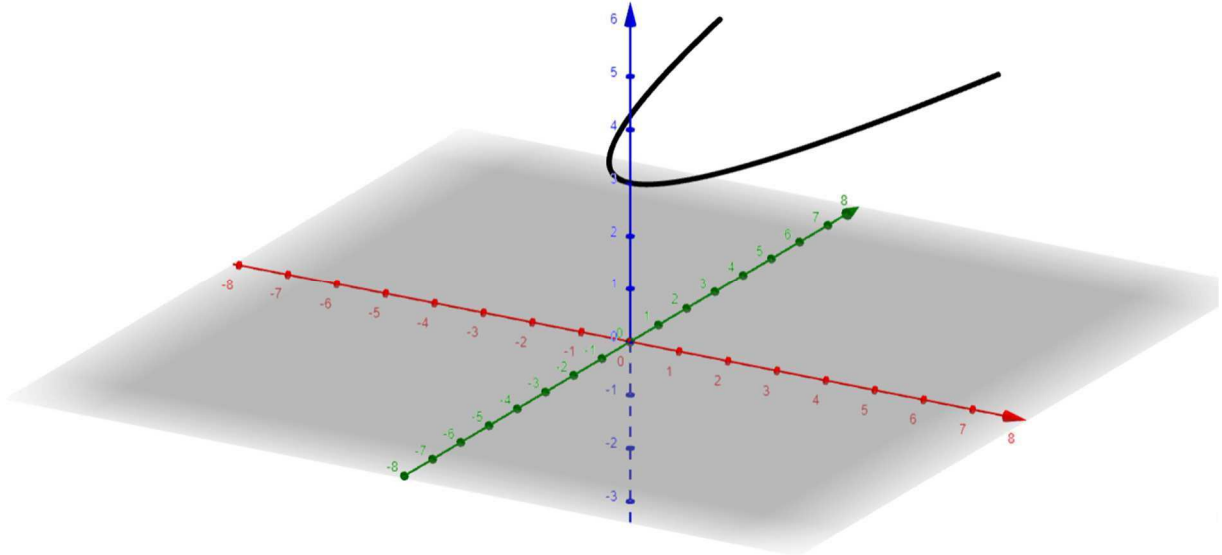


Figura 7 – Parábola no plano $z = 3$

Fonte: o autor

Exemplo 8: O conjunto de pontos dados pela função $y = 2x + 3$, cujo gráfico é representado por uma reta, tem suas equações paramétricas definidas por $x(t) = t$ e $y(t) = 2t + 3$, com $t \in I \subseteq \mathbb{R}$.

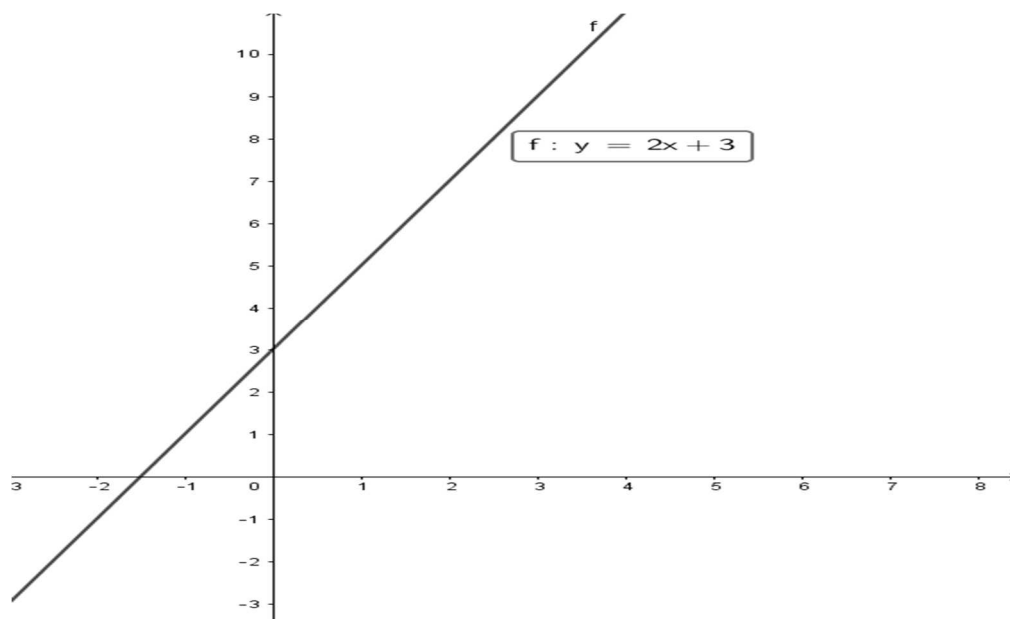


Figura 8 – Reta $y = 2x + 3$

Fonte: o autor

Uma observação pertinente sobre a parametrização de curvas, no plano ou mesmo no espaço, é que geralmente representam o movimento de algum objeto e, na maioria das situações envolvendo aplicações práticas, o parâmetro utilizado na descrição desse movimento é o tempo, motivo pelo qual geralmente é indicado pela letra t .

Outra observação pertinente é que utilizamos, para definir parametrização, o caso de uma curva no plano, utilizando duas funções contínuas f e g , porém a definição de parametrização estende-se a uma curva de uma função vetorial de dimensão n e no caso de uma curva no espaço, \mathbb{R}^3 , consideramos as f, g e h , contínuas no intervalo I , na definição 10.

3.6 Campo Gradiente

Definição 11

As derivadas parciais $f_x(x, y, z)$, $f_y(x, y, z)$ e $f_z(x, y, z)$ medem as taxas de variação dos valores funcionais de uma função $f(x, y, z)$ na direção dos eixos x , y e z , respectivamente. Vamos definir agora o **campo gradiente**, que dá a direção e o sentido em que a função apresenta sua maior taxa de variação.

Se f for uma função de três variáveis x , y e z e as derivadas parciais f_x , f_y e f_z existirem, então o campo **gradiente** de f , denotado por ∇f (lê-se “del f ”), será definido por

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial x} \hat{i} + \frac{\partial f}{\partial y} \hat{j} + \frac{\partial f}{\partial z} \hat{k} \quad (5)$$

Exemplo 9: Seja uma função definida por $f(x, y) = \frac{1}{16}x^2 + \frac{1}{9}y^2$, calcular o gradiente de f no ponto $(4, 3)$.

Solução:

Como, $f_x(x, y) = \frac{1}{8}x$ e $f_y(x, y) = \frac{2}{9}y$, temos que:

$$\nabla f(x, y) = \frac{1}{8}x\mathbf{i} + \frac{2}{9}y\mathbf{j} \quad \text{e} \quad \nabla f(4, 3) = \frac{1}{2}\mathbf{i} + \frac{2}{3}\mathbf{j}$$

3.7 Campo Rotacional

Definição 12

Seja $\vec{F} = P \vec{i} + Q \vec{j} + R \vec{k}$ um campo vetorial em \mathbb{R}^3 com derivadas parciais de P, Q e R existentes. Assim, o **campo rotacional** de \vec{F} é o campo vetorial \mathbb{R}^3 definido por

$$\text{rot } \vec{F} = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x} \right) \vec{i} + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) \vec{j} + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \vec{k} \quad (6)$$

Para auxiliar na memorização, vamos reescrever a equação anterior usando notação de operadores. Introduziremos o operador diferencial vetorial ∇ (“del”) como

$$\nabla f = \vec{i} \frac{\partial f}{\partial x} + \vec{j} \frac{\partial f}{\partial y} + \vec{k} \frac{\partial f}{\partial z} = \frac{\partial f}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial f}{\partial z} \vec{k}$$

Se pensarmos em ∇ como vetor de componente $\partial/\partial x, \partial/\partial y$ e $\partial/\partial z$, podemos também considerar o produto vetorial formal de ∇ pelo campo vetorial \vec{F} como segue:

$$\nabla \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x} \right) \vec{i} + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) \vec{j} + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \vec{k} = \text{rot } \vec{F} \quad (7)$$

Assim, o modo mais prático para a Definição 12 é dado pela expressão simbólica

$$\text{rot } \vec{F} = \nabla \times \vec{F}$$

Exemplo 10: Se $F(x, y, z) = xz \vec{i} + xyz \vec{j} - y^2 \vec{k}$, determine $\text{rot } \vec{F}$.

Resolução: Utilizando a equação (7), temos:

$$\text{rot } \vec{F} = \nabla \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ xz & xyz & -y^2 \end{vmatrix}$$

Logo,

$$\text{rot } \vec{F} = \left[\frac{\partial}{\partial y}(-y^2) - \frac{\partial}{\partial z}(xyz) \right] \vec{i} - \left[\frac{\partial}{\partial x}(-y^2) - \frac{\partial}{\partial z}(xz) \right] \vec{j} + \left[\frac{\partial}{\partial x}(xyz) - \frac{\partial}{\partial y}(xz) \right] \vec{k}$$

donde segue,

$$\text{rot } \vec{F} = (-2y - xy) \vec{i} - (0 - x) \vec{j} + (yz - 0) \vec{k}$$

Portanto,

$$\text{rot } \vec{F} = -y(2 + x) \vec{i} + x \vec{j} + yz \vec{k}$$

3.8 Campo Divergente

Definição 13

Se $\vec{F}(x, y, z) = P(x, y, z)\hat{i} + Q(x, y, z)\hat{j} + R(x, y, z)\hat{k}$ é um campo vetorial em \mathbb{R}^3 e $\partial P/\partial x$, $\partial Q/\partial y$ e $\partial R/\partial z$ existem, então o divergente de \vec{F} é uma função de três variáveis dadas por

$$\text{div } \vec{F} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \quad (8)$$

Observe que o $\text{rot } \vec{F}$ é um campo vetorial, mas $\text{div } \vec{F}$ é um campo escalar. Em termos do operador gradiente $\nabla = (\partial/\partial x)\hat{i} + (\partial/\partial y)\hat{j} + (\partial/\partial z)\hat{k}$, o divergente de \vec{F} pode ser escrito simbolicamente como o produto escalar de ∇ e \vec{F} :

$$\text{div } \vec{F} = \nabla \cdot \vec{F} \quad (9)$$

Exemplo 11: Sendo $F(x, y, z) = xz\hat{i} + xyz\hat{j} - y^2\hat{k}$, determinar o $\text{div } F$.

Solução: Pela definição de divergente e as equações (8) ou (9), segue que

$$\text{div } \vec{F} = \nabla \cdot \vec{F} = \frac{\partial}{\partial x}(xz) + \frac{\partial}{\partial y}(xyz) + \frac{\partial}{\partial z}(-y^2) = z + xz,$$

logo:

$$\text{div } \vec{F} = \nabla \cdot \vec{F} = z + xz$$

3.9 Superfície

Definição 14

Uma superfície S no espaço (\mathbb{R}^3) pode ser descrita como um conjunto de pontos (x, y, z) que satisfazem a equação da forma $f(x, y, z) = 0$, sendo f uma função contínua. A equação acima é chamada representação implícita de S .

De modo explícito, essa mesma superfície pode ser dada por uma função vetorial dada por $z = g(x, y)$, ou seja, uma função de duas variáveis a valores reais.

O vetor normal à superfície é calculado a partir do vetor gradiente de f , ou seja, $\nabla f(x, y, z)$ e seu vetor normal unitário é dado por $\vec{n} = \frac{\nabla f}{\|\nabla f\|}$.

3.10 Parametrização de Superfície

Definição 15

Seja S uma superfície no espaço. Se os pontos de S forem determinados pelas equações

$$\begin{cases} x = x(u, v) \\ y = y(u, v) \\ z = z(u, v) \end{cases} \quad (10)$$

sendo x, y, z funções contínuas das variáveis u e v , definidas em uma região conexa¹ R do plano uv , as equações (10) são chamadas equações paramétricas de S .

Desta forma, a superfície S , parametrizada pelas equações em (10), pode ser representada pela equação vetorial

$$\vec{r}(u, v) = x(u, v)\vec{i} + y(u, v)\vec{j} + z(u, v)\vec{k} \quad (11)$$

A equação (11) é a representação vetorial da superfície S . A figura abaixo ilustra os planos uv e xy na parametrização da superfície S .

¹ Uma região conexa é um espaço topológico que não pode ser representado como a união de dois ou mais conjuntos abertos disjuntos e não-vazios.

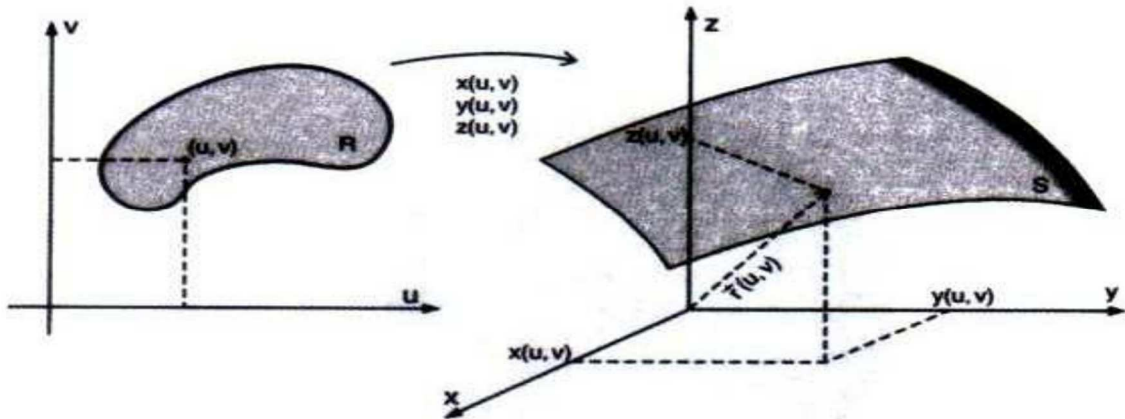


Figura 9 – Parametrização da Superfície S
 Fonte: Flemming e Gonçalves (2007, p. 357)

Exemplo 12: A função vetorial $\vec{r}(u, v) = u\vec{i} + v\vec{j} + (u^2 + 1)\vec{k}$, sendo $-2 \leq u \leq 2$ e $0 \leq v \leq 5$, representa uma superfície parametrizada em \mathbb{R}^3 . Eliminando os parâmetros u e v das equações paramétricas

$$x = u \quad y = v \quad z = u^2 + 1$$

obtemos a equação cartesiana $z = x^2 + 1$. Como $x = u$ e $y = v$, a superfície está definida para $-2 \leq x \leq 2$ e $0 \leq y \leq 5$.

3.11 Plano Tangente a uma superfície S

Definição 16

Seja um ponto P de uma superfície S , representada por $\vec{r}(u, v)$, $(u, v) \in R$, onde R é uma região conexa do plano. Suponhamos que P tem um vetor posição $\vec{r}(u_0, v_0)$ e que as curvas coordenadas de S em P sejam suaves. Então, no ponto P , o vetor

$\frac{\partial \vec{r}}{\partial u} = \frac{d(\vec{r}(u, v_0))}{du}$ é tangente à u -curva $\vec{r}(u, v_0)$ e o vetor $\frac{\partial \vec{r}}{\partial v} = \frac{d(\vec{r}(u_0, v))}{dv}$ é tangente à v -curva

$\vec{r}(u_0, v)$. Se os vetores $\frac{\partial \vec{r}}{\partial u}$ e $\frac{\partial \vec{r}}{\partial v}$ são linearmente independentes, eles determinam um

plano chamado plano tangente à superfície no ponto P . O vetor $\frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial v}$ é perpendicular ao plano tangente e denominado vetor normal a S .

3.12 Superfície Suave

Definição 17

Uma curva suave é uma curva que não apresenta pontos angulosos. De forma análoga, uma **superfície suave** ou **regular** caracteriza-se pela ausência de arestas. Dizemos que em cada ponto P de uma superfície suave existe apenas um plano tangente a S por P . Uma maneira conveniente de descrever a suavidade de uma superfície S é dizer que S pode ser dividida em partes e cada uma dessas partes admite uma parametrização $r(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$, onde $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$ e $z = z(u, v)$ admitem derivadas contínuas de todas as ordens, e que, para todo $(u_0, v_0) \in \mathbb{R}^2$, as derivadas primeiras satisfazem a condição:

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial u}(u_0, v_0) \text{ e } \frac{\partial \vec{r}}{\partial v}(u_0, v_0) \quad (12)$$

são linearmente independentes.

A condição (12) é a condição de suavidade ou de regularidade da superfície S . Os pontos de S em que a condição de suavidade não é satisfeita são chamados de pontos singulares.

3.13 Superfície Suave por partes

Definição 18

Dizemos que uma superfície S é suave por partes se S pode ser dividida em um número finito de partes suaves.

Exemplo 13: os planos, parabolóides, cilindros e esferas são superfícies suaves.

Observações

- a) O cone não é uma superfície suave;
- b) A superfície de um cubo é suave por partes, pois pode ser dividida em seis partes suaves. Cada parte corresponde a uma face do cubo.

3.14 Orientação de uma Superfície

Definição 19

Dada uma superfície suave S , em cada ponto $P \in S$, temos dois vetores unitários normais a S . Se for possível escolher um desses vetores de maneira contínua em toda a superfície, dizemos que S é orientável. Uma superfície S está orientada quando escolhemos em cada ponto $P \in S$ um vetor unitário $\vec{n}(P)$, normal a S , que varia continuamente com P .

Observamos que, se S é representada por $\vec{r}(u, v)$, $(u, v) \in R$, nos pontos em que a condição de suavidade é satisfeita, os vetores

$$\vec{n}_1 = \frac{\frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial v}}{\left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} \right|} \quad e \quad \vec{n}_2 = -\vec{n}_1 \quad \text{são vetores unitários normais a } S.$$

A figura 10 ilustra os vetores unitários normais a uma superfície S .

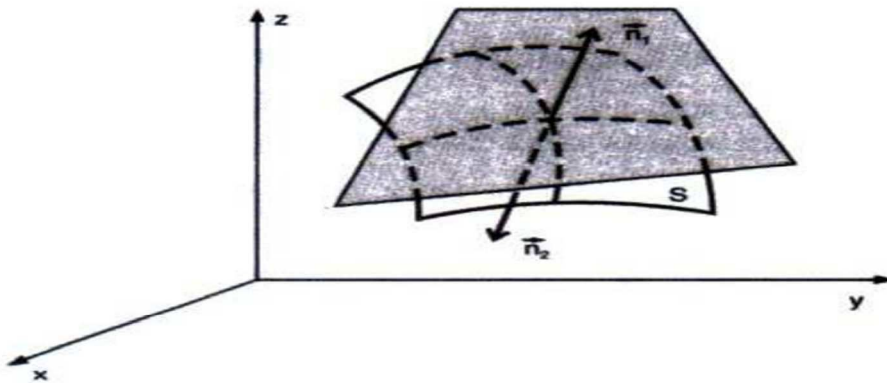


Figura 10 - Vetores normais unitários de uma superfície S
Fonte: Flemming e Gonçalves (2007, p. 377)

3.15 Integral de Superfície de um Campo Escalar

Definição 20

Tomemos uma superfície suave S , com representação paramétrica dada por $r(u, v)$, $(u, v) \in \mathbb{R}$. Seja f um campo escalar definido e limitado sobre S . A integral de superfície de f sobre S , denotada por $\iint_S f dS$ é definida pela equação

$$\iint_S f \, dS = \iint_R f(\vec{r}(u, v)) \left\| \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} \right\| \, dudv \quad (13)$$

quando a integral do segundo membro da equação existe.

3.16 Integral de Superfície de um Campo Vetorial

Definição 21

Sejam S uma superfície suave, representada por $\vec{r}(u, v) = x(u, v)\vec{i} + y(u, v)\vec{j} + z(u, v)\vec{k}$, $(u, v) \in \mathbb{R}$ e $\vec{n} = \vec{n}(u, v)$ um vetor unitário, normal a S . Seja \vec{f} um campo vetorial definido sobre S . A integral de superfície de \vec{f} sobre S denotada por $\iint_S \vec{f} \cdot \vec{n} \, dS$ é definida pela equação

$$\iint_S \vec{f} \cdot \vec{n} \, dS = \iint_R \vec{f}(\vec{r}(u, v)) \cdot \vec{n}(u, v) \left\| \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} \right\| \, dudv \quad (14)$$

quando a integral à direita existe.

3.17 Bordo de uma Superfície

Definição 22

Seja S uma superfície orientada por um campo de vetores normais \vec{n} ; dizemos que o **bordo**², denotado por ∂S , de S , está orientado positivamente se a superfície S está à esquerda de uma pessoa que caminha ao longo de ∂S com o vetor \vec{n} representando sua posição vertical, como na figura abaixo.

² O bordo (∂S) de uma superfície é formado de curvas fechadas no espaço, onde uma curva fechada é um segmento de curva em que unimos as suas duas extremidades. Cada uma das curvas fechadas que formam o bordo é chamada de componente de bordo. Exemplos de superfícies com duas componentes de bordo são o cilindro e o anel; com apenas uma componente, o disco e o cone e com nenhuma componente, as superfícies sem bordo, a esfera e o cubo.

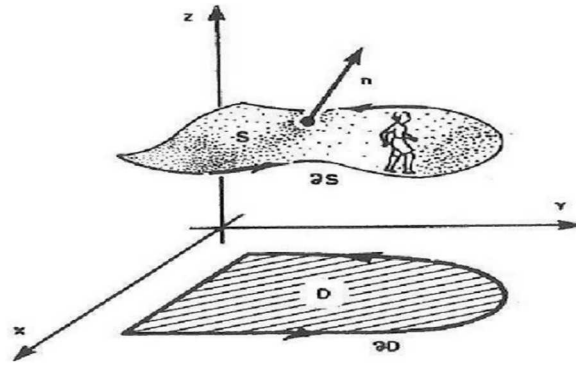


Figura 11 – Superfície Orientada
 Fonte: Flemming e Gonçalves (2007, p. 377)

Uma superfície S que é união finita de superfícies S_i coladas pelos bordos comuns está **orientada**, se é possível orientar cada parte S_i , de modo que, quando os bordos de suas partes estão orientados positivamente, tenhamos bordos comuns a duas partes sendo percorridos em sentido contrário. A figura 12 ilustra uma superfície cilíndrica orientada fechada. Uma superfície S é dita **fechada** se S é a fronteira de uma região limitada do \mathbb{R}^3 .

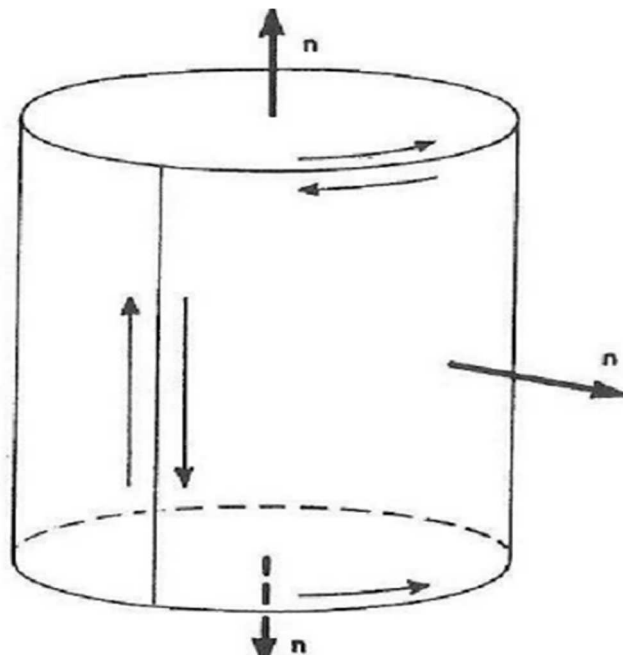


Figura 12 – Superfície orientada
 Fonte: Diomara Pinto (4ª edição, 2015, p. 272)

Neste caso, se F é um campo vetorial contínuo sobre cada S_i , então

$$\iint_S (F \cdot n) ds = \sum \iint_{S_i} (F \cdot n) ds.$$

4 TEOREMA DE STOKES

4.1 Aspectos Históricos

Será realizada agora uma breve abordagem sobre a vida e obra do matemático e físico George Gabriel Stokes.

George Gabriel Stokes nasceu em Skreen, província de Sligo, na Irlanda, em 13 de agosto de 1819 e faleceu na cidade de Cambridge, Inglaterra, em 01 de fevereiro de 1903. Seu pai, Gabriel Stokes, era ministro protestante da Paróquia de Skreen, município de Sligo. Sua mãe era filha de um ministro da igreja, por essa razão George G. Stokes (daqui em diante nominaremos apenas por Stokes) recebeu uma educação fortemente religiosa. Ele tinha cinco irmãos, dos quais três tornaram-se padres.

Stokes, além do ensino religioso, recebeu de seu pai ensinamentos em Gramática Latina. Saiu de Skreen em 1832 e frequentou a escola na cidade de Dublin. No período escolar, viveu com seu tio, John Stokes, e destacou-se em Matemática pela solução de problemas geométricos. Em 1835, aos 16 anos, mudou-se para a Inglaterra e foi para a Faculdade de Bristol. Os dois anos em Bristol o prepararam para seus estudos em Cambridge. O reitor da Faculdade, Dr. Jerrard, era irlandês que frequentou a Universidade de Cambridge com William Stokes, irmão mais velho de George Stokes. O talento de Stokes pela matemática foi evidenciado durante seus estudos na Faculdade de Bristol e, quando ganhou um prêmio, Dr. Jerrard escreveu-lhe: “Aconselhei para que eu irmão inscrevesse você em Trinity; como eu me sinto convencido de que você tem toda a probabilidade de sucesso, obtendo um companheirismo naquela Faculdade...”.

Mas a preferência de Stokes foi pela Faculdade de Pembroke, Cambridge, onde entrou em 1837. Stokes escreveu em 1901: “Naqueles dias que entrei na Faculdade de Pembroke, em 1837, não tinha ido tão longe na Matemática como é o costume no momento; e não tinha iniciado o cálculo diferencial, apenas seções analíticas recentemente lidas...”.

Foi no 2º ano de Stokes em Cambridge que ele começou a ser treinado por William Hopkins, tutor famoso de Cambridge que teve papel tão importante quando seus conferencistas. Stokes escreveu: “Em meu segundo ano comecei a estudar com Mr. Hopkins, que era célebre para um grande número de alunos que obtinham os lugares mais altos nos exames universitários para honorários matemáticos...”. Em 1841, foi graduado como Sênior Wrangler (o primeiro da classe). A Faculdade de Pembroke deu-lhe imediatamente uma bolsa auxílio e Stokes escreveu: “Depois de completar meu grau continuei residindo na Faculdade e recebi alunos privados. Pensei que seguiria na pesquisa original...”.

Hopkins o aconselhou a empreender em Pesquisa Hidrodinâmica e foi nesta área que Stokes começou a trabalhar. Além do conselho de Hopkins, também foi inspirado a entrar nessa área de pesquisa pelo recente trabalho do Físico e Matemático George Green. Stokes teve documentos publicados sobre o movimento dos fluidos incompressíveis em 1842 e 1843. Ele continuou estudando suas investigações quando observou a situação na qual levou em conta a fricção interna dos fluidos em movimento. Após deduzir suas equações de movimento de fluidos, soube que não teria sido o primeiro a obtê-las. Poisson e São-Venant já teriam considerado o problema. A duplicação de resultados foi provocada pela falta de conhecimento do trabalho de matemáticos continentais em Cambridge, à época. Stokes, decidido que seus resultados tiveram aspectos suficientemente diferentes para justificar a publicação, publicou as teorias da fricção interna de fluidos em movimento, em 1845. O trabalho discutiu também o equilíbrio dos sólidos elásticos e usou um argumento de continuidade para justificar a mesma equação de movimento para sólidos elásticos e fluidos viscosos.

Entre 1845 e 1850, Stokes trabalhou na Teoria dos Fluidos viscosos. Deduziu o famoso *Teorema de Stokes*, uma equação que poderia ser aplicada ao movimento de uma pequena esfera ao cair dentro de um meio viscoso para obter sua velocidade sob influência de uma dada força, tal como a força gravitacional. Essa equação podia ser usada para explicar, por exemplo, a maneira pela qual as nuvens flutuavam no ar.

Em 1849, Stokes foi nomeado professor de Matemática em Cambridge. Em 1851, foi eleito à Royal Society, premiado com a medalha de Rumford em 1852 e designado secretário em 1854. Mais tarde, aceitou ser nomeado professor de Física, precisando ganhar dinheiro adicional. Realizou outros trabalhos no campo da Física: investigou a Teoria da Onda de Luz, nomeou e explicou o fenômeno da fluorescência em 1852 e, em 1854, teorizou sobre as linhas no espectro solar.

A partir de 1857, sua carreira tomou um rumo bastante diferente quando passou do período de pesquisa teórica e se envolveu com administração e trabalho experimental. Noivou e se casou com Mary Susanna Robinson, filha do astrônomo do Observatório de Armagh, Irlanda. Pode parecer que Stokes, com o matrimônio, estava procurando mudança em sua vida. Naquele momento, membros de Cambridge tinham de ser solteiros, mesmo assim, levou adiante o matrimônio. Stokes deveria deixar a Faculdade de Pembroke, porém uma mudança nas regras, em 1862, permitia que homens casados continuassem lá. Continuou como secretário da Royal Society até 1885 e foi eleito Presidente. Ocupou esse cargo até 1890. Também foi Presidente do Victoria Institute de 1886 até sua morte, em 1903.

Stokes recebeu a Copley Medal da Royal Society de Londres em 1893 e foi o honorário mais alto da Faculdade, onde serviu como Mestre entre 1902 e 1903. Ele influenciou muito as novas gerações. Assim como Green, também tiveram influência em seus trabalhos pesquisadores franceses como Lagrange, Laplace, Fourier, Poisson e Cauchy. Essas influências são percebidas nos seus estudos de ótica e hidrodinâmica. Seus interesses se estenderam além da Física e Matemática, pois tinha vasto conhecimento em Química e Botânica.

Os documentos de Stokes foram publicados em cinco volumes. Os três primeiros, Stokes os editou em 1880, 1883 e 1891. Os últimos dois foram editados por Joseph Larmor, incluindo um trabalho completado em 1905.

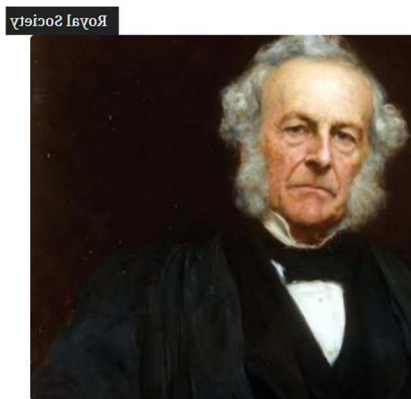


Figura 13 – George Gabriel Stokes

Fonte: Site Khan Academy

Agora será enunciado e demonstrado o Teorema de Stokes, que é uma generalização do Teorema de Green. Enquanto o Teorema de Green é abordado no plano \mathbb{R}^2 , o Teorema de Stokes é abordado no espaço (\mathbb{R}^3).

Em linhas gerais, o Teorema de Stokes relaciona uma integral de linha de um campo vetorial ao longo de uma curva fechada simples $C \subset \mathbb{R}^3$ com a integral sobre uma superfície S , para a qual C é fronteira.

A figura 14 mostra uma superfície orientada com vetor normal unitário \vec{n} . A orientação de S induz a orientação positiva da curva fronteira C , também denotada por ∂S (*bordo de S*), mostrada na figura. Isso significa que, se você andar na direção positiva ao redor da curva C com sua cabeça na direção e sentido de \vec{n} , a superfície estará à sua esquerda.

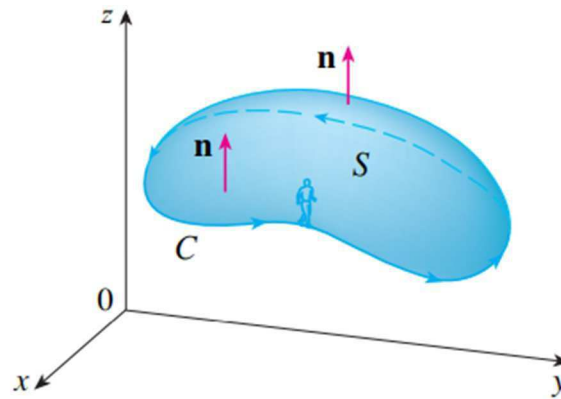


Figura 14 – Superfície S orientada de vetor normal \vec{n}
 Fonte: James Stewart (7ª edição, Vol.2, 2016, pág. 1003)

4.2 Enunciado do Teorema de Stokes

Seja S uma superfície orientada, suave por partes, cuja fronteira é formada por uma curva C , também conhecida por ‘bordo’ de S e denotada por ∂S , fechada, simples, suave por partes, com orientação positiva. Seja \vec{F} um campo vetorial cujas componentes têm derivadas parciais primeiras contínuas em uma região aberta de \mathbb{R}^3 que contém S . Então,

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \iint_S \text{rot } \vec{F} \cdot d\vec{S} \quad (15)$$

Como $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_C \vec{F} \cdot \vec{T} dS$ e $\iint_S \text{rot } \vec{F} \cdot d\vec{S} = \iint_S \text{rot } \vec{F} \cdot \vec{n} dS$, o Teorema nos diz que a integral de linha em torno da curva fronteira de S da componente tangencial de \vec{F} é igual à integral de superfície sobre S da componente normal do rotacional de \vec{F} .

A curva na fronteira da superfície S , orientada positivamente, é denotada também por ∂S , de modo que o Teorema de Stokes pode ser reescrito como

$$\iint_S \text{rot } \vec{F} \cdot d\vec{S} = \int_{\partial S} \vec{F} \cdot d\vec{r} \quad (16)$$

Se considerarmos uma superfície plana S no plano xy , com orientação ascendente, o vetor normal unitário é \hat{k} , a integral de superfície se transforma em uma integral dupla e o Teorema de Stokes fica

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \iint_S \text{rot } \vec{F} \cdot d\vec{S} = \iint_S (\text{rot } \vec{F}) \cdot \vec{k} dA \quad (17)$$

Essa é a forma vetorial do Teorema de Green, mostrando que é um caso particular do Teorema de Stokes.

4.3 Demonstração de um caso especial do Teorema de Stokes

Admitamos que a equação de uma superfície S é $z = g(x, y)$, com $(x, y) \in D$, onde a função g tem derivadas parciais de segunda ordem contínuas e que D seja uma região plana simples cuja curva de fronteira C_1 corresponde a C , fronteira ou bordo de S . Se a orientação de S for ascendente (vetor normal \vec{n} para cima), a orientação positiva de C corresponde à orientação positiva de C_1 (ver figura 15).

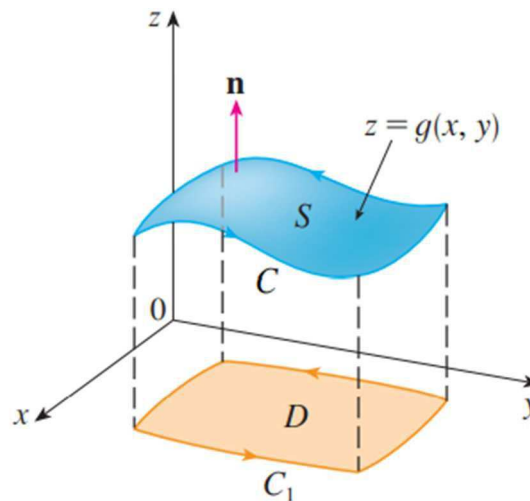


Figura 15 – Superfície S de equação $z = g(x, y)$
 Fonte: James Stewart (7ª edição, Vol.2, 2016, pág. 1004)

Seja um campo vetorial $\vec{F} = P\hat{i} + Q\hat{j} + R\hat{k}$ com derivadas parciais de P, Q e R contínuas, atuando na superfície S .

Como S é o gráfico de uma função, podemos utilizar a equação da integral de superfície para funções com x e y como parâmetros

$$\iint_S \vec{F} \cdot d\vec{S} = \iint_D \left(-P \frac{\partial g}{\partial x} - Q \frac{\partial g}{\partial y} + R \right) dA$$

substituindo F por $\text{rot } F$. Assim, o lado esquerdo da equação (16) fica da seguinte forma:

$$\iint_S \text{rot } \vec{F} \cdot d\vec{S} = \iint_D \left[\left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right), \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right), \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \right] \cdot \left[\left(-\frac{\partial z}{\partial x}, -\frac{\partial z}{\partial y}, 1 \right) \right] dA,$$

ou ainda,

$$\iint_S \text{rot } \vec{F} \cdot d\vec{S} = \iint_D \left[\left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) x \left(-\frac{\partial z}{\partial x} \right) + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) x \left(-\frac{\partial z}{\partial y} \right) + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \right] dA,$$

de onde determinamos:

$$\iint_S \text{rot } \vec{F} \cdot d\vec{S} = \iint_D \left[-\frac{\partial R}{\partial y} \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial x} \frac{\partial z}{\partial y} + \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right] dA$$

Reorganizando o integrando desta última integral, temos:

$$\iint_S \text{rot } \vec{F} \cdot d\vec{S} = \iint_D \left[-\left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) \frac{\partial z}{\partial x} - \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) \frac{\partial z}{\partial y} + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \right] dA$$

As derivadas parciais de P , Q e R são calculadas em $(x, y, g(x, y))$.

Se $x = x(t)$, $y = y(t)$, e $z = z(t)$, com $a \leq t \leq b$, são as equações paramétricas da curva C , então a sua parametrização é dado por:

$$\vec{r}(t) = (x(t)\hat{i} + y(t)\hat{j} + z(t)\hat{k}) = (x(t), y(t), z(t))$$

Agora, considerando a parametrização do bordo da Superfície S , $\vec{r}(t)$, e com ajuda da regra da cadeia, vamos calcular a integral de linha, que é o lado direito da equação (16):

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_a^b \left[(P, Q, R) \cdot \left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt} \right) \right] dt,$$

assim, segue que;

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_a^b \left[P \frac{dx}{dt} + Q \frac{dy}{dt} + R \left(\frac{\partial z}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{dy}{dt} \right) \right] dt,$$

logo,

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_a^b \left(P \frac{dx}{dt} + Q \frac{dy}{dt} + R \frac{\partial z}{\partial x} \frac{dx}{dt} + R \frac{\partial z}{\partial y} \frac{dy}{dt} \right) dt,$$

chegando na expressão:

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_a^b \left[\left(P + R \frac{\partial z}{\partial x} \right) \frac{dx}{dt} + \left(Q + R \frac{\partial z}{\partial y} \right) \frac{dy}{dt} \right] dt,$$

de onde concluímos:

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{C_1} \left(P + R \frac{\partial z}{\partial x} \right) dx + \left(Q + R \frac{\partial z}{\partial y} \right) dy$$

Aplicando o Teorema de Green nesta última integral, temos que:

$$\iint_D \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(Q + R \frac{\partial z}{\partial y} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(P + R \frac{\partial z}{\partial x} \right) \right] dA$$

Nesta última integral, utilizando novamente a regra da cadeia, sendo que P, Q e R são funções de x, y e z e z é função de x e y , obtemos:

$$= \iint_D \left[\left(\frac{\partial Q}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial R}{\partial x} \frac{\partial z}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial z}{\partial y} + R \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \right) - \left(\frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\partial P}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial y} \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial R}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial z}{\partial x} + R \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} \right) \right] dA$$

Simplificando os termos semelhantes de sinais opostos e reorganizando, encontramos a equação

$$= \iint_D \left[- \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) \frac{\partial z}{\partial x} - \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) \frac{\partial z}{\partial y} + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \right] dA$$

E assim, mostramos que $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \iint_S \text{rot } \vec{F} \cdot d\vec{S}$.

5. APLICAÇÃO DO TEOREMA DE STOKES

Exemplo 14: Calcule $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$, para $\vec{F}(x, y, z) = -y^2\hat{i} + x\hat{j} + z^2\hat{k}$ e C é a curva de intersecção do plano $y + z = 2$ com o cilindro $x^2 + y^2 = 1$. Oriente a curva C no sentido anti-horário quando observado de cima.

Solução:

A curva C é uma elipse e está ilustrada na figura abaixo.

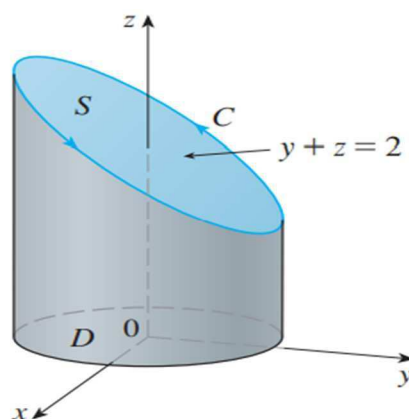


Figura 16 – Ilustração do exemplo 17

Fonte: Stewart (2016, p. 1005)

Poderíamos calcular a integral de linha diretamente, mas é mais simples usar o Teorema de Stokes. Inicialmente, calculamos o rotacional do campo \mathbf{F} .

$$\operatorname{rot} \vec{F} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ -y^2 & x & z^2 \end{vmatrix} = (1 + 2y)\hat{k}$$

Existem muitas superfícies com a fronteira em C , mas a melhor escolha é a região elíptica S no plano $y + z = 2$, cuja fronteira é C . Orientando a superfície S para cima, em seguida, C tem orientação induzida positiva. A projeção D de S no plano xy é o disco $x^2 + y^2 \leq 1$. Fazendo $z = g(x, y) = 2 - y$, temos que:

$$\begin{aligned} \int_C F \cdot dr &= \iint_S \operatorname{rot} F \cdot dS = \iint_D (1 + 2y)dA = \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^1 (1 + 2r\operatorname{sen}\theta)rdrd\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \left[\frac{r^2}{2} + 2\frac{r^3}{3}\operatorname{sen}\theta \right]_0^1 d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \left(\frac{1}{2} + \frac{2}{3}\operatorname{sen}\theta \right) d\theta \\ &= \frac{1}{2}2\pi + 0 = \pi. \end{aligned}$$

Exemplo 15:

Calcule a integral de linha do campo vetorial $F(x, y, z) = (e^{x^2} + z, e^{y^2} + x, e^{z^2} + y)$ ao longo da curva $r(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t, 3)$, com $0 \leq t \leq 2\pi$.

Solução:

A curva $r(t)$ é representada abaixo:

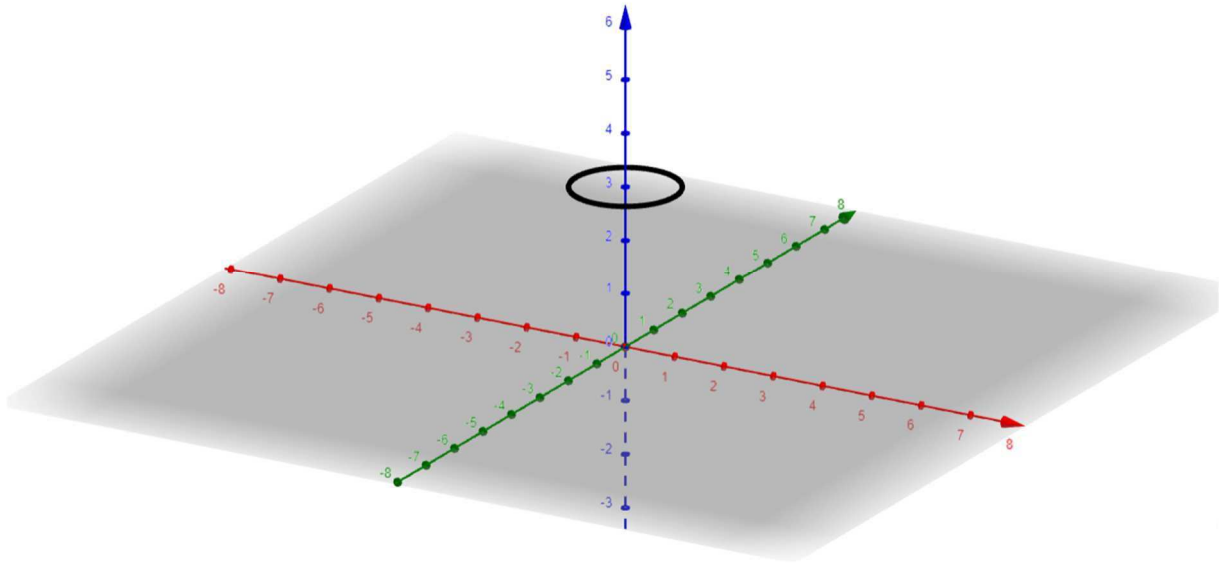


Figura 17 – Curva de $r(t)$

Fonte: o autor

Tendo em vista que a curva é fechada, orientada positivamente e a função vetorial não apresenta singularidades, vamos utilizar o Teorema de Stokes.

$$\oint_{\partial S} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \iint_S \text{rot } \vec{F} \cdot \vec{n} dS$$

A parametrização da curva C é: $\sigma(r, \theta) = (r \cos \theta, r \sin \theta, 3)$.

Calculando as derivadas parciais em relação aos parâmetros, temos:

$$\frac{\partial \sigma}{\partial r} = (\cos \theta, \sin \theta, 0) \text{ e } \frac{\partial \sigma}{\partial \theta} = (-r \sin \theta, r \cos \theta, 0)$$

O vetor normal à superfície delimitada pela curva $r(t)$ é dado por:

$$\vec{N} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ -r \sin \theta & r \cos \theta & 0 \end{vmatrix} = (0, 0, r)$$

O rotacional de F é dado por:

$$\text{rot } \vec{F} = \left(\frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z}, \frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x}, \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right)$$

Assim, temos: $\text{rot } \vec{F} = (1 - 0, 1 - 0, 1 - 0) = (1, 1, 1)$

$$\oint_{\partial S} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \iint_S \text{rot } \vec{F} \cdot \vec{n} dS = \int_0^{2\pi} \int_0^1 (1, 1, 1) \cdot (0, 0, r) dr d\theta = \int_0^{2\pi} \int_0^1 r dr d\theta = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} d\theta = \pi.$$

Exemplo 16:

Calcular a integral de linha do campo vetorial $\vec{F}(x, y, z) = (z^2 - y^2, -2xy^2, e^{\sqrt{z}} \cos z)$ ao longo da curva C parametrizada por $\sigma(t) = (\cos t, \sin t, 8 - \cos^2 t - \sin t)$, com $0 \leq t \leq 2\pi$.

Solução: Temos que, pelo Teorema de Stokes,

$$\oint_{\partial S} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \iint_S \text{rot } \vec{F} \cdot \vec{n} dS$$

A superfície S é dada por $\mu(u, v) = (x, y, 8 - x^2 - y)$, sendo que $x = \cos t$ e $y = \sin t$.
Notemos que $\mu(u, v) = C \mu(u, v)$

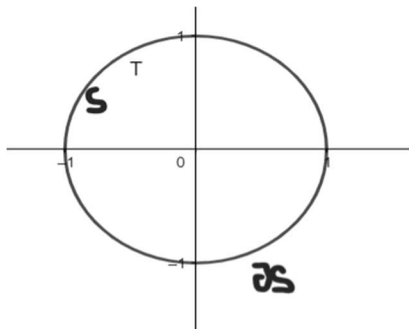


Figura 18 – Círculo de raio 1

Fonte – o autor

Assim, $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$, $dS = r dr d\theta$ e $x^2 + y^2 = 1$

Vamos calcular o rotacional do campo \vec{F} :

$$\text{rot } \vec{F} = \left(\frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z}, \frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x}, \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) = (0 - 0, 2z - 0, -2y^2 + 2y)$$

$$\text{rot } \vec{F} = (0, 2z, -2y^2 + 2y)$$

Como $z = 8 - x^2 - y$, temos que

$$\text{rot } \vec{F} = (0, 16 - 2x^2, -2y^2 + 2y)$$

Vamos calcular o vetor normal à superfície:

$$\frac{\partial \mu}{\partial x} = (1, 0, -2x) \text{ e } \frac{\partial \mu}{\partial y} = (0, 1, -1)$$

$$\text{Logo, } N = \frac{\partial \mu}{\partial x} \times \frac{\partial \mu}{\partial y} = (2x, 1, 1)$$

Calculando a integral, temos:

$$\oint_{\partial S} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \iint_S \text{rot } \vec{F} \cdot \vec{n} dS$$

$$\oint_{\partial S} F \cdot dr = \iint_S (0, 16 - 2x^2, -2y^2 + 2y) \cdot (2x, 1, 1) dS$$

$$\oint_{\partial S} F \cdot dr = \iint_S (16 - 2(x^2 + y^2)) dS$$

$$\oint F \cdot dr = \int_0^{2\pi} \int_0^1 (16 - 2r^2) r dr d\theta = \int_0^{2\pi} \int_0^1 (16 - 2r^3) dr d\theta = \int_0^{2\pi} \left(\frac{16}{2} r^2 - \frac{r^4}{2} \right)_0^1 d\theta =$$

$$\oint F \cdot dr = 15\pi.$$

6. CONSIDERAÇÕES FINAIS

Neste trabalho, conseguimos apresentar de forma didática como construir uma base para a demonstração do Teorema de Stokes, bem como definições, proposições e conceitos necessários para a demonstração do Teorema. Adicionalmente, foi possível mostrar algumas aplicações importantes do Teorema de Stokes e conhecer um pouco da vida e obra de um grande gênio da matemática.

Uma das dificuldades ao escrever o trabalho de conclusão de curso foi justamente a escrita, uma vez que pude perceber que é muito complexo o ato de produzir textos matemáticos com o rigor, clareza e precisão, não deixando de salientar que também tive dificuldade na digitação do trabalho, pois minha compreensão do programa Latex é bastante limitada e tive de recorrer ao aplicativo word para sua digitação.

O trabalho possibilitou-me interagir com uma gama de conhecimentos relacionados ao cálculo nas suas várias versões (diferencial, integral, vetorial, de uma variável, de várias variáveis, etc.) e também me possibilitou atingir uma maturidade quanto à compreensão da complexa linguagem encontrada nos livros didáticos de cálculo. Além disso, foi possível aprender mais sobre a utilidade de softwares como Geogebra, ampliando, desta forma, minhas ferramentas para a criação de textos matemáticos mais complexos. Por fim, a construção deste trabalho de conclusão de curso fez com que ampliasse meu campo de visão e despertasse meu interesse em continuar estudando tanto a matemática pura como a aplicada, além disso, sempre tentando inovar e encontrar novos métodos e práticas de como ensinar tais conteúdos e facilitando o ensino-aprendizagem dos discentes.

REFERÊNCIAS

- GONÇALVES, Mirian Buss; FLEMMING, Diva Marília. **Cálculo B: funções de várias variáveis, integrais múltiplas, integrais curvilíneas e de superfície**. 2. ed. São Paulo: Pearson Prentice Hall, 2007.
- SWOKOWSKI, Earl W. **Cálculo com geometria analítica**. 2. ed. São Paulo: Makon Books, 1994.
- STEWART, James. **Cálculo**. 7. ed. São Paulo: Cengage, 2013.
- PINTO, Diomara; MORGADO, Maria Cândida Ferreira. **Cálculo diferencial e integral de várias variáveis**. 3. ed. Rio de Janeiro: Editora UFRJ, 2009.
- LEITHOLD, Louis. **O cálculo com geometria analítica**. 3. ed. São Paulo: Harba, 1990.
- VALLE, Marcos Eduardo. **Teorema de Stokes**. Aula 24 – MA211 – Cálculo II. IMECC: UNICAMP, 2022.
- GUIDORIZZI, Hamilton Luiz. *Um curso de cálculo*. Volume 3 / 5 ed. Rio de Janeiro: LTC, 2013.
- THOMAS, George B. *Cálculo*, volume 2 / tradução Carlos Scalici; revisão técnica Claudio Hirofume Asano. – 12. Ed. – São Paulo: Pearson Education do Brasil, 2012.

ANEXO A

Parametrização de algumas curvas clássicas

RETA

Considere uma reta r que passa pelo ponto $P_0(x_1, y_1, z_1)$ na direção do vetor $\vec{v} = (a, b, c)$.

Se $P \in r$, então $\overrightarrow{P_0P} = t\vec{v}$, $t \in \mathbb{R}$. Assim,

$$P - P_0 = t \cdot v \Rightarrow P = P_0 + t \cdot v \quad (18)$$

A equação (1) é denominada de equação vetorial da reta. A reta no espaço pode ser descrita por suas equações paramétricas. Vejamos que:

$$(x, y, z) = (x_1, y_1, z_1) + t(a, b, c) \Rightarrow (x, y, z) = (x_1 + at, y_1 + bt, z_1 + ct)$$

Assim, temos que

$$r(t) = \begin{cases} x(t) = x_1 + at \\ y(t) = y_1 + bt \\ z(t) = z_1 + ct \end{cases}, \text{ com } t \in \mathbb{R} \quad (19)$$

As equações (19) são denominadas de equações paramétricas da reta r .

A função vetorial que representa a reta r é dada por $\vec{\sigma}(t) = (x(t), y(t), z(t))$, $t \in \mathbb{R}$.

Exemplo 17: Determinar as equações paramétricas da reta r que passa pelo ponto $(2, -1, 0)$ e é paralela ao vetor $v = (1, 3, -4)$. Descreva a função vetorial que a representa.

Solução:

As equações paramétricas da reta são dadas por:

$$r(t) = \begin{cases} x(t) = 2 + t \\ y(t) = -1 + 3t \\ z(t) = -4t \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$$

A sua função vetorial é dada por $\sigma(t) = ((2 + t, -1 + 3t, -4t))$, $t \in \mathbb{R}$.

CIRCUNFERÊNCIA

Segundo a definição analítica de circunferência, trata-se de lugar geométrico dos pontos $P(x, y)$, cuja distância a um ponto fixo, chamado centro $C(a, b)$ é constante e de valor r , chamado raio. Representamos por: $\{P \in \mathbb{R}^2 \mid \overline{OP} = r\}$.

Seja uma circunferência C de raio a , com centro na origem e um ponto $P(x, y)$ sobre a circunferência, conforme a figura 19.

Pela definição, a equação de C é dada por:

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2 \quad (20)$$

Dividindo-se esta equação por r^2 , considerando $a = b = 0$, temos:

$$\left(\frac{x-a}{r}\right)^2 + \left(\frac{y-b}{r}\right)^2 = 1 \quad (21)$$

Conhecemos da trigonometria a identidade

$$(\sin t)^2 + (\cos t)^2 = 1, \quad t \in \mathbb{R}, \quad (22)$$

denominada de relação fundamental da trigonometria.

Comparando as equações (21) e (22), temos:

$$\frac{x-a}{r} = \cos t \quad e \quad \frac{y-b}{r} = \sin t \quad (23)$$

Organizando, obtemos:

$$C: \begin{cases} x(t) = a + r \cos t \\ y(t) = b + r \sin t \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R} \quad (24)$$

As equações dadas em (24) são as equações paramétricas da circunferência C e a função vetorial é dada por $\vec{\sigma}(t) = (a + r \cos t, b + r \sin t)$.

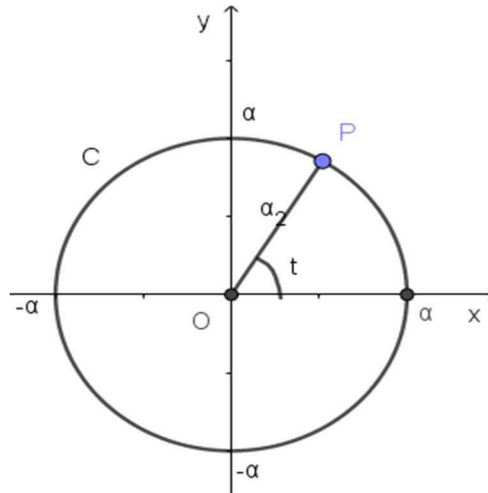


Figura 19 – Representação da circunferência C de raio a e centro na origem.

Fonte: o autor

ELIPSE

Sejam dois pontos fixos F e F' (focos), cuja distância entre eles é $2c > 0$. Definimos elipse como o lugar geométrico dos pontos $P(x, y) \in \mathbb{R}^2$, cuja soma das distâncias dos pontos P aos focos é sempre constante e igual a $2a > 0$, sendo $2a$ o eixo maior. Representamos por: $\{P \in \mathbb{R}^2 \mid \overline{FP} + \overline{F'P} = 2a\}$.

A equação reduzida da elipse de centro no ponto $P_0(x_0, y_0)$, eixo maior medindo $2a$ e paralelo ao eixo dos x e eixo menor paralelo ao eixo dos y medindo $2b$, ilustrada na figura 20, é dada por:

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1 \quad (25)$$

Considerando a identidade trigonométrica, temos:

$$(\cos\theta)^2 + (\sin\theta)^2 = 1, \quad \theta \in \mathbb{R} \quad (26)$$

Comparando as equações (25) e (26), ficamos com:

$$\begin{cases} \frac{x - x_0}{a} = \cos\theta \\ \frac{y - y_0}{b} = \sin\theta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = x_0 + a \cos\theta \\ y = y_0 + b \sin\theta \end{cases}, \text{ com } \theta \in \mathbb{R}. \quad (27)$$

As equações acima são as equações paramétricas da elipse e a função vetorial é dada por:

$$\vec{\sigma}(\theta) = (x(\theta), y(\theta)) = (x_0 + a \cos\theta, y_0 + b \sin\theta)$$

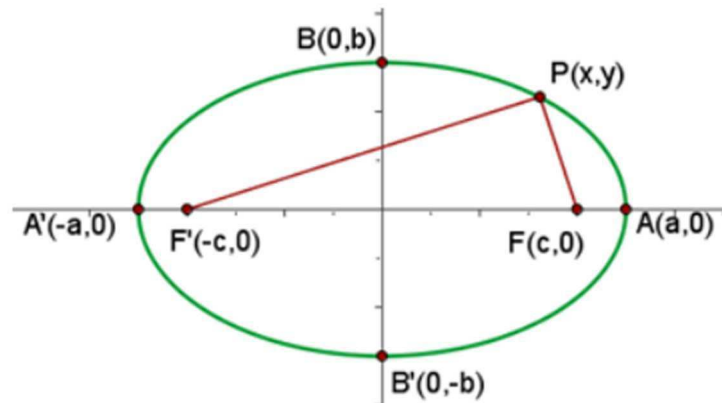


Figura 20 – elipse de centro na origem e eixo maior paralelo ao eixo x
Fonte: O autor

Integral de Linha

Definição 23

Representando a curva C por $\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}$, $t \in [a, b]$, onde t é um parâmetro qualquer. Para calcularmos a integral de linha do campo $f(x, y, z)$ ao longo da curva C é definida por

$$\int_C f(x, y, z) ds = \int_{t_0}^{t_1} f(x(t), y(t), z(t)) \|\vec{r}'(t)\| dt \quad (28)$$

Definição 24 (Trabalho sobre uma curva suave)

O trabalho realizado por uma força $\vec{F} = M\hat{i} + N\hat{j} + P\hat{k}$, sendo M, N e P funções contínuas sobre uma curva suave $\vec{r}(t)$ de $t = a$ a $t = b$, denotado por W é definido por

$$W = \int_{t=a}^{t=b} F \cdot T ds \quad (29)$$

A força $F(x)$ é a força contínua magnética e T é o versor tangente a curva.

Definição 25 (Integral Curvilínea)

Seja C uma curva suave dada por $\vec{r}(t)$, $t \in [a, b]$. Seja $\vec{f} = \vec{f}(x, y, z)$ um campo vetorial definido e limitado em C . A integral curvilínea de \vec{f} , ao longo de C , denotada por $\int_C \vec{f} \cdot d\vec{r}$, é definida por

$$\int_C \vec{f} \cdot d\vec{r} = \int_a^b \vec{f}(\vec{r}(t)) \cdot \vec{r}'(t) dt \quad (30)$$

Sempre que a integral à direita existir.

Exemplo 18: A força variável $\vec{f} = (3x - 4y)\vec{i} + (4x + 2y)\vec{j}$ move uma partícula ao longo da curva $C: \begin{cases} x = 4t + 1 \\ y = 3t^2 \end{cases}$ no intervalo $0 \leq t \leq 2$, de $(1,0)$ a $(9,12)$.

Calcule o trabalho realizado se as distâncias são medidas em m e a força em Newtons.

Solução:

O trabalho é dado pela integral de linha $\int_C \vec{f} \cdot d\vec{r}$, onde $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j}$.

Sendo $d\vec{r} = dx\vec{i} + dy\vec{j}$, temos que:

$$\int_C \vec{f} \cdot d\vec{r} = \int_C (3x - 4y)dx + (4x + 2y)dy$$

Substituindo $x = 4t + 1$, $dx = 4$, $y = 3t^2$ e $dy = 6t$, temos

$$\begin{aligned} \int_C \vec{f} \cdot d\vec{r} &= \int_0^2 [3(4t + 1) - 4(3t^2)] 4dt + [4(4t + 1) + 2(3t^2)](6tdt) \\ &= \int_0^2 (36t^3 + 48t^2 + 72t + 12)dt = (9t^4 + 16t^3 + 36t^2 + 12t)|_0^2 = 440 \text{ Joules} \end{aligned}$$

Seguem algumas propriedades da integral curvilínea:

ANEXO B

O TEOREMA DE GREEN

O Teorema de Green fornece a relação entre uma integral de linha ao redor de uma curva fechada simples C e uma integral dupla sobre a região do plano D delimitada por C (figura 21). Assumimos que D é constituída por todos os pontos dentro de C bem como todos os pontos de C .

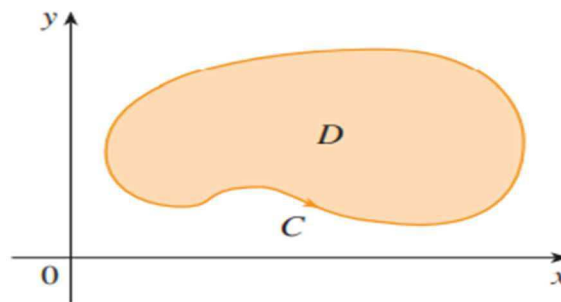


Figura 21 – Região do Plano delimitada pela curva C fechada simples
 Fonte: James Stewart (7ª edição, Volume II, pág. 971)

Enunciado do Teorema de Green

Seja C uma curva plana simples, fechada, contínua por partes, orientada positivamente, e seja D a região delimitada por C . Se P e Q têm derivadas parciais de primeira ordem contínuas sobre uma região aberta que contenha D , então

$$\int_C P dx + Q dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dA \quad (31)$$

A notação $\oint_C P dx + Q dy$ é algumas vezes usada para indicar que a integral de linha é calculada usando a orientação positiva da curva fechada C . Outra notação para a curva na fronteira de D , positivamente orientada é ∂D , daí a equação do Teorema pode ser escrita como

$$\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dA = \int_{\partial D} P dx + Q dy \quad (32)$$

DEMONSTRAÇÃO DO TEOREMA DE GREEN:

O Teorema de Green estará demonstrado se mostrarmos as duas igualdades:

$$\int_C P dx = - \iint_D \frac{\partial P}{\partial y} dA \quad (33)$$

e

$$\int_C Q dy = \iint_D \frac{\partial Q}{\partial x} dA \quad (34)$$

Vamos demonstrar a equação (33) exprimindo D como uma região como a que está mostrada na figura 22), com

$$D = \{(x, y) | a \leq x \leq b, g_1(x) \leq y \leq g_2(x)\}$$

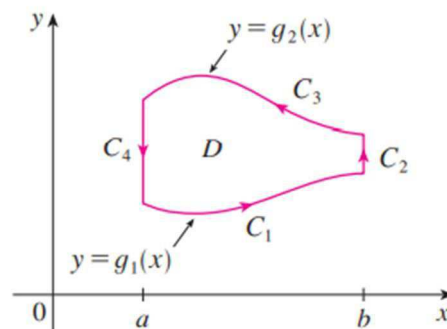


Figura 22 – Região D do tipo I³

Fonte: James Stewart (7ª edição, Volume II, pág. 972)

onde g_1 e g_2 são funções contínuas. Isso nos permite calcular a integral dupla do lado direito da equação (33) como segue:

$$\iint_D \frac{\partial P}{\partial y} dA = \int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} \frac{\partial P}{\partial y} (x, y) dy dx = \int_a^b [P(x, g_2(x)) - P(x, g_1(x))] dx \quad (35)$$

onde o último passo segue do Teorema Fundamental do Cálculo.

³ Uma região plana D é do tipo I se for a região entre o gráfico de duas funções contínuas de x , ou seja, $D = \{(x, y) | a \leq x \leq b, g_1(x) \leq y \leq g_2(x)\}$, com g_1 e g_2 contínuas em $[a, b]$.

Vamos agora calcular o lado esquerdo da equação (03), tomando C como a união das curvas C_1, C_2, C_3 e C_4 , mostradas na figura 22. Sobre C_1 , tomamos x como parâmetro e escrevemos as equações paramétricas como $x = x, y = g_1(x), a \leq x \leq b$. Logo,

$$\int_{C_1} P(x, y) dy = \int P(x, g_1(x)) dx$$

Como C_3 está orientada da direita para a esquerda, $-C_3$ está orientada da esquerda para a direita e podemos escrever as equações paramétricas de $-C_3$ como $x = x, y = g_2(x), a \leq x \leq b$. Assim,

$$\int_{C_3} P(x, y) dx = - \int_{-C_3} P(x, y) dx = - \int_a^b P(x, g_2(x)) dx$$

Sobre C_2 ou C_4 , x é constante, portanto, $dx = 0$ e

$$\int_{C_2} P(x, y) dx = \int_{C_4} P(x, y) dx = 0$$

Assim,

$$\int_C P(x, y) dx = \int_{C_1} P(x, y) dx + \int_{C_2} P(x, y) dx + \int_{C_3} P(x, y) dx + \int_{C_4} P(x, y) dx,$$

ou ainda,

$$\int_C P(x, y) dx = \int_a^b P(x, g_1(x)) dx - \int_a^b P(x, g_2(x)) dx \quad (36)$$

Comparando a expressão (33) com a equação (36), concluímos que:

$$\int_C P(x, y) dx = - \iint_D \frac{\partial P}{\partial y} dA$$

O que demonstra a equação (33).

De modo análogo, a equação dada em (34) é demonstrada de forma semelhante. Então, somando-se as equações dadas em (33) e (44), obtemos:

$$\int_C Pdx + \int_C Qdy = - \iint_D \frac{\partial P}{\partial y} dA + \iint_D \frac{\partial Q}{\partial x} dA \quad (07)$$

Aplicando a linearidade para as integrais, obtemos:

$$\int_C Pdx + Qdy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dA \quad (38)$$

que a conclusão do Teorema de Green.

Exemplo 19: Calcule $\int_C x^4 dx + xydy$, onde C é a curva triangular constituída pelos segmentos de reta de $(0,0)$ a $(1,0)$, de $(1,0)$ a $(0,1)$ e de $(0,1)$ a $(0,0)$, como mostra a figura 23.

Solução: Apesar desta integral poder ser calculada pelo método da integral de linha, envolveria o cálculo de três integrais, sobre os três lados do triângulo. Em vez disso, vamos usar o Teorema de Green. Observe que a região D englobada por C é simples e que C tem orientação positiva.

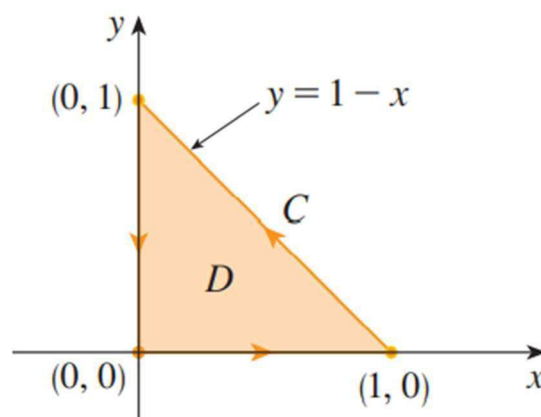
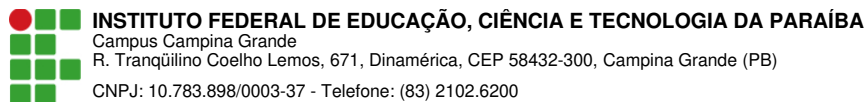


Figura 23 – Ilustração do exemplo 19

Fonte: James Stewart (7ª edição, Vol. 2, 2016, pág. 972)

Tomando $P(x, y) = x^4$ e $Q(x, y) = xy$, então teremos

$$\begin{aligned}\int_C x^4 dx + xy dy &= \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dA = \int_0^1 \int_0^{1-x} (y - 0) dy dx = \int_0^1 \left[\frac{1}{2} y^2 \right]_0^{1-x} dx = \\ &= \frac{1}{2} \int (1-x)^2 dx = -\frac{1}{6} (1-x)^3 \Big|_0^1 = \frac{1}{6}.\end{aligned}$$



Documento Digitalizado Ostensivo (Público)

Entrega do TCC Versão Final

Assunto: Entrega do TCC Versão Final
Assinado por: Claudio Sa
Tipo do Documento: Anexo
Situação: Finalizado
Nível de Acesso: Ostensivo (Público)
Tipo do Conferência: Cópia Simples

Documento assinado eletronicamente por:

- **Claudio de Sá Soares, ALUNO (201811230004) DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA - CAMPINA GRANDE**, em 20/09/2022 05:59:32.

Este documento foi armazenado no SUAP em 24/09/2022. Para comprovar sua integridade, faça a leitura do QRCode ao lado ou acesse <https://suap.ifpb.edu.br/verificar-documento-externo/> e forneça os dados abaixo:

Código Verificador: 634073
Código de Autenticação: 39a152f990

