INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA DA PARAÍBA
CURSO SUPERIOR DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

LYNDYNALWA KEZIA DE OLIVEIRA ROSA

P.A E P.G, UMA ABORDAGEM TEÓRICA COM DEMONSTRAÇÕES

CAMPINA GRANDE – PB
2022

LYNDYNALWA KEZIA DE OLIVEIRA ROSA

P.A E P.G, UMA ABORDAGEM TEÓRICA COM DEMONSTRAÇÕES

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Curso Superior de Licenciatura em Matemática do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia da Paraíba - IFPB, como requisito parcial para a obtenção do título de Licenciado em Matemática.

Orientador: Prof. Me. Weidson do A. Luna

CAMPINA GRANDE – PB

2022

R788p Rosa, Lyndynalwa Kezia de Oliveira

P.A.E.P.G, uma abordagem teórica com demonstrações / Lyndynalwa Kezia de Oliveira Rosa. - Campina Grande, 2022.

34 p.

Trabalho de Conclusão de Curso - Monografia (Curso de Licenciatura em Matemática) - Instituto Federal da Paraíba, 2022.

Orientador: Prof.Me. Weidson do A. Luna

1.Matemática - progressão aritmética. 2. Matemática - progressão geométrica. 3. Ensino da matemática. I. Título.

CDU 51:37

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
SECRETARIA DE EDUCAÇÃO PROFISSIONAL E TECNOLÓGICA
INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA DA PARAÍBA
CAMPUS CAMPINA GRANDE

LYNDYNALWA KEZIA DE OLIVEIRA ROSA

P.A. E P.G. UMA ABORDAGEM TEÓRICA COM DEMONSTRAÇÕES

Trabalho de Conclusão de Curso, aprovado como requisito parcial para a obtenção de graduação em Licenciatura em Matemática pelo Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia da Paraíba – Campus Campina Grande.

Habilitação: Licenciatura

Data da aprovação

25 / 08 / 2022.

Banca examinadora:

Weidson A. Luna

ORIENTADOR: Prof. Me Weidson do Amaral Luna - IFPB

Orlando Batista de Almeida

AVALIADOR: Prof. Me Orlando Batista de Almeida – IFPB

Rodrigo Moura da Silva

AVALIADOR: Prof. Dr. Rodrigo Moura da Silva – IFPB

Ao Senhor Deus, criador e mantenedor de todas as coisas. A Ele toda honra, glórias e louvores eternamente. Ele que nos permite atingir os objetivos que traçamos para nossas vidas. Porque sem Ele nada podemos. Ao senhor toda dedicação deste trabalho, porque os que confiam no senhor são como os montes de Sião, que não se abalam, mas permanecem firmes para sempre.

AGRADECIMENTOS

Ao senhor soberano Deus, que é meu refúgio e fortaleza, o qual me deu saúde, forç e coragem para que pudesse alcançar essa vitória. A te senhor toda minha gratidão.

Ao meu querido professor, amigo e orientador Weidson Amaral, que foi a minha inspiração na escolha do curso, meu incentivador e ajudador, que não mediu esforços para me ajudar, sempre me acolheu quando precisei, incentivando-me sempre a não desistir, obrigada por suas histórias e ensinamentos, pois elas me ajudaram a evoluir, obrigada por segurar minhas mãos, quando achei que não seria capaz, obrigada por sempre acreditar em mim, a você todo meu respeito, admiração e eterna gratidão.

Ao meu querido professor Orlando Batista, meu ajudador e incentivador, que sempre me acolheu, meu muito obrigada.

Aos amigos que fiz durante o curso, em especial a Letícia Araújo e Lucas da Silva, que sempre me ajudaram com carinho e incentivo.

À minha mãe Maria Marinalva da Costa Oliveira, que sempre me incentivou, me ajudou e sempre acreditou no meu potencial, me faltam palavras para agradecer. Ao meu pai José Rosa Sobrinho (*in memoriam*), que se estivesse vivo estaria muito orgulhoso de mim.

À minha pequena Jully Gabrielly de Oliveira Rosa Borges, meu maior incentivo.

À minha família, de modo geral, meu muito obrigada.

À Alessandro Borges, pelo incentivo, por sempre acreditar na minha capacidade e por me transportar na ida e volta do curso.

À minha querida amiga Fernanda Veloso da Silva, por seu incentivo e ajuda sempre que precisei, muitíssimo obrigada.

À minha família de modo geral, meu muito obrigada.

Aos educadores que passaram pela minha vida e deixaram deles um pouco em mim.

A todos os meus professores da Instituição IFPB campus Campina Grande, onde pude extrair conhecimentos de cada um deles, minha mais pura gratidão.

A todos que contribuíram direta ou indiretamente para realização deste trabalho de conclusão de curso.

Aos professores da banca examinadora, por me honrarem com suas presenças na apresentação desse trabalho.

RESUMO

Este trabalho apresenta toda a teoria sobre Progressão Aritmética (P.A) e sobre Progressão Geométrica (P.G), com ênfase nas demonstrações das propriedades dessas progressões, aborda também, de forma resumida, o importância das demonstrações para o ensino, em particular, para o ensino de matemática, formando dessa forma uma proposta de ensino para os conteúdos citados.

Palavras-chave: Progressão Aritmética (P.A), Progressão Geométrica (P.G), Definição, Prova.

ABSTRACT

This work presents the whole theory about Arithmetic Progression (A.P) and about Geometric Progression (G.P), with emphasis on the demonstrations of the properties of these progressions, it also addresses, in a summarized way, the importance of demonstrations for teaching, particularly, for teaching of mathematics, therefore forming a teaching proposal for the aforementioned contents.

Keywords: Arithmetic Progression (A.P), Geometric Progression (G.P), Definition, Proof.

SUMÁRIO

1. INTRODUÇÃO

Neste capítulo serão apresentados os aspectos iniciais relacionados a este trabalho, abordando, na sequência, os seguintes tópicos: a *contextualização*; a *justificativa*, os *objetivos*; a *metodologia*; o *público alvo* ao qual está direcionado; os *conhecimentos prévios* para o desenvolvimento desta proposta e a *estruturação* dos capítulos subsequentes.

1.1 CONTEXTUALIZAÇÃO

O estudo de sequências numéricas em sala de aula é de suma importância, pois elas são facilmente encontradas no dia a dia das pessoas, das mais diversas formas, como por exemplo, na área financeira, em alguns jogos como o ímpar ou par, nos jogos de futebol, no próprio calendário e nas mais diversas situações cotidianas. É importante salientar que elas também podem ser encontradas em outras disciplinas. No entanto, em sua grande maioria, o ensino/estudo de tais sequências se restringe muito mais às progressões aritméticas: P.A e P.G.

1.2 JUSTIFICATIVA

Com a criação da LDB, os livros didáticos de matemática passaram a focar sua abordagem na contextualização e na interdisciplinaridade, ou seja, nas aplicações dos conteúdos matemáticos, deixando o formalismo da teoria dos conteúdos de matemática totalmente de lado, como se as definições, teoremas e demonstrações não tivessem a menor importância no processo de ensino-aprendizagem.

1.3 OBJETIVOS

Este trabalho tem por objetivo resgatar o ensino de matemática, mais especificamente de Progressão Aritmética (P.A) e Progressão Geométrica (P.G), com ênfase no formalismo da teoria: Definições, Teoremas e Demonstrações. Trata-se, na verdade, de uma proposta de ensino de P.A e de P.G a ser aplicada para alunos do 1º Ano de Ensino Médio ou para alunos da licenciatura em matemática.

Pensamos que o que diferencia esta proposta dos modelos usuais de ensino de P.A e de P.G é o fato de apresentarmos formalismo em toda parte teórica abordada, em que as demonstrações são feitas de forma detalhadamente, excluindo palavras como é fácil ver que e evitando pular passos que prejudique a compreensão por parte do leitor.

1.4 METODOLOGIA

Para a construção desta proposta, foi realizada uma pesquisa bibliográfica que permitiu amparar o presente trabalho, assim como propiciar o trajeto do processo de investigação.

1.5 PÚBLICO-ALVO

O presente trabalho é direcionado aos professores de Matemática para que os mesmos apliquem esta proposta de ensino dos conteúdos de P.A e P.G para alunos do 1º Ano do Ensino Médio ou discentes do curso de Licenciatura em Matemática.

1.6 CONHECIMENTOS PRÉVIOS

Admitimos que o leitor tenha um bom conhecimento de: conjuntos numéricos, função afim, potência e suas propriedades, radiciação e suas propriedades, função exponencial, função logarítmica, sequências.

1.7 ESTRUTURAÇÃO DOS CAPÍTULOS SUBSEQUENTES

O segundo capítulo – ***A Importância das Demonstrações para o Ensino*** – Aborda a importância das demonstrações dos teoremas matemáticos para o ensino.

O terceiro **- Aspectos Históricos Sobre Sequências Numéricas** – Aborda, de forma resumida, o que levou o homem a pesquisar sobre sequências numéricas ao longo da história.

O quarto – ***P.A, uma Abordagem Teórica com Demonstrações*** – Apresenta definições e teoremas, com suas respectivas demonstrações, referentes ao conteúdo de P. A.

O quinto – ***P.G, uma Abordagem Teórica com Demonstrações*** – Apresenta definições e teoremas, com suas respectivas demonstrações, referentes ao conteúdo de P. G.

No sexto – ***Considerações Finais*** – Concluímos que é possível fazer uma abordagem formal dos conteúdos de P.A. e P.G, em que as propriedades, envolvendo essas sequências, são construídas a partir de suas definições.

2. A IMPORTÂNCIA DAS DEMONSTRAÇÕES PARA O ENSINO

A palavra demonstrar proveio do latim "*demonstrare*", que significa comprovar algo, tornar algo evidente através de provas. Singh (2004) nos dá uma definição do que pode caracterizar uma demonstração:

> *"A ideia da demonstração matemática clássica começa com uma série de axiomas, afirmações que julgamos serem verdadeiras ou que são verdades evidentes. Então, através da argumentação lógica, passo a passo, é possível chegar a uma conclusão. Se os axiomas estiverem corretos e a lógica for impecável, então a conclusão será inegável. Esta conclusão é o teorema." (SINGH, 2004, p. 41).*

A concepção de demonstração matemática transcende a sistematização do exercício matemático, visto que ela organiza, torna contínua, concreta e, principalmente, irreprovável. É inegável que a melhor maneira de se afirmar alguma propriedade numérica, ou até mesmo alguma relação geométrica, é através de um Teorema, que, quando ganha validade, passa a ser verídica, tornando-se assim absoluta, podendo, também, deixar mais simplórias afirmações que, se vistas de outras formas, seriam fatigantes.

Estudos mostram que a demonstração matemática vem tendo pouca importância no currículo da Educação Básica, pois, em sua maioria, o primeiro contato que o aluno tem com ela ocorre apenas no ensino superior, principalmente em cursos de Licenciatura e Bacharelado em Matemática, ainda que outros cursos, como Engenharia, por exemplo, possuam algumas disciplinas que permitem abordar demonstrações. Um das principais motivações que sugerem essa exclusão é o grau elevado de abstração que alguns teoremas exigem para que a demonstração se efetive, fazendo com que os professores concluam que os alunos estão despreparados para tal abordagem.

Rodrigues (2012, p. 57) afirma que "*a maioria dos professores não reserva tempo das suas aulas ao ensino da demonstração*". Evidencia ainda que a maioria dos docentes não encara a demonstração como sendo central na Educação Matemática, considerando-a adequada apenas a uma minoria de alunos. Em contrapartida, Amado et al. (2015) justifica que a demonstração se introduzida tardiamente, em sala de aula, pode resultar em dificuldades na dedução, tanto em atividades que preveem raciocínio dedutivo ou em outras atividades matemáticas. Entre as motivações que podem justificar o uso da demonstração em sala de aula, estão o desenvolvimento do raciocínio e a compreensão da natureza Matemática.

A discussão presente nesse trabalho, sobre as demonstrações matemáticas, está no plano da conceituação que, segundo Rezende (2018), faz parte da elaboração das definições matemáticas. Ainda segundo ele, “as demonstrações devem naturalmente participar do processo de ensino, não apenas por ser parte da natureza intrínseca da Matemática, como pelo seu significado na construção do conhecimento. O valor de uma demonstração para um aluno do ensino básico está tanto na experiência do convencimento pela razão, como pelo aprendizado do rigor científico que a Matemática exige.”. Dessa forma, entendemos que as demonstrações precisam integrar o processo de ensino aprendizagem, pois contribuem para o desenvolvimento da maturidade do estudante no que diz respeito à matemática.

Veloso (1998) justifica o uso da demonstração visando à necessidade de que os alunos iniciem o Ensino Médio já com certa prática no que concernem as atividades de cunho investigativo no campo matemático. Muitas vezes tais atividades provocam a necessidade de legitimar determinados resultados que provem dos mais diversificados processos, que vão desde cálculos até reflexões. Para ele, as demonstrações na Educação Básica devem ser objetivas e mediadas através de símbolos, mas não necessariamente cheios de formalidades.

Amado et al. (2015, p. 641), cita que a demonstração deve assumir um carácter pedagógico, sendo também uma forma de educar os alunos para que estes se sintam cada vez mais seguros e motivados nas suas argumentações matemáticas.

As demonstrações podem desempenhar algumas funções importantes. De acordo com Villiers (2001), as funções da demonstração são, respectivamente, a verificação, que busca o convencimento, a explicação, a descoberta, a comunicação, o desafio intelectual e a sistematização. Usando a verificação, como exemplo, que desempenha o papel de convencer, a demonstração estará muito mais atrelada ao plano investigativo no que concerne à matemática e não é considerada tão imprescindível, já que a grande maioria do alunado se convence facilmente. No que diz respeito à explicação, ela se torna indispensável na implantação da demonstração nas aulas de Matemática, pois uma demonstração que ajude a clarificar o motivo pelo qual um resultado é válido, ou não, contribui certamente para uma compreensão do mesmo, (AMADO et al., 2015, p. 642).

Quando pensamos no ambiente escolar, na sala de aula, especificamente, a demonstração ganha significado quando consegue responder as dúvidas surgidas pelos alunos, já que para que o professor demonstre, só poderá fazê-lo em situações onde os alunos têm dúvidas quanto à verdade dos teoremas matemáticos. Cabe ao professor trazer situações que estimulem o aprendizado dentro de determinados contextos, com elementos indispensáveis para a demonstração, tais como a argumentação, observação de padrões matemáticos, discussão de ideias e formulação de hipóteses, entre outros elementos.

É importante que haja uma inserção da demonstração na Educação Básica, visando o desenvolvimento dos alunos no que diz respeito ao pensamento crítico, a organização de ideias e a capacidade de argumentação. A demonstração é inerente à matemática e vai além da verificação de algo, da utilização de uma técnica. Mesmo que não tenhamos uma Matemática acabada, ela ainda é a ciência que está mais próxima desse propósito.

3. ASPECTOS HISTÓRICOS SOBRE SEQUÊNCIAS NUMÉRICAS

Historicamente, as sequências numéricas sempre fizeram parte do dia a dia em sociedade e tornaram-se essenciais em muitas situações. BOYER (1974) é a principal referência histórica no que concerne ao uso das sequências numéricas. Segundo ele, os egípcios, em aproximadamente 3000 a.C., tinham que resolver o problema da inundação do Rio Nilo, porque tinham a necessidade de saber a época mais adequada para efetivação do plantio para que a colheita fosse suficiente, fazendo com que o sustento estivesse garantido. Eles perceberam que havia um vínculo entre as enchentes anuais do Rio e uma estrela denominada Sirius, também conhecida como estrela do cão. Viram que a inundação do Nilo acontecia um pouco depois da estrela se levantar a leste, antes do sol. Através da observação, perceberam que este acontecimento era partido por 365 dias, e assim criaram um calendário anual de acordo com as inundações, distribuído por doze meses de trinta dias e mais cinco dias de festa. O surgimento desse calendário, a partir do exposto, nos dá uma ideia de sequência. (BOYER,1974).

Podemos destacar também o papiro de Rhind, considerado como sendo o principal registro matemático deixado pelos egípcios. Esse papiro, que possuía cerca de 0,30 m de altura e 5 m de comprimento, é assim denominado, pois foi comprado numa cidade à beira do Nilo por um antiquário escocês chamado Henry Rhind ou, chamado com menos frequência, papiro de Ahmes em homenagem ao escriba Ahmes que o copiou por volta de 1650 a.C.. Ahmes relata que o documento provém de um protótipo que acreditava datar cerca de 2000 a 1800 a.C.. Atualmente, ele pertence ao British Museum e alguns fragmentos ao BrooKlin Museum. O papiro da Rhind traz alguns problemas envolvendo sequências numéricas. (BOYER,1974).

Ainda segundo Boyer (1974), na Mesopotâmia, existiu uma grande quantidade de material relativo à matemática, no entanto tais materiais, grafados em tabletas, provêm de dois períodos muito distintos, a idade da Babilônia antiga e o período selêucida primeiro milênio. Existem grandes estudos dos babilônicos no que concerne à álgebra e um deles está na tábua de Louvre, elaborada 300 a.C., que também apresenta problemas interessantes referentes ao tema das sequências numéricas. (BOYER,1974).

Outro exemplo é o de Zeno, nascido em Eleia, onde viveu por volta do ano 450 a.C. Ele escreveu um livro com 40 paradoxos, sendo um deles sobre movimento. Quatro de seus paradoxos foram apresentados por Aristóteles, são eles: Dicotomia, Aquiles, Flecha e Estádio. Estes se referem à soma de um número infinito de termos, sendo importante para o estudo de sequências numéricas, de forma específica, a convergência de séries infinitas de números. Um exemplo específico é o de Aquiles:

> "(...)Aquiles aposta corrida com uma tartaruga que sai com vantagem e é argumentado que Aquiles por mais depressa que corra, não pode alcançar a tartaruga, por mais devagar que caminhe. Pois, quando Aquiles chegar a posição inicial da tartaruga, ela já terá avançado um pouco; e quando Aquiles cobrir essa distância, a tartaruga terá avançado um pouco mais. E o processo continua indefinidamente, com o resultado que Aquiles nunca pode alcançar a lenta tartaruga.(BOYER, 1974, p.55)"

Zeno foi uma forte influência para o desenvolvimento da matemática grega. Seus paradoxos se relacionam com a soma de um número infinito de termos positivos a um número finito, onde este traria uma confluência de uma série Infinita de números. Os gregos faziam uso de seus métodos para medição de áreas de figuras e/ou regiões. Arquimedes (287 - 212 a.C.) pôde obter resultados consideráveis, nos quais envolviam áreas e volumes de várias figuras e sólidos, além de ter construído inúmeros exemplos, também tentou explicar como somas infinitas de determinadas sequências numéricas poderiam ter resultados finitos, mas seu trabalho não foi tão expressivo, como dos matemáticos que surgiram posteriormente e que foram capazes de desenvolver sequências e séries como Newton e Leibniz. (BOYER,1974).

Os pitagóricos tinham bastante interesse pelos números, especialmente pelos números figurados. Os números figurados são números que podem ser representados por uma construção geométrica de pontos equidistantes. Os Elementos de Euclides de Alexandria traz três textos sobre teoria dos números, tornando-o também um dos mais influentes nesse aspecto. (CUNHA 2014, p.16 apud, OLIVEIRA, 2011, P.15).

O alemão Carl Friedrich Gauss (1777-1855), foi um dos maiores matemáticos da época, senão o maior de todos. Seu pai era um homem trabalhador, porém deveras teimoso e quase evitou que seu filho estudasse, mas, sua mãe o incentivou no fim orgulhou-se de seu filho. Gauss, nos seus dez anos de idade tinha um professor que passou para turma uma atividade cujo objetivo era somar os números de 1 a 100, informando que os alunos deixassem sua mini lousa sobre a mesa assim que terminassem a tarefa. Carl, rapidamente, colocou sua lousa sobre a mesa do professor, que por sua vez olhou para ele irritado, enquanto os outros alunos pareciam se esforçar. Quando todos terminaram, o professor pôde perceber que Carl tinha sido o único aluno a acertar a resposta correta, mas sem fazer nenhum cálculo. Gauss havia calculado mentalmente a soma e, com isso, presume-se a criação da fórmula da soma dos termos de uma progressão aritmética. (BOYER,1974).

Leonardo de Pisa era filho de um comerciante italiano que se chamava Bonaccio, assim dá-se o nome Fibonacci. Como seu pai era um homem de negócios, isso possibilitava que Fibonacci visitasse vários países e assim tinha a oportunidade de ter contato com alguns procedimentos matemáticos. A sequência Fibonacci foi definida por Leonardo de Pisa e publicada no ano de 1202 no livro intitulado Liber Abaci, que significa livro do ábaco que, como afirma Boyer (1974), é um livro bastante completo que traz consigo métodos e problemas algébricos. Essa sequência numérica é representada por (1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, ...), onde cada número, a partir do terceiro, é determinado pela soma dos outros dois que vem anteriormente, considerando que os dois primeiros termos da sequência devem ser iguais a 1. Além dessa sequência de Fibonacci ter diversos usos na matemática, também se aplica ao ensino de sequências numéricas, visando despertar o interesse do aluno. Um exemplo claro é o “número de ouro”. O teorema a seguir descreve bem essa relação: "A razão entre dois termos consecutivos da sequência de Fibonacci converge para o número de ouro quando não tende para o infinito" (LEOPOLDINO, 2016, p.61). Isso quer dizer que, quanto maior o termo da sequência Fibonacci, divido pelo seu antecessor, mais perto será o resultado do número de ouro, sendo assim chamado de número de ouro, divina proporção, razão áurea, entre outras nomenclaturas. Uma situação comumente encontrada na sequência Fibonacci é a espiral de Fibonacci, também chamada de espiral áurea. A sequência Fibonacci pode aparecer nos girassóis, que têm suas sementes preenchendo o centro da flor e distribuídas em dois espirais, sendo 34 espirais no sentido horário e 21 espirais no sentido anti-horário. Esses números fazem parte dos itens da sequência Fibonacci. O crescimento dos galhos de uma planta chamada Achillea Ptármic segue um padrão que tem relação direta com os termos da sequência Fibonacci. Também, na cauda de um camaleão, podemos perceber uma das representações mais belas da espiral de Fibonacci. Também no caramujo, a proporção entre uma parte e seu antecessor é aproximadamente igual ao número áureo. (BOYER,1974).

Os hindus também foram habilidosos na área da Aritmética e contribuíram significativamente para a Álgebra, uma vez que somavam progressões aritméticas e/ou geométricas de forma rápida. Os problemas aritméticos hindus envolviam irracionais quadráticos, o Teorema de Pitágoras, progressões aritméticas e também permutações. As progressões era algo que muito interessava aos hindus. Um dos matemáticos hindu mais destacado chamava-se Bháskara (1114-1185). Ele tornou-se o matemático mais influente da Índia, e suas obras finalizaram as contribuições, nesse sentido. (Boyer, 1998, pág. 152)

A abordagem de sequências numéricas se restringe a soma dos itens de uma PG infinita. As Sequências são conhecidas desde a época de Arquimedes, que fez uso de uma série geométrica. Depois disso, as séries só reapareceram na Matemática aproximadamente 1500 anos depois. Havia um professor chamado Nicole Oresme (1325-1382), renomado intelectual em vários ramos do conhecimento, que além de professor universitário, era conselheiro do rei, principalmente na área de finanças, onde teve destaque.

Podemos perceber que as sequências estão cada vez mais presentes no cotidiano das pessoas e isso ocorre porque temos necessidade de trazer certas regularidades para determinados elementos de um mesmo conjunto. Existem diversas circunstâncias em nosso cotidiano com as quais nos deparamos com a ideia de sequência, tais como: A sequência dos meses do ano ,a sequência dos dias da semana, a sequência dos anos bissextos, a sequência dos números naturais, a sequência dos alunos na lista de chamada de uma classe, etc. Podemos perceber que cada item dos conjuntos supracitados podem associar-se a um único elemento dos conjuntos dos números naturais. Quando isso ocorre, conseguimos estabelecer uma sequência padronizada. Considerando isso, pode-se definir sequência como sendo todo conjunto ou grupo dos quais estão dispostos de forma ordenada. Para a matemática, o foco são as sequências numéricas. "Uma sequência numérica é uma função, definida no conjunto dos números naturais, ou inteiros positivos..." (ÁVILA, 1999, p.16).

A classificação das sequências numéricas se dá em relação à quantidade de itens e das funções que a definem. As sequências finitas, por exemplo, têm um número limitado de itens, já as sequências infinitas, como o próprio nome diz, possuem um número ilimitado de itens. No que diz respeito as funções, as sequências podem ser lineares, que é quando a função que define a sequência é uma função linear, também podem ser sequências não lineares, que é quando a função que a define é uma sequência com função não linear.

4. P.A, UMA ABORDAGEM TEÓRICA COM DEMONSTRAÇÕES

Neste capítulo, apresentamos toda a teoria referente ao conteúdo de P.A. Os conteúdos abordados neste capítulo foram baseados nas referências [5], [6], [7], [8] e [10].

Definição 4.1 (*Progressão Aritmética*) Chama-se de Progressão Aritmética ou simplesmente de P.A, toda sequência em que cada um de seus termos, a partir do segundo, é igual ao anterior (ou antecedente) somado a um número constante chamado de razão da P.A.

Representamos os termos de uma P.A por $(\boldsymbol{a_1},\ \boldsymbol{a_2},\ \cdots,\ \boldsymbol{a_n})$, o seu ***n-ésimo*** termo por a_n, a sua ***razão*** por r e a sua ***quantidade de termos*** por n, $n \in \mathbb{N}^*$.

Proposição 4.2 (*Consequências da Definição de P.A*) *Se a sequência* $(a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_n,\ \cdots)$, *é uma P.A, de pelo menos três termos, então*:

a) $r = a_n - a_{n\,-\,1}$;

b) $2 \cdot a_n = \ a_{n\,-\,1} + a_{n\,+\,1}$.

Prova:

a) De fato, pela Definição 3.1, sabemos que:

$$a_n = a_{n-1} + r.$$

Logo:

$$r = a_n - a_{n-1}.$$

Ou ainda:

$$r = a_n - a_{n\,-\,1}.$$

b) De fato, pelo item (a) da Proposição 3.2, sabemos que:

$$\begin{cases} r = a_n - a_{n-1} \\ r = a_{n+1} - a_n \end{cases}.$$

Assim:

$$a_n - a_{n-1} = a_{n+1} - a_n.$$

Logo:

$$2 \cdot a_n = a_{n-1} + a_{n+1}.$$

Ou ainda:

$$2 \cdot a_n = a_{n-1} + a_{n+1}.$$

■

Definição 4.3 (*Classificação da P.A*) Uma P.A é dita:

a) ***Crescente*** quando cada um de seus termos, a partir do segundo, é maior que o seu anterior (ou antecedente).

b) ***Constante*** quando cada um de seus termos, a partir do segundo, é igual ao seu anterior (ou antecedente).

c) ***Decrescente*** quando cada um de seus termos, a partir do segundo, é menor que o seu anterior (ou antecedente).

Proposição 4.4 (*Classificação da P.A*) *Dada a P.A* $(a_1, a_2, \cdots, a_n)$, *de razão* r, *tem-se*:

a) *Se* $r > 0$, *então a P.A é crescente.*

b) *Se* $r = 0$, *então a P.A é constante.*

c) *Se* $r < 0$, *então a P.A é decrescente.*

Prova:

a) Queremos provar que $a_n > a_{n-1}$. De fato, pelo item (a) da Proposição 3.2, sabemos que:

$$r = a_n - a_{n-1}. \tag{4.1}$$

Da hipótese, temos:

$$r > 0. \tag{4.2}$$

Assim, de **(4.1)** e de **(4.2)**, segue que:

$$a_n - a_{n-1} > 0.$$

Logo:

$$a_n > a_{n-1}.$$

b) Queremos provar que $a_n = a_{n-1}$. De fato, pelo item (a) da Proposição 3.2, sabemos que:

$$r = a_n - a_{n-1}. \quad \textbf{(4.3)}$$

Da hipótese, temos:

$$r = 0. \quad \textbf{(4.4)}$$

Assim, de **(4.3)** e de **(4.4)**, segue que:

$$a_n - a_{n-1} = 0.$$

Logo:

$$a_n = a_{n-1}.$$

c) Queremos provar que $a_n < a_{n-1}$. De fato, pelo item (a) da Proposição 3.2, sabemos que:

$$r = a_n - a_{n-1}. \quad \textbf{(4.5)}$$

Da hipótese, temos:

$$r < 0. \quad \textbf{(4.6)}$$

Assim, de **(4.5)** e de **(4.6)**, segue que:

$$a_n - a_{n-1} < 0.$$

Logo:

$$a_n < a_{n-1}.$$

■

Teorema 4.5 (***Termo Geral da P.A***) *Se a sequência* $(a_1,\ a_2, \cdots,\ a_n)$ *é uma P.A, de razão* r, *então, seu n-ésimo termo, denotado por* a_n, *é igual a*:

$$a_n = a_1 + (n-1) \cdot r.$$

Prova: Pela Definição 4.1, sabemos que:

$$\begin{cases} a_2 = a_1 + r \\ a_3 = a_2 + r \\ a_4 = a_3 + r \\ a_5 = a_4 + r \\ \ \vdots \qquad \vdots \\ a_{n-1} = a_{n-2} + r \\ a_n = a_{n-1} + r \end{cases} . \quad \textbf{(4.7)}$$

Daí, somando, membro a membro, as $n-1$ igualdades de **(4.7)**, obtemos:

$$a_2 + a_3 + a_4 + \cdots + a_{n-1} + a_n = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \cdots + a_{n-1} + (n-1)\cdot r. \qquad \textbf{(4.8)}$$

Analisando o primeiro e o segundo membro de **(4.8)**, note que, a parcela $\boldsymbol{a_n}$ só consta no primeiro membro e que as parcelas $\boldsymbol{a_1}$ e $\boldsymbol{(n-1)\cdot r}$ só constam no segundo membro e todas as demais parcelas são comuns ao primeiro e ao segundo membro. Logo, cancelando os termos iguais de ambos os membros, concluímos que:

$$a_n = a_1 + (n-1)\cdot r.$$

■

Corolário 4.6 (***Generalização da Fórmula do Termo Geral da P.A***) *Se a sequência* $(a_1, a_2, \cdots, a_n)$ *é uma P.A, de razão* r*, e* a_p *é um termo qualquer dessa P.A tal que* $n \geq p$, *então, seu n-ésimo termo, denotado por* a_n*, é igual a*:

$$a_n = a_p + (n-p)\cdot r.$$

Prova: Do Teorema 4.5, sabemos que:

$$a_p = a_1 + (p-1)\cdot r = a_1 + p\cdot r - r \qquad \textbf{(4.9)}$$

e que

$$a_n = a_1 + (n-1)\cdot r = a_1 + n\cdot r - r \qquad \textbf{(4.10)}$$

Isolando $\boldsymbol{a_1}$ em **(4.9)**, obtemos:

$$a_1 = a_p - p\cdot r + r. \qquad \textbf{(4.11)}$$

Agora, admitindo que $n \geq p$ e substituindo **(4.11)** em **(4.10)**, temos:

$$a_n = a_p - p\cdot r + r + n\cdot r - r. \qquad \textbf{(4.12)}$$

Logo, no segundo membro de **(4.12)**, cancelando os termos iguais e colocando r em evidência, concluímos que:

$$a_n = a_p + (n-p)\cdot r.$$

■

Definição 4.7 (***Interpolação de Meios Aritméticos***) O processo de inserir termos entre dois números de tal forma que a sequência obtida seja uma P.A é chamado de interpolação de meios aritméticos.

Ao inserir k meios aritméticos entre dois números, digamos, x e y, a progressão aritmética obtida terá $k+2$ termos e sua razão, denotada por r, de acordo com o Teorema 4.5, será igual a:

$$r = \frac{y-x}{k+1}.$$

Lema 4.8 *Se* a_k *e* $a_{n-(k-1)}$ *são dois termos de uma dada P.A,* $n > k$*, cuja soma de seus índices é igual* $n+1$*, e* a_p *e* $a_{n-(p-1)}$, $n > p$*, são outros dois termos dessa mesma P.A, cuja soma de seus índices também é igual* $n+1$*, então*:

$$a_k + a_{n-(k-1)} = a_p + a_{n-(p-1)} = 2a_1 + (n-1)\cdot r.$$

Prova: Do Teorema 3.5, sabemos que:

$$a_k = a_1 + (k-1)\cdot r = a_1 + k\cdot r - r \qquad \textbf{(4.13)}$$

e que

$$a_{n-(k-1)} = a_1 + (n-k+1-1)\cdot r = a_1 + n\cdot r - k\cdot r. \qquad \textbf{(4.14)}$$

Somando **(4.13)** e **(4.14)**, obtemos:

$$a_k + a_{n-(k-1)} = 2a_1 + n\cdot r - r. \qquad \textbf{(4.15)}$$

Logo, colocando r em evidência em **(4.15)**, segue que:

$$a_k + a_{n-(k-1)} = 2a_1 + (n-1)\cdot r. \qquad \textbf{(4.16)}$$

Analogamente, do Teorema 3.5, sabemos que:

$$a_p = a_1 + (p-1)\cdot r = a_1 + p\cdot r - r \qquad \textbf{(4.17)}$$

e que

$$a_{n-(p-1)} = a_1 + (n-p+1-1)\cdot r = a_1 + n\cdot r - p\cdot r. \qquad \textbf{(4.18)}$$

Somando **(4.17)** e **(4.18)**, obtemos:

$$a_p + a_{n-(p-1)} = 2a_1 + n\cdot r - r. \qquad \textbf{(3.19)}$$

Logo, colocando r em evidência em **(4.19)**, segue que:

$$a_p + a_{n-(p-1)} = 2a_1 + (n-1)\cdot r. \qquad \textbf{(4.20)}$$

Portanto, de **(4.16)** e de **(4.20)**, concluímos que:

$$a_k + a_{n-(k-1)} = a_p + a_{n-(p-1)} = 2a_1 + (n-1)\cdot r.$$

■

O Lema 4.8 diz que a soma de quaisquer dois termos, de uma P.A, equidistantes de seus extremos é igual à soma dos extremos. Outra forma, bem mais simples, de verificar a veracidade do Lema 4.8, é observar que dado uma P.A $(a_1,\ a_2, \cdots,\ a_n)$, tem-se:

$$(a_1 + a_n) = (a_2 + a_{n-1}) = (a_3 + a_{n-2}) = \quad \cdots \quad = \left(a_p + \ a_{n-(p-1)}\right),\ n > p,$$

pois, ao passar de um parênteses para o seguinte, a primeira parcela aumenta r unidades e a segunda diminui de r unidades. Logo, a soma não se altera.

Teorema 4.9 (***Soma dos*** $\boldsymbol{n}$ ***Primeiros Termos da P.A***) *Se a sequência* $(a_1,\ a_2, \cdots,\ a_n)$ *é uma P.A e* S_n *é a soma de seus* n *primeiros termos, então*:

$$S_n = (a_1 + a_n) \cdot \frac{n}{2}.$$

Prova: Para fazermos a demonstração escreveremos S_n de duas formas:

$$\begin{cases} S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{n-1} + a_n \\ S_n = a_n + a_{n-1} + a_{n-2} + \cdots + a_2 + a_1 \end{cases} \qquad \textbf{(4.21)}$$

Daí, somando, membro a membro, as equações de **(4.21)**, obtemos:

$$2 \cdot S_n = \underbrace{(a_1 + a_n) + (a_2 + a_{n-1}) + (a_3 + a_{n-2}) + \cdots + (a_{n-1} + a_2) + (a_n + a_1)}_{n\ pares\ de\ termos}. \qquad \textbf{(4.22)}$$

Agora, note que, em cada um dos parênteses do segundo membro de **(4.22)** estão pares de termos da P.A cuja soma de seus índices é igual a $n + 1$. Esses pares de termos são equidistantes dos extremos da P.A. Assim, pelo Lema 4.8, a soma de cada um desses pares de termos é igual à soma dos extremos da P.A, ou seja:

$$a_1 + a_n = a_2 + a_{n-1} = a_3 + a_{n-2} = \quad \cdots \quad = a_{n-1} + a_2 = a_n + a_1.$$

Logo, como são n pares de termos, podemos reescrever **(4.22)** da seguinte forma:

$$2 \cdot S_n = (a_1 + a_n) \cdot n.$$

Portanto:

$$S_n = (a_1 + a_n) \cdot \frac{n}{2}.$$

■

5. P.G, UMA ABORDAGEM TEÓRICA

Neste capítulo, apresentamos toda a teoria referente ao conteúdo de P.G. Os conteúdos abordados neste capítulo foram baseados nas referências [5], [6], [7], [8] e [10].

Definição 5.1 (***Progressão Geométrica***) Chama-se de Progressão Geométrica ou simplesmente de P.G, toda sequência em que cada um de seus termos, a partir do segundo, é igual ao anterior (ou antecedente) multiplicado por um número constante chamado de razão da P.G.

Representamos os termos de uma P.G por $(\boldsymbol{a_1},\ \boldsymbol{a_2}, \cdots,\ \boldsymbol{a_n})$, o seu ***n-ésimo*** termo por a_n, a sua ***razão*** por q e a sua ***quantidade de termos*** por n, $n \in \mathbb{N}^*$

Proposição 5.2 (***Consequências da Definição de P.G***) *Se a sequência* $(a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_n,\ \cdots)$ *é uma P.G, de pelo menos três termos, em que* $a_1 \neq 0$ e $q \neq 0$, *então*:

a) $q = \dfrac{a_n}{a_{n-1}}$.

b) $(a_n)^2 = (a_{n-1}) \cdot (a_{n+1})$.

Prova:

a) De fato, pela Definição 4.1, sabemos que:

$$a_n = a_{n-1} \cdot q.$$

Logo, considerando que $a_1 \neq 0$ e $q \neq 0$, concluímos que:

$$q = \frac{a_n}{a_{n-1}}\ .$$

b) De fato, considerando que $a_1 \neq 0$ e $q \neq 0$, pelo item (a) da Proposição 5.2, sabemos que:

$$\begin{cases} q = \dfrac{a_n}{a_{n-1}} \\[2ex] q = \dfrac{a_{n+1}}{a_n} \end{cases}.$$

Assim:

$$\frac{a_n}{a_{n-1}} = \frac{a_{n+1}}{a_n}. \qquad \textbf{(5.1)}$$

Logo, fazendo o produto dos meios pelos extremos em **(5.1)**, concluímos que:

$$(a_n)^2 = (a_{n-1}) \cdot (a_{n+1}).$$

■

Definição 5.3 (*Classificação de uma P.G*) Uma P.G é dita:

a) ***Crescente*** quando cada um de seus termos, a partir do segundo, é maior que o seu anterior (ou antecedente).

b) ***Constante*** quando cada um de seus termos, a partir do segundo, é igual ao seu anterior (ou antecedente).

c) ***Decrescente*** quando cada um de seus termos, a partir do segundo, é menor que o seu anterior (ou antecedente).

d) ***Alternada*** quando cada um de seus termos, a partir do segundo, tem sinal contrário ao do seu anterior (ou antecedente).

e) ***Estacionária*** quando o seu primeiro termo é diferente de zero, mas todos os demais termos são iguais à zero.

Proposição 5.4 (*Classificação de uma P.G*) *Dada a P.G* $(a_1, a_2, \cdots, a_n)$, *de razão q, tem-se*:

a) *Se*:

$$a_1 > 0 \text{ e } q > 1 \quad \text{ou} \quad a_1 < 0 \text{ e } 0 < q < 1,$$

então a P.G é crescente.

b) *Se*:

$$a_1 = 0 \quad \text{ou} \quad q = 1,$$

então a P.G é constante.

c) *Se*:

$$a_1 < 0 \quad \text{e} \quad q > 1 \qquad \text{ou} \qquad a_1 > 0 \quad \text{e} \quad 0 < q < 1,$$

então a P.G é decrescente.

d) Se:

$$q < 0,$$

então a P.G é alternada.

e) Se:

$$a_1 < 0 \quad \text{e} \quad q = 0 \qquad \text{ou} \qquad a_1 > 0 \quad \text{e} \quad q = 0,$$

então a P.G é estacionária.

Prova:

a) Queremos provar que $a_n > a_{n-1}$. Para isto iremos fazer a demonstração para cada umas das duas hipótese separadamente:

1ª Hipótese: $a_1 > 0$ e $q > 1$

Do item (a) da Proposição 5.2 e da hipótese que $a_1 > 0$ e $q > 1$, temos:

$$q = \frac{a_n}{a_{n-1}} > 1. \qquad \textbf{(5.2)}$$

Agora, note que é uma consequência imediata dessa 1ª hipótese que todos os termos da P.G são positivos. Assim, podemos multiplicar ambos os membros da inequação **(5.2)** por a_{n-1}, com isso, concluímos que:

$$a_n > a_{n-1}.$$

Logo, pela Definição 5.3 (a), a P.G é crescente.

2ª Hipótese: $a_1 < 0$ e $0 < q < 1$

Do item (a) da Proposição 5.2 e da nossa 2ª hipótese, temos:

$$0 < q = \frac{a_n}{a_{n-1}} < 1. \qquad \textbf{(5.3)}$$

Agora, note que é uma consequência imediata dessa 2ª hipótese que todos os termos da P.G são negativos. Assim, ao multiplicarmos ambos os membros da inequação **(5.3)** por a_{n-1} devemos inverter o sinal desse inequação, com isso, concluímos que:

$$0 > a_n > a_{n-1}.$$

Ou seja:

$$a_n > a_{n-1}.$$

Logo, pela Definição 5.3 (a), a P.G é crescente.

b) Queremos provar que $a_n = a_{n-1}$. Para isto iremos fazer a demonstração para cada hipótese separadamente:

1ª Hipótese: $a_1 = 0$

Da Definição 5.1, note que, para todo número real q (razão da P.G), temos:

$$\begin{cases} a_2 = a_1 \cdot q = 0 \cdot q = 0 \\ a_3 = a_2 \cdot q = 0 \cdot q = 0 \\ a_4 = a_3 \cdot q = 0 \cdot q = 0 \\ \vdots \\ a_n = a_{n-1} \cdot q = 0 \cdot q = 0 \end{cases}.$$

Ou seja:

$$a_1 = a_2 = a_3 = a_4 = \cdots = a_n = 0.$$

Logo, pela Definição 5.3 (b), a P.G é constante.

2ª Hipótese: $q = 1$

Da Definição 5.1, note que:

$$\begin{cases} a_2 = a_1 \cdot q = a_1 \cdot 1 = a_1 \\ a_3 = a_2 \cdot q = a_1 \cdot 1 = a_1 \\ a_4 = a_3 \cdot q = a_1 \cdot 1 = a_1 \\ \vdots \\ a_n = a_{n-1} \cdot q = a_1 \cdot 1 = a_1 \end{cases}.$$

Ou seja:

$$a_1 = a_2 = a_3 = a_4 = \cdots = a_n.$$

Logo, pela Definição 5.3 (b), a P.G é constante.

c) Queremos provar que $a_n < a_{n-1}$. Para isto iremos fazer a demonstração para cada hipótese separadamente:

1ª Hipótese: $a_1 < 0$ e $q > 1$

Do item (a) da Proposição 5.2 e da hipótese que $q > 1$, temos:

$$q = \frac{a_n}{a_{n-1}} > 1. \quad \textbf{(5.4)}$$

Agora, note que é uma consequência imediata da nossa 1ª hipótese que todos os termos da P.G são negativos. Assim, ao multiplicarmos ambos os membros da inequação **(5.4)** por a_{n-1} devemos inverter o sinal dessa inequação, com isso, concluímos que:

$$a_n < a_{n-1}.$$

Logo, pela Definição 5.3 (c), a P.G é decrescente.

2ª Hipótese: $a_1 > 0$ e $0 < q < 1$

Do item (a) da Proposição 5.2 e da hipótese que $0 < q < 1$, temos:

$$0 < \frac{a_n}{a_{n-1}} < 1. \quad \textbf{(5.5)}$$

Agora, note que é uma consequência imediata dessa nossa 2ª hipótese que todos os termos da P.G são positivos. Assim, podemos multiplicar ambos os membros da inequação **(4.5)** por a_{n-1}, com isso, concluímos que:

$$0 < a_n < a_{n-1}.$$

Ou seja:

$$a_n < a_{n-1}.$$

Logo, pela Definição 5.3 (c), a P.G é decrescente.

d) Por hipótese, sabemos que $q < 0$ e queremos provar que a_n e a_{n-1} têm sinais opostos. De fato, pela Definição 5.1, temos:

$$a_n = a_{n-1} \cdot q.$$

Assim, se $a_{n-1} > 0$, então, como, por hipótese $q < 0$, segue que $a_n < 0$. Se $a_{n-1} < 0$, então, como por hipótese $q < 0$, segue que $a_n > 0$. Logo, em qualquer dos caso possíveis, a_n e a_{n-1} têm sinais opostos e, portanto, pela Definição 5.3 (d), a P.G é alternada.

e) Por hipótese, temos:

$$a_1 < 0 \quad \text{e} \quad q = 0 \qquad \text{ou} \qquad a_1 > 0 \quad \text{e} \quad q = 0.$$

Queremos provar que:

$$a_1 \neq 0 \;\text{ e }\; a_2 = a_3 = a_4 = \cdots = a_n = 0.$$

Que $a_1 \neq 0$ é uma consequência direta das nossas hipóteses ($a_1 < 0$ ou $a_1 > 0$). Agora, da Definição 5.1, temos:

$$\begin{cases} a_2 = a_1 \cdot q = a_1 \cdot 0 = 0 \\ a_3 = a_2 \cdot q = a_1 \cdot 0 = 0 \\ a_4 = a_3 \cdot q = a_1 \cdot 0 = 0 \\ \quad\quad \vdots \\ a_n = a_{n-1} \cdot q = a_1 \cdot 0 = 0 \end{cases}.$$

Ou seja:

$$a_2 = a_3 = a_4 = \cdots = a_n = 0.$$

Logo:

$$a_1 \neq 0 \;\text{ e }\; a_2 = a_3 = a_4 = \cdots = a_n = 0.$$

Portanto, pela Definição 5.3 (e), a P.G é estacionária.

■

Teorema 4.5 (*Termo Geral da P.G*) *Se a sequência* $(a_1, a_2, \cdots, a_n)$ *é uma P.G, de termos não nulos e de razão* q*, então, seu n-ésimo termo, denotado por* a_n*, é igual a*:

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}.$$

Prova: Pela Definição 5.1, temos:

$$\begin{cases} a_2 = a_1 \cdot q \\ a_3 = a_2 \cdot q \\ a_4 = a_3 \cdot q \\ a_5 = a_4 \cdot q \\ \vdots \qquad \vdots \\ a_{n-1} = a_{n-2} \cdot q \\ a_n = a_{n-1} \cdot q \end{cases} . \qquad \textbf{(5.6)}$$

Daí, multiplicando, membro a membro, as $n - 1$ igualdades de **(5.6)**, obtemos:

$$(a_2 \cdot a_3 \cdot a_4 \cdot a_5 \cdot \cdots \cdot a_{n-1}) \cdot \boldsymbol{a_n} = \boldsymbol{a_1} \cdot (a_2 \cdot a_3 \cdot a_4 \cdot a_5 \cdot \cdots \cdot a_{n-1}) \cdot \boldsymbol{q^{n-1}}. \qquad \textbf{(5.7)}$$

Analisando **(5.7)**, note que o fator $\boldsymbol{a_n}$ só consta em em seu primeiro membro e que os fatores $\boldsymbol{a_1}$ e $\boldsymbol{q^{n-1}}$ só constam em seu segundo membro e todos os demais fatores são comuns ao primeiro e ao segundo membro, assim, cancelando os fatores comuns de ambos os membros de **(5.7)**, concluímos que:

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}.$$

■

Corolário 4.6 (***Generalização da Fórmula do Termo Geral de uma P.G***) *Se a sequência* $(a_1, a_2, \cdots, a_n)$ *é uma P.G, não nulos e de razão* q, *e* a_p *é um termo qualquer dessa P.G tal que* $n \geq p$, *então, seu n-ésimo termo, denotado por* a_n, *é igual a*:

$$a_n = a_p \cdot q^{n-p}.$$

Prova: Do Teorema 5.5, sabemos que:

$$a_p = a_1 \cdot q^{p-1} \qquad \textbf{(5.8)}$$

e

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}. \qquad \textbf{(5.9)}$$

Como, por hipótese, $q \neq 0$, então, isolando a_1 em **(5.8)**, obtemos:

$$a_1 = \frac{a_p}{q^{p-1}}. \qquad \textbf{(5.10)}$$

Agora, admitindo que $n \geq p$ e substituindo **(5.10)** em **(5.9)**, temos:

$$a_n = \frac{a_p}{q^{p-1}} \cdot q^{n-1}.$$

Ou ainda:

$$a_n = a_p \cdot q^{(n-1)-(p-1)} = a_p \cdot q^{n-1-p+1}.$$

Logo:

$$a_n = a_p \cdot q^{n-p}.$$

■

Definição 5.7 (***Interpolação de Meios Geométricos***) O processo de inserir termos entre dois números de tal forma que a sequência obtida seja uma P.G é chamado de interpolação de meios geométricos.

Ao inserir k meios geométricos entre dois números, digamos x e y, a progressão geométrica obtida terá $k+2$ termos e sua razão, denotada por q, de acordo com o Teorema 5.5, será igual a:

$$q = \sqrt[k+1]{\frac{y}{x}}.$$

Teorema 5.8 (***Soma dos Termos de uma P.G Finita***) *Se* $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ *é uma P.G finita, de razão* q, $q \neq -1$, *e* S_n *é a soma dos seus* n *primeiros termos, então*:

$$S_n = \frac{a_1 \cdot (1 - q^n)}{1 - q}.$$

Prova:

Temos:

$$S_n = \boldsymbol{a_1} + (a_2 + a_3 + \cdots + a_{n-1} + a_n). \qquad \textbf{(5.11)}$$

Multiplicando **(5.11)** pela razão q, $q \neq -1$, obtemos:

$$q \cdot S_n = (a_1 \cdot q + a_2 \cdot q + a_3 \cdot q + \cdots + a_{n-1} \cdot q) + \boldsymbol{a_n \cdot q}. \qquad \textbf{(5.12)}$$

Comparando o segundo membro de **(5.12)** com o segundo membro de **(5.11)**, note que a parcela $\boldsymbol{a_1}$ só consta em **(5.11)** e que a parcela $\boldsymbol{a_n \cdot q}$ só consta em **(5.12)** e todas as demais parcelas são comuns a **(5.11)** e a **(5.12)**, assim, subtraindo **(5.12)** de **(5.11)**, segue que:

$$S_n - q \cdot S_n = a_1 - a_n \cdot q. \qquad \textbf{(5.13)}$$

Como, do Teorema 5.5, sabemos que:

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}, \tag{5.14}$$

então, substituindo **(5.14)** em **(5.13)**, temos:

$$S_n - q \cdot S_n = a_1 - a_1 \cdot q^{n-1} \cdot q.$$

Ou ainda:

$$S_n - q \cdot S_n = a_1 - a_1 \cdot q^n. \tag{5.15}$$

Agora, colocando S_n em evidência no primeiro membro de **(5.15)** e colocando a_1 em evidência no segundo membro de **(5.15)**, temos:

$$S_n \cdot (1 - q) = a_1 \cdot (1 - q^n).$$

Portanto, considerando $q \neq 1$, concluímos que:

$$S_n = \frac{a_1 \cdot (1 - q^n)}{1 - q}.$$

■

Definição 5.9 (***P.G Convergente***) Toda P.G que possui infinitos termos e que seu *n-ésimo* termo tende a ser igual a zero $(a_n \cong 0)$ é chamada de P.G convergente.

Observa-se que toda P.G de infinitos termos, de razão q, em que $0 \leq |q| < 1$ é convergente.

Corolário 5.10 (***Soma dos Termos de uma P.G Convergente***) *Se* $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ *é uma P.G convergente, de razão* q*,* $0 \leq |q| < 1$*, e* S_∞ *é a soma dos seus infinitos termos, então*:

$$S_\infty = \frac{a_1}{1 - q}.$$

Prova:

Note que, se $0 \leq |q| < 1$ e a P.G possui uma quantidade n, $n \in \mathbb{N}^*$, infinita de termos, então, $q^n \cong 0$. Assim, do Teorema 5.8, temos:

$$S_n = \frac{a_1 \cdot (1 - q^n)}{1 - q}.$$

Ou seja:

$$S_\infty = \frac{a_1 \cdot (1-0)}{1-q}.$$

Logo:

$$S_\infty = \frac{a_1}{1-q}.$$

■

Outra forma de demonstrar o Corolário 5.10 seria fazer a seguinte consideração:

$$S_\infty = \boldsymbol{a_1} + (a_2 + a_3 + \cdots + a_{n-1} + a_n). \qquad \textbf{(5.16)}$$

Multiplicando **(5.16)** pela razão q, obtemos:

$$q \cdot S_\infty = (a_1 \cdot q + a_2 \cdot q + a_3 \cdot q + \cdots + a_{n-1} \cdot q) + \boldsymbol{a_n \cdot q}. \qquad \textbf{(5.17)}$$

Comparando o segundo membro de **(5.16)** com o segundo membro de **(5.17)**, note que a parcela $\boldsymbol{a_1}$ só consta em **(5.16)** e que a parcela $\boldsymbol{a_n \cdot q}$ só consta em **(5.17)** e todas as demais parcelas são comuns a **(5.16)** e a **(5.17)**, assim, subtraindo **(5.17)** de **(5.16)**, segue que:

$$S_\infty - q \cdot S_\infty = a_1 - a_n \cdot q. \qquad \textbf{(5.18)}$$

Como, por hipótese, a P.G é convergente, em que $0 \leq |q| < 1$, por conseguinte, $a_n \cong 0$, então, substituindo em **(5.18)**, temos:

$$S_\infty - q \cdot S_\infty = a_1 + 0 \cdot q. \qquad \textbf{(5.19)}$$

Agora, colocando S_∞ em evidência no primeiro membro de **(5.19)**, obtemos:

$$S_n \cdot (1-q) = a_1.$$

Portanto:

$$S_\infty = \frac{a_1}{1-q}.$$

■

6. CONSIDERAÇÕES FINAIS

Ao longo deste trabalho foi percebida, claramente, a importância da inserção da demonstração matemática como uma maneira de desenvolver nos alunos o pensamento crítico, reflexivo, organizacional e a capacidade argumentativa nas aulas de matemática. Foi possível perceber, também, que, o uso da demonstração é inerente à matemática e vai muito além da verificação da veracidade de um fato, da utilização de uma técnica. Estima-se que a demonstração é indispensável para a Educação Matemática, como demonstramos através das reflexões feitas até aqui, e que os objetivos dessa pesquisa foram alcançados. No mais, as discussões e diferentes aspectos sobre demonstração aqui abordados contribuem de alguma maneira para o processo de ensino-aprendizagem.

Vimos também que as demonstrações exercem um papel fundamental no processo de ensino-aprendizagem, pois possibilitam aos estudantes desenvolverem sua criticidade, a organizar suas ideias, a argumentar e refletir. Permite ao professor, mediador nesse processo, mostrar, através de suas aulas, que a demonstração é indissociável à matemática e vai muito além da verificação de determinada coisa, da utilização de uma determinada técnica.

Dessa forma, finalizado, consideramos que a leitura desse trabalho pode contribuir com o processo de ensino-apredizagem, uma vez que é possível usá-lo como material de apoio na elaboração de planos de aulas, ou ainda, ser usado como material de construção de oficinas matemáticas, cujo objetivo seja o de trabalhar definições formais de objetos matemáticos e demonstrações de teoremas.

REFERÊNCIAS

[1] AMADO, N.; SANCHEZ, J.; PINTO, J**. A utilização do Geogebra na demonstração matemática em sala de aula**: o estudo da reta de Euler. Bolema, Rio Claro (SP), v. 29, n. 52, pp. 637-657, 2015.

[2] ÁVILA, Geraldo Severo de Sousa.; ***Introdução à análise matemática***, Ed. 2, São Paulo, SP, Editora. Edgard Blücher Ltda, 1999.

[3] BOYER, Carl. B.; ***História da matemática***. Trad. Elza F. Gomide., São Paulo, SP, Ed. Edgard Blücher, 1974.

[4] CUNHA, João Francisco Everton.; ***Sequências e Séries: abordagem e aplicações no ensino médio*.** São Luís, MA, 2014.

[5] IEZZI, G.; DOLCE, O.; DEGENSZAJN, D.; PÉRIGO, R.; V. ALMEIDA, N.; ***Matemática Ciência e Aplicações***. Vol. 1, Ed. Saraiva, São Paulo, SP, 9ª Edição, 2016.

[6] IEZZI, G.; HAZZAN, S.; ***Fundamentos de Matemática Elementar***, Vol. 4, Ed. Atual, São Paulo, SP, 6ª Edição, 1993.

[7] LIMA, E. L.; CARVALHO, P. C. P.; WAGNER, E.; MORGADO, A. C.; ***A Matemática do Ensino Médio***, Vol. 2, Coleção do Professor de Matemática, SBM, Rio de Janeiro, R.J, 3ª Edição, 2000.

[8] PAIVA, M. R.; **Matemática: Paiva**, Vol. 1, Ed. Moderna, São Paulo, SP, 2ª Edição, 2010.

[9] RODRIGUES, M.; **A integração curricular da demonstração**. Da Investigação às Práticas, Lisboa (Portugal), v. 2, n. 2, pp. 53-77, 2012.

[10] SIGNORELLI, C. F.; ***Matemática do 2º Grau***. Vol. 2, Ed. Ática, São Paulo, SP, 2ª Edição, 1992.

[11] SINGH, S.; **O Último Teorema de Fermat**: A história do enigma que confundiu as maiores mentes do mundo durante 358 anos. 10. ed. Tradução: Jorge Luiz Calife. Rio de Janeiro; São Paulo: Record, 2004.

[12] VELOSO, E. Geometria - **Temas Actuais**. Lisboa: Instituto de Inovação Educacional, 1998.

[13] VILLIERS, M.; Papel e funções da demonstração no trabalho com o Sketchpad. **Educação e Matemática**, Lisboa, n. 62, pp. 31-36, 2001.

INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA DA PARAÍBA
Campus Campina Grande
R. Tranqüilino Coelho Lemos, 671, Dinamérica, CEP 58432-300, Campina Grande (PB)
CNPJ: 10.783.898/0003-37 - Telefone: (83) 2102.6200

Documento Digitalizado Ostensivo (Público)

Entrega da Versão final TCC e Repositório

Assunto: Entrega da Versão final TCC e Repositório
Assinado por: Lyndynalwa Kezia
Tipo do Documento: Anexo
Situação: Finalizado
Nível de Acesso: Ostensivo (Público)
Tipo do Conferência: Cópia Simples

Documento assinado eletronicamente por:

- **Lyndynalwa Kezia de Oliveira Rosa, ALUNO (201811230025) DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA - CAMPINA GRANDE**, em 14/09/2022 08:28:27.

Este documento foi armazenado no SUAP em 28/09/2022. Para comprovar sua integridade, faça a leitura do QRCode ao lado ou acesse https://suap.ifpb.edu.br/verificar-documento-externo/ e forneça os dados abaixo:

Código Verificador: 636985
Código de Autenticação: de2889808c