INSTITUTO FEDERAL DA PARAÍBA
CURSO DE ESPECIALIZAÇÃO EM MATEMÁTICA

Ricardo Cardoso de Oliveira

O Princípio Fundamental da Contagem: primando pela aplicação do conceito

Cajazeiras - PB
2022

IFPB / Campus Cajazeiras
Coordenação de Biblioteca
Biblioteca Prof. Ribamar da Silva
Catalogação na fonte: Suellen Conceição Ribeiro CRB-2218

O48p Oliveira, Ricardo Cardoso de

O Princípio Fundamental da Contagem: primando pela aplicação do conceito / Ricardo Cardoso de Oliveira. – Cajazeiras/PB: IFPB, 2022.

52f.:il.
Trabalho de Conclusão de Curso (Especialização em Matemática) - Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia da Paraíba-IFPB, Campus Cajazeiras. Cajazeiras, 2022.
Orientador(a): Prof. Me. Stanley Borges de Oliveira.

1. Matemática. 2. Contagem. 3. Análise Combinatória.

I. Oliveira, Ricardo Cardoso de. II. Titulo.

CDU: 51 O48p

O Princípio Fundamental da Contagem: primando pela aplicação do conceito

Trabalho de Conclusão de Curso submetido à Coordenação do Curso de Especialização em Matemática do Instituto Federal da Paraíba - Campus Cajazeiras, como parte dos requisitos para a obtenção do grau de Especialista em Matemática.

Orientador: Me. Stanley Borges de Oliveira

Cajazeiras - PB
2022

Ricardo Cardoso de Oliveira

O Princípio Fundamental da Contagem: primando pela aplicação do conceito

Trabalho de Conclusão de Curso submetido à Coordenação do Curso de Especialização em Matemática do Instituto Federal da Paraíba - Campus Cajazeiras, como parte dos requisitos para a obtenção do grau de Especialista em Matemática.

Aprovado em: 31/03/2022.

BANCA EXAMINADORA

Stanley Borges de Oliveira

Me. Stanley Borges de Oliveira
Instituto Federal da Paraíba -(IFPB)

João Paulo de A. Souza.

Prof. Me. João Paulo de Araújo Souza
Instituto Federal da Paraíba -(IFPB)

Jackson Tavares de Andrade

Prof. Me. Jackson Tavares de Andrade
Secretaria Estadual da Educação e Ciência e Tenologia da Paraíba -(SEECT)

Cajazeiras - PB
2022

Dedico este trabalho a todos que contribuíram direta ou indiretamente, em especial, a meu filho Rícaro Cardoso de Oliveira pela motivação e à minha mãe Joselina Bezerra de Oliveira por todo esforço dedicado à nossa educação.

“A persistência é o caminho do êxito.”
Charles Chaplin

Agradecimentos

Agradeço ao grande criador pelo dom da vida, a minha família, em especial, a meus pais: Francisco Cardoso Leite e Joselina Bezerra de Oliveira, por terem dado seu melhor de forma contínua ao longo de todo nosso desenvolvimento, a todos meus amigos, de maneira especial, a Jackson, Airton e Anielma pelas contribuições e motivação, ao IF por nos ofertar um curso desse nível e a todos os professores, em especial, ao orientador Stanley Borges de Oliveira.

Resumo

Este trabalho apresenta o Princípio Fundamental da Contagem de forma detalhada, primando por uma linguagem clara e objetiva, garantindo uma aprendizagem mais consistente e menos mecânica. Também enfatiza a importância histórica deste conhecimento, a enorme presença em concursos e as dificuldades de aprendizagem apresentadas por muitos estudantes. Inicia com abordagens históricas, pois é de grande relevância conhecer motivações que, ao longo do tempo, antecederam a sistematização desse importante conhecimento. No tocante às dificuldades que muitos estudantes apresentam em diferenciar cada caso especial (fatorial, permutações, arranjos e combinações), propõe uma abordagem menos técnica e mais conceitual, apresentando as demonstrações do modelo matemático correspondente a cada caso especial abordado e, ao invés de utilizar um modelo matemático pronto, que por si só muitas vezes não é suficiente para resolver um determinado problema, opta por aplicar o princípio multiplicativo diretamente ao problema, pois é um conteúdo em que há sempre espaço para a criatividade durante a resolução de diversos de seus problemas, além de estimular o instinto investigativo do leitor. Portanto, ir inserindo outros termos ao princípio multiplicativo de forma gradativa e seguindo as etapas de resolução, valoriza a compreensão do problema e consequentemente eleva o nível de conhecimento.

Palavras-Chave: Matemática, Análise Combinatória, Princípio Fundamental da Contagem.

Abstract

This work presents the Fundamental Principle of couting is detail, striving for a clear and objective language, ensuring a more consistent and less mechanical learning. It also emphasizes the historical importance of this knowledge, the huge presence in competitions and the learning difficulties presented by many students. It starts with historical approaches, as it is of great importance to know the motivations that, over time preceded the systematization of this important knowledge. Regarding the difficulties that many students present in differentiating each special case (factorial, permutation, arrangements and combinations), it proposes a less technical and more conceptual approach, presenting the demonstrations of the mathematical model corresponding to each special case approached and, instead of using a ready-made mathematical model, which by itself is often not enough to solve a given problem, chooses to apply the multiplicative principle directly to the problem, as it is content in which there is always room for creativity when solving several of its problems, in addittion to stimulating the reader's investigating instintic. Therefore, gradually inserting other terms to the multiplicative principle and following the resolutions steps enhances the understanding of the problem and consequently raises the level of knowledge.

KeyWords: Mathematics, Combinatorial Analyses, Fundamental Couting Principle .

Lista de Figuras

Sumário

INTRODUÇÃO

O Princípio Fundamental da Contagem - PFC é um conceito relevante da Análise Combinatória, sendo este um dos responsáveis pelo surgimento de outros desse campo da Matemática, como os modelos matemáticos de fatorial, combinações, arranjos e permutações. Dessa forma, é fundamental compreender esse princípio para a resolução de situações que envolvem esses conceitos.

É necessário conhecer bem esses modelos antes de aplicá-los, pois muitos problemas apresentam dubiedade de sentido, que para Morgado; Carvalho, J.; Carvalho, P. e Fernandez (1991, p. 2) "esse é um dos encantos desta parte da Matemática, em que problemas fáceis de enunciar revelam-se por vezes difíceis, exigindo uma alta dose de criatividade para sua solução". Os mesmos autores ainda afirmam que "é verdade que a solução de um problema combinatório exige quase sempre engenhosidade e a compreensão plena da situação descrita pelo problema".

Assim, o processo de ensino e aprendizagem desses modelos vai muito além de memorizá-los e aplicá-los, pois não fornece garantia de resolver certos problemas. Em contrapartida, Samuel Hazan (2013, p. 15), diz que "deduzir fórmulas que permitam a contagem dos mesmos, em cada caso particular a ser estudado pode ser mais fácil e seguro".

Nessa perspectiva, diante das dificuldades apresentadas por muitos estudantes e professores em resolver problemas combinatórios, percebe-se a necessidade de apresentar o PFC de maneira menos mecânica.

Portanto, neste trabalho, apresentamos resoluções de questões sempre utilizando o PFC, juntamente com estratégias que proporcione a compreensão plena da resolução do problema. Tais estratégias, segundo Lima, Carvalho, Wagner e Morgado (2016, p. 82), são:

> 1. **Postura.** Devemos sempre nos colocar no papel da pessoa que deve fazer a ação solicitada pelo problema e ver que decisão devemos tomar.
> 2. **Divisão.** Devemos, sempre que possível, dividir as decisões a serem tomadas em decisões mais simples.
> 3. **Não adiar as dificuldades.** Pequenas dificuldades adiadas costumam se transformar em imensas dificuldades. Se uma das decisões a serem tomadas for mais restrita que as demais, essa é a decisão que deve ser tomada em primeiro lugar.

Diante do exposto, temos a seguinte indagação: qual a relevância do Princípio Fundamental da Contagem, para o entendimento de conceitos e resolução de problemas em Análise Combinatória, na formação básica do estudante?

A fim de responder essa pergunta, traçamos os seguintes objetivos:

Objetivo geral: Propor a aplicação conceitual do Princípio Fundamental da Contagem diretamente no entendimento dos conceitos e na resolução de problemas no que tange à Análise Combinatória básica.

Objetivos específicos:

- Fazer uma breve revisão histórica da evolução e criação do Princípio Fundamental da Contagem e Análise Combinatória.
- Apresentar casos particulares do Princípio Fundamental da Contagem.
- Resolver problemas a partir do PFC.

Nesta pesquisa, traçamos um breve histórico de possíveis motivações que despertaram em grandes matemáticos, como: Girolamo Cardano, Fermat, Pascal e Leibniz o interesse por esta área de conhecimento. Como também, um breve histórico acerca do surgimento da Análise Combinatória, visando compreender melhor as motivações que levaram a sistematização desse importante conhecimento.

Em seguida abordamos modelos matemáticos comumente utilizados na Análise Combinatória contida nos currículos do Ensino Médio. Mostrando de maneira enfática que fatorial, permutações, arranjos e combinações são casos particulares do Princípio Multiplicativo. Que as fórmulas não devem ser percebidas apenas como modelos matemáticos, os elementos que as compõem têm funções específicas dentro do processo de resolução dos problemas, que são fundamentais no processo de ensino e aprendizagem.

Metodologia

Este trabalho teve como norteamento uma abordagem qualitativa, pois buscamos compreender como o Princípio Fundamental da Contagem pode contribuir no ensino da análise combinatória básica, em virtude das dificuldades apresentadas comumente por alguns estudantes.

A pesquisa possui uma natureza aplicada, visto que almejou gerar conhecimentos e estratégias para o entendimento dos conceitos e resoluções de problemas da Análise Combinatória a partir do Princípio Fundamental da Contagem.

Quanto aos objetivos da pesquisa classifica-se em exploratórios, uma vez que objetivou conquistar maior familiaridade com o tema, propondo estratégias que visam facilitar a internalização desse importante conhecimento.

Por fim, para a elaboração do trabalho, foi feita uma pesquisa com procedimentos bibliográficos, pois foi realizado um levantamento de referências teóricas em sites e livros adotados no Ensino Médio e Superior, tais como livros de história da matemática, em artigos, revistas e portais. Para em seguida, digitalizarmos e resolvermos os problemas de acordo com nossa proposta.

1. UM BREVE HISTÓRICO SOBRE A ORIGEM DA ANÁLISE COMBINATÓRIA

Neste capítulo apresentamos um breve aparato histórico sobre a origem da Análise Combinatória contemplando alguns fatos que motivaram o seu surgimento, o qual foi advindo de inquietações humanas bastante antigas e foi estudado por importantes personalidades ao longo de seu desenvolvimento. Abordamos também a importância da história matemática no processo de ensino-aprendizagem. Para a elaboração desse capítulo, utilizamos como referências: BOYER (1974), BIANCHI (2006), BRASIL (1999), D'AMBROSIO (1996), EVES (2004) e HAZAN (2013).

1.1. A CONTRIBUIÇÃO DA HISTÓRIA MATEMÁTICA NO ENSINO DA ANÁLISE COMBINATÓRIA

A história da matemática mostra que ela tem um processo histórico a partir das necessidades humanas, seja na cultura; alimentação; sua vida cotidiana ou pelo simples prazer da curiosidade. Dessa forma, contribui na contextualização e interdisciplinaridade no ensino da Matemática, estimulando, assim, a aprendizagem da Matemática por parte dos discentes. Segundo D'Ambrosio (1996, p. 29 e 30), "a história da matemática é um elemento fundamental para se perceber como teorias e práticas matemáticas foram criadas, desenvolvidas e utilizadas num contexto específico de sua época."

Diversos autores abordam a importância da utilização da história da matemática no ensino da Matemática. Os argumentos para sua integração, segundo Bianchi (2006, p. 35), são:

> - Compreensão da natureza e das características específicas do pensamento matemático em relação a outros tipos de conhecimento, isto é, a história como um elo entre a matemática e outros sujeitos: A Matemática com outras disciplinas, a interdisciplinaridade.
> - Seleção de tópicos, problemas e episódios considerados motivadores da aprendizagem matemática. A Matemática é uma disciplina dedutivamente orientada. Seu desenvolvimento histórico explica que a dedução vem depois de certa maturidade. Ela foi sempre construída a partir de conhecimentos prévios.
> - Possibilita a desmistificação da matemática e a desalienação de seu ensino. A Matemática é um desenvolvimento humano e não um sistema de verdades rígidas. A matemática não é fruto de uma estrutura rígida, mas um processo intelectual humano contínuo, ligado a outras ciências, culturas e sociedades. (Apud TZANAKIS e ARCAVI, 2000; MIGUEL e MIORIM, 2004)

É fundamental que o estudante perceba os conhecimentos matemáticos como uma construção humana a partir de suas necessidades e inquietações, não como um conjunto de fórmulas soltas e sem aplicabilidades, em especial a Análise Combinatória como veremos neste trabalho. Os conhecimentos dessa área da Matemática são muito úteis e práticos no desenvolvimento de problemas de contagem, principalmente os mais complexos.

Os conhecimentos da Análise Combinatória não devem ser tratados como mero conjunto de regras, pois tem como fundamento sua natureza investigativa lógica, que proporciona ao estudante a oportunidade de desenvolver habilidades e utilizar diversos instrumentos para resolver problemas matemáticos. Não basta o estudante diferenciar Arranjos de Combinações, a Análise Combinatória é fundamental dentro do estudo, principalmente de estatística e de probabilidade (dois conhecimentos presentes em nosso cotidiano).

É importante abordar a história da matemática, para que o estudante perceba a Matemática como ferramenta que contribui com o desenvolvimento e necessidades humanas, eliminando assim a ideia distorcida que a matemática é apenas um conjunto de regras utilizadas para resolverem problemas abstratos.

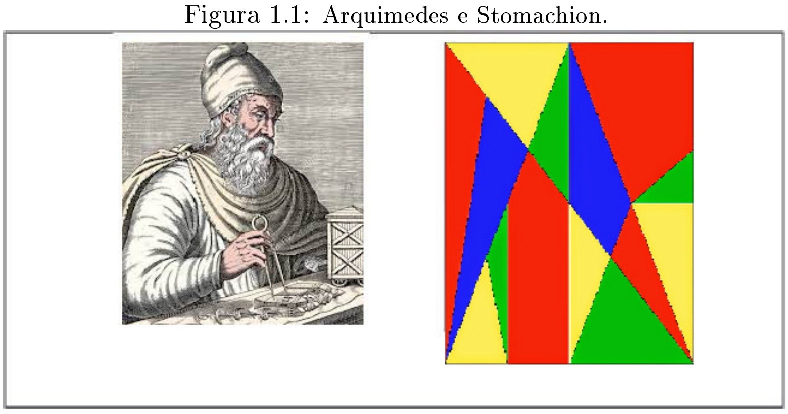
1.2. OS PRIMEIROS TRABALHOS DE CONTAGEM

A necessidade de contar é muito presente no cotidiano das pessoas, indo de casos simples até uns de maiores complexidades. A Análise Combinatória é o ramo da Matemática que estuda e apresenta métodos rigorosos para se determinar o número de possibilidades de um evento. Como define Hazzan (2013, p. 1) "A Análise Combinatória visa desenvolver métodos que permitam contar o número de elementos de um conjunto, sendo estes elementos, **agrupamentos formados sob certas condições**."

Os processos de contagem surgiram de acordo com as necessidades humanas ou por curiosidade de algumas pessoas. Não se tem por exatidão o início da contagem, mas imagina-se que os primeiros povos tinham sua alimentação a base de vegetais e carnes, advindas da colheita, caça e pesca, já percebemos a necessidade de contagem, que de maneira dinâmica vem se desenvolvendo.

Um dos primeiros trabalhos de contagem mais complexos e engenhoso a surgir de forma mais sistematizada que se tem registrado, foi o Stomachion, palavra derivada do grego stomachos, em português, estômago, uma das criações do grande Arquimedes de Siracusa (287 a.c. – 212 a.c), semelhante ao Tangran, porém formados por 14 peças que quando perfeitamente encaixadas formam um quadrado, ver a Figura 1.1.

Figura 1.1: Arquimedes e Stomachion.



Fonte: (ALAMY, c. 2021) e (BAIÃO, 2015)

Estando embaralhado ele exigirá muita genialidade para ser montado utilizando todas as peças e formando um quadrado, todavia os objetivos de Arquimedes iam além disso. Ele buscava determinar com exatidão e clareza a quantidade de quadrados distintos que poderiam ser formados utilizando todas as peças do Stomachion e esse objetivo só fora alcançado mais de 2000 anos depois de sua morte, por um grupo de professores da Universidade de Stanford, na California, sendo 17152 soluções totais e, 268 desconsiderando as simétricas.

Outro período em que a combinatória ganhou destaque foi no início do século XVI, impulsionado pelos jogos de azar. Grandes matemáticos, envolvidos pelos mistérios dos jogos ou até numa tentativa de ganhar dinheiro, se interessaram em compreender e propor explicações sobre as chances de ganhar ou perder um jogo sob determinadas condições.

Gerolamo Cardano (1501-1576) foi um italiano que se destacou em diversas áreas do conhecimento como: medicina, astrologia, filosofia, religião, música, física e matemática. Desde de jovem foi atraído pelos mistérios dos jogos de azar, sendo favorecido por sua genialidade nas áreas de contagem e probabilidade.

> Um dos grandes "pecados" atribuídos a Cardano foi o vício do jogo. De fato, em sua autobiografia, De propria vita, ele confessa ter jogado diariamente: xadrez por mais de quarenta anos e dados por mais de vinte cinco. Deve-se levar em conta, porém, que no século XVI o jogo era o passatempo dominante. E, como se jogava a dinheiro, iniciou-se nessa atividade ainda estudante universitário para prover sua manutenção. (HAZZAN, 2013, p. 57)

No século XVII, Pierre de Fermat (1601-1665) foi outro que usufruíra da Matemática em suas horas vagas, prova disso são suas relevantes descobertas e contribuições dentro do conhecimento matemático. No que tange à Análise Combinatória, vamos citar o caso em que ele detalhou as chances possíveis entre dois jogadores.

> Fermat discutiu o caso em que o jogador A precisava de dois pontos para ganhar e o jogador B de 3. Eis a solução de Fermat para este caso particular. Como é claro que mais quatro partidas decidem o jogo, seja a uma partida ganha por A e seja b uma partida ganha por B; consideremos então os dezesseis arranjos completos, de ordem 4, das letras a e b:
>
> | | | | |
> |---|---|---|---|
> | aaaa | aaab | abba | bbab |
> | baaa | bbaa | abab | babb |
> | abaa | baba | aabb | abbb |
> | aaba | baab | bbba | bbbb |
>
> os casos em que a aparece duas ou mais vezes são favoráveis a A e há onze deles. Os casos em que b aparece três ou mais vezes são favoráveis a B e há cinco deles. (EVES, 2004, p. 393)

Um contemporâneo de Fermat, que merece grande destaque nessa área de conhecimento é Blaise Pascal (1623 – 1662) que se destacou em diversas áreas do conhecimento, entre elas, a Filosofia e a Matemática. Ele mostrou que a solução para esse problema descrito por Fermat pode ser obtida fazendo uso do seu triângulo aritmético.

> No caso geral, em que A precisa de m pontos para ganhar e B precisa de n, escolhe-se a $(m+n)-$ésima diagonal do triângulo de Pascal. Calcula-se então a soma α dos primeiros n números da diagonal considerada e a soma β de seus últimos m números. Então deve-se dividir as apostas segundo a razão $\dfrac{\alpha}{\beta}$. (EVES, 2004, p. 394)

De fato, como o jogador A necessita de dois pontos e o B de três, observando a 5ª linha do triângulo aritmético a seguir, veremos que a soma de seus dois primeiros elementos é 5 e de seus três últimos é 11, obtendo assim, o mesmo resultado proposto por Fermat.

$$
\begin{array}{llllll}
1 \\
1 & 1 \\
1 & 2 & 1 \\
1 & 3 & 3 & 1 \\
1 & 4 & 6 & 4 & 1 \\
1 & 5 & 10 & 10 & 5 & 1 \\
\ldots
\end{array}
$$

Pascal dando continuidade aos estudos de Cardano, inclusive fazendo uso do triângulo aritmético, criado cerca de 600 anos antes de Pascal, descobriu propriedades desse triângulo tão relevantes que passou a ser chamado triângulo de Pascal.

> Enquanto Pascal em 1654 trabalhava em sua As cônicas, seu amigo, o Chevalier de Mèrè, propôs-lhe questões como esta: em oito lances de um dado um jogador deve tentar lançar um, mas depois de três tentativas infrutíferas, o jogador é interrompido. Como deveria ele ser indenizado? Pascal escreveu a Fermat sobre isto e a correspondência entre eles foi o ponto de partida real da moderna teoria das probabilidades, as ideias de Cardano de um século antes tendo sido esquecidas. Embora nem Pascal nem Fermat escrevessem seus resultados, Huygens em 1657 publicou um pequeno folheto. De ratiociniis in ludo aleae (Sobre o raciocínio em jogos de dados) que foi estimulada pela correspondência entre os franceses. (BOYER, 1974, p. 265)

O primeiro trabalho do filósofo e matemático alemão Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716) foi uma tese em Análise Combinatória em 1666 intitulada Dissertatio de Arte Combinatória, tinha como objetivo a criação de uma linguagem universal simples, que facilitaria a comunicação entre as pessoas tornando-as mais felizes.

No século seguinte outro grande matemático que também foi envolvido por essa área de conhecimento foi Leonhard Euler (1707-1783), onde ele apresenta em algumas de suas obras a importância do Princípio Multiplicativo dentro do estudo de probabilidade, como pode-se observar na citação a seguir.

> Segundo os cálculos de Euler, publicados nas Memórias da Academia de Berlim para 1751, um pagamento de 350 coroas deveria comprar para um recém-nascido uma anuidade de 100 coroas a começar dos vinte anos e continuando pelo resto da vida. Entre os problemas de loteria que ele publicou na mesma revista do ano de 1765, o seguinte é o mais simples. Suponha que n bilhetes são numerados consecutivamente de 1 a n e que três bilhetes são tirados ao acaso. Então a probabilidade que três números consecutivos sejas tirados é
>
> $$\frac{2 \cdot 3}{n(n-1)}.$$
>
> A probabilidade que dois números consecutivos (mas não três) sejam tirados é
>
> $$\frac{2 \cdot 3(n-3)}{n(n-1)}.$$
>
> E a probabilidade que não sejam tirados números consecutivos é
>
> $$\frac{(n-3)(n-4)}{n(n-1)}.$$
>
> Para a solução não são necessários conceitos novos, mas, como era de se prever, Euler aqui contribuiu com notações, como fizera com outros assuntos. Escreveu que achava útil representar a expressão
>
> $$\frac{p \cdot (p-1) \ldots (p-q+1)}{1 \cdot 2 \ldots q}.$$
>
> Por
>
> $$\left\lfloor \frac{p}{q} \right\rfloor.$$
>
> O que é essencialmente equivalente a notação moderna
>
> $$\binom{p}{q}.$$
>
> (BOYER, 1974, p. 334)

Diante do que foi apresentado, percebemos que as necessidades de compreender e determinar probabilidades em jogos de azar, contribuíram significativamente com o surgimento da Análise Combinatória. A necessidade de calcular o número de possibilidades existentes nesses jogos incentivou o estudo dos métodos de contagem, os quais permitam contar de uma forma indireta o número de elementos de um conjunto, estando esses elementos agrupados sob certas condições. Dentre um desses métodos é o Princípio Fundamental da Contagem, o qual trabalharemos no Capítulo 2.

2. EVIDENCIANDO O PRINCÍPIO FUNDAMENTAL DA CONTAGEM

Este capítulo é uma abordagem metodológica que consiste numa sugestão que visa amenizar as dificuldades apresentadas no processo ensino aprendizagem da Análise Combinatória no Ensino Médio. Utilizamos estratégias, conceitos e procedimentos que visam contribuir com a formação cognitiva do estudante, tratando-os como seres pensantes capazes de compreender e criar estratégias de resolução para problemas diversos.

Quanto ao processo de resolução das questões mencionadas ao longo do trabalho, organizamos e respeitamos as etapas de resolução de cada uma, abdicando-se das regras prontas, primando pela compreensão de cada questão proposta e pelo conceito do Princípio Fundamental da Contagem.

Apresentamos uma demonstração para o Princípio Fundamental da Contagem e a dedução das regras de seus principais casos. Ciente que os modelos matemáticos (regras) têm sua importância e praticidade no momento de resolver muitos problemas, porém memorizá-los não é garantia de que saberemos resolver questões, menos ainda de compreendê-las.

2.1. PRINCÍPIO FUNDAMENTAL DA CONTAGEM

A Análise Combinatória é o ramo da Matemática que estuda e apresenta métodos rigorosos para se determinar o número de possibilidades de um evento acontecer. Como define Samuel Hazzan, (2013, p.1) "a Análise Combinatória visa desenvolver métodos que permitam contar o número de elementos de um conjunto, sendo estes elementos, agrupamentos formados sob certas condições." Tais métodos nos auxiliam muito nos cálculos de grandes proporções.

Um desses métodos é o Princípio Fundamental da Contagem (PFC), conhecimento imprescindível ao prosseguimento do estudo da Análise Combinatória, com ele é possível resolver vários tipos de problemas propostos no Ensino Médio e em provas de diversos concursos públicos.

Nosso foco de estudo será o Princípio Fundamental da Contagem e alguns casos que surgem como consequência, tais como: Fatorial; Permutações; Arranjos; Combinações; e o processo para se determinar o número de soluções não negativas de uma equação linear.

No nosso dia a dia podemos aplicar os conhecimentos da Análise Combinatória em diversas situações, como:

- Saber quantas placas de motocicleta aumentará substituindo o modelo antigo que possuía 3 letras e 4 algarismos pelo sistema atual do Mercosul que apresenta 4 letras e 3 números, nosso trabalho diminuirá muito se fizermos uso dos métodos da Análise Combinatória.

- Outra situação comum é no tocante a vestimentas, ao perceber de quantas maneiras distintas é possível de se compor um look utilizando os itens que tem à disposição.

Vejamos em um caso particular: imaginemos que uma mulher possui seis calças, sete shorts, três sutiãs, oito blusas, cinco vestidos e quatro pares de calçados. Sabendo que o uso de short dispensa calça e vestido; o de vestido dispensa calça, short e blusa; e que o de calça dispensa short e vestido. De quantos modos diferentes ela poderá se vestir? Esses e inúmeros outros problemas, do nosso cotidiano ou não, podem ser resolvidos por meio dos métodos da Análise Combinatória.

Trabalhamos o Princípio Fundamental da Contagem no nível que é abordado no Ensino Médio e que é exigido em concursos públicos, detalhando e aplicando Fatorial, Arranjos, Permutações e Combinações.

Antes de definir o PFC vamos exemplificá-lo partindo de situações do cotidiano, a fim de enriquecer nossa abordagem para facilitar o entendimento.

Situação 1. Imagine que uma pessoa tenha dois shorts e três blusas, propomos os seguintes questionamentos:

1. De quantos modos essa pessoa poderá escolher um desses shorts ou uma dessas blusas?

2. De quantos modos distintos essa pessoa poderá se vestir usando um desses shorts e uma dessas blusas?

Essas perguntas nos ajudam expressar dois princípios que são de extrema importância no estudo da Análise Combinatória, o aditivo e o multiplicativo, respectivamente.

Consideremos os conjuntos $S = \{s_1, s_2\}$, conjunto dos shorts, $B = \{b_1, b_2, b_3\}$, das blusas, para responder as questões propostas pela Situação 1.

Observe que, para o primeiro questionamento, tais escolhas são eventos mutuamente exclusivos[1], em que há a presença do conectivo **ou**. Isto é, a pessoa irá escolher um s_i ou um b_j podendo ser: s_1, s_2, b_1, b_2 ou b_3 totalizando cinco maneiras distintas de escolha, ou seja, $2 + 3$.

Dessa forma, podemos enunciar o princípio a seguir:

Proposição 1. (Princípio Aditivo) Se os conjuntos S e B, com m e n elementos, são disjuntos, então o número de elementos de $S \cup B$ é dado por

$$m + n.$$

A demonstração, a seguir, foi baseada em Hazzan (2013).

Demonstração. Sejam os conjuntos $S = \{s_1, s_2, s_3, \ldots, s_m\}$ e $B = \{b_1, b_2, b_3, \ldots, b_n\}$, há m maneiras distintas de ocorrer um s_i e n maneiras distintas de ocorrer um evento b_j com $s_i \neq b_j$. Então $S \cup B$ possui $m + n$ elementos.

Generalizando, temos que, se um conjunto S possui m elementos distintos e um conjunto B, n elementos distintos, implica que, para se escolher um elemento de S ou um elemento de B, teremos $m+n$ possibilidades distintas. ∎

Para o questionamento 2, da Situação 1, temos duas escolhas para o short e três para a blusa, assim temos as seguintes possibilidades para formar um look com esses acessórios: $s_1b_1, s_1b_2, s_1b_3, s_2b_1, s_2b_2$ e s_2b_3, totalizando seis escolhas distintas de se vestir.

Observe que, nesse caso, a escolha dos dois elementos está interligada pelo conectivo **e** sendo um elemento de cada conjunto, um s_i e um b_j, perceba que para cada short haverá três blusas:

$$s_1b_1, s_1b_2, s_1b_3 \quad \text{e} \quad s_2b_1, s_2b_2, s_2b_3$$

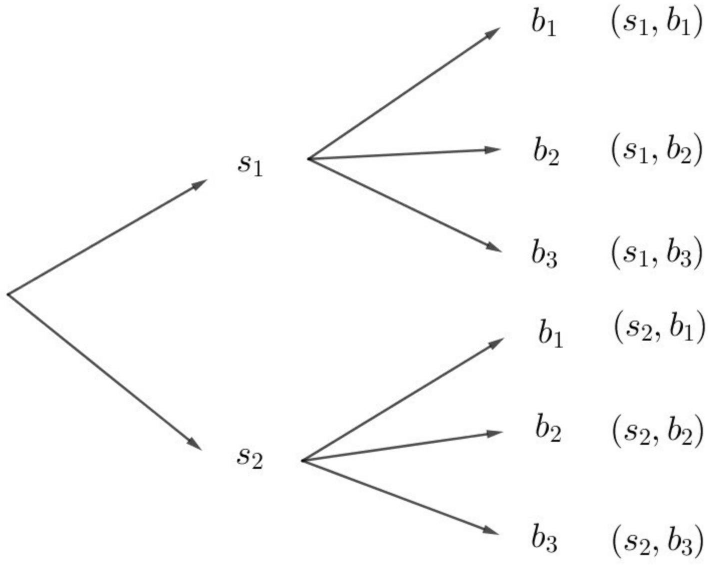
totalizando seis maneiras distintas de se vestir, ou seja, 2×3.

Podemos evidenciar com mais detalhes as possibilidades possíveis no diagrama de árvore [2], como mostra a Figura 2.1.

[1] Eventos mutuamente exclusivos são eventos que não podem ocorrer de forma simultânea.

[2] "O Diagrama de Árvore é uma ferramenta usada para visualizar a estrutura de um problema, planejamento ou de qualquer outra oportunidade de interesse. Esse diagrama é assim denominado, pois, quando completo, pode lembrar os galhos de uma árvore". (SANTOS, 2017)

Figura 2.1: Maneiras de se vestir possuindo a disposição 2 shorts e 3 blusas.



Fonte: O autor.

Assim, vejamos o Lema 2.1 que mostra com generalidade a situação abordada acima.

Lema 2.1. Sejam os conjuntos $S = \{s_1, s_2, s_3, \ldots, s_m\}$ e $B = \{b_1, b_2, b_3, \ldots, b_n\}$, finitos e não vazios. Então o número de pares (s_i, b_j) possíveis com $s_i \in S$ e $b_j \in B$ é dado por:

$$m \times n.$$

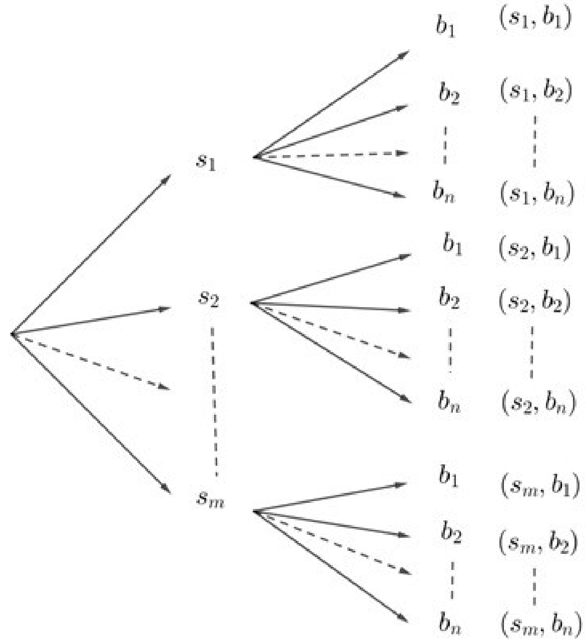
Demonstração. Fixemos o elemento de S como primeiro elemento do par e, façamos variar os de B como segundo elemento, daí temos:

$$\begin{cases} (s_1, b_1), (s_1, b_2), (s_1, b_3), \ldots, (s_1, b_n) \\ (s_2, b_1), (s_2, b_2), (s_2, b_3), \ldots, (s_2, b_n) \\ (s_3, b_1), (s_3, b_2), (s_3, b_3), \ldots, (s_3, b_n) \\ \vdots \\ (s_m, b_1), (s_m, b_2), (s_m, b_3), \ldots, (s_m, b_n) \end{cases}$$

Totalizando m linhas e n colunas de pares ordenados, logo o número de pares ordenados é dado pelo produto $m \times n$.

Também podemos visualizar e representar o número de possibilidades possíveis através do diagrama de árvore, ver Figura 2.2.

Figura 2.2: Possibilidades possíveis dos pares ordenados.



Fonte: O autor.

■

Analisemos a seguinte situação hipotética envolvendo três conjuntos, para em seguida fundamentarmos e estendermos o PFC para mais de dois conjuntos.

Situação 2. Ríccia deseja fazer um lanche composto por um pastel, um enroladinho e um suco, sendo que há pastéis de pizza e de frango; enroladinhos de queijo e de salsicha; sucos de laranja, cajá e de graviola. De quantas maneiras ela pode escolher seu lanche?

Solução: Sejam $P = \{f, p\}$ a representação do conjunto dos pastéis (P), de frango (f) e de pizza (p); $E = \{q, s\}$ a representação do conjunto dos enroladinhos (E), de queijo (q) e de salsicha (s), e $S = \{l, c, g\}$ a representação do conjunto formado pelos sucos (S), de laranja (l), de cajá (c) e de graviola (g).

Nesse caso temos as seguintes possibilidades de composição do lanche:

$$\begin{cases} (f,l,q),(f,l,s), \\ (f,c,q),(f,c,s), \\ (f,g,q),(f,g,s), \\ (p,l,q),(p,l,s), \\ (p,c,q),(p,c,s), \\ (p,g,q),(p,g,s). \end{cases}$$

Totalizando doze modos de escolher um lanche, isto é, $2 \times 2 \times 3$. □

Antes de enunciarmos o Princípio Fundamental da Contagem, observe, através das situações supracitadas, que ao aplicarmos estamos calculando o número de sequências que podem ser formadas com os elementos disponíveis do conjunto. A fim de facilitar o entendimento da demonstração do PFC, dividimos-o em duas partes: a primeira mostra a relação de independência entre a escolha dos elementos, enquanto o segundo apresenta a relação de dependência entre as escolhas dos elementos na composição das sequências.

Proposição 2. (Princípio Fundamental da Contagem ou Princípio Multiplicativo - 1ª parte) Considere os conjuntos $S_1, S_2, S_3, \cdots, S_m$, os quais possuem $n_1, n_2, n_3, \cdots, n_m$ elementos distintos em cada conjunto S_i, com $1 \leq i \leq m$, respectivamente, então o número de sequências possíveis formados por esses elementos é

$$n_1 \cdot n_2 \cdot n_3 \cdot \ldots \cdot n_m.$$

Demonstração. Faremos a demonstração do PFC pelo Princípio de Indução Finita.
Para $m = 2$, temos $n_1 \cdot n_2$, assim pelo Lema 2.1, concluímos que a proposição é verdadeira.
Agora, suponhamos que a relação seja válida para o inteiro positivo $(m-1)$ e provemos que é válida para o inteiro m. Para $(m-1)$ tomemos as sequências de $(m-1)$ elementos $(a_i, b_j, \ldots, w_k)$, onde $a_i \in S_1$, $b_j \in S_2$, ..., $w_k \in S_{m-1}$. Por hipótese de indução, temos que existem $n_1 \cdot n_2 \cdot n_3 \cdot \ldots \cdot n_{m-1}$ sequências possíveis formadas pelos elementos $(a_i, b_j, \ldots, w_k)$ e n_m elementos pertencentes ao conjunto S_m.
Observe que, cada sequência $(a_i, b_j, \ldots, w_k, z_p)$ consiste de uma sequência $(a_i, b_j, \ldots, w_k)$ e um elemento z_p de S_m. Logo, pelo Lema 2.1, o número de sequências formadas pelos elementos $(a_i, b_j, \ldots, w_k, z_p)$ é

$$(n_1 \cdot n_2 \cdot n_3 \cdot \ldots \cdot n_{m-1}) \cdot n_m = n_1 \cdot n_2 \cdot n_3 \cdot \ldots \cdot n_{m-1} \cdot n_m.$$

Portanto, pelo Princípio de Indução Finita, concluímos que a proposição é válida para todo m natural maior ou igual a 2. ■

Existem questões com a ideia de par ordenado que remetem na determinação do número de subconjuntos de um conjunto finito que satisfazem certas condições. Como a situação 3 que podemos encontrar em alguns livros didáticos.

Situação 3. Quantos números de dois algarismos distintos podemos formar com os dígitos 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 e 9?

Solução: Cada número pode ser considerado um par de dígitos (a, b) onde $a \in \{1, 2, 3, \ldots, 9\}$ e $b \in \{1, 2, 3, \ldots, 9\}$, com $a \neq b$. Note que, para a escolha do dígito das dezenas temos 9 possibilidades, enquanto para o dígito das unidades temos 8 escolhas, já que os algarismos desse número devem ser distintos. Portanto, o resultado almejado é $9 \cdot 8 = 72$. □

Com isso, vejamos o Lema 2.2, a seguir.

Lema 2.2. Dado o conjunto $S = \{s_1, s_2, s_3, \ldots, s_m\}$, com $s_i, s_j \in S$ tais que $s_i \neq s_j$ para todo $i \neq j$. Temos que o número de pares ordenados (s_i, s_j) é dado pelo produto

$$m \cdot (m-1).$$

Demonstração. Fixemos o primeiro elemento do par e, façamos variar os demais, daí temos:

$$\begin{cases} (s_1, s_2), (s_1, s_3), \ldots, (s_1, s_m) \\ (s_2, s_1), (s_2, s_3), \ldots, (s_2, s_m) \\ (s_3, s_1), (s_3, s_2), \ldots, (s_3, s_m) \\ \vdots \\ (s_m, s_1), (s_m, s_2), \ldots, (s_m, s_{m-1}) \end{cases}$$

Note que, temos uma estrutura constituída por m linhas e cada linha possui $(m-1)$ par ordenado, pois como o conjunto possuí m elementos e fixando um desses elementos sobram $m-1$ elementos para variar e compor a quantidade de pares ordenados. Dessa forma, totalizando $m \cdot (m-1)$ pares ordenados. ■

Outro tipo de questão recorrente nos livros didáticos do Ensino Médio, são questões que envolvem diretamente ou intuitivamente filas indianas.

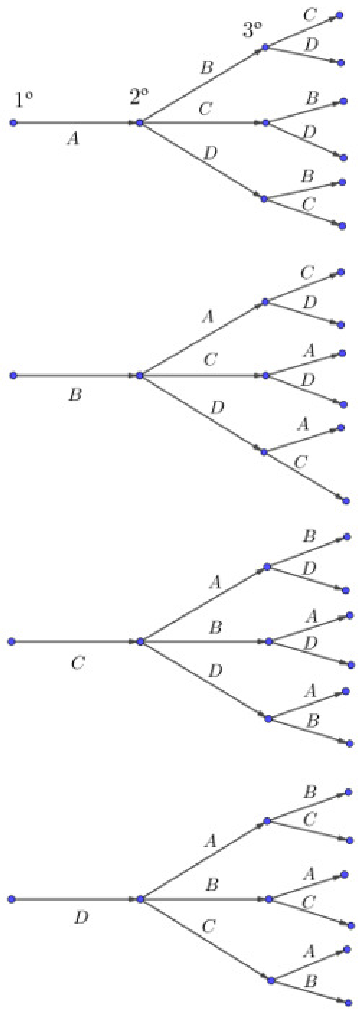
Situação 4. Três alunos chegam atrasados a uma palestra. No auditório, só estão vazias 4 cadeiras. De quantas maneiras eles podem ocupar essas cadeiras?

Solução: Nomeemos as cadeiras de A, B, C e D, e consideremos que essa ocupação ocorra em três etapas:

1. O primeiro a escolher tem 4 possibilidades.
2. O segundo terá 3 possibilidades, já que uma das 4 cadeiras inicias foi escolhida pelo primeiro aluno.
3. O terceiro aluno possuirá 2 escolhas, pois duas das 4 cadeiras iniciais já estarão ocupadas pelos dois primeiros alunos.

O diagrama de árvore, na Figura 2.3, mostra todas as possibilidades possíveis de combinações.

Figura 2.3: Possibilidades de escolha dos alunos.



Fonte: O autor.

Portanto, o número de maneiras distintas dos alunos se sentarem é $4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$. □

Esse problema aborda o Princípio Fundamental da Contagem - 2ª parte, Proposição 3.

Proposição 3. (Princípio Fundamental da Contagem ou Princípio Multiplicativo - 2ª parte) Consideremos um conjunto S com n elementos, onde $n \geqslant 2$, então o número das sequências ordenadas formadas por m elementos distintos dois a dois de S, com $n \geqslant m$, será dada por:

$$n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot [n-(m-1)].$$

Demonstração. Procederemos a demonstração dessa proposição pelo Princípio de Indução Finita sobre n.

Para $n = 2$, temos que $S = \{s_1, s_2\}$, assim temos dois pares ordenados a saber (s_1, s_2) e (s_2, s_1), ou seja, $2 = 2 \cdot (2 - 1)$. Portanto, a proposição é verdadeira.

Agora, suponhamos que a relação seja válida para o inteiro $(n - 1)$ e provemos que seja válida para o inteiro n. Para $(n - 1)$ tomemos as sequências de $(n - 1)$ elementos do conjunto $S' = \{s_1, s_2, \ldots, s_{n-1}\}$. Por hipótese de indução, temos que existem $(n - 1) \cdot (n - 2) \cdot \ldots \cdot [n - (m - 1)]$ sequências ordenadas formadas por m elementos distintos de S'.

Note que, se acrescentarmos mais um elemento (s_n) em S', temos $S = \{s_1, s_2, \ldots, s_{n-1}, s_n\}$. Assim, cada sequência $(s_1, s_2, \ldots, s_n)$ consiste de uma sequência $(s_1, s_2, \ldots, s_{n-1})$ e um elemento s_n de S. Logo, pelo Lema 2.2, o número de sequências formadas pelos elementos S é

$$[(n - 1) \cdot (n - 2) \cdot \ldots \cdot [n - (m - 1)]] \cdot n = n \cdot (n - 1) \cdot (n - 2) \cdot \ldots \cdot [n - (m - 1)].$$

Portanto, pelo Princípio de Indução Finita, concluímos que a proposição é válida para todo n natural maior ou igual a 2. ■

Como vimos o Princípio Multiplicativo foi separado em duas partes, para trabalhar a sutil diferença da repetição ou não dos elementos do conjunto. Dessa forma, facilitando o entendimento de suas demonstrações.

3. CONSEQUÊNCIAS DO PRINCÍPIO FUNDAMENTAL DA CONTAGEM

Neste capítulo, abordamos casos particulares do Princípio Fundamental da Contagem, partindo de problemas para justificar cada elemento do modelo matemático adotado, evitando o uso de forma mecânica dos mesmos. Objetivando proporcionar a compreensão plena da resolução do problema.

3.1. FATORIAL

O primeiro a utilizar a notação $n!$ foi Kramp em 1808. Que serve para designar o produto de números inteiros decrescentes desde de n a 1, ou seja,

$$n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \ldots 3 \cdot 2 \cdot 1.$$

Essa notação é bem útil dentro do estudo de Análise Combinatória, principalmente no que diz respeito ao Princípio Multiplicativo.

Situação 5. Os portões de 5 casas devem ser pintados com as cores azul, marrom, amarelo, verde e vermelho. De quantas maneiras isso pode ser feito se cada portão deve ser pintado de uma única cor e dois portões não podem ser pintados da mesma cor?

Solução: Observe que:

- Para a escolha da cor para pintar o primeiro portão são 5 possibilidades.
- Para o segundo portão são 4 cores possíveis.
- 3 cores para o terceiro portão.
- 2 cores para o segundo.
- E uma cor para o último portão.

Assim, pelo Princípio Fundamental da Contagem - 2ª parte, temos:

$$5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120.$$

Temos então, 120 maneiras distintas de pintar os portões das 5 casas. □

Fatorial simplifica a escrita da multiplicação de um número natural n $(n \geqslant 1)$ por todos os seus antecessores, também naturais, até chegar ao número 1, fato comum dentro do estudo de Análise Combinatória. Para o exemplo anterior, temos,

$$5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 5!.$$

Definição 3.1. Considerando n um número natural $(n \geqslant 1)$, fatorial de n é o produto de todos os números inteiros e positivos compreendidos no intervalo $[n, 1]$ e podemos representar como fatorial desse número a expressão $n!$ (Lê-se: n fatorial ou fatorial de n) e é dada pelo produto

$$n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot (n-3) \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1.$$

Podemos entender $n!$ como sendo a quantidade de sequências com n elementos distintos que é possível formar com os n elementos possíveis.

3.1.1. Propriedade Fundamental dos Fatoriais

Note que, $7! = 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$ e que $6! = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$, assim podemos escrever $7! = 7 \cdot 6!$. Generalizando, essa ideia para um número natural $n \geqslant 2$, temos:

$$n! = n \cdot (n-1)!. \tag{3.1}$$

Essa propriedade é conhecida como propriedade fundamental dos fatoriais.

3.1.2. Extensão da Definição de Fatorial

No estudo dos fatoriais é necessário definir fatorial de zero ($0!$), pois zero e um também faz parte de contagens.

Para definir $0!$ podemos supor que, a propriedade fundamental dos fatoriais seja válida para $n = 1$. Logo,

$$1! = 1 \cdot (1-1)! \Rightarrow 1! = 1 \cdot 0!.$$

Por definição, temos que

$$1 = 1 \cdot 0! \Rightarrow 0! = 1.$$

Com essa convenção, admitimos que a propriedade fundamental dos fatoriais pode ser aplicada para qualquer número inteiro não negativo.

Fatorial é uma ferramenta bem útil na resolução de problemas utilizada no Princípio Multiplicativo, principalmente, nos que exigem grandes cálculos. Vejamos um tipo de questão que é bastante corriqueira nos livros didáticos de Matemática.

Exemplo 1. Simplifique as expressões:

(a) $\dfrac{(n!)^2}{(n-1)!(n+1)!}$

(b) $\dfrac{(n+4)!}{(n+2)!+(n+3)!}$

Solução: Para o item (a), usemos apenas a definição 3.1.

$$\begin{aligned}
\frac{(n!)^2}{(n-1)!(n+1)!} &= \frac{n! \cdot n!}{(n-1)!(n+1)!} \\
&= \frac{n \cdot \cancel{(n-1)!} \cdot \cancel{n!}}{\cancel{(n-1)!}(n+1) \cdot \cancel{n!}} \\
&= \frac{n}{n+1}.
\end{aligned}$$

Para o item (b), temos:

$$\begin{aligned}
\frac{(n+4)!}{(n+2)!+(n+3)!} &= \frac{(n+4) \cdot (n+3) \cdot (n+2)!}{(n+2)! + (n+3) \cdot (n+2)!} \\
&= \frac{(n+4) \cdot (n+3) \cdot \cancel{(n+2)!}}{\cancel{(n+2)!} \cdot (1 + (n+3))} \\
&= \frac{\cancel{(n+4)} \cdot (n+3)}{\cancel{(n+4)}} \\
&= n+3.
\end{aligned}$$

□

3.2. ARRANJOS SIMPLES

Situação 6. A atual série A do campeonato brasileiro é disputada por 20 equipes, em sistema de pontos corridos, a premiação dos três primeiros colocados varia em ordem decrescente do valor da pontuação. Encontre o número possível de maneiras de se distribuírem essa premiação.

Solução: Observe que, temos as seguintes possibilidades:

- Para a escolha da equipe campeã temos 20 opções;
- 19 para a vice (pois a campeã não pode);
- 18 para o terceiro lugar (pois a campeã e vice não podem).

Portanto, pelo Princípio Multiplicativo - 2ª parte, temos:

$$20 \cdot (20-1)(20-2) = 20 \cdot 19 \cdot 18 = 6840 \text{ maneiras.}$$

□

Nesse caso temos 20 times para escolhermos três, além disso, a ordem é levada em consideração (Flamengo, Internacional e Atlético Mineiro) é diferente de (Internacional, Flamengo e Atlético Mineiro). Casos específicos do Princípio Fundamental da Contagem como esse, são chamados de **Arranjos Simples**.

Definição 3.2. Arranjos simples de n elementos distintos tomados p a p, onde $(1 \leqslant p \leqslant n)$, são os diferentes agrupamentos ordenados que se podem formar com p dos n elementos dados, mudando ao menos a ordem.

Os Arranjos são aplicações do Princípio Multiplicativo - 2ª parte, pois para se obter um agrupamento de p elementos, há n maneiras de se escolher o primeiro elemento, como já usamos 1 elemento, teremos agora $n-1$ maneiras de se obter o segundo, como já usamos dois, teremos agora $n-2$ maneiras de se obter o terceiro, indo assim até $[n-(p-1)]$ maneiras de se obter o $p-$enésimo elemento. Observe que até a escolha p fizemos $p-1$ escolha.

Assim, pelo Princípio Multiplicativo - 2ª parte, temos:

$$n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot [n-(p-1)],$$

multiplicando por $\dfrac{(n-p)!}{(n-p)!}$, temos,

$$n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot [n-(p-1)] \cdot \frac{(n-p)!}{(n-p)!}.$$

Observe que,

$$\begin{aligned} & n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot (n-(p-1)) \cdot (n-p)! \\ = \; & n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot (n-p+1) \cdot (n-p) \cdot (n-p-1) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1 \\ = \; & n!. \end{aligned}$$

Portanto,

$$n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot [n-(p-1)] = \frac{n!}{(n-p)!}.$$

Indicaremos por $A_{n,p}$ ou A_{np} o total desses agrupamentos distintos. Dessa forma, o cálculo do número de arranjos simples pode ser efetuado mediante o modelo que segue-se:

$$A_{n,p} = \frac{n!}{(n-p)!}.$$

Utilizando esse modelo matemático para resolver a Situação 6, obtemos:

$$\begin{aligned} A_{20,3} &= \frac{20!}{(20-3)!} \\ &= \frac{20 \cdot 19 \cdot 18 \cdot \cancel{17!}}{\cancel{17!}} \\ &= 6840 \text{ maneiras.} \end{aligned}$$

3.2.1. Arranjos com Repetições

Situação 7. As novas placas no padrão Mercosul finalmente começaram a ser usadas no Brasil [...] A flexibilidade do código alfanumérico permitirá à placa do Mercosul oferecer mais de 450 milhões de combinações. No sistema antigo, ainda vigente em alguns Estados, o teto de combinações era de 175 milhões.

Os sete caracteres da placa atual brasileira foram mantidos, porém com quatro letras e três números, e não mais três letras e quatro números.

Além disso, letras e números podem ser "embaralhados", e não mais dispostos de maneira fixa em uma sequência LLL NNNN (em que L é letra e N, número).

Por exemplo, no Brasil será inicialmente LLL NLNN para automóveis e LLL NN LN para motocicletas.

Disponível em: <https://quatrorodas.abril.com.br/auto-servico/placa-do-mercosul-tire-suas-duvidas-e-saiba-o-que-ja-mudou-no-projeto/>. Acesso em: 20/08/2021.

Quantas placas de automóveis a mais terão nesse novo sistema?

Solução: Como não há restrições em relação a repetição das letras e dos algarismos e possuímos 26 letras no alfabeto e 10 algarismos, temos no sistema antigo:

- 26 possibilidades para a escolha da primeira letra;
- 26 para a segunda;
- 26 para a terceira;
- 10 possibilidades para a escolha do primeiro número, já que na confecção das placas pode-se iniciar a sequência dos número por 0 (zero);
- 10 escolhas para o segundo número;
- 10 para o terceiro;
- 10 para o quarto.

Portanto, pelo PFC - 1ª parte, temos:

$$26 \cdot 26 \cdot 26 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 26^3 \cdot 10^3 = 175.760.000.$$

De forma, análoga temos para o sistema atual (LLL NLNN).

$$26 \cdot 26 \cdot 26 \cdot 10 \cdot 26 \cdot 10 \cdot 10 = 26^4 \cdot 10^3 = 456.976.000.$$

Dessa forma, teremos a mais $456.976.000 - 175.760.000 = 281.216.000$ placas. □

Definição 3.3. **Arranjo com repetição**, ou **arranjo completo**, é uma sequência de n elementos de um dado conjunto, com p elementos distintos, onde a mudança de ordem determina grupos diferentes, podendo porém ter elementos repetidos.

Consideremos o conjunto $S = \{s_1, s_2, s_3, \ldots, s_p\}$ com p elementos, queremos encontrar o modelo matemático que represente o total de maneiras que podemos arranjarmos os n elementos ($n \leqslant p$) distintos.

Portanto, temos n opções para a primeira escolha, n para a segunda e, assim, sucessivamente até n para a última. Recaímos em mais um caso do Princípio Multiplicativo - 1ª parte.

$$\underbrace{n \cdot n \cdot \ldots \cdot n}_{p} = n^p.$$

Denotamos o número de arranjos com repetição por $AR_{n,p}$. E, assim:

$$AR_{n,p} = n^p.$$

3.3. PERMUTAÇÕES

Permutar é sinônimo de trocar. Na Análise Combinatória, devemos relacionar a permutação à noção de embaralhar, ou seja, trocar os elementos de posição. Vejamos essa ideia na Situação 8 a seguir.

Situação 8. André, Barbará, Carlos e Davy foram a um parque e se sentaram juntos em um mesmo banco, lado a lado. Em quantas configurações diferentes os quatros amigos podem ter se sentado?

Solução: Vamos indicar os amigos pelas iniciais de seus nomes para facilitar a apresentação das configurações possíveis.

- Se André sentar no primeiro lugar do banco, temos as seguintes possibilidades: ABCD, ABDC, ACBD, ACDB, ADBC e ADCB.

- Se Barbará ficar no primeiro lugar do banco, temos as seguintes configurações: BACD, BADC, BCAD, BCDA, BDAC e BDCA.

- Se Carlos sentar no primeiro lugar do banco, temos as seguintes possibilidades: CABD, CADB, CBAD, CBDA, CDAB e CDBA.

- Se Davy sentar no primeiro lugar do banco, temos as seguintes configurações: DBCA, CBAC, DCBA, DCAB, DABC e DACB.

Dessa forma, inferimos que existem $4 \cdot 6 = 24$ possibilidades distintas delas se sentarem no banco.

Aplicando o PFC - 2ª parte, temos que para o primeiro lugar no banco temos 4 possibilidades de escolha; para o segundo lugar temos 3 escolhas; para o terceiro lugar temos 2 escolhas; por fim, resta apenas uma pessoa para o quarto lugar. Portanto, temos $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$ configurações diferentes. □

De modo geral, podemos fazer a seguinte pergunta: de quantos modos podemos ordenar em fila n objetos distintos escolhidos entre n objetos?

A escolha do objeto que ocupará o primeiro lugar pode ser feita de n maneiras; a escolha do objeto que ocupará a segunda posição pode ser feita de $n-1$ maneiras; a escolha do objeto que ocupará o terceiro lugar pode ser feita de $n-2$ maneiras e, assim sucessivamente, até a escolha do objeto que ocupará a última que pode ser feita de 1 maneira. Logo, usando o Princípio Fundamental da Contagem - 2ª parte, concluímos que o número de agrupamentos ordenados que podemos obter com todos os n elementos é dado por:

$$n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot (n-3) \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1.$$

Assim, em suma, podemos sistematizar as permutações simples da maneira que segue-se.

Proposição 4. Considerando n elementos distintos , os agrupamentos ordenados formados por esses n elementos recebem o nome de **permutações simples**, quando não há repetição de elementos. Indicaremos por P_n o número de permutações simples de n elementos e escrevemos:

$$\begin{aligned} P_n &= n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot (n-3) \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \\ &= n!. \end{aligned}$$

Analisemos o Exemplo 2 que é considerando como problema clássico no estudo de permutações, por sua corriqueira presença. Que é a abordagem do número de anagramas de uma palavra, onde um anagrama é a própria palavra ou qualquer outro agrupamento que se obtém trocando-se a ordem de suas letras.

Exemplo 2. (ITA) O número de anagramas da palavra VESTIBULANDO, que não apresentam as cinco vogais juntas, é:

(a) $12!$

(b) $8! \cdot 5!$

(c) $12! - 8! \cdot 5!$

(d) $12! - 8!$

(e) $12! - 7! \cdot 5!$

Solução: Considerando que no problema não há restrições temos que o número de anagramas da palavra VESTIBULANDO é $12!$, pois temos 12 letras distintas e a ordem dessas letras devem ser consideradas.

Porém, como há restrição de as cinco vogais não poderem ficar juntas, então vamos descobrir em quantos desses as vogais estão juntas e retirarmos do total de anagramas possíveis.

Assim, as vogais sendo consideradas como um único elemento, teríamos $8!$ anagramas, mas que podem permutarem entre si produzindo $5!$ anagramas. Portanto, pelo PFC - 1ª parte, temos: $8!.5!$ anagramas da palavra VESTIBULANDO que apresentam as cinco vogais juntas.

Dessa maneira, concluímos que o número de anagramas da palavra VESTIBULANDO, que não apresentam as cinco vogais juntas, é:

$$12! - 8! \cdot 5!$$

Portanto, a assertiva correta á a letra (c). □

Outra maneira de abordar o número de permutações é usando arranjos simples. Nesse caso, permutação é um caso particular de arranjos, em que $n = p$, ou seja, temos n elementos para ocuparem

n espaços. Algebricamente temos:

$$\begin{aligned} A_{n,n} &= \frac{n!}{(n-n)!} \\ &= \frac{n!}{0!} \\ &= \frac{n!}{1} \\ &= n! \\ &= P_n \end{aligned}$$

3.3.1. Permutações com Elementos Repetidos

Definição 3.4. Permutações com elementos repetidos consiste em determinar o número de subconjuntos distintos que é possível formar com p elementos de um conjunto formado por n elementos, podendo contar cada elemento mais de uma vez.

Situação 9. (CESPE/TRE-MT/2015) Em um campeonato de futebol amador de pontos corridos, do qual participam 10 times, cada um desses times joga duas vezes com cada adversário, o que totaliza exatas 18 partidas para cada. Considerando-se que o time vencedor do campeonato venceu 13 partidas e empatou 5, é correto afirmar que a quantidade de maneiras possíveis para que esses resultados ocorram dentro do campeonato é.

(a) superior a 4.000 e inferior a 6.000.

(b) superior a 6.000 e inferior a 8.000.

(c) superior a 8.000.

(d) inferior a 2.000.

(e) superior a 2.000 e inferior a 4.000.

Solução: Sendo V vitória e E empate, uma possível ordem dos resultados do seu desempenho no campeonato é (VVVVVVVVVVVVVEEEEE) formando assim um conjunto formado por 18 elementos não distintos. Assim, pelo PFC, temos:

$$18 \cdot 17 \cdot 16 \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 18!.$$

Porém há elementos repetidos, com isso, ao contabilizarmos 18! teremos combinações repetidas que se originam das permutações entre si dos elementos repetidos e, permutar os elementos iguais entre si não cria um novo anagrama, para eliminarmos essa contagem excessiva basta realizarmos a operação inversa da multiplicação, ou seja, a divisão.

Portanto, desse total retiramos as permutações entre os V (13!) e as entre os E (5!). Obtendo assim:

$$\frac{18!}{13! \cdot 5!} = 8568 \text{ maneiras possíveis.}$$

□

Exemplo 3. Encontre o número de soluções inteiras não negativas da equação $a + b + c = 4$.

Solução: Temos então uma soma algébrica formada por três parcelas do tipo $\bigstar\bigstar + \bigstar + \bigstar$, em que as estrelas reapresentam as unidades totalizando 4 e os sinais + são responsáveis por separas as unidades em três parcelas que são os valores para a, b e c. Neste caso, temos um conjunto formado por 6 elementos e queremos permutá-los, que pelo Princípio Fundamental da Contagem consiste em permutação de 6 elementos, ou seja,

$$6!.$$

Porém há elementos repetidos, com isso, ao contabilizarmos 6! teremos combinações repetidas que se originam das permutações entre si dos elementos repetidos e, permutar os elementos iguais entre si não cria uma nova solução, para eliminarmos essa contagem excessiva basta realizarmos a operação inversa da multiplicação, isto é,

$$\frac{6!}{4! \cdot 2!} = 15.$$

Em que, 4! corresponde a permutação das estrelas e 2! a dos sinais de adição.

Generalizando, o modelo matemático para usarmos em problemas de permutações com repetição, é:

$$P_n^{a,b,\ldots,c} = \frac{n!}{a! \cdot b! \cdot \ldots \cdot c!}$$

Em que, $P_n^{a,b,\ldots,c}$ indica o número de permutações com repetições; $a, b, \ldots, c$ expressam o número de vezes em que cada elemento distinto se repete; n é o total de elementos. □

3.3.2. Permutações Circulares

Vimos, na subseção 3.3.1, um caso especial de permutações no caso as permutações com repetição de elementos. Nesta subseção iremos abordar outro tipo especial de permutações, as permutações circulares.

Situação 10. De quantos modos quatro pessoas podem formar uma roda de ciranda?

Solução: Note que, temos as seguintes possibilidades de inserção de composição da roda de ciranda:

- Há 1 modo de colocar a primeira pessoa na roda de ciranda;
- Há 1 modo de colocar a segunda pessoa na roda de ciranda (ela estará ao lado da pessoa 1);
- Há 2 modos de colocar a terceira pessoa na roda de ciranda (ficará após a primeira ou após a segunda);
- Há 3 modos de colocar a quarta pessoa (imediatamente após a primeira ou imediatamente após a segunda ou imediatamente após a terceira)

Pelo PFC - 1ª parte, temos:

$$1 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6.$$

□

Observe que, nestes casos levamos em consideração a posição relativa entre os objetos considerados, para o primeiro objeto temos um modo, pois independentemente de onde seja colocado ele será único; para o segundo também há um modo, pois estará posicionado ao lado do primeiro; para o terceiro há duas, já que pode vir imediatamente após o primeiro ou após o segundo; para o quarto objeto há três modos, são eles: imediatamente após o primeiro, imediatamente após o segundo ou imediatamente após o terceiro; $\ldots$; para o último objeto n, haverá $n-1$ modos.

Dessa forma, concluímos que o total de modos distintos que n objetos podem ocuparem n lugares equiespaçados em torno de um círculo é dado por:

$$1 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (n-1) = (n-1)!$$

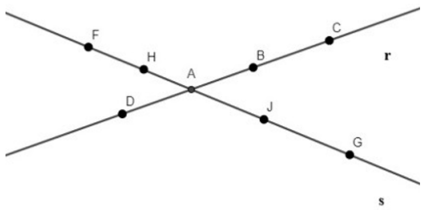
3.4. COMBINAÇÕES SIMPLES

Há casos em que desejamos escolher uma certa quantidade p de elementos entre os n elementos distintos de um conjunto, em que a ordem não importa. Vejamos o exemplo a seguir:

Exemplo 4. (Livro: Introdução à Análise Combinatória – Adaptado) Sobre uma reta r foram marcados os pontos distintos A, B, C e D, e sobre uma reta s, concorrente a r no ponto A, foram marcados os pontos F, G, H e J. Determine a quantidade de triângulos que podemos formar com três desses pontos.

Solução: Temos 8 pontos, como mostra a figura abaixo:

Figura 3.1: Retas r e s.



Fonte: O autor.

Pelo Princípio Fundamental da Contagem - 2ª parte, para escolhermos três pontos quaisquer, fazemos:

$$8 \cdot 7 \cdot 6 = 336.$$

Como a ordem entre os três números escolhidos não importa, precisamos desconsiderar as permutações entre eles, fazendo:

$$\frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{P_3} = \frac{336}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 56 \text{ maneiras.}$$

Temos ainda que, para formar um triângulo são necessários três pontos não colineares, com isso, precisamos retirar desses 56 as sequências formadas por três pontos colineares.

- Na reta s temos: $\dfrac{5 \cdot 4 \cdot 3}{P_3} = 10.$
- Na reta r temos $\dfrac{4 \cdot 3 \cdot 2}{P_3} = 4.$

Daí, $56 - 10 - 4 = 42$. Portanto, é possível formar 42 triângulos. □

Casos particulares do Princípio Fundamental da Contagem como esse em que a ordem de disposição dos elementos não importa, recebem o nome de **Combinação Simples**.

Definição 3.5. Chamamos de Combinação Simples de n elementos tomados p a p $(p \leqslant n)$ a todos os subconjuntos com exatamente p elementos que se podem formar com os n elementos dados diferenciando apenas pela sua natureza.

Indicaremos o número de combinações por $C_{n,p}$ ou $\dbinom{n}{p}$.

Proposição 5. Combinação Simples são todos os Arranjos que não leva em consideração as permutações dos Arranjos formados pelos mesmos elementos, ou seja, $\dfrac{A_{n,p}}{p!}$.

Matematicamente temos:

$$\frac{A_{n,p}}{p!} = \frac{\frac{n!}{(n-p)!}}{p!} = \frac{n!}{p! \cdot (n-p)!}.$$

Assim,

$$C_{n,p} = \frac{n!}{p! \cdot (n-p)!}.$$

3.4.1. Um Caso Especial de Equações Lineares

É fácil ver que as soluções inteiras não negativas da equação linear $x + y = 3$ são:

$$(0,3);\ (1,2);\ (2,1);\ (3,0).$$

Porém, há casos que não são tão simples assim determinar quantas são suas soluções. Vejamos o Exemplo 5 a seguir.

Exemplo 5. Na eleição para diretor do IFPB, 50 pessoas terão que votar em um candidato entre os três que lançaram suas candidaturas, são eles: x, y e z. De quantos modos pode se dá o resultado dessa eleição?

Solução: Temos que a soma dos votos obtido pelos três candidatos totalizam 50, ou seja,

$$x\ +\ y\ +\ z\ =\ 50.$$

Uma possibilidade seria: o candidato x tirar 5 votos, y obter 45 votos e z não obter nenhum voto como mostra a ilustração a seguir.

..... + ... +

o esquema consiste no seguinte: os pontinhos à esquerda do primeiro sinal de + representam o total de votos do candidato x, (no caso citado, 5), os pontinhos situados entre os dois sinais de + representam o total de votos obtidos pelo candidato y (no caso citado, 45) e, os pontinhos situados a direita do segundo sinal de + representam o total de votos do candidato z, (no caso citado como exemplo, 0).

Temos 50 elementos (votos) para permutar nos três espaços separados por outros dois elementos (sinais de adição) totalizando 52 elementos, permuta-se os 52 elementos (52!), desse total temos que desconsiderar as permutações contabilizadas que levaram em consideração a ordem dos 50 eleitores (50!) e, a dos 2 sinais de adição (2!), já que não se considera a ordem entre eles. Pelos PFCs, temos:

$$\frac{52 \cdot 51 \cdot 50!}{50! \cdot 2!} = 1326.$$

Portanto, existem 1326 maneiras possíveis de resultados para a eleição. □

A Proposição 6, mostra o modelo matemático atrelado a análise combinatória utilizado para encontrar o total (T) de soluções inteiras não negativas de equações lineares.

Proposição 6. O número de soluções inteiras não negativas em equações lineares do tipo

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_n = r,$$

é:

$$T = \frac{(n+r-1)!}{r!(n-1)!}.$$

A demonstração a seguir foi baseada em HAZZAN (2013).

Demonstração. De fato, cada solução da equação é uma permutação de r símbolos . e $(n-1)$ símbolos $+$ (precisamos de $(n-1)$ barras para dividir r pontos em n partes)

$$[..+......+....+...]$$

O número de permutações (símbolos da equação) será:

$$P_{n+r-1}^{(n-1),r} = \frac{(n+r-1)!}{r!(n-1)!}.$$

■

Diante do exposto, o Princípio Fundamental da Contagem além de sua aplicabilidade a diversos setores do cotidiano, serve também para resolver ou auxiliar na resolução de diversos tipos de problemas propostos nos livros didáticos e em concursos, como veremos com mais ênfase no Capítulo 4.

4. APLICAÇÕES

Neste capítulo abordamos diversas aplicações e curiosidades da Análise Combinatória cujo desenvolvimento dependerá apenas da utilização de uma ou mais das fundamentações teóricas vistas nos capítulos anteriores.

Aplicação 1. (CESPE/CEBRASPE-2009) Acerca de contagem, julgue os itens a seguir. A quantidade de números naturais de 3 algarismos em que todos os algarismos são distintos é superior a 700.

○ Certo

○ Errado

Solução: Para a escolha do algarismo das centenas temos 9 opções, já que não podemos utilizar o zero; para a escolha do algarismo das dezenas temos 9 opções, já que podemos utilizar o zero; para a escolha do algarismo das unidades temos 8 opções, pois já utilizamos dois. Assim, pelo Princípio Fundamental da Contagem, temos:

$$9 \cdot 9 \cdot 8 = 640.$$

Portanto, a opção correta é a Errado. □

Aplicação 2. (CESPE/CEBRASPE-2013) Em uma escola do ensino médio, os alunos A, B, C, D, E, F e G foram selecionados para participar da Olimpíada Brasileira de Matemática. Para transportá-los até o local da prova, foram utilizados 2 veículos — I e II — de 4 assentos, além dos assentos dos motoristas. Quatro estudantes foram no veículo I e 3, no veículo II.
Considere que os nomes dos 7 alunos referidos no texto sejam todos diferentes e que se queira preencher a primeira coluna de uma tabela de 7 linhas com esses nomes. Nessa situação, a quantidade de maneiras distintas de se preencher essa coluna é igual a

(a) 7

(b) 30

(c) 144

(d) 5040

(e) 823543

Solução: São sete alunos para ocuparem sete lugares de uma fila, temos então:

- 7 opções para a posição 1;
- 6 opções para a 2;
- 5 para a 3;
- 4 para a 4;
- 3 para a 5;
- 2 para a 6;

- 1 para a 7.

Portanto, pela PFC - 2ª parte, temos: $7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 5040$ maneiras distintas. □

Aplicação 3. (UNICAMP-SP-2020) Cinco pessoas devem ficar em pé, uma ao lado da outra, para tirar uma fotografia, sendo que duas delas se recusam a ficar lada a lado. O número de posições distintas para as cinco pessoas serem fotografadas juntas é igual:

(a) 48

(b) 72

(c) 96

(d) 120

Solução: Pelo Princípio Fundamental da Contagem - 2ª parte, o total de maneiras de dispormos cinco pessoas é dado por:

$$5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120.$$

Permutando as duas que ficam sempre juntas, temos:

$$2 \cdot 1 = 2.$$

Mantendo essas duas pessoas juntas, teremos hipoteticamente 4 pessoas para serem permutadas e como temos duas possibilidades entre as duas pessoas juntas, temos:

$$4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 2 = 48$$

posições distintas em que elas estarão juntas.

Portanto, temos 120 maneiras de dispormos as cinco pessoas e, em 48 dessas disposições teremos duas delas sempre juntas, daí conclui-se que o número pedido é dado pela diferença:

$$120 - 48 = 72.$$

□

Aplicação 4. (CESPE/CEBRASPE-DETRAN-2010) Acerca dos princípios e das técnicas de contagem, julgue o item subsequente. Considerando-se que, no estado do Espírito Santo, as placas dos automóveis variem de MOX 0001 a MTZ 9999, é correto concluir que o número total de automóveis que podem ser licenciados nesse estado é igual a 162.000.

○ Certo

○ Errado

Solução: Observe que:

- A primeira letra (M) não varia;
- Para a segunda temos 6 opções (O, P, Q, R, S e T);
- Para a terceira posição há três opções (X, Y e Z);
- Para as posições 4ª, 5ª, 6ª e 7ª há dez opções (0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 e 9).

Pelo PFC, temos:

$$6 \cdot 3 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 180000.$$

Mas, observe que ao fazermos esse cálculo estamos incluindo também todas as placas que terminam com 0000. Logo, devemos retirá-las, que é um quantitativo de 18, pois as temos 6 opções para a segunda letra e 3 opções para a terceira letra.

Portanto, temos $180000 - 18 = 179982$ placas e, dessa forma, o item está errado. □

Aplicação 5. (PGE-RO/TÉCNICO DA PROCURADORIA/2015) Quatro processos, numerados de 1 a 4, deverão ser distribuídos entre três procuradores: Átila, Hércules e Ulisses. Um mesmo procurador pode receber até quatro processos, exceto o procurador Átila, que não pode receber o processo número 2. O número de maneiras diferentes de se fazer tal distribuição é:

(a) 81

(b) 64

(c) 54

(d) 11

(e) 8

Solução: Note que:

- Para o processo 1 temos três opções de procurador;
- Para o processo 2 temos duas opções de procurador, já que Átila não pode;
- Para o processo 3 temos três opões de procurador;
- Para o processo 4 temos três opções de procurador.

Pelo PFC, temos:

$$3 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 = 54$$

distribuições possíveis. □

Aplicação 6. (CESPE-2007-Petrobrás-Analista de Comércio e Suprimentos Junior) Julgue os itens que se seguem.

Considere que, no final de uma reunião de executivos, foram trocados 78 apertos de mão; cada executivo apertou uma única vez a mão de todos os outros. Nesse caso, o número de executivos presentes na reunião era inferior a 15.

○ Certo

○ Errado

Solução: Seja n o total de executivos. Assim, cada um deu $(n-1)$ aperto de mão. Como a ordem dos executivos ao se cumprimentarem não interessa, (:2). Portanto,

$$\frac{n(n-1)}{2} = 78 \Rightarrow n^2 - n - 256 = 0 \Rightarrow n = 13.$$

□

Aplicação 7. (CESPE/CEBRASPE-2013) Em uma escola do ensino médio, os alunos A, B, C, D, E, F e G foram selecionados para participar da Olimpíada Brasileira de Matemática. Para transportá-los até o local da prova, foram utilizados 2 veículos — I e II — de 4 assentos, além dos assentos dos motoristas. Quatro estudantes foram no veículo I e 3, no veículo II.

Considere que os 7 alunos referidos no texto acima tenham sido escolhidos de forma aleatória em um grupo de 32 alunos. Nessa situação, é correto afirmar que a quantidade de maneiras distintas de se formar um grupo de 7 alunos a partir dos 32 é igual a

(a) $\dfrac{32!}{25!}$

(b) 25!

(c) $\dfrac{32!}{7!}$

(d) 7!

(e) $\dfrac{32!}{7! \cdot 25!}$

Solução: Perceba que:

- temos 32 maneiras para escolhermos o $1^{\underline{o}}$;
- 31 para o $2^{\underline{o}}$;
- 30 para o $3^{\underline{o}}$;
- 29 para o $4^{\underline{o}}$;
- 28 para o $5^{\underline{o}}$;
- 27 para o 6;
- 26 para o $7^{\underline{o}}$.

Assim, pelo PFC, temos:

$$32 \cdot 31 \cdot 30 \cdot 29 \cdot 28 \cdot 27 \cdot 26 = 16963914240$$

Porém, nesse caso a ordem de escolha não importa, logo precisamos desconsiderar desse total todas as permutações formadas pelos sete escolhidos:

$$\frac{32 \cdot 31 \cdot 30 \cdot 29 \cdot 28 \cdot 27.26}{7!} = 3365856.$$

Observe que, $32 \cdot 31 \cdot 30 \cdot 29 \cdot 28 \cdot 27 \cdot 26 = \dfrac{32 \cdot 31 \cdot 30 \cdot 29 \cdot 28 \cdot 27 \cdot 26 \cdot 25!}{25!}$. Logo, a quantidade de maneiras distintas de se formar um grupo é:

$$\frac{32!}{7! \cdot 25!}.$$

□

Aplicação 8. (FCC/TRF-4ª REGIÃO/ANALISTA JUDICIÁRIO/OFICIAL DE JUSTIÇA AVALIADOR FEDERAL/2019) Em um concurso com 5 vagas, os candidatos aprovados serão alocados, cada um, em um dos municípios A, B, C, D ou E. O primeiro colocado foi designado para o município A. O número de possíveis alocações dos outros candidatos aprovados é:

(a) 120

(b) 24

(c) 30

(d) 6

(e) 4

Solução: Para o município A há uma possibilidade, 4 para o B, 3 para o C, 2 para o D e uma para o E. Pelo PFC, temos:

$$1 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24.$$

□

Aplicação 9. (FGV/DPE-RO/TÉCNICO DA DEFENSORIA PÚBLICA/2015) Considere todas as placas de veículos desde NCD-4000 até NCD-9999. O número de placas que possuem os dígitos todos diferentes é:

(a) 2520

(b) 3024

(c) 3528

(d) 3786

(e) 4032

Solução: Note que:

- Para o algarismo das unidades de milhar temos 6 opções (4, 5, 6, 7, 8 e 9);
- Para o algarismo das centenas temos 9 opções, pois já foi usado um no algarismo das unidades de milhar;
- Para o algarismo das dezenas temos 8 opções, pois já foram usados dois, um no algarismo das unidades de milhar e outro nas centenas;
- Para o algarismo das unidades restam 7 opções, pois já foram escolhidos três, um no algarismo das unidades de milhar, outro nas centenas e outro nas unidades.

Pelo PFC, temos:

$$6 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 = 3024.$$

□

Aplicação 10. (ESAF/AFRB/2012) Na prateleira de uma estante, encontram-se 3 obras de 2 volumes e 2 obras de 2 volumes, dispondo-se, portanto, de um total de 10 volumes. Assim, o número de diferentes maneiras que os volumes podem ser organizados na prateleira, de modo que os volumes de uma mesma obra nunca fiquem separados, é igual a:

(a) 3260

(b) 3840

(c) 2896

(d) 1986

(e) 1842

Solução: Podemos permutar as cinco obras, ou seja, (5!). Como cada obra é formada por dois volumes que devem permanecer sempre juntos, então devemos permutar entre si os dois volumes de cada uma das cinco obras, ou seja, $(2!)^5$, Assim, pelo PFC, temos:

$$5! \cdot (2!)^5 = 120 \cdot 32 = 3840.$$

□

Aplicação 11. (FGV/SENADO FEDERAL/ANALISTA LEGISLATIVO/2008) Em uma reunião todas as pessoas se cumprimentaram, havendo ao todo 120 apertos de mão. O número de pessoas presentes nessa reunião foi:

(a) 14

(b) 15

(c) 16

(d) 18

(e) 20

Solução:

- Seja n o total de pessoas presentes na reunião;
- Seja $(n-1)$ a quantidade de aperto que cada uma dá, pois, a pessoa não cumprimenta a se própria e;
- Como a ordem não importa, temos que eliminar as repetições, ou seja, o cumprimento de A com B é o mesmo que B com A (divide o resultado por 2).

Portanto, temos

$$\frac{n(n-1)}{2} = 120 \Rightarrow n^2 - n - 240 = 0 \Rightarrow n = 16.$$

□

Aplicação 12. (FCC/DPE-SP/ANALISTA DE SISTEMAS/2015) Para formar uma senha de quatro letras é permitido o uso de uma letra A, uma letra B, duas letras C e três letras D. Dentre todas as senhas possíveis nesse sistema, o número daquelas que tem exatamente três letras diferentes supera o número das demais em

(a) 28

(b) 24

(c) 42

(d) 36

(e) 30

Solução: Todas as senhas conterão pelo menos duas letras distintas. Usando dois tipos de letras, podemos permutar:

$$ADDD + BDDD + CDDD + CCDD = \frac{4!}{3!} + \frac{4!}{3!} + \frac{4!}{3!} + \frac{4!}{2! \cdot 2!} = 18.$$

Usando três tipos de letras, podemos permutar:

$$ABCC + ABDD + ACDD + ACCD + BCDD + BCCD = \frac{4!}{2!} + \frac{4!}{2!} + \frac{4!}{2!} + \frac{4!}{2!} + \frac{4!}{2!} + \frac{4!}{2!} = 72.$$

Usando quatro letras distintas, podemos permutar:

$$ABCD = 4! = 24.$$

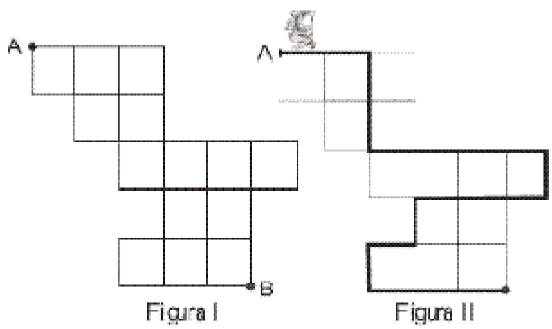
Respondendo à pergunta, teremos,

$$72 - (24 + 18) = 30.$$

□

Aplicação 13. (OBMEP – 2007) Uma formiguinha quer sair do ponto A e ir até o ponto B da figura I, andando apenas pelos lados do quadradinho na horizontal ou na vertical para baixo, sem passar duas vezes pelo mesmo lado. A figura II ilustra um possível trajeto da formiguinha

Figura 4.1: Trajeto da formiguinha.



Fonte: Provas e soluções (2007).

De quantas maneiras ela pode ir de A até B?

(a) 120

(b) 240

(c) 360

(d) 480

(e) 720

Solução: O objetivo da formiga consiste em sair de A e chegar em B, suas dúvidas estão nas opções de se deslocar verticalmente (para baixo), observe que:

- No primeiro momento são 4 opções;
- No segundo 3 opções;

- No terceiro 5 opções;
- No quarto 3 opções;
- No quinto 4 opções.

Pelo princípio multiplicativo, temos:

$$4 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 4 = 720.$$

Portanto, a formiguinha terá 720 opções. □

Aplicação 14. (OBMEP-2019) A rã Zinza quer ir da pedra 1 até a pedra 10 em cinco pulos, pulando de uma pedra para a seguinte ou por cima de uma ou de duas pedras. De quantas maneiras diferentes Zinza pode fazer isso?

Figura 4.2: Caminho da rã Zinza.

Fonte: Provas e soluções (2019).

(a) 10

(b) 35

(c) 45

(d) 84

(e) 126

Solução: Por tentativas, constatamos os possíveis casos de pulos:

1º) 1+2+2+2+2.

2º) 1+1+2+2+3.

3º) 1+1+1+3+3.

Em todos os casos a ordem dos pulos pode variar, daí temos:
1º caso: dos cinco pulos, quatro se repetem, daí ao contarmos teremos que eliminar as permutações envolvendo apenas os quatro que se repetem. Pelo PFC, temos:

$$\frac{5!}{4!} = 5.$$

2º caso: Dos cinco pulos, dois são de 1 em 1 e, dois de 2 em 2, daí ao contarmos teremos que eliminar as permutações envolvendo apenas os de 1 e apenas os de 2. Pelo PFC, temos:

$$\frac{5!}{2! \cdot 2!} = 30.$$

3º caso: Dos cinco pulos, três são de 1 em 1 e os outros dois de 3 em 3, daí ao contarmos teremos que eliminar as permutações envolvendo apenas os de 1 e apenas os de 3. Pelo PFC, temos:

$$\frac{5!}{3! \cdot 2!} = 10.$$

Logo, há 45 maneiras distintas de Zinza executar o percurso em cinco pulos. □

Aplicação 15. Quantos números naturais pares de quatro dígitos e de algarismos distintos podemos formar?

Solução: Sabemos que um número é par quando termina em 0, 2, 4, 6 ou 8, porém o número não pode iniciar com zero, pois caso inicie com zero seria um número com três algarismos. Vamos resolver o problema em duas etapas.

Primeiro calculemos quantos números distintos de quatro algarismos terminam com zero. Para a escolha do algarismo das unidades de milhar há 9 possibilidades; 8 para o das centenas, pois já foram utilizados dois e, sete para o das dezenas, pois já foram utilizados três. Daí, temos:

$$9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 1 = 504.$$

Calculando quantos termina em 2, 4, 6 ou 8: são quatro opções para ocupar o algarismo das unidades; oito para o algarismo das unidades de milhar, exceto o zero e outro número par; oito também para o das centenas e sete para o das dezenas, totalizando

$$8 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 4 = 1792$$

números pares que não terminam com zero.

Portanto, temos $504 + 1792 = 2296$ números pares e distintos formado por quatro algarismos distintos. □

Aplicação 16. Quantos números naturais de 5 algarismos distintos, que sejam menores que 40000 são divisíveis por 5?

Solução: Observe que;

- São duas opções para o algarismo das unidades (0 ou 5);
- Para o algarismo das dezenas de milhar são três (1,2 ou 3);
- 8 para o das unidades de milhar (pois já foram usados dois);
- 7 para o das centenas (pois já foram usados três);
- 6 para o das dezenas (pois já foram usados quatro).

Portanto, pelo Princípio Fundamental da Contagem, temos:

$$3 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 2 = 2016.$$

Logo, há 2016 múltiplos naturais de 5 e menores que 40000, formado por cinco algarismos distintos.

□

Aplicação 17. Numa lanchonete há três tipos de refrigerante [Coca (C), Soda (S) e Fanta (F)] de quantos modos podemos comprar 4 desses refrigerantes?

Solução: Seja $c =$ n$^{\underline{o}}$ de Coca, $s =$ n$^{\underline{o}}$ de Soda e $f =$ n$^{\underline{o}}$ de Fanta, de tal forma que

$$c + s + f = 4.$$

Mantendo a ordem c, s, f e considerando x como sendo a unidade simbólica para cada refrigerante, temos vários modos de fazermos essa escolha, por exemplo:

$$x + x + xx \qquad (1c + 1s + 2f)$$

$$xx + +xx \qquad (2c + 0s + 2f)$$

$$+xxxx+ \qquad (0c + 4s + 0f)$$

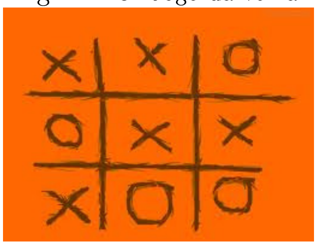
Observe que em cada caso temos seis elementos, sendo quatro x e dois sinais de $+$. Logo, permutando-se todos os elementos temos 6! possibilidades, mas desse total temos que desconsiderar as permutações contabilizadas que levam em consideração a ordem dos quatro x (4!) e dos dois sinais de $+$ (2!), já que não se considera a ordem entre eles. Portanto, pelos PFC - 1ª e 2ª parte, obtemos:

$$\frac{6!}{4! \cdot 2!} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4!}{4! \cdot 2} = 15$$

modos de comprar os refrigerantes. □

Aplicação 18. Quantas são as disposições finais distintas possíveis em um "jogo da velha" iniciado com X e considerando que todos os espaços sejam preenchidos? Observação: não deve ser levada em consideração a ordem de preenchimento, assim como rotações do diagrama (considere-o fixo numa mesma posição)

Figura 4.3: Jogo da velha.



Fonte: Problemão: Jogo da velha.

Solução: São 9 posições a serem preenchidas (9!), sendo 5 com X (5!) e 4 com O (4!). Como a troca de posições entre quaisquer dois X ou quaisquer dois O não resulta numa nova configuração, temos que retirar esse excesso do total de permutações (9!), ou seja,

$$\frac{9!}{5! \cdot 4!} = 126.$$

□

Aplicação 19. Num grupo de dez casais, de quantos maneiras distintas podemos escolher e dispor cinco desses casais em torno de uma mesa circular?

Solução: Vamos primeiro escolher os cinco casais, para isso temos:

- 10 opções para se escolher o primeiro;
- 9 opções para se escolher o segundo;
- 8 opções para se escolher o terceiro;
- 7 opções para se escolher o quarto;
- 6 opções para se escolher o quinto.

Pelo PFC - 2ª parte, como a ordem não importa, temos

$$\frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6}{5!} = 252.$$

Agora vamos dispor os cinco casais escolhidos em torno da mesa circular

- Há uma maneira de se colocar o primeiro casal;
- Há uma maneira de se colocar o segundo casal;
- Há duas maneiras de se colocar o terceiro casal;
- Há três maneiras de se colocar o quarto casal;
- Há quatro maneiras de se colocar o quinto casal;

Pelo PFC - 2ª parte, temos:

$$1 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24.$$

Como cada casal pode permutar entre si, temos:

$$24 \cdot 2 = 48.$$

Portanto, teremos

$$252 \cdot 48 = 12096$$

possibilidades. □

Aplicação 20. (IFPB/Seleção Pós-Graduação em Matemática/2017) Quantos são os anagramas da palavra LAPLACE que começam por vogal?

(a) 180

(b) 360

(c) 540

(d) 1440

(e) 5040

Solução: Perceba que temos vogais repetidas, no caso a vogal A. Dessa forma, devemos separar em dois casos:

- o primeiro começando com a vogal A. Note que, iniciando por A, temos uma dos A fixo e outro permutará com as 5 letras restantes. Assim, pelos Proposições 2 e 3, temos $1 \cdot 6!$ anagramas. Porém, dentro desses, existem combinações repetidas que se originam das permutações entre si dos elementos repetidos, a saber, da consoante L (2!). Logo para eliminarmos essa contagem excessiva basta realizarmos a operação inversa da multiplicação, isto é,

$$\frac{1 \cdot 6!}{2!} = 360.$$

- o segundo iniciando por a vogal E. Assim, restam 6 letras para se permutarem, logo pelo PFC's, temos $1 \cdot 6!$. Mas, temos dois elementos repetidos, dois A e dois L, dessa forma para retirar os elementos repetidos devemos dividir o total de anagramas $(1 \cdot 6!)$, por $2! \cdot 2!$ que são o total de anagramas formados pelas permutações dos A e L, ou seja, os anagramas que não formam novos distintos. Portanto, temos

$$\frac{1 \cdot 6!}{2! \cdot 2!} = 180 \text{ anagramas que iniciam com E.}$$

Dessa forma, pelo princípio aditivo, existem $360 + 180 = 540$ anagramas da palavra LAPLACE que começa por vogal. Isto é, a alternativa E. □

Aplicação 21. (IFPB/Seleção Pós-Graduação em Matemática/2017) Antes de resolver uma prova com 10 questões com 5 alternativas cada, Joãozinho teve umas dicas que diziam o seguinte: "a resposta de nenhuma questão é a letra B, exceto possivelmente a primeira questão e duas questões seguidas não tem a mesma resposta". Qual o maior número de respostas diferentes joãozinho pode ter dado respeitando as dicas?

(a) $20 \cdot 3^8$

(b) $4 \cdot 3^9$

(c) $5 \cdot 3^9$

(d) $2^5 \cdot 3^8$

(e) $2^4 \cdot 3^8$

Solução: Inicialmente, dividiremos a situação em dois momento: o primeiro, em que a primeira questão possui como alternativa a letra B e o segundo momento, o qual a alternativa da primeira questão não é a letra B.
Para o primeiro caso, temos:

- 1 possibilidade para a primeira questão, pois é a letra B;
- 4 escolhas possíveis para a segunda questão, pois pode ser a letra A, C, D, ou E.
- 3 escolhas para a terceira questão, porque não pode ser a letra B e nem a letra da resposta da questão anterior. E de forma análoga ocorre para as demais questões.

Assim, pelo PFC - 1ª parte, temos:

$$1 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 4 \cdot 3^8$$

Para o segundo caso, obtemos:

- 4 possibilidade para a primeira questão, pois não é a letra B;
- 3 escolhas para a segunda questão, porque não pode ser a letra B e nem a letra da resposta da questão anterior. E de forma análoga ocorre para as demais questões.

Logo, pelo PFC - 1ª parte, temos:

$$4 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 4 \cdot 3^9.$$

Portanto, pelo Princípio Aditivo, o maior número de respostas possíveis é:

$$\begin{aligned} 4 \cdot 3^8 + 4 \cdot 3^9 &= 4 \cdot 3^8 \cdot (1+3) \\ &= 4 \cdot 4 \cdot 3^8 \\ &= 2^4 \cdot 3^8. \end{aligned}$$

Dessa forma, a assertiva correta é a letra E. □

Aplicação 22. (Profmat-ENA-2021) Quantos números de três algarismos possuem pelo menos dois dígitos consecutivos iguais?

(a) 90

(b) 100

(c) 171

(d) 180

(e) 271

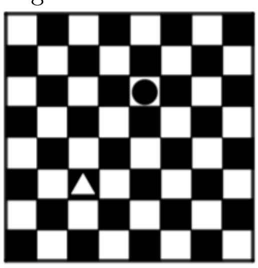
Solução: Note que, temos três casos a considerar:

- os três algarismos iguais. Neste caso, temos 9 possibilidades, pois o algarismo das centenas não pode iniciar por 0.
- os dois primeiros dígitos iguais e o terceiro diferente. Nesse caso, como o dígito das centenas pode ser qualquer algarismo diferente de 0, o das dezenas deve ser igual ao das centenas e o último dígito pode ser qualquer algarismo diferente dos anteriores, temos $9 \cdot 1 \cdot 9 = 81$ números.
- o primeiro dígito distinto dos outros dois iguais. Neste caso, novamente o dígito das centenas é qualquer algarismo exceto o 0, o das dezenas pode ser qualquer algarismo diferente do das centenas e o das unidades deve ser igual ao das dezenas. Desse modo, temos $9 \cdot 9 \cdot 1 = 81$ números.

Portanto, pelo princípio aditivo, temos $9+81+81 = 171$ números que satisfazem as condições do problema. E, com isso, a assertiva correta é a letra C. □

Aplicação 23. (Profmat-ENA-2021) De quantas maneiras e possível posicionar duas peças (um triangulo branco e um círculo preto) sobre um tabuleiro 8×8 como o da figura se o triângulo branco só pode ocupar casas pretas, o círculo preto so pode ocupar casas brancas e as duas peças não podem ocupar casas adjacentes?

Figura 4.4: Tabuleiro.



Fonte: Provas (2021)

(a) 64

(b) 228

(c) 896

(d) 912

(e) 1024

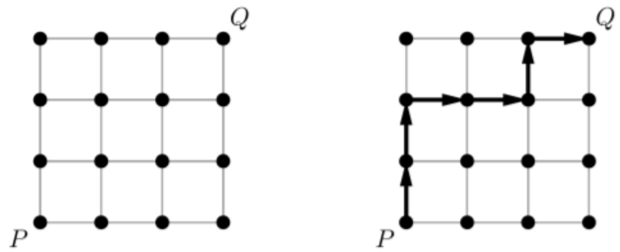
Solução: Note que, existem apenas três maneiras de posicionar o triângulo branco: no canto, na borda ou no interior do tabuleiro.

- Posicionando o triângulo branco no canto, ou seja, temos duas possibilidades, já que ele só pode ocupar as casas pretas. Assim, restam 30 casas brancas disponíveis para o círculo preto, uma vez que não poder ser posicionado em nenhuma das duas casas brancas adjacentes aquela na qual se encontra o triângulo branco. Assim, pelo princípio multiplicativo, há $2 \cdot 30 = 60$ maneiras de arrumar o tabuleiro para este caso.
- Para posicionar o triângulo branco em uma das bordas, temos 12 possibilidades. Feito essa escolha, restam dessa forma 29 casas brancas disponíveis para o círculo preto, já que três das 32 casas brancas serão adjacentes a casa que esta posicionado o triângulo. Assim, existem $12 \cdot 29 = 348$ formas de arrumar o tabuleiro neste caso.
- Para posicionar o triângulo branco no interior do tabuleiro, temos 18 possibilidades. Feito essa escolha, restam dessa forma 28 casas brancas disponíveis para o círculo preto, já que quatro das 32 casas brancas serão adjacentes a casa que esta posicionado o triângulo. Assim, existem $18 \cdot 28 = 504$ formas de arrumar o tabuleiro neste caso.

Portanto, pelo princípio aditivo, há um total de $60 + 348 + 504 = 912$ formas de posicionar as duas peças sobre o tabuleiro. E, assim, a assertiva correta é a letra D. $\square$

Aplicação 24. (Profmat-ENA-2017) Um jogo e disputado em uma malha de 16 pontos, conforme a figura da esquerda abaixo. O jogador A inicia no ponto P e deve chegar ao ponto Q, podendo se deslocar apenas ao longo das retas que unem os pontos e atingir apenas um novo ponto a cada rodada. Em contrapartida, o jogador B inicia no ponto Q e deve chegar ao ponto P sob as mesmas condições. As jogadas acontecem alternadamente, iniciando com o jogador A. Em sua vez, um jogador não pode se deslocar para um ponto que esteja sendo ocupado pelo outro jogador.

Figura 4.5: Jogo em malha.



Fonte: Provas (2017)

Em uma partida ja encerrada, o jogador A percorreu a trajetória destacada na figura da direita acima, atingindo o ponto Q em 6 jogadas. De quantas maneiras diferentes o jogador B pode ter se deslocado, sabendo que ele alcançou o ponto P também em 6 jogadas?

(a) 8

(b) 9

(c) 10

(d) 11

(e) 12

Solução: Para efeito de praticidade de resolução, tomemos o ponto P como sendo (0,0) e o ponto Q como (3,3). Como foram efetuadas 6 jogadas por cada jogador, o possível encontro entre os jogadores A e B seria no ponto R (1,2), já que foi apresentado a trajetória de A e seria o único ponto de encontro na terceira jogada de cada jogador.
Para sair de Q para chegar em P, o jogador B realizou 6! movimentos, porém desse total houve alguns movimentos repetidos, pois ele realizou 3 movimentos para baixo e 3 para a esquerda, tendo assim, um total de $3! \cdot 3!$ movimentos repetidos. Logo, para retirar esses movimentos devemos dividir 6! por $3! \cdot 3!$, ou seja, o jogador B tem $\frac{6!}{3! \cdot 3!} = 20$ maneiras de sair de Q até P.
Mas, ele não pode passar pelo ponto R. Assim, calculemos o total de caminho que, obrigatoriamente, B passa por R para em seguida subtrairmos do total de trajetórias. De forma análoga o que fizemos anteriormente: o total de caminhos de Q a R é $\frac{3!}{2! \cdot 1} = 3$ e de R a P é $\frac{3!}{2! \cdot 1} = 3$, logo passando por R teremos um total de $3 \cdot 3 = 9$ trajetórias.
Portanto, o jogador B possui $20 - 9 = 11$ caminhos possíveis. E, com isso, a assertiva correta é a letra D. □

Aplicação 25. (Profmat-2016) De quantas maneiras distintas podemos colocar, em cada espaço abaixo, os algarismos 2, 3, 4, 7, 8, 9, de modo que todos os seis algarismos apareçam e formem, em cada membro, números de dois algarismos que satisfaçam as duas desigualdades?

$$\_\,\_ < \_\,\_ < \_\,\_$$

(a) 20

(b) 26

(c) 60

(d) 120

(e) 720

Solução: Temos que escolher três algarismos quaisquer para as dezenas entre os seis possíveis, assim:

$$6 \cdot 5 \cdot 4 = 120.$$

como a ordem não importa, precisamos eliminar as permutações entre os três elementos escolhidos, para tanto basta fazermos a operação inversa, ou seja,

$$\frac{120}{P_3} = 20.$$

Como são distintos, só há uma maneira de ordená-los em ordem crescente. Restam três algarismos para as unidades e, como os algarismos das dezenas são distintos, podemos permuta-los nos espaços das unidades,

$$3 \cdot 2 \cdot 1 = 6.$$

Temos então, 20 maneiras distintas para ocupar os espaços dos algarismos das dezenas e 6 para as unidades, pelo Princípio Multiplicativo,

$$20 \cdot 6 = 120.$$

□

Portanto, percebemos o quanto o Princípio Fundamental da Contagem possui aplicabilidade e influência nos conceitos e na resolução de problemas no que tange à Análise Combinatória básica. Como também, esse conhecimento exige dos estudantes e candidatos de concursos um certo grau de raciocínio para a resolução das questões.

5. CONSIDERAÇÕES FINAIS

Esse trabalho propôs um detalhadamente do Princípio Fundamental da Contagem, visando identificar causas que dificultam o processo de ensino-aprendizagem desse importante conhecimento, para isso, levou-se em consideração a forma metodológica como nos foi proposto em sala de aula, como está sendo proposto por alguns livros didáticos adotados nas escolas, livros de história da matemática e artigos científicos.

Para se obter uma compreensão mais contundente de como ele influência diretamente no entendimento dos conceitos e na resolução de problemas no que tange à Análise Combinatória básica, definiu-se os seguintes objetivos: primeiro, fazer uma revisão histórica da evolução e criação, onde verificou-se que é um conhecimento que vem se ampliando à medida que surgem necessidades ou inquietações humanas. Segundo apresentar Fatorial, Permutações, Arranjos e Combinações sempre a partir do Princípio Multiplicativo, já que são casos especiais dele. O terceiro e último foi resolver os problemas de contagem propostos ao logo do trabalho sempre a partir do Princípio Fundamental da Contagem, visando uma melhor internalização conceitual.

Portanto, esta abordagem abdicou-se das fórmulas prontas e optou pela valorização da compreensão conceitual, em que o estudante é estimulado a criar seu próprio modelo de resolução, tornando assim o processo de ensino aprendizagem mais dinâmico, envolvente e criativo.

Pode-se perceber a matemática em tudo, o que faz variar essa percepção é o nível de conhecimento de cada indivíduo. Como sugestão para extensão deste trabalho, sugere-se uma abordagem do Princípio Fundamental da Contagem atrelada a situações do cotidiano.

Referências Bibliográficas

[1] ALAMY. **Arquimedes de Siracusa**. Disponível em: <https://www.alamy.es/foto-arquimedes-de-siracusa-49829129.html>. Acesso em: 05 de junho de 2021.

[2] BAIÃO, Joaquim. **Soma infinita**. Stomachion. 14 de janeiro de 2015. Disponível em: <http://4.bp.blogspot.com/-EVqUd2JVC5g/ThSjXhmoQXI/AAAAAAAAAK4/sDnT5ethwVA/s1600/stomachion.jpg>. Acesso em: 05 de junho de 2021.

[3] BIANCHI, Maria Isabel Zanutto. **Uma reflexão sobre a presença da história matemática nos livros didáticos**. 103 f. Dissertação (Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática – Área de Concentração em Ensino e Aprendizagem da Matemática e seus Fundamentos Filosófico-Científicos), Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista. Rio Claro. 2006. Disponível em: <https://repositorio.unesp.br/bitstream/handle/11449/91102/bianchi_miz_me_rcla.pdf?sequen>. Acesso em: 05 de janeiro de 2022.

BOSQUILHA, Alessandra. CORRÊA, Marlene Lima Pires. VIVEIRO, Tânia Cristina Neto G. **Minimanual compacto de matemática**: teoria e prática : ensino médio. 2. ed. São Paulo : Rideel, 2003.

[4] BOYER, Carl Benjamin. **História da matemática**. Tradução: Elza F. Gomide. São Paulo: Editora da Universidade de São Paulo, 1974.

[5] BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais**: Matemática. Brasília, DF, 1999. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/matematica.pdf>. Acesso em: 27 de julho de 2021.

[6] D'AMBROSIO, Ubiratan. **Educação matemática**: Dá teoria à prática. Campinas - SP: Papirus, 1996. Disponível em: <http://www.iftmituiutaba.com.br/upload/editais/Educa%C3%A7%C3%A3o_Matem%C3%A1tica.pdf>. Acesso em: 05 de janeiro de 2022.

[7] EVES, Howard. **Introdução à história da matemática**. Tradução: Hygino H. Domingues. Campinas, SP: Editora da UNICAMP, 2004.

[8] HAZZAN, Samuel. **Fundamentos de matemática elementar:** combinatória e probabilidade. 8 ed. São Paulo: Atual, 2013.

[9] LIMA, Elon Lages. CARVALHO, Paulo Cezar Pinto. WAGNER, Eduardo. MORGADO, Augusto César. **A Matemática do Ensino Médio**. Vol 2. 7 ed. Rio de Janeiro: SBM, 2016.

[10] MORGADO, Augusto César. CARVALHO, João Bosco Pitombeira de. CARVALHO, Paulo Cezar Pinto. FERNANDEZ, Pedro. **Análise combinatória e probabilidade**. 9 ed. Rio Janeiro: SBM, 1991.

[11] PROBLEMÃO: JOGO DA VELHA. **Clubes de matemática da OBMEP**: Disseminando o estudo da matemática. Disponível em: <http://clubes.obmep.org.br/blog/11865-2/>. Acesso em: 12 de agosto 2021.

[12] PROVAS E SOLUÇÕES. **OBMEP**, 2007. Disponível em: <https://drive.google.com/file/d/1BGJpb-iHexweRkRPXCpx7AmMP7edZhkR/view>. Acesso em: 25 de julho de 2021.

[13] PROVAS E SOLUÇÕES. **OBMEP**, 2019. Disponível em: <https://drive.google.com/file/d/1WQrUhNr44io3wXCqRX6WlU_9_ygobctD/view>. Acesso em: 25 de julho de 2021.

[14] PROVAS - EXAMES NACIONAL DE ACESSO. **Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional**, 2017. Disponível em: <https://sbm.org.br/profmat/wp-content/uploads/sites/4/sites/4/2021/10/Gabarito_com_Solucoes_PROVA_2.pdf>. Acesso em: 10 de agosto de 2021.

[15] PROVAS - EXAMES NACIONAL DE ACESSO. **Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional**, 2016. Disponível em: <https://sbm.org.br/profmat/wp-content/uploads/sites/4/sites/4/2021/10/ENA-2016-Solucoes-com-Gabarito.pdf>. Acesso em: 10 de agosto de 2021.

[16] PROVAS - EXAMES NACIONAL DE ACESSO. **Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional**, 2021. Disponível em: <https://profmat-sbm.org.br/wp-content/uploads/sites/4/sites/4/2021/10/Gabarito-ENA-2021-com-Solucoes-das-Objetivas.pdf>. Acesso em: 10 de agosto de 2021.

[17] SANTOS, Virgilio Marques dos. Diagrama de Árvore: o que é e como fazer o diagrama?. **FM2S Educação e Consultoria**, 2017. Disponível em: <https://www.fm2s.com.br/diagrama-de-arvore/:~:text=O%20Diagrama%20de%20%C3%81rvore%2C%20tamb%C3%A9m,os%20galhos%20de%20uma%20%C3%A1rvore>. Acesso em: 15 de novembro de 2021.

INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA DA PARAÍBA
Campus Cajazeiras
Rua José Antônio da Silva, 300, Jardim Oásis, CEP 58.900-000, Cajazeiras (PB)
CNPJ: 10.783.898/0005-07 - Telefone: (83) 3532-4100

Documento Digitalizado Ostensivo (Público)

Pedido de inserção do TCC no repositório digital

Assunto: Pedido de inserção do TCC no repositório digital
Assinado por: Ricardo Oliveira
Tipo do Documento: Termo
Situação: Finalizado
Nível de Acesso: Ostensivo (Público)
Tipo do Conferência: Cópia Simples

Documento assinado eletronicamente por:

- **Ricardo Cardoso de Oliveira**, **ALUNO (202012210022) DE ESPECIALIZAÇÃO EM MATEMÁTICA - CAJAZEIRAS**, em 25/08/2022 22:03:14.

Este documento foi armazenado no SUAP em 25/09/2022. Para comprovar sua integridade, faça a leitura do QRCode ao lado ou acesse https://suap.ifpb.edu.br/verificar-documento-externo/ e forneça os dados abaixo:

Código Verificador: 634199
Código de Autenticação: d097ffd4d5