



**INSTITUTO FEDERAL**  
**Paraíba**  
**Campus Campina Grande**

**INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA DA PARAÍBA**  
**CAMPUS CAMPINA GRANDE**  
**CURSO DE ESPECIALIZAÇÃO EM ENSINO DE MATEMÁTICA**

**GEOVANE TAVARES NOGUEIRA**

**GEOMETRIA PLANA - PONTOS NOTÁVEIS DE UM TRIÂNGULO E A**  
**DEMONSTRAÇÃO DA RETA DE EULER**

**CAMPINA GRANDE - PB**

**2022**

**GEOVANE TAVARES NOGUEIRA**

**GEOMETRIA PLANA - PONTOS NOTÁVEIS DE UM TRIÂNGULO E A  
DEMONSTRAÇÃO DA RETA DE EULER**

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao curso de especialização em Ensino de Matemática do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia da Paraíba (IFPB), como requisito parcial para para obtenção do título de Especialista em Matemática.

Orientador: Prof. Me. Orlando Batista de Almeida

N778g Nogueira, Geovane Tavares.

Geometria plana - pontos notáveis de um triângulo e a demonstração da reta de Euler. - Campina Grande, 2022.  
80 f. : il.

Trabalho de Conclusão de Curso (Curso de Especialização em Ensino de Matemática) - Instituto Federal da Paraíba, 2022.

Orientador: Prof. Me. Orlando Batista de Almeida.

1. Geometria plana 2. Geogebra 3. Reta Euler 4. Cevianas I. Almeida, Orlando Batista II. Título.

CDU 514

**GEOVANE TAVARES NOGUEIRA**

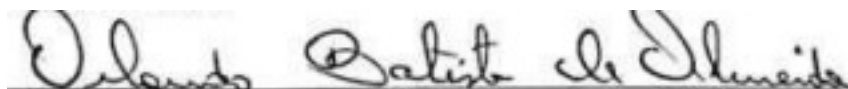
**GEOMETRIA PLANA - PONTOS NOTÁVEIS DE UM TRIÂNGULO E A  
DEMONSTRAÇÃO DA RETA DE EULER**

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao curso de especialização em Ensino de Matemática do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia da Paraíba (IFPB), como requisito parcial para obtenção do título de Especialista em Matemática.

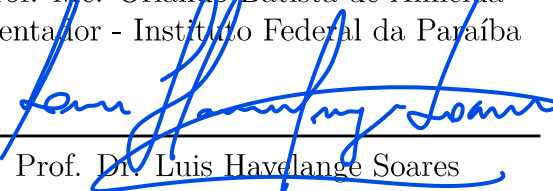
Orientador: Prof. Me. Orlando Batista de Almeida

Aprovado em: 07/10/2022

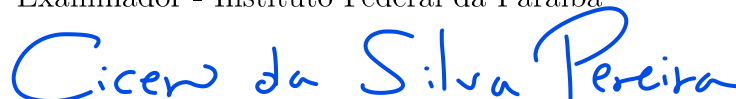
**BANCA EXAMINADORA**



Prof. Me. Orlando Batista de Almeida  
Orientador - Instituto Federal da Paraíba



Prof. Dr. Luis Havdange Soares  
Examinador - Instituto Federal da Paraíba



Prof. Me. Cicero da Silva Pereira  
Examinador - Instituto Federal da Paraíba

Dedico este trabalho à: minha esposa **Jucimeri Ismael**, aos meus pais José Geraldo e Maria Arlete, a toda minha família, em especial a minha tia-madrinha Madalena, e aos meus filhos pets (Amil, Liam Pompom, Chocolate e Palmeirense).

## AGRADECIMENTOS

A Deus pela proteção e saúde que tem me dado;

A minha esposa Jucimeri Ismael, pela paciência, compreensão, carinho e incentivo para que conseguisse chegar ao final dessa etapa;

Aos meus pais Geraldo e Maria Arlete pelo amor, carinho e compreensão durante todo o tempo do curso, o que sempre me fez continuar e querer chegar ao fim desta jornada.

Aos meus irmãos Aridomar e Leonardo por sempre torcerem por mim.

Ao meu tio Joacil e a sua esposa Francisca pelo apoio e auxílio durante a realização deste curso;

A meus sogros (Socorro Ismael e José da Costa) e aos cunhados Mateus e Jucinaldo por todo o apoio;

Ao meu orientador Orlando Batista de Almeida, pela confiança e ensinamentos, principalmente, por me fazer refletir com criticidade sobre o tema abordado, proporcionando minha evolução enquanto professor/pesquisador;

Aos professores Luis Havelange e Cicero da Silva por aceitarem participar da banca examinadora, pelas sugestões para melhoria deste trabalho e pelo que fizeram por mim durante todo o curso da especialização;

Ao IFPB pela oferta de um curso de especialização em uma Instituição de qualidade e com profissionais competentes, diante disso, agradeço a todos os professores do curso de Especialização em Ensino de Matemática, ao pessoal da limpeza e a todos que fazem parte do IFPB - Campus Campina Grande;

Aos colegas do curso que fiz durante essa jornada.

*“Há aqueles que já nascem póstumos”  
(Friedrich Wilhelm Nietzsche )*

## RESUMO

Esta pesquisa desencadeou-se a partir de estudos realizados sobre a demonstração do teorema do famoso matemático Leonard Euler (1707 – 1783), denominado por Reta de Euler, que aborda a colinearidade de alguns pontos notáveis presentes no polígono triângulo. Sendo assim, o objetivo desse trabalho foi de abordar os principais resultados da geometria plana envolvendo o triângulo, enfatizando os principais pontos notáveis para serem utilizados na demonstração da reta de Euler, sempre utilizando o software Geogebra para a plotagem gráfica, trazendo uma melhor visualização dos resultados obtidos, deixando um material consultivo para os professores da Educação básica que muitas das vezes sentem dificuldades em ministrarem conteúdos envolvendo Geometria Plana. Desse modo, o presente trabalho objetiva, também, enriquecer o currículo dos docentes e da etapa do Ensino Médio. Por fim, deixamos uma sugestão metodológica envolvendo a Geometria plana mais precisamente envolvendo estudo sobre pontos notáveis de um triângulo e a reta de Euler com a utilização de metodologias ativas no que se refere a Storyrelling.

**Palavras-chave:** Cevianas. Geogebra. Geometria Plana. Pontos notáveis em um triângulo. Reta de Euler.



## ABSTRACT

This research was triggered from studies carried out on the demonstration of the theorem of the famous mathematician Leonard Euler (1707 – 1783), called Euler's Line, which addresses the collinearity of some notable points present in the triangle polygon. Therefore, the objective of this work was to address the main results of plane geometry involving the triangle, emphasizing the main notable points to be used in the demonstration of Euler's line, always using the Geogebra software for graphic plotting, bringing a better visualization of the results obtained, leaving an advisory material for basic education teachers who often experience difficulties in teaching content involving Plane Geometry. Thus, the present work also aims to enrich the curriculum of teachers and of the high school stage. Finally, we leave a methodological suggestion involving plane geometry more precisely involving the study of notable points of a triangle and Euler's line with the use of active methodologies with regard to Storytelling.

**Keywords:** Cevians. Geogebra. Plane Geometry. Notable points in the triangle. Euler's line.

## LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1 – Representação gráfica para Ponto, Reta e Plano . . . . .	18
Figura 2 – Pontos e reta . . . . .	18
Figura 3 – Retas concorrentes . . . . .	19
Figura 4 – Pontos e noção de estar entre . . . . .	19
Figura 5 – Segmento de Reta . . . . .	20
Figura 6 – Semirreta AB . . . . .	20
Figura 7 – Semirretas opostas . . . . .	21
Figura 8 – União de Segmentos . . . . .	22
Figura 9 – Regiões convexa (esquerda) e não convexa (direita) . . . . .	22
Figura 10 – Regiões angulares no plano . . . . .	23
Figura 11 – Ângulos adjacentes . . . . .	24
Figura 12 – Ângulos suplementares . . . . .	24
Figura 13 – Ponto de intersecção entre duas retas concorrentes . . . . .	25
Figura 14 – Ângulo Reto . . . . .	26
Figura 15 – Ângulos formados por três retas . . . . .	27
Figura 16 – Unicidade da reta perpendicular passando por um ponto de uma reta dada . . . . .	27
Figura 17 – Ângulos alternos internos e colaterais internos. . . . .	28
Figura 18 – Pontos colineares . . . . .	29
Figura 19 – Pontos não-colineares . . . . .	29
Figura 20 – Triângulo ABC . . . . .	30
Figura 21 – Construção do triângulo com as condições propostas . . . . .	30
Figura 22 – Construção do triângulo com as condições dada . . . . .	31
Figura 23 – Triângulo que mostra a soma das medidas dos ângulos internos . . . . .	32
Figura 24 – Ângulo Externo de um triângulo . . . . .	33
Figura 25 – Ordem dos lados e Ângulos de Triângulo . . . . .	34
Figura 26 – Triângulo para entender a desigualdade triangular . . . . .	35
Figura 27 – Figura que mostra o perímetro de um triângulo . . . . .	37
Figura 28 – Triângulo Escaleno . . . . .	38
Figura 29 – Triângulo Isósceles . . . . .	38
Figura 30 – Triângulo Equilátero . . . . .	39
Figura 31 – Triângulo Acutângulo . . . . .	40
Figura 32 – Triângulo Retângulo . . . . .	40
Figura 33 – Triângulo Obtusângulo . . . . .	41
Figura 34 – Triângulos congruentes . . . . .	42
Figura 35 – Caso de congruência LAL . . . . .	43

Figura 36 – Caso de congruência ALA	43
Figura 37 – Caso de congruência LLL	44
Figura 38 – Caso de congruência LAA <sub>O</sub>	45
Figura 39 – Caso especial de congruência	45
Figura 40 – Ângulos da base congruentes de um triângulo	46
Figura 41 – Triângulo com ângulos da base congruentes	47
Figura 42 – Cevianas de um triângulo	48
Figura 43 – Cevianas concorrentes	48
Figura 44 – Ponto Médio de um segmento	50
Figura 45 – Mediana de um triângulo	51
Figura 46 – Medianas de um triângulo	51
Figura 47 – Bissetriz Interna de um triângulo	52
Figura 48 – Bissetrizes Internas de um triângulo	52
Figura 49 – Figura que ajuda entender o Teorema da Bissetriz Interna de um triângulo	53
Figura 50 – Ilustração com os dados do problema	55
Figura 51 – Bissetriz de um ângulo	55
Figura 52 – Alturas de um triângulo Acutângulo	56
Figura 53 – Alturas de um triângulo Retângulo	57
Figura 54 – Alturas de um triângulo Obtusângulo	57
Figura 55 – Mediatrizes de um triângulo	58
Figura 56 – Pontos de uma mediatriz	59
Figura 57 – Paralelogramo	60
Figura 58 – Ilustração dos ângulos opostos congruentes de um paralelogramo	60
Figura 59 – Ilustração do Teorema da Base Média de um Triângulo	61
Figura 60 – Baricentro de um triângulo	64
Figura 61 – Ilustração que mostra as relações do Baricentro	64
Figura 62 – Incentro de um triângulo	65
Figura 63 – Circunferência inscrita em um triângulo	66
Figura 64 – Circuncentro no triângulo Acutângulo	67
Figura 65 – Circuncentro no triângulo Retângulo	68
Figura 66 – Circuncentro no triângulo Obtusângulo	68
Figura 67 – Ortocentro de um triângulo Acutângulo	69
Figura 68 – Ortocentro Interno em um triângulo	70
Figura 69 – Ortocentro sobre o vértice de um triângulo	70
Figura 70 – Ortocentro Externo em um triângulo	71
Figura 71 – Reta que contém os pontos: Baricentro e Circuncentro	72
Figura 72 – Ilustração da Reta de Euler	73

## LISTA DE SÍMBOLOS

$\alpha$	Letra grega alfa
$\Gamma$	Letra grega Gama
$\lambda$	Letra grega Lambda
$\theta$	Letra grega minúscula teta
$\beta$	Letra grega betta
A, B, C, ...	Representação para pontos
r, s, t, ...	Representação para retas
$\cup$	União
$\cap$	Interseção
$\subset$	Contido
$\in$	Pertence
$\notin$	Não pertence
$\equiv$	Congruente ou coincidentes
$\{P\}$	Ponto P
$\overline{AB}$	Segmento de reta
$\overleftrightarrow{AB}$	Reta
$\overleftarrow{AB}$	Semirreta de origem no ponto B
$\overrightarrow{AB}$	Semirreta de origem no ponto A
$\widehat{AOB}, \widehat{AOB}, \widehat{O}$	Medida do ângulo O
	Tal que
	Paralelismo
$\perp$	Perpendicularismo
O.P.V	Ângulos opostos pelo vértice

# SUMÁRIO

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO</b>	<b>14</b>
1.1	Justificativa, Objetivos e Metodologia	16
1.1.1	Justificativa	16
1.1.2	Objetivo Geral	16
1.1.3	Objetivo Específico	16
<b>2</b>	<b>RESULTADOS PRELIMINARES DA GEOMETRIA PLANA</b>	<b>17</b>
2.1	Noções e Proposições Primitivas	17
2.1.1	Retas concorrentes	19
2.2	Segmentos de reta	19
2.2.1	Segmentos	21
2.2.2	Congruência de Segmentos	21
2.3	Ângulo	22
2.4	Triângulo	29
2.5	Classificação do triângulo	37
2.5.1	Quanto as medidas dos seus lados	38
2.5.2	Quanto as medidas dos seus ângulos internos	39
2.6	Congruência de triângulos	41
2.6.1	1º caso de congruência: LAL - Lado, Ângulo, Lado	42
2.6.2	2º caso de congruência: ALA - Ângulo, Lado, Ângulo	43
2.6.3	3º caso de congruência: LLL - Lado, Lado, Lado	44
2.6.4	4º caso de congruência: LAA <sub>0</sub> - Lado, Ângulo, Ângulo oposto	44
2.6.5	Caso especial de congruência de triângulos retângulos	45
2.7	Relação de ângulos internos no triângulo isósceles	46
2.8	Alguns elementos notáveis presentes no triângulo	47
2.8.1	Mediana de um triângulo	50
2.8.2	Bissetriz Interna de um Triângulo	51
2.8.3	Altura de um triângulo	56
2.8.4	Mediatriz de um triângulo	58
2.9	Quadriláteros notáveis	59
<b>3</b>	<b>Pontos Notáveis de um triângulo e a Reta de Euler</b>	<b>63</b>
3.1	Baricentro	63
3.2	Incentro	65
3.3	Circuncentro	66
3.4	Ortocentro	68
3.5	Reta de Euler	71
<b>4</b>	<b>SUGESTÃO METODOLÓGICA</b>	<b>74</b>

4.1	STORYTELLING: COMO UMA ABORDAGEM METODOLÓGICA PARA	
	O ENSINO DE GEOMETRIA . . . . .	75
4.2	PROPOSTA DE ENSINO . . . . .	75
5	CONSIDERAÇÕES FINAIS . . . . .	78
	REFERÊNCIAS . . . . .	80

# 1 INTRODUÇÃO

As tecnologias chegaram para contribuir com a educação, e sabendo que os alunos de hoje estão sempre conectados, é de grande importância que os educadores façam o uso dessas tecnologias para contribuir com o ensino-aprendizagem da Matemática, que é um componente temido por muitos docentes, na maioria das vezes.

Sendo assim, a utilização de um recurso didático nas aulas, leva os alunos a aprenderem o conteúdo de forma dinâmica e pensativa e não de uma maneira já pronta e acabada, pois o recurso dispõe da capacidade de pensar do aluno, ou seja, é o momento em que o estudante coloca a mente para funcionar.

Diante disso, pensando nas dificuldades apresentadas por grande parte dos professores da educação básica em relação ao ensino de Geometria, fato esse, que acontece por déficit em grande parte da formação acadêmica nessa área da matemática, fazendo com que os professores não se sintam seguros em lecionar essa área, abordando de forma rápida sem a preocupação de abordar os detalhes importantes que estão por trás daquele conteúdo e muitas das vezes, nem isso acontece.

Sendo assim, a escolha desse tema se motiva em tentar abordar os principais resultados referentes aos pontos notáveis do triângulo que estão presentes no nosso cotidiano, de forma a construir um material que ajudasse aos professores da Educação Básica a suprirem esses déficits que a grande maioria apresenta em relação ao ensino de Geometria.

Abordaremos nesse trabalho alguns resultados importantes da geometria, principalmente aqueles envolvendo o polígono triângulo com o foco em alguns de seus pontos notáveis e na demonstração da Reta de Euler.

Segundo (VILAR, 2020), **Leonhard Euler**, nasceu em 15 de abril de 1707 e morreu em 18 de setembro de 1783. Foi o matemático mais prolífico na história. Os 866 livros e artigos dele representam aproximadamente um terço do corpo inteiro de pesquisa em matemática, teorias físicas, e engenharia mecânica publicadas entre 1726 e 1800. Em matemática pura, ele integrou o cálculo diferencial de Leibniz e o método de Newton em análise matemática; refinou a noção de uma função; criou muitas notações matemáticas comuns, além disso, introduziu as funções transcendentais Beta  $\beta$  e gama  $\Gamma$ .

A palavra **Geometria** vem do grego *Geometrein* (*Geo* "terra", *metrein* "medida") ou seja, se trata do estudo da medida da Terra. O historiador Herodotus (século 5 a.C.), acredita ao povo egípcio pelo início do estudo da geometria, porém outras civilizações antigas ("babilônios", "hindu" e "chineses") também possuíam muito conhecimento da geometria.

Existe na literatura uma obra chamada de **Os Elementos de Euclides** que reúne cerca de 13 livros escritos (nos dias atuais, seriam 13 capítulos) pelo matemático grego Euclides<sup>1</sup> em Alexandria por volta de 300 a.C, destes, os quatro primeiros abordam a

<sup>1</sup> Euclides foi um matemático grego que viveu em Alexandria, no Egito, durante aproximadamente

Geometria Plana conhecida da época, enquanto os demais são geometria espacial e a teoria dos números e dos incomensuráveis.

Euclides de Alexandria foi o responsável pelo desenvolvimento da Geometria Euclidi-ana, uma vez que seus conhecimentos geométricos são baseados em seus postulados ou axiomas que são cinco noções admitidas como verdades óbvias. Na verdade o que Euclides faz é construir axiomáticamente a Geometria Plana através do método axiomático <sup>2</sup>.

Sendo assim, Euclides ficou conhecido como **Pai da Geometria** e seu trabalho se destacou pelo fato, que com a utilização de apenas cinco postulados ter-se conseguido deduzir mais de uma centena de proposições. Para uma leitura mais aprofundada sobre a temática, é sugerida a leitura da obra *Os elementos* encontrada em (BICUDO, 2009).

Entre os polígonos, que são linhas fechadas formadas apenas por segmentos de reta que não se cruzam a não ser em suas extremidades, o triângulo tem um destaque especial, uma vez que através dele pode-se compreender diversas teorias da matemática, além de fazer uso de sua estrutura na construção de outros diversos polígonos.

De acordo com (SILVA, 2013), há muitos anos, alguém desenhou um triângulo e três segmentos, que é uma parte de uma reta que possui um ponto inicial e um ponto final, chamados de “extremos”, onde cada segmento era obtido ligando-se cada um dos vértices do triângulo ao ponto médio do seu lado oposto. Ele percebeu que esses três segmentos sempre se intersectavam em um único ponto independentemente do tipo de triângulo que se construiu inicialmente, seja: escaleno, isósceles ou equilátero.

Após esse acontecimento, a notícia chegou aos quatro cantos da cidade e esse episódio foi considerado uma obra de um poder superior e ficou conhecido como a magia dos três segmentos. Séculos depois desse ocorrido, foi demonstrado que as três medianas de um triângulo realmente se encontrava em um ponto que sempre será interno ao triângulo construído, independentemente de qual tipo seja (Escaleno, isósceles ou equilátero) e ao encontro desses segmentos se deu o nome de **baricentro** ou **centróide**.

Também foram encontrados outros pontos notáveis do triângulo sendo denominados de **incentro**, **circuncentro** e **ortocentro**.

Dessa forma, esse trabalho organiza-se da seguinte forma; no segundo capítulo temos os conhecimentos prévios de geometria plana com os resultados e definições necessárias.

No terceiro capítulo será abordado os quatro pontos notáveis mais conhecidos do triângulo - baricentro, incentro, circuncentro e ortocentro - em 5 seções. Onde em cada uma delas é trabalhado com clareza cada um desses pontos notáveis e a última seção foi destinada a demonstração da reta de Euler que faz uso de alguns desses pontos trabalhados nas seções anteriores.

---

entre 323-283 a.C., no reinado de Ptolomeu I. Euclides é considerado como o Pai da Geometria. Escreveu treze volumes em sua obra principal, chamada Os Elementos. Considerada como uma das mais influentes e bem sucedidas obras da história da matemática bem como do ensino dela, foi usada por mais de 2000 anos.

<sup>2</sup> No Método Axiomático tomam certos fatos como axiomas, sem exigir nenhuma prova lógica, ou seja, sem a necessidade de demonstração, pois são uma verdade óbvia em si.



Por fim, teremos as considerações finais e referências bibliográficas utilizadas nesse trabalho.

## 1.1 JUSTIFICATIVA, OBJETIVOS E METODOLOGIA

### 1.1.1 Justificativa

Existe uma enorme dificuldade dos professores ao lecionarem para os discentes conteúdos geométricos, creditando-se a isso, o fato de possuírem formações acadêmicas inadequadas, ou ainda, considerarem a geometria como algo desvinculada da realidade.

Buscamos assim, propor propostas para aperfeiçoar o processo de ensino e aprendizagem com relação aos estudos de Geometria abordando os pontos notáveis do triângulo e alguns resultados importantes que são decorrentes dos mesmos, como por exemplo, a demonstração da reta de Euler.

### 1.1.2 Objetivo Geral

O objetivo geral deste trabalho é a exposição dos elementos da Geometria Plana, com necessários conteúdos prévios, exemplos detalhados com o intuito de se trabalhar com os Pontos Notáveis presentes no triângulo e utilizá-los na demonstração da Reta de Euler.

### 1.1.3 Objetivo Específico

Apresentar com precisão e detalhes os conceitos matemáticos necessários a respeito da Geometria plana envolvendo o polígono triângulo e alguns de seus pontos notáveis, além de buscar proporcionar um material que possa servir de consulta e aprofundamento a professores da Educação Básica.

## 2 RESULTADOS PRELIMINARES DA GEOMETRIA PLANA

Nesse capítulo serão apresentados alguns principais resultados e definições da Geometria Plana principalmente aquelas relacionadas ao polígono **triângulo** que podem servir de aprofundamento à professores da Educação Básica.

Os resultados aqui abordados foram obtidos de (VIGLIONI, 2011); (BARBOSA, 1995); (SILVA, 2020); (BIANCHINI, 2018); (BICUDO, 2009); (BONJORNO, 2020); (NETO, 2013); (DANTE, 2018); (DOLCE; POMPEO, 2013); (SILVA, 2013); (SAMPAIO, 2018); (VILAR, 2020); (JUNIOR, 2014);

### 2.1 NOÇÕES E PROPOSIÇÕES PRIMITIVAS

As noções (conceitos, termos, entes) geométricos são estabelecidas por meio de **definição**. Já as **noções primitivas** são adotadas (aceitas) sem a definição, consideraremos como noções primitivas, as noções intuitivas do ponto, da reta e do plano.

**Ponto** é a representação geométrica mais simples, os pontos não têm dimensão, e são representados no plano. Geralmente são usadas letras latinas maiúsculas ( $A, B, C, \dots$ ) para fazer sua representação.

**Reta** é uma linha formada por infinitos pontos que seguem uma mesma direção e são consecutivos. Toda reta pode ser determinada por dois pontos distintos, são infinitas, ocupam apenas uma dimensão no plano, numa reta há infinitos pontos e elas podem estar em três posições diferentes (horizontal, vertical e inclinada). Podendo ser representada por letras latinas minúsculas ( $a, b, c, d, e, f, \dots$ ).

**Plano** são figuras geométricas bidimensionais que podem ser determinadas por três pontos não colineares, por uma reta e um ponto fora dela, por duas retas concorrentes e por duas retas paralelas distintas ( não coincidentes). O plano é constituído de infinitos pontos e infinitas retas. São utilizadas letras gregas minúsculas para sua representação [ $\alpha$ (alfa),  $\beta$ (beta),  $\gamma$ (gama),  $\theta$ (teta),  $\phi$ (fi),  $\dots$ ].

De cada um desses entes, tem-se o conhecimento intuitivo, decorrente da experiência e da observação.

Esses entes também podem ser representados graficamente:

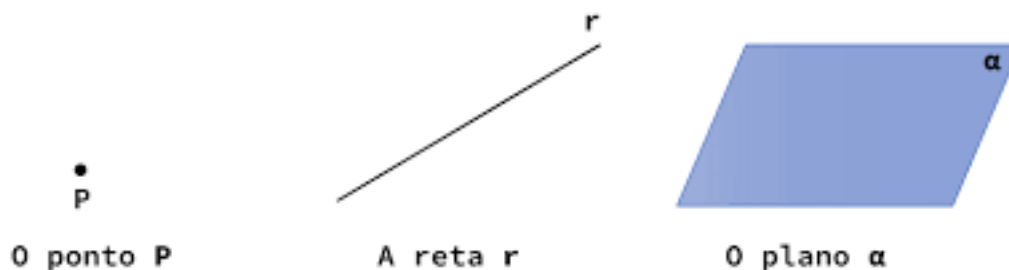
As **Proposições** (propriedades, afirmações) geométricas são aceitas mediante demonstrações.

Os postulados ou axiomas são aceitos sem demonstração. Veremos alguns postulados relacionados ao Ponto, a Reta e Ao Plano.

- **Postulado da existência:**

- (a) Numa reta, bem como fora dela, existem infinitos pontos.

Figura 1 – Representação gráfica para Ponto, Reta e Plano

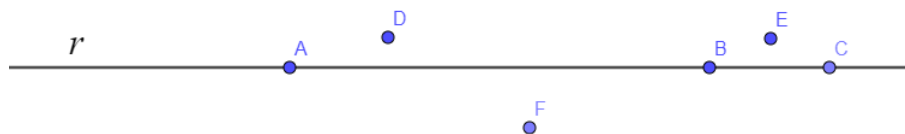


Fonte: (DOLCE; POMPEO, 2013)

- (b) Num plano há infinitos pontos.

A Figura 2 representa uma reta  $r$  e os pontos  $A, B, C, D, E$  e  $F$ , sendo que: os pontos  $A, B$  e  $C$  estão na reta  $r$ , ou seja, essa reta passa pelos pontos  $A, B$  e  $C$  e podemos fazer a seguinte identificação:  $A \in r$ ,  $B \in r$  e  $C \in r$ . Já os pontos  $D, E$  e  $F$  não pertencem a reta  $r$ , ou seja a reta  $r$  não passa por esses pontos e podemos indicar da seguinte maneira:  $D \notin r$ ,  $E \notin r$  e  $F \notin r$ .

Figura 2 – Pontos e reta



Fonte: Própria autoria com uso do *software Geogebra*

#### • Postulado da determinação:

- **Da reta:** Dois pontos distintos determinam uma única (uma e somente uma) reta que passa por eles.

Na Figura 2 temos os pontos  $A$  e  $B$  distintos (São pontos não coincidentes) e desta forma só irá existir uma única reta que passa por esses dois pontos, que nesse caso é a reta  $r$  que podemos representar da seguinte maneira:  $r = \overleftrightarrow{AB}$ .

- **Do plano:** Três pontos não colineares (não alinhados) determinam um único plano que passa por eles.

#### • Postulado da inclusão

- Se uma reta tem dois pontos distintos em um plano, então a reta está contida nesse mesmo plano.

### 2.1.1 Retas concorrentes

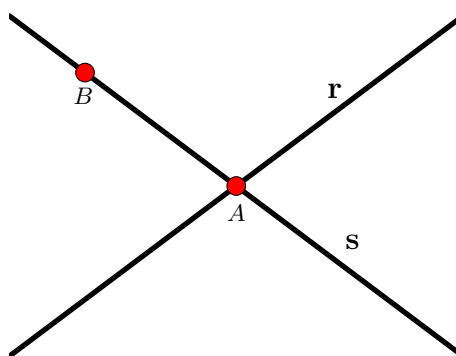
**Definição 2.1.1.** Duas retas são concorrentes se, e somente se, elas têm um único ponto comum.

Dadas as retas  $r$  e  $s$ , mostremos que elas só serão concorrentes se, e somente se, elas têm um único ponto em comum o qual chamaremos de  $A$ . Ou seja:  $r \cap s = \{A\}$ .

Usando o postulado da existência, tomemos uma reta  $r$ , um ponto  $A$  em  $r$  ( $A \in r$ ) e um ponto  $B$  fora de  $r$  ( $B \notin r$ ). Os pontos  $A$  e  $B$  são distintos, pois um deles pertence a  $r$  e o outro não.

Agora usando o postulado da determinação da reta, consideremos a reta  $s$  determinada pelos pontos  $A$  e  $B$  ( $s = \overleftrightarrow{AB}$ ). As retas  $r$  e  $s$  são distintas, pois se coincidissem o ponto  $B$  estaria em  $r$  (e ele foi construído fora de  $r$ ), e o ponto  $A$  pertence às duas retas. Logo,  $r$  e  $s$  são concorrentes, como podemos observar a Figura 3:

Figura 3 – Retas concorrentes

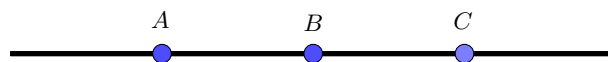


Fonte: Própria autoria com uso do *software Geogebra*

## 2.2 SEGMENTOS DE RETA

A noção de estar entre é uma noção primitiva que obedece aos postulados (ou axiomas) que se seguem, quaisquer que sejam os pontos  $A$ ,  $B$  e  $C$  conforme a Figura 4:

Figura 4 – Pontos e noção de estar entre



Fonte: Própria autoria com uso do *software Geogebra*

- Se  $B$  está entre  $A$  e  $C$ , então  $A$ ,  $B$  e  $C$  são colineares;
- Se  $B$  está entre  $A$  e  $C$ , então  $A$ ,  $B$  e  $C$  são distintos dois a dois;
- Se  $B$  está entre  $A$  e  $C$ , então  $A$  não está entre  $B$  e  $C$  nem  $C$  está entre  $A$  e  $B$ ;

- Quaisquer que sejam os pontos  $A$  e  $C$ , se  $A$  é distinto de  $C$ , então existe pelo menos um ponto  $B$  que está entre  $A$  e  $C$ .

**Definição 2.2.1. (Segmento de reta:)** Dados dois pontos distintos, a reunião do conjunto desses dois pontos com o conjunto dos pontos que estão entre eles é um segmento de reta.

Assim, dados dois pontos distintos  $A$  e  $B$ , o segmento de reta  $AB$  (indicado por  $\overline{AB}$ ) é o que segue:

$$\overline{AB} = \{A, B\} \cup \{C \mid C \text{ está entre } A \text{ e } B\}$$

Os pontos  $A$  e  $B$  são as extremidades do segmento  $AB$  e os pontos que estão entre  $A$  e  $B$  são pontos internos do segmento  $\overline{AB}$ , como mostrado na Figura 5

Figura 5 – Segmento de Reta



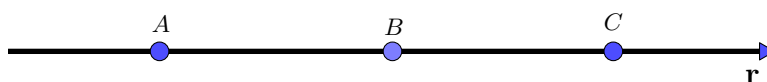
**Fonte:** Própria autoria com uso do *software Geogebra*

Se os pontos  $A$  e  $B$  coincidem ( $A \equiv B$ ), dizemos que o segmento  $\overline{AB}$  é considerado um segmento degenerado e se resume a um ponto.

**Definição 2.2.2. (Semirreta:)** Dados dois pontos distintos  $A$  e  $B$ , a reunião do segmento de reta  $\overline{AB}$  com o conjunto dos pontos  $C$  tais que  $B$  está entre  $A$  e  $C$  é a semirreta  $AB$  indicada por  $\overrightarrow{AB}$ .

O ponto  $A$  é a origem da semirreta  $\overrightarrow{AB}$  como podemos ver na Figura 6:

Figura 6 – Semirreta AB

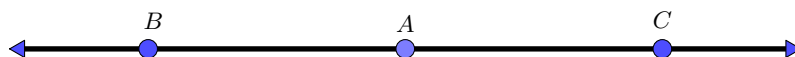


**Fonte:** Própria autoria com uso do *software Geogebra*

$$\overrightarrow{AB} = \overline{AB} \cup \{C \mid B \text{ está entre } A \text{ e } C\}$$

Se  $A$  está entre  $B$  e  $C$ , as semirretas  $\overrightarrow{AB}$  e  $\overrightarrow{AC}$  são ditas semirretas opostas com a mesma origem, conforme a Figura 7.

Figura 7 – Semirretas opostas



Fonte: Própria autoria com uso do *software Geogebra*

## 2.2.1 Segmentos

### Segmentos consecutivos

Dois segmentos de reta são consecutivos se, e somente se, uma extremidade de um deles é também extremidade do outro (uma extremidade de um coincide com uma extremidade do outro).

### Segmentos colineares

Dois segmentos de reta são colineares se, e somente se, estão numa mesma reta.

### Segmentos adjacentes

Dois segmentos consecutivos e colineares são adjacentes se, e somente se, possuem em comum apenas uma extremidade (não têm pontos internos comuns).

## 2.2.2 Congruência de Segmentos

A congruência de segmentos é uma noção primitiva, que é na verdade uma relação de equivalência e que satisfaz os seguintes postulados:

- **Reflexiva** todo segmento é congruente a si mesmo ( $\overline{AB} \equiv \overline{AB}$ )
- **Simétrica** Se  $\overline{AB} \equiv \overline{CD}$ , então  $\overline{CD} \equiv \overline{AB}$ .
- **Transitiva** Se  $\overline{AB} \equiv \overline{CD}$  e  $\overline{CD} \equiv \overline{EF}$ , então  $\overline{AB} \equiv \overline{EF}$ .

Tem-se o postulado do transporte de segmentos que diz que dados um segmento  $\overline{AB}$  e uma semirreta de origem  $A'$ , existe sobre esta semirreta um único ponto  $B'$  tal que  $\overline{A'B'}$  seja congruente a  $\overline{AB}$ .

Podemos também fazer comparações de segmentos, ou seja, dados dois segmentos,  $\overline{AB}$  e  $\overline{CD}$ , pelo postulado do transporte, podemos obter na semirreta  $\overrightarrow{AB}$  um ponto  $P$  tal que  $\overline{AP} \equiv \overline{CD}$  e temos três hipóteses a considerar:

- O ponto  $P$  está entre  $A$  e  $B$ . Neste caso, dizemos que  $\overline{AB}$  é maior que  $\overline{CD}$  ( $\overline{AB} > \overline{CD}$ )
- O ponto  $P$  coincide com  $B$ , caso em que  $\overline{AB}$  é congruente a  $\overline{CD}$  ( $\overline{AB} \equiv \overline{CD}$ );
- O ponto  $B$  está entre  $A$  e  $P$ . Neste caso, dizemos que  $\overline{AB}$  é menor que  $\overline{CD}$  ( $\overline{AB} < \overline{CD}$ ).

Por fim, abordaremos a medida de um segmento (comprimento), que será indicada para o segmento  $\overline{AB}$  por  $med(\overline{AB})$ .

A medida de um segmento (não nulo) é um número real positivo associado ao segmento de forma tal que:

- Segmentos congruentes têm medidas iguais e, reciprocamente, segmentos que têm medidas iguais são congruentes.

$$\overline{AB} \equiv \overline{CD} \Leftrightarrow med(\overline{AB}) = med(\overline{CD})$$

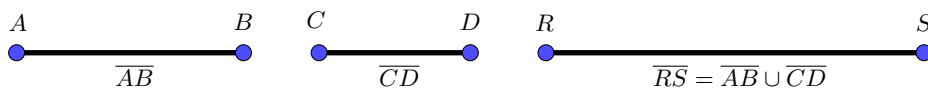
- Se um segmento é maior que outro, sua medida é maior que a deste outro.

$$\overline{AB} > \overline{CD} \Leftrightarrow med(\overline{AB}) > med(\overline{CD})$$

- A um **segmento soma** está associada uma medida que é a soma das medidas dos segmentos parcelas.

$$\overline{RS} \equiv \overline{AB} \cup \overline{CD} \Leftrightarrow med(\overline{RS}) = med(\overline{AB}) + med(\overline{CD})$$

Figura 8 – União de Segmentos



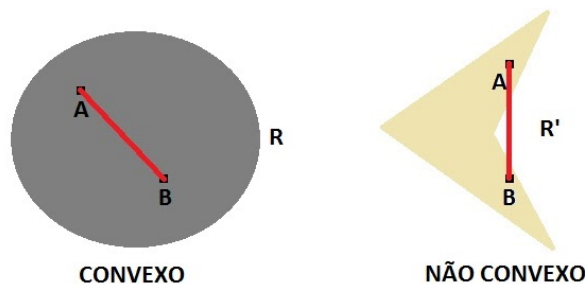
Fonte: Própria autoria com uso do *software Geogebra*

À medida de um segmento dá-se o nome de **comprimento** do segmento.

### 2.3 ÂNGULO

**Definição 2.3.1.** Uma região  $\mathfrak{R}$  do plano é **convexa**, quando para quais dois pontos distintos  $A, B \in \mathfrak{R}$ , tivermos  $\overline{AB} \subset \mathfrak{R}$ . Caso contrário, diremos que  $\mathfrak{R}$  é uma região **não convexa**.

Figura 9 – Regiões convexas (esquerda) e não convexas (direita)

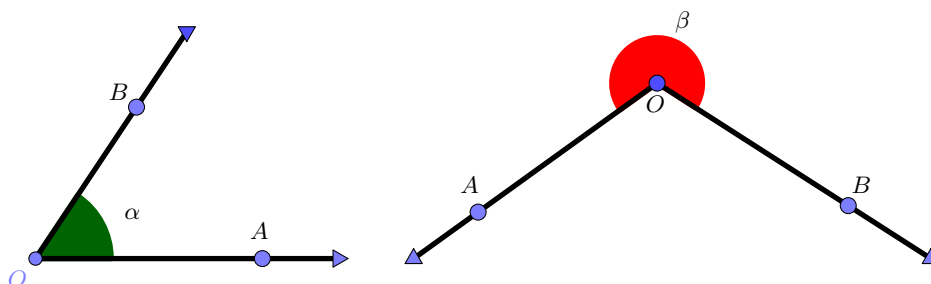


Fonte: [\(NETO, 2013\)](#)

Conforme a definição anterior, para uma região  $\mathfrak{R}$  ser não convexa, basta que existam pontos  $A, B \in \mathfrak{R}$  tais que pelo menos um ponto do segmento  $\overline{AB}$  não pertença a  $\mathfrak{R}$ , como podemos observar na Figura 9.

**Definição 2.3.2.** Dadas, no plano, duas semirretas  $\overrightarrow{OA}$  e  $\overrightarrow{OB}$ , um **ângulo** (ou **região angular**) de vértice  $O$  e lados  $\overrightarrow{OA}$  e  $\overrightarrow{OB}$  é uma das duas regiões do plano limitadas pelas semirretas  $\overrightarrow{OA}$  e  $\overrightarrow{OB}$ .

Figura 10 – Regiões angulares no plano



Fonte: Própria autoria com uso do software Geogebra

Um ângulo pode ser convexo ou não convexo, na Figura 10, o ângulo da esquerda é convexo, ao passo que o da direita é não convexo.

Existem várias maneiras distintas de representar um ângulo. Por exemplo, o ângulo convexo da Figura 10 com vértice no ponto  $O$ ,  $A$  e  $B$  pontos quaisquer pode ser designado por  $\widehat{BOA}$ , por  $\widehat{AOB}$  ou  $\widehat{BOA}$  ou ainda  $\widehat{AOB}$ .

Ao se utilizar dessa notação  $\widehat{AOB}$ , a letra indicativa do vértice deve sempre aparecer entre as outras duas, as quais representam pontos quaisquer das semirretas que formam o ângulo.

Ao nos referirmos a medida de um ângulo  $\widehat{AOB}$ , denotaremos por  $med(\widehat{AOB})$ .

Os ângulos são geralmente medidos em graus e muitas das vezes a parte decimal dos ângulos é medido em minutos e segundos, seguindo um sistema de base 60, para essa conversão temos por exemplo  $(45^\circ 30' 15'')$ .

O instrumento utilizado para realizar medidas de ângulos é o transferidor, o leitor interessado pode consultar (DOLCE; POMPEO, 2013) e (BARBOSA, 1995) para entender um pouco melhor como se dá sua construção e finalidade.

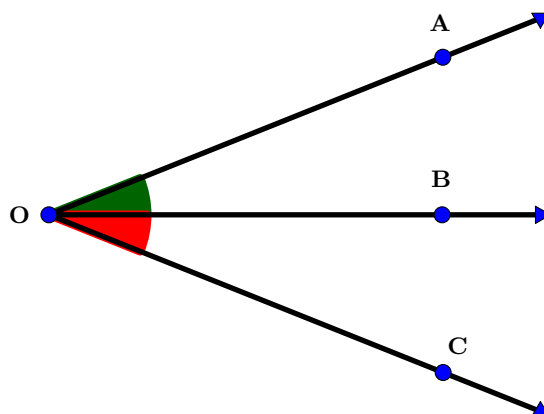
### Ângulos Adjacentes

**Definição 2.3.3.** Ângulos adjacentes são aqueles que possuem um lado em comum, mas as regiões determinadas não possuem pontos em comum.

Observe na Figura 11 que os ângulos de  $med(\widehat{AOB})$  e  $med(\widehat{BOC})$  são adjacentes, pois possuem o lado  $\overline{OB}$  em comum, mas suas regiões determinadas não possuem pontos em comum.



Figura 11 – Ângulos adjacentes



Fonte: Própria autoria com uso do software Geogebra

Os ângulos de  $med(\widehat{AOC})$  e de  $med(\widehat{AOB})$  não são adjacentes, embora possuam um lado em comum, suas regiões determinadas possuem pontos em comum. A região do  $\widehat{AOB}$  está contida na região do  $\widehat{AOC}$ .

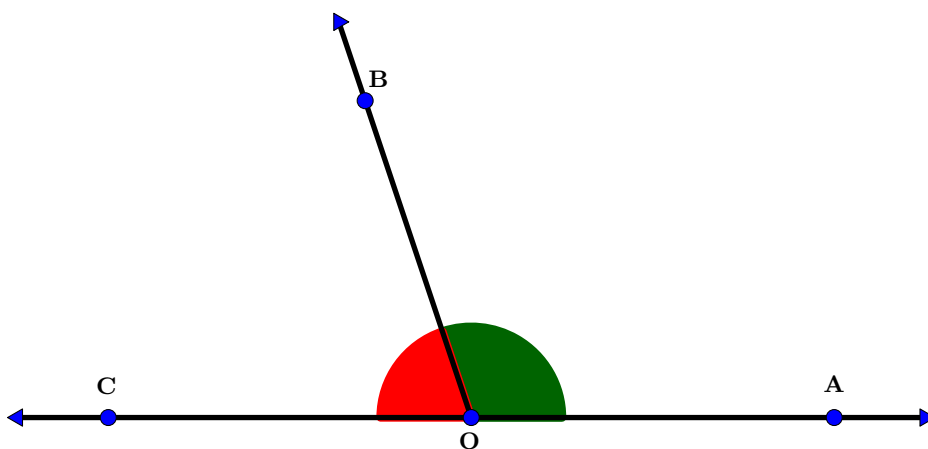
### Ângulo Raso ou de Meia-Volta

**Definição 2.3.4.** Um ângulo que possui medida de  $(180^\circ)$  é denominado de **ângulo raso**.

### Ângulos Suplementares

**Definição 2.3.5.** Dois ângulos são ditos suplementares se a soma de suas medidas é  $180^\circ$ . O suplemento de um ângulo é o ângulo adjacente ao ângulo dado, obtido pelo prolongamento de um dos seus lados.

Figura 12 – Ângulos suplementares



Fonte: Própria autoria com uso do software Geogebra

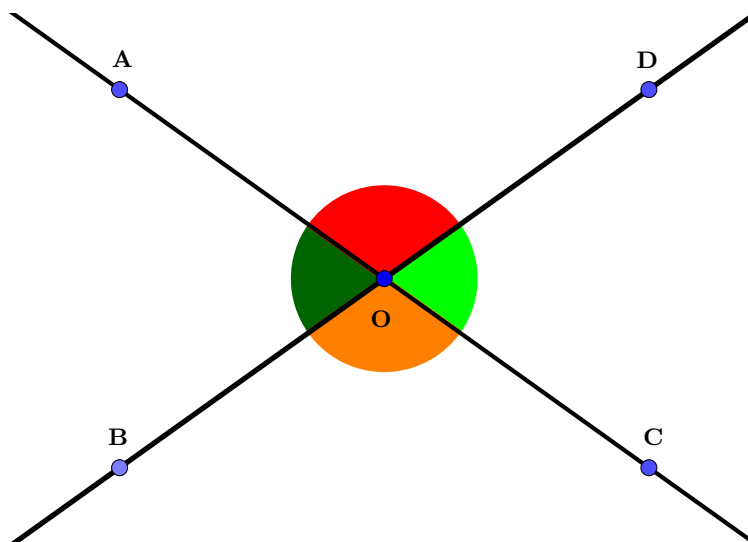
Na Figura 12, os ângulos  $A\hat{O}B$  e  $B\hat{O}C$  são suplementares, isto é, a soma de suas medidas é igual ao  $180^\circ$ , ou seja:

$$med(A\hat{O}B) + med(B\hat{O}C) = 180^\circ.$$

Perceba que o ângulo suplementar é obtido pelo prologamento da semirreta  $\overrightarrow{OA}$  em sentido oposto, dando origem a reta  $\overleftrightarrow{AC}$ .

Quando duas retas distintas se intersectam em um único ponto, são formados quatro ângulos, como podemos visualizar na Figura 13. Consideremos o ponto  $O$  como sendo o ponto de intersecção dessas duas retas e os pontos  $A, B, C, D$ , dispostos como na referida figura.

Figura 13 – Ponto de intersecção entre duas retas concorrentes



Fonte: Própria autoria com uso do *software Geogebra*

Na Figura 13. Os ângulos  $A\hat{O}B$  e  $C\hat{O}D$  são opostos pelo vértice, do mesmo modo, que os ângulos  $A\hat{O}D$  e  $B\hat{O}C$ . **Ângulos Congruentes**

**Definição 2.3.6.** *Dois ângulos são ditos congruentes, quando possuem a mesma medida.*

**Proposição 2.3.1.** *Ângulos opostos pelo vértice são congruentes.*

**Prova:** Usaremos a Figura 13, como auxílio para a visualização gráfica. Observe que, os ângulos  $C\hat{O}D$  e  $A\hat{O}B$  são opostos pelo vértice e ambos tem o ângulo  $A\hat{O}D$  como seu ângulo suplementar. Diante disso, temos que:

$$med(C\hat{O}D) + med(A\hat{O}D) = 180^\circ \quad \text{e} \quad med(A\hat{O}B) + med(A\hat{O}D) = 180^\circ$$

Assim,

$$med(C\hat{O}D) + med(A\hat{O}D) = med(A\hat{O}B) + med(A\hat{O}D)$$

De onde concluímos que:

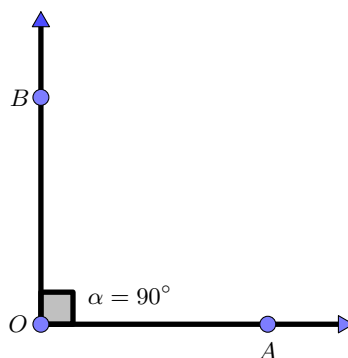
$$med(C\hat{O}D) = med(A\hat{O}B)$$

Portanto, ângulos opostos pelo vértice, possuem medidas congruentes.

### Ângulo Reto

**Definição 2.3.7.** *Todo ângulo que possui medida de noventa graus ( $90^\circ$ ) é denominado **ângulo reto**.*

Figura 14 – Ângulo Reto



**Fonte:** Própria autoria com uso do *software Geogebra*

Quando duas retas ou dois segmentos de retas se intersectam e formam um ângulo, cuja medida é de noventa graus, dizemos que essas retas ou segmentos de retas são perpendiculares, conforme a Figura [14](#).

**Teorema 2.3.2.** *Dado um ponto qualquer de uma reta, existe uma única reta perpendicular que passa por esse ponto e é perpendicular a reta que contém o ponto dado.*

**Demonstração:** Vamos provar a existência e depois a unicidade dessa reta.

**Existência:** Dada uma reta  $s$  e um ponto  $A$  qualquer pertencente a ela, as duas semirretas determinadas por  $A$  formam um ângulo raso, ou seja, um ângulo cuja medida é de  $180^\circ$ .

Dentre todas as retas com origem em  $A$ , existirá uma reta que será perpendicular a reta  $s$  dada, ou seja, formará um ângulo cuja medida é de  $90^\circ$ .

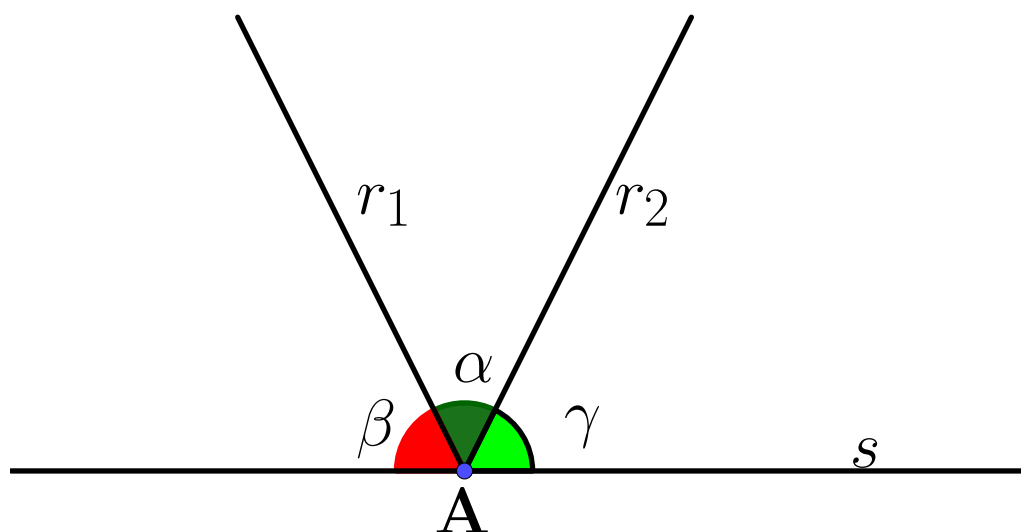
**Unicidade:** Suponha que exista duas retas  $r_1$  e  $r_2$  passando pelo ponto  $A$  sendo perpendiculares a reta  $s$ .

As semirretas da interseção entre  $r_1$  e  $r_2$  formam um ângulo  $\alpha$  e essas retas formam ângulos,  $\beta$  e  $\gamma$  com a reta  $s$ , como podemos observar na Figura [15](#).

Como  $r_1$  e  $r_2$  são perpendiculares a reta  $s$  por hipótese então temos:

$$med(\beta) = med(\gamma) = 90^\circ$$

Figura 15 – Ângulos formados por três retas



Fonte: Própria autoria com uso do software Geogebra

Por outro lado, temos que:

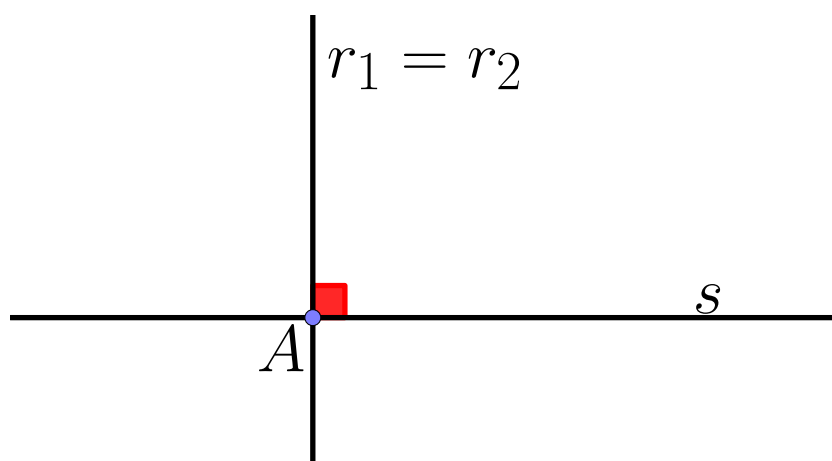
$$med(\beta) + med(\alpha) + med(\gamma) = 180^\circ$$

Sendo assim,

$$med(\alpha) = 0^\circ$$

Diante disso, concluímos que as retas  $r_1$  e  $r_2$  coincidem, portanto só irá existir uma única reta perpendicular a reta  $s$  passando pelo ponto  $A$ , como podemos observar na Figura 16.

Figura 16 – Unicidade da reta perpendicular passando por um ponto de uma reta dada



Fonte: Própria autoria com uso do software Geogebra

Em seu livro *Elementos*, Euclides impôs a unicidade da reta paralela como um postulado, conhecido como o **quinto postulado** ou **postulado das paralelas**. Porém, para a grande maioria dos matemáticos que estudaram a obra de Euclides, tal postulado parecia

muito mais complexo que os quatro anteriores [\[1\]](#), o que os fez pensar, por vários séculos, que fosse possível deduzí-lo, como um Teorema, a partir dos postulados anteriores.

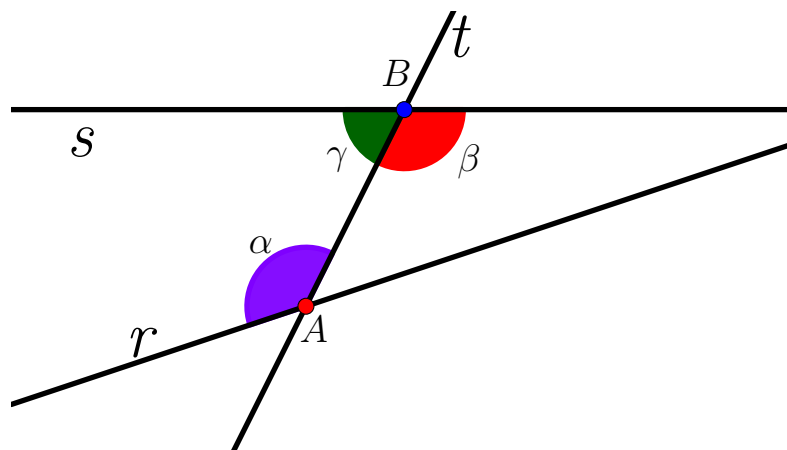
Porém, todas as tentativas de se descobrir tal demonstração não foram bem sucedidas. Então, ocorreu que, no início do século XIX, o matemático húngaro János Bolyai e o matemático russo Nikolai Lobatchevsky mostraram, independentemente, que, de fato, era necessário assumir a unicidade da paralela como um postulado.

**Postulado 1. Das paralelas:** *Dados no plano, uma reta  $r$  e um ponto  $A \notin r$ , existe uma única reta  $s$ , paralela a  $r$  e passando por  $A$ .*

De posse do quinto postulado, podemos enunciar alguns dos mais importantes resultados da Geometria Euclidiana.

Para o primeiro deles, suponha dadas no plano, retas  $r, s$  e  $t$  intersectando  $r$  e  $s$  nos pontos  $A$  e  $B$ , respectivamente, como podemos ver na Figura [\[17\]](#):

Figura 17 – Ângulos alternos internos e colaterais internos.



Fonte: Própria autoria com uso do software Geogebra

Os ângulos  $\alpha$  e  $\beta$  são ditos **alternos internos**, ao passo que os ângulos  $\alpha$  e  $\lambda$  são chamados **colaterais internos**.

**Teorema 2.3.3. Teorema do Ângulo Interno Alternado:** *Se duas retas  $r$  e  $s$  são cortadas por uma reta transversal  $t$  formando um par de ângulos internos alternados congruentes, então as duas retas são paralelas.*

A demonstração desse Teorema é encontrada em [\(DOLCE; POMPEO, 2013\)](#) e [\(NETO, 2013\)](#).

<sup>1</sup> Quais sejam: por dois pontos distintos quaisquer podemos traçar uma única reta; todo segmento de reta pode ser prolongado em uma reta; dados um ponto e um segmento tendo tal ponto por extremidade, existe um círculo que tem centro no ponto e raio igual ao segmento dado; todos os ângulos retos são congruentes.

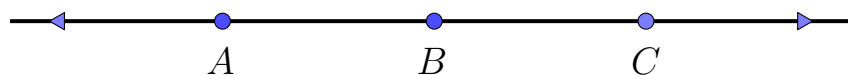
## 2.4 TRIÂNGULO

Nesta seção será abordado os principais resultados a respeito do polígono chamado de triângulo.

Considere três pontos  $A$ ,  $B$  e  $C$  no plano, se esses três pontos estiverem contidos em uma mesma reta, é dito que são **pontos colineares**, caso contrário, são **pontos não colineares**.

Na Figura 18 tem-se uma exemplificação em que os três pontos  $A$ ,  $B$  e  $C$  estão na mesma reta, ou seja, são pontos colineares.

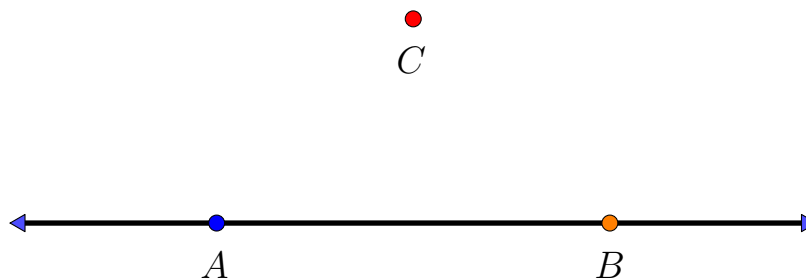
Figura 18 – Pontos colineares



**Fonte:** Própria autoria com uso do *software Geogebra*

Já na Figura 19, os pontos  $A$ ,  $B$  e  $C$  não pertencem a mesma reta, logo são pontos não colineares.

Figura 19 – Pontos não-colineares



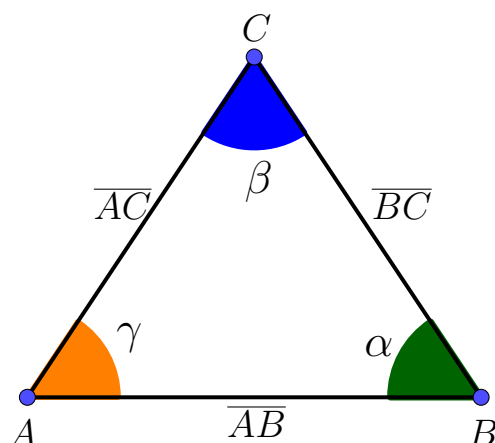
**Fonte:** Própria autoria com uso do *software Geogebra*

**Definição 2.4.1.** *Sejam  $A$ ,  $B$  e  $C$  três pontos distintos não colineares, é chamado de triângulo, o polígono formado pela reunião dos segmentos  $\overline{AB}$  (distância do ponto  $A$  ao ponto  $B$ ),  $\overline{BC}$  e  $\overline{AC}$ . Os pontos  $A$ ,  $B$  e  $C$  são vértices do triângulo, os segmentos  $\overline{AB}$ ,  $\overline{BC}$  e  $\overline{AC}$  são as medidas dos lados do triângulo e os ângulos formados por esses lados, são as medidas dos ângulos internos desse triângulo.*

Na Figura 20, tem-se um triângulo de vértices  $A$ ,  $B$  e  $C$ , cujos lados são os segmentos  $\overline{AB}$ ,  $\overline{BC}$  e  $\overline{AC}$  e os ângulos internos  $\alpha$ ,  $\beta$  e  $\gamma$ .

Geralmente no **triângulo**, os lados que são segmentos de reta são denotados pela letra minúscula em relação ao vértice oposto a esse segmento. Indicamos suas medidas por:  $med(\overline{AB}) = c$ ,  $med(\overline{BC}) = a$  e  $med(\overline{AC}) = b$ .

Figura 20 – Triângulo ABC



Fonte: Própria autoria com uso do software Geogebra

Diante do que já foi exposto, será que sempre é possível obtermos um triângulo dado quaisquer três segmentos de retas?

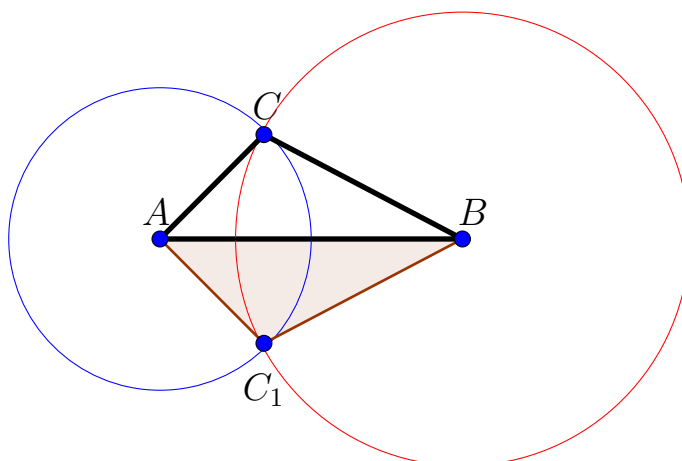
A resposta é que nem sempre é possível construir um triângulo dado apenas os três segmentos que serão os lados desse triângulo, pois dependendo da medidas desses lados, não se consegue formar o triângulo.

Vejam os exemplos a seguir para uma melhor clareza.

**Exemplo 2.4.1.** *Dado os segmentos de retas  $\overline{AB}$ ,  $\overline{BC}$  e  $\overline{AC}$  cujas medidas são as seguintes:  $med(\overline{AB}) = 4$  u.c,  $med(\overline{BC}) = 3$  u.c e  $med(\overline{AC}) = 2$  u.c, em que (u.c) é a unidade de comprimento. **É possível construir um triângulo com esses segmentos de retas?***

**Solução:** Considere o maior segmento como sendo a base desse possível triângulo, e tente-o fechar colocando os demais segmentos, um em cada uma das extremidades desse segmento tomado como base.

Figura 21 – Construção do triângulo com as condições propostas



Fonte: Própria autoria com uso do software Geogebra

Assim, cada uma das medidas desses outros dois segmentos será o raio das circunferências centradas em cada uma das extremidades do segmento tomado como base do triângulo.

Como a  $med(\overline{AC}) = 2$  u.c, tem-se uma circunferência de raio igual a 2 u.c centrada no ponto  $A$  do segmento  $\overline{AB}$ . Por outro lado, a  $med(\overline{BC}) = 3$  u.c será o raio da circunferência que tem como o seu centro o ponto  $B$  do segmento  $\overline{AB}$ .

Na Figura 21, tem-se o segmento  $\overline{AB}$  cuja  $med(\overline{AB}) = 4$ u.c como sendo a base do possível triângulo,  $\overline{AC}$  e  $\overline{BC}$  como os respectivos raio das circunferências centradas em  $A$  e  $B$ , respectivamente.

Como as circunferências centradas em  $A$  e  $B$  respectivamente se intersectaram, logo vai existir o triângulo com as condições dadas.

Perceba que as intersecções ocorreram em dois pontos distintos os quais foram denotados por  $C$  e  $C_1$ . Isso significa que tanto o ponto  $C$  como o  $C_1$  fazem com que as condições dada no exemplo sejam satisfeitas, ou seja, o triângulo  $ABC$  e  $ABC_1$  cumprem as condições.

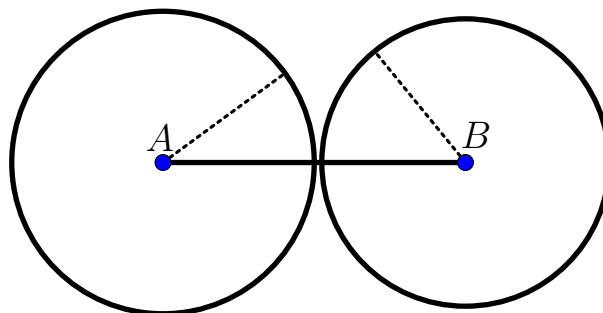
Talvez esteja se questionando o por quê de ter considerado o maior segmento como sendo a base do possível triângulo.

Não importa o lado que tome como sendo a base, se o triângulo existir, deverá cumprir as condições dada, independentemente do segmento tomado como base. Uma vez que se conseguiu construir o triângulo, já se garante a sua existência e com isso é dispensado a verificação dos outros segmentos como sendo base do triângulo.

**Exemplo 2.4.2.** *É possível construir um triângulo, dados os segmentos de retas  $\overline{AB}$ ,  $\overline{BC}$  e  $\overline{AC}$ ? Cujas medidas são as seguintes  $med(\overline{AB}) = 4$  u.c,  $med(\overline{BC}) = 1.9$  u.c e  $med(\overline{AC}) = 2$  u.c ? ( em que u.c é a unidade de comprimento.)*

**Solução:** A análise que se deve fazer nesse exemplo é análoga a feita no exemplo anterior. Assim vamos nos limitar apenas no que realmente é de interesse para entender o que de fato ocorreu.

Figura 22 – Construção do triângulo com as condições dada



**Fonte:** Própria autoria com uso do software *Geogebra*



Observe na Figura 22 que as circunferências de raio  $\overline{AC} = 2\text{u.c}$  e  $\overline{BC} = 1.9\text{ u.c}$  centradas em  $A$  e  $B$  respectivamente não se intersectaram.

Isso significa que não existe um ponto para colocar o vértice  $C$  que cumpram as condições dada no exemplo. Assim não é possível obter um triângulo com os segmentos dados.

Diante disso, será que sempre que precisarmos verificar se dado três segmentos de reta é possível obter um triângulo, há sempre a necessidade de fazer a representação geométrica? ou existe alguma propriedade matemática que possa garantir essa existência ou não, utilizando apenas cálculos aritméticos?

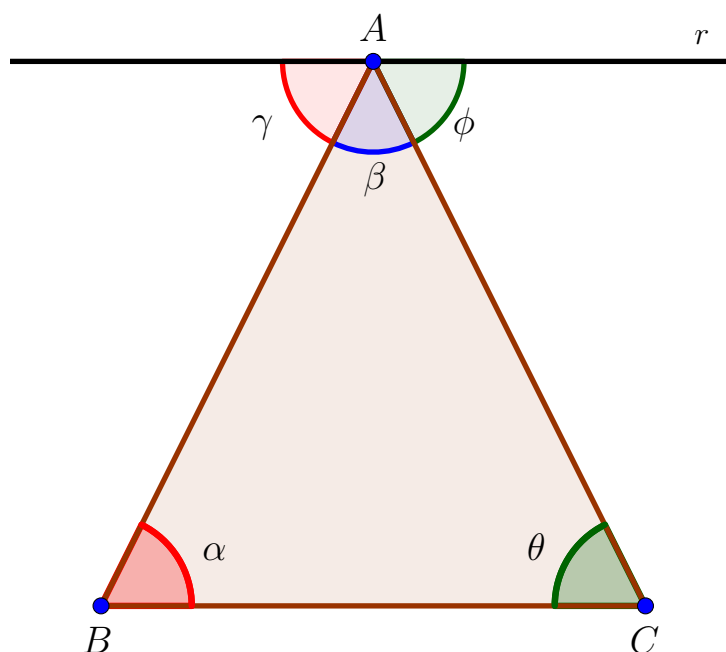
A resposta é que existe uma propriedade na matemática chamada de **Desigualdade Triangular**, que permite verificar a existência de um triângulo sabendo apenas as medidas de seus lados e usando cálculos aritméticos.

Agora iremos abordar alguns resultados que serão necessárias para a demonstração da desigualdade triangular.

**Teorema 2.4.1.** *A soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo qualquer é igual a  $180^\circ$ .*

**Demonstração:** Considere um triângulo  $ABC$  qualquer e uma reta  $r$  paralela ao lado  $\overline{BC}$  tal que o vértice  $A$  pertença a essa reta  $r$  ( $A \in r$ ), como podemos ver na Figura 23.

Figura 23 – Triângulo que mostra a soma das medidas dos ângulos internos



Fonte: Própria autoria com uso do software Geogebra

Consideremos os ângulos internos do triângulo  $ABC$  com medidas iguais a  $\beta$ ,  $\alpha$  e  $\theta$  respectivamente aos vértices  $A$ ,  $B$  e  $C$ . E sejam os ângulos  $\gamma$  e  $\phi$  tal que:

$$med(\gamma) + med(\beta) + med(\phi) = 180^\circ \quad (\text{Ângulo raso}) \quad (2.1)$$

Como os ângulos  $\alpha$  e  $\gamma$  são ângulos alternos internos, logo ambos possuem a mesma medida. E isso também ocorre com os ângulos  $\theta$  e  $\phi$ .

Assim, temos:

$$med(\alpha) \equiv med(\gamma) \quad (2.2)$$

e

$$med(\theta) \equiv med(\phi) \quad (2.3)$$

Agora, substituindo [2.2](#) e [2.3](#) em [2.1](#), obtemos:

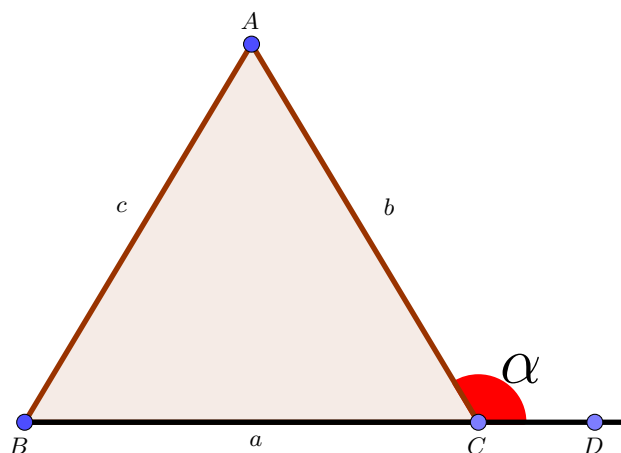
$$med(\alpha) + med(\beta) + med(\theta) = 180^\circ.$$

□

**Proposição 2.4.2.** *Em um triângulo qualquer, a medida de um ângulo externo é igual a soma das medidas dos ângulos internos não adjacentes.*

**Demonstração:** Seja  $ABC$  um triângulo qualquer, e tomemos a base sem perda de generalidade como sendo  $\overline{BC}$ , e prolonguemos a semirreta  $\overrightarrow{BD}$ , talque  $\overline{BC} \subset \overrightarrow{BD}$ , como podemos observar na Figura [24](#).

Figura 24 – Ângulo Externo de um triângulo



**Fonte:** Própria autoria com uso do *software Geogebra*

Agora denotemos a  $med(\widehat{ACD}) = \alpha$ . Perceba que  $med(\widehat{BCA}) + med(\widehat{ACD}) = 180^\circ$  (ângulo raso).

Logo,

$$med(\alpha) = 180^\circ - med(\widehat{ACB}). \quad (2.4)$$

Por outro lado,

$$med(\widehat{C}) = 180^\circ - [med(\widehat{BAC}) + med(\widehat{ABC})] \quad (2.5)$$

Assim, de 2.5 e 2.4 obtemos,

$$\begin{aligned} med(\alpha) &= 180^\circ - [180^\circ - [med(\widehat{BAC}) + med(\widehat{ABC})]] \\ &= med(\widehat{BAC}) + med(\widehat{ABC}) \end{aligned}$$

□

**Proposição 2.4.3.** *Se  $ABC$  é um triângulo tal que  $med(\widehat{ABC}) > med(\widehat{BCA})$ , então  $\overline{AC} > \overline{AB}$ .*

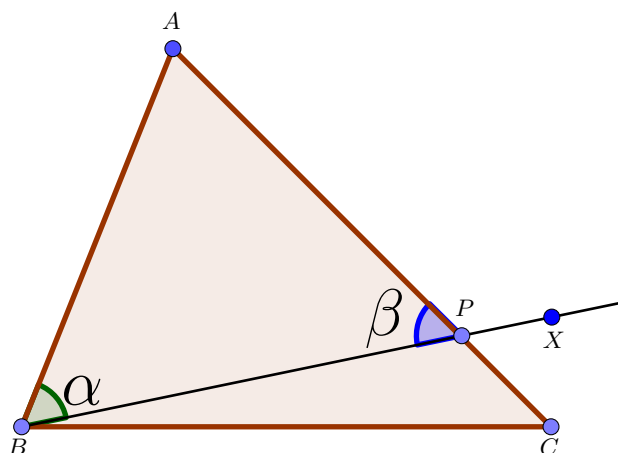
**Demonstração:** Como por hipótese temos que  $med(\widehat{ABC}) > med(\widehat{BCA})$ , tracemos a semirreta  $\overrightarrow{BX}$ , intersectando o interior de  $ABC$  e tal que:

$$med(\widehat{CBX}) = \frac{1}{2} [med(\widehat{ABC}) - med(\widehat{BCA})].$$

Sendo  $P$  o ponto de interseção de  $\overrightarrow{BX}$  com o lado  $AC$ , como podemos observar na Figura 25 e seja  $med(\alpha) = med(\widehat{ABP})$ , então:

$$\alpha = \widehat{ABP} = \widehat{ABC} - \widehat{CBX} = \widehat{ABC} - \frac{1}{2} (\widehat{ABC} - \widehat{BCA}) = \frac{\widehat{ABC} + \widehat{BCA}}{2} \quad (2.6)$$

Figura 25 – Ordem dos lados e Ângulos de Triângulo



Fonte: Própria autoria com uso do software Geogebra

Por outro lado, seja  $\beta = \text{med}(\widehat{BPA})$  e note que  $\beta$  é ângulo externo do triângulo  $BPA$ , daí

$$\beta = \widehat{BCA} + \widehat{XBC} = \widehat{BCA} + \frac{1}{2}(\widehat{ABC} - \widehat{BCA}) = \frac{\widehat{ABC} + \widehat{BCA}}{2} \quad (2.7)$$

Assim, de 2.6 e 2.7, obtemos que  $\alpha = \beta$  e portanto o triângulo  $ABP$  é isósceles de base  $\overline{BP}$ , com  $\overline{AB} = \overline{AP}$ .

Portanto,  $\overline{AC} = \overline{AP} + \overline{PC} = \overline{AB} + \overline{PC}$  e em particular temos,  $\overline{AC} > \overline{AB}$ .

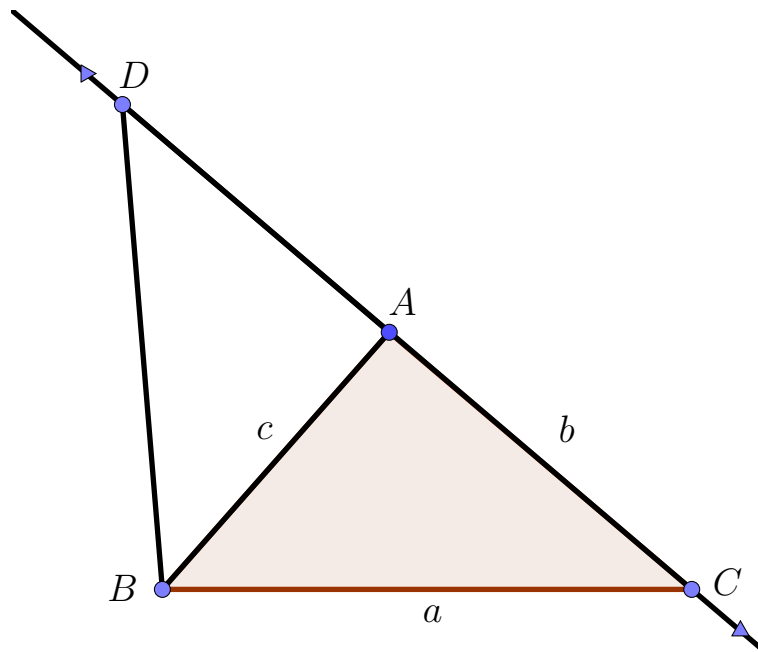
**Proposição 2.4.4. (Desigualdade triangular)** *Em todo triângulo, cada lado tem medida de comprimento menor que a soma dos das medidas dos outros dois lados e é maior que a diferença das medidas dos outros dois lados em módulo.*

Considerando um triângulo  $ABC$  cujas medidas de seus lados são  $a, b$  e  $c$ , pela desigualdade triangular temos que:

$$|a - b| < c < a + b \quad \text{ou} \quad |a - c| < b < a + c \quad \text{ou ainda} \quad |b - c| < a < b + c$$

**Prova:** Seja  $ABC$  um triângulo tal que  $\overline{AB} = c$ ,  $\overline{AC} = b$  e  $\overline{BC} = a$ . Seja  $D$  um ponto sobre a semirreta  $\overrightarrow{AC}$  tal que  $A \in \overline{CD}$  e  $\text{med}(\overline{AB}) \equiv \text{med}(\overline{AD})$ , como podemos observar na Figura 26:

Figura 26 – Triângulo para entender a desigualdade triangular



Fonte: Própria autoria com uso do software Geogebra

Devemos mostrar que:

$$a < b + c \quad (2.8)$$

$$b < a + c \quad (2.9)$$

$$c < a + b \quad (2.10)$$

Uma vez que

$$\overline{CD} = \overline{AC} + \overline{AD} = \overline{AC} + \overline{AB} = b + c$$

Pela proposição anterior [2.4.3](#) é suficiente mostrarmos que  $B\widehat{D}C < D\widehat{B}C$ . Mas, desde que  $B\widehat{D}A = D\widehat{B}A$ , basta observarmos que:

$$B\widehat{D}C = B\widehat{D}A = D\widehat{B}A < D\widehat{B}A + A\widehat{B}C = D\widehat{B}C.$$

Sendo  $a$ ,  $b$  e  $c$  os lados do triângulo  $ABC$  segue a chamada desigualdade triangular:

$$a < b + c$$

As outras demais desigualdades :  $b < a + c$  e  $c < a + b$  segue de maneira totalmente análoga.

Diante disso, veremos a solução dos exemplos [2.4.1](#) e [2.4.2](#) usando apenas a desigualdade triangular e constatar a existência ou não do triângulo.

**Exemplo [2.4.1](#):** Dado os segmentos de retas  $\overline{AB}$ ,  $\overline{BC}$  e  $\overline{AC}$  cujas medidas são  $med(\overline{AB}) = 4$  u.c;  $med(\overline{BC}) = 3$  u.c e  $med(\overline{AC}) = 2$  u.c, em que (u.c) é a unidade de comprimento. É possível construir um triângulo com esses segmentos de retas?

**Solução usando a propriedade da desigualdade triangular:** Precisa-se verificar se:

$$|\overline{BC} - \overline{AC}| < \overline{AB} < \overline{BC} + \overline{AC}$$

$$|\overline{BC} - \overline{AB}| < \overline{AC} < \overline{BC} + \overline{AB}$$

$$|\overline{AB} - \overline{AC}| < \overline{BC} < \overline{AB} + \overline{AC}$$

Assim:

$$\overline{BC} + \overline{AC} = 3 + 2 = 5 > 4 = \overline{AB} > |3 - 2| = 1$$

$$\overline{BC} + \overline{AB} = 3 + 4 = 7 > 2 = \overline{AC} > |3 - 4| = 1$$

$$\overline{AB} + \overline{AC} = 4 + 2 = 6 > 3 = \overline{BC} > |4 - 2| = 2$$

sendo assim, como as condições da desigualdade triangular foram satisfeitas, existirá o triângulo.

**Exemplo [2.4.2](#):** Dado os segmentos de retas  $\overline{AB} = 4$  u.c ,  $\overline{BC} = 1.9$  u.c e  $\overline{AC} = 2$ u.c.

**Pela desigualdade triangular** temos que:

$$\overline{BC} + \overline{AC} = 1.9 + 2 = 3.9 < 4 = \overline{AB} > |1.9 - 2| = 0.1$$

$$\overline{BC} + \overline{AB} = 1.9 + 4 = 5.9 > 2 = \overline{AC} < |1.9 - 4| = 2.1$$

$$\overline{AB} + \overline{AC} = 4 + 2 = 6 > 1.9 = \overline{BC} < |4 - 2| = 2$$

Logo, a desigualdade triangular não foi satisfeita. sendo assim concluímos que não existe o triângulo.

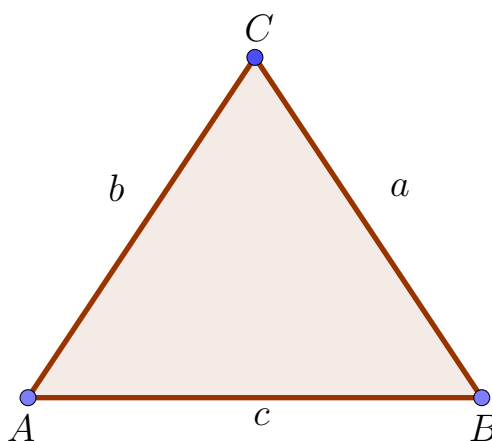
Desta forma, o uso da desigualdade triangular é muito prática para verificar a existência do triângulo, uma vez dado as medidas de seus lados.

O perímetro de um triângulo é obtido pela soma das medidas dos seus três lados, ou seja,  $a + b + c$  em que  $a = med(\overline{BC})$ ,  $b = med(\overline{AC})$  e  $c = med(\overline{AB})$  como podemos ver na Figura 27 e é denotado por convenção como  $2p$ .

Ou seja:

$$\text{Perímetro} = 2p = a + b + c$$

Figura 27 – Figura que mostra o perímetro de um triângulo



**Fonte:** Própria autoria com uso do *software Geogebra*

Já o semiperímetro é denotado por convenção apenas por  $p$  e é obtido pela divisão do perímetro de um triângulo por 2.

Ou seja:

$$\text{Semiperímetro} = \frac{2p}{2} = \frac{a + b + c}{2} = p$$

## 2.5 CLASSIFICAÇÃO DO TRIÂNGULO

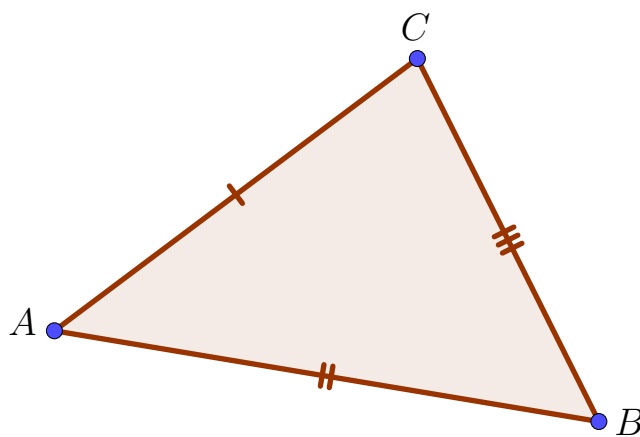
A classificação de triângulos é bastante útil para o desenvolvimento do estudo e das propriedades específicas dessa figura geométrica, que tem grande importância na geometria plana.

Existem duas maneiras de classificar triângulos. Uma delas baseia-se na comparação entre as medidas dos seus lados. E a outra maneira, leva em consideração as medidas dos ângulos internos do triângulo.

### 2.5.1 Quanto as medidas dos seus lados

**Definição 2.5.1.** *O triângulo escaleno é aquele que possuem as medidas dos três lados diferentes.*

Figura 28 – Triângulo Escaleno

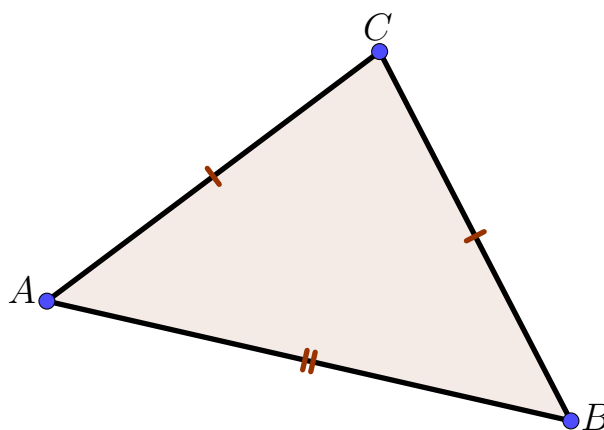


**Fonte:** Própria autoria com uso do *software Geogebra*

No triângulo da Figura 28 os lados  $\overline{AB}$ ,  $\overline{AC}$  e  $\overline{BC}$  possuem medidas diferentes, ou seja:  $med(\overline{AB}) \neq med(\overline{AC}) \neq med(\overline{BC}) \neq med(\overline{AB})$ . Desta forma, esse triângulo é classificado como escaleno.

**Definição 2.5.2.** *O triângulo isósceles é aquele que possuem dois lados com medidas congruentes.*

Figura 29 – Triângulo Isósceles



**Fonte:** Própria autoria com uso do *software Geogebra*

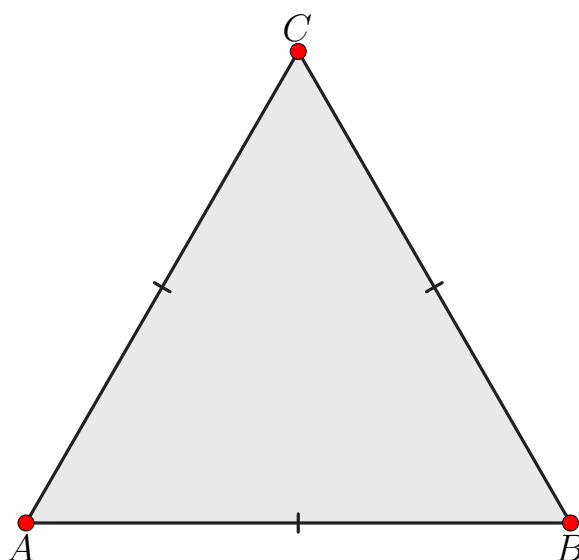
Na Figura 29 temos um triângulo  $ABC$  em que a medida do lado  $\overline{AB}$  é diferente das medidas dos lados  $\overline{AC}$  e  $\overline{BC}$  que são congruentes. Ou seja:

$$med(\overline{AB}) \neq med(\overline{AC}) = med(\overline{BC})$$

Desta forma, como o triângulo  $ABC$  possuem dois de seus lados com medidas congruentes, é classificado como isósceles.

**Definição 2.5.3.** O triângulo equilátero é aquele que possuem todas as medidas dos seus lados congruentes.

Figura 30 – Triângulo Equilátero



**Fonte:** Própria autoria com uso do *software Geogebra*

Como os lados do triângulo  $ABC$ , da Figura 30, possuem a mesma medida, esse triângulo é classificado como equilátero.

Tendo em vista as duas últimas definições acima, podemos concluir que um triângulo equilátero também é isósceles, pois se possuem três lados congruentes, também possuem dois. Será que a recíproca é verdadeira? Ou seja, um triângulo isósceles é também um triângulo equilátero?

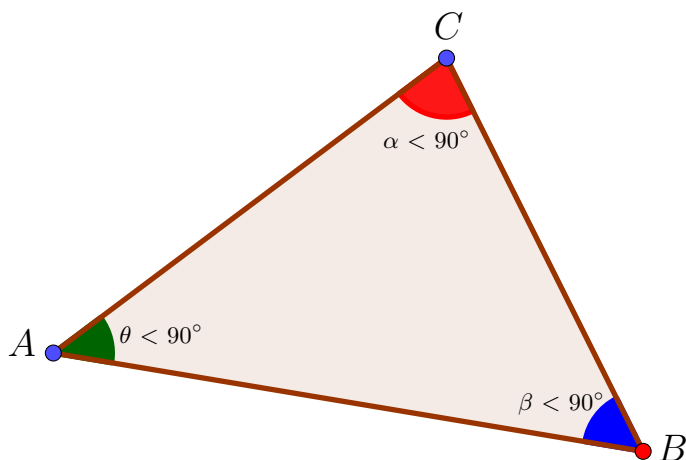
Não vale a recíproca, pois em um triângulo isósceles só é garantido que o mesmo tenha dois lados congruentes, já a definição para o equilátero é necessário ter-se os três lados congruentes.

## 2.5.2 Quanto as medidas dos seus ângulos internos

**Definição 2.5.4.** O triângulo acutângulo é aquele que possuem todas as medidas dos ângulos internos compreendidas entre  $0^\circ$  e  $90^\circ$ .



Figura 31 – Triângulo Acutângulo

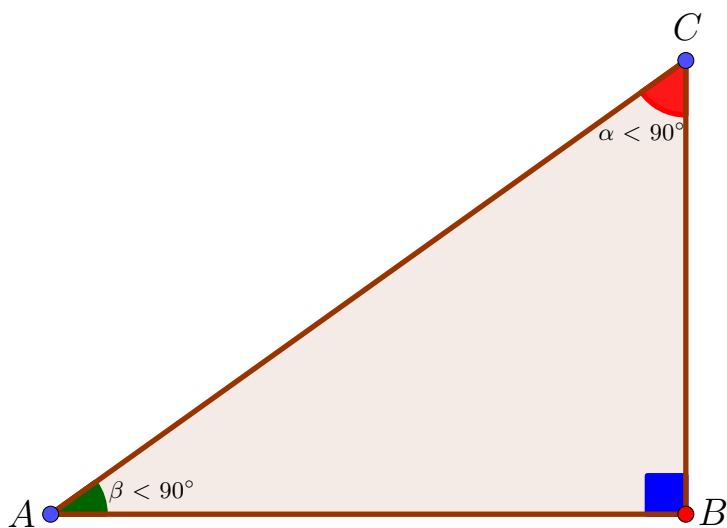


**Fonte:** Própria autoria com uso do *software Geogebra*

Como os ângulos internos do triângulo  $ABC$  da Figura 31 possuem todas as medidas menores que  $90^\circ$ , este triângulo é classificado como acutângulo.

**Definição 2.5.5.** O triângulo retângulo é aquele que possui um dos seus ângulos internos com medida igual a  $90^\circ$ .

Figura 32 – Triângulo Retângulo

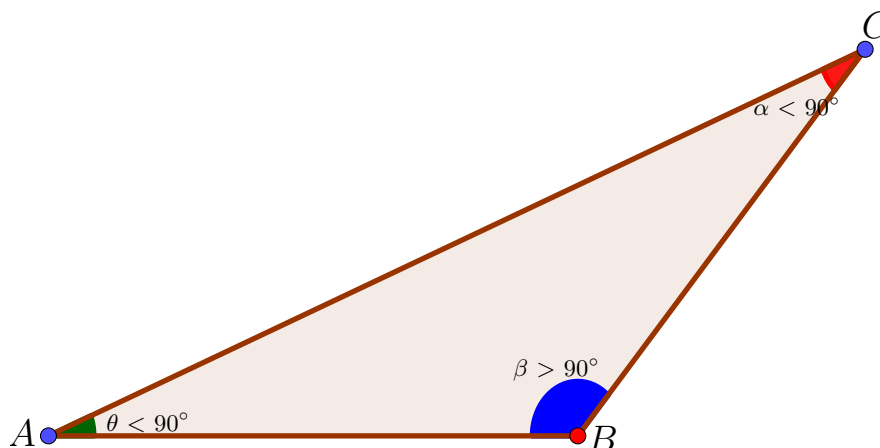


**Fonte:** Própria autoria com uso do *software Geogebra*

Como na Figura 32 temos o ângulo  $\widehat{ABC}$  medindo  $90^\circ$ , ou seja, o ângulo  $\widehat{B}$  é reto, temos que o triângulo  $ABC$  é classificado como triângulo retângulo.

**Definição 2.5.6.** Triângulo obtusângulo é aquele que um de seus ângulos internos possuem medida compreendida entre que  $90^\circ$  e  $180^\circ$ .

Figura 33 – Triângulo Obtusângulo



Fonte: Própria autoria com uso do *software Geogebra*

Na Figura 33, o ângulo  $\widehat{ABC}$  tem medida compreendida entre  $90^\circ$  e  $180^\circ$ , ou seja, a  $90^\circ < med(\widehat{B}) < 180^\circ$ .

Dessa forma, temos que o triângulo  $ABC$  é classificado como obtusângulo.

## 2.6 CONGRUÊNCIA DE TRIÂNGULOS

Exatamente como se define congruência para segmentos em termos de comprimento, definimos congruência entre ângulos em termos de medida. Isto é, se dois ângulos  $\widehat{ABC}$  e  $\widehat{DEF}$  possuem a mesma medida, então diremos que os ângulos são congruentes e indicaremos por  $med(\widehat{ABC}) \equiv med(\widehat{DEF})$ .

Um triângulo é congruente (símbolo  $\equiv$ ) a outro se, e somente se, é possível estabelecer uma correspondência entre seus vértices de modo que:

- seus lados são ordenadamente congruentes aos lados do outro;
- seus ângulos são ordenadamente congruentes aos ângulos do outro.

A congruência entre triângulos é uma relação de equivalência, ou seja, que satisfaz as seguintes propriedades: **reflexiva**<sup>1</sup>, **simétrica**<sup>2</sup> e **transitiva**<sup>3</sup>.

**Definição 2.6.1.** *Dois triângulos são congruentes quando as medidas dos lados e ângulos internos correspondentes forem congruentes.*

Seja um triângulo  $ABC$  com medidas de lados  $a$ ,  $b$  e  $c$ , e de ângulos internos  $\alpha$ ,  $\beta$  e  $\gamma$ . Agora considere outro triângulo  $DEF$  com medidas para os lados  $d$ ,  $e$  e  $f$  e ângulos internos  $\lambda$ ,  $\phi$  e  $\theta$ .

<sup>1</sup> todo triângulo é congruente a ele mesmo.

<sup>2</sup> se o triângulo  $ABC$  é congruente ao triângulo  $DEF$ , então, o triângulo  $DEF$  é congruente ao triângulo  $ABC$ .

<sup>3</sup> Se o triângulo  $ABC$  é congruente ao triângulo  $DEF$  e o triângulo  $DEF$  é congruente ao triângulo  $GHI$ , então, o triângulo  $ABC$  é congruente ao triângulo  $GHI$ .

Os triângulos  $ABC$  e  $DEF$  serão congruentes, ou seja, sua representação será denotada por  $\Delta ABC \equiv \Delta DEF$ , se ocorrer as correspondências biunívocas a seguir:

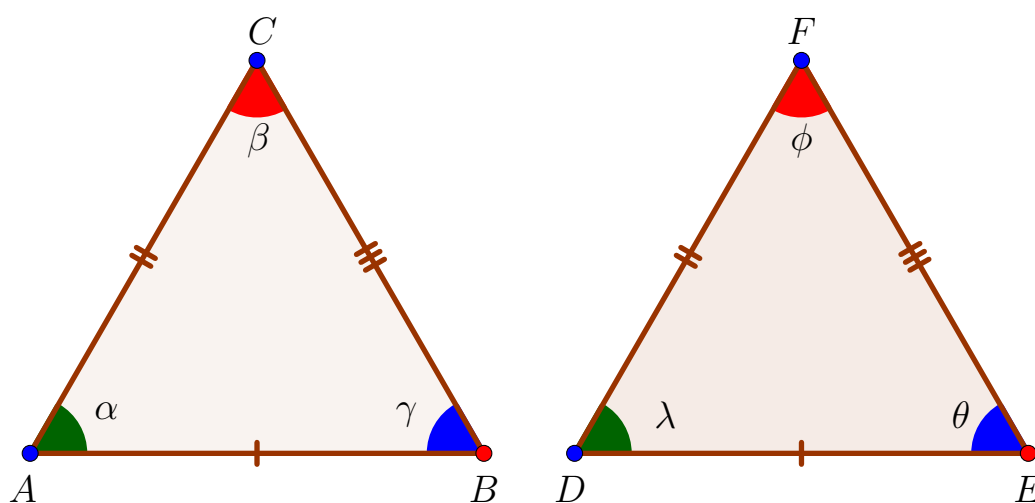
$$\text{med}(\overline{AB}) \equiv \text{med}(\overline{DE}) \quad \text{med}(\overline{BC}) \equiv \text{med}(\overline{EF}) \quad \text{e} \quad \text{med}(\overline{AC}) \equiv \text{med}(\overline{DF})$$

E,

$$\text{med}(\alpha) \equiv \text{med}(\lambda) \quad \text{med}(\beta) \equiv \text{med}(\phi) \quad \text{e} \quad \text{med}(\gamma) \equiv \text{med}(\theta)$$

Na Figura 34, temos os dois triângulos  $ABC$  e  $DEF$  satisfazendo as condições para serem congruentes.

Figura 34 – Triângulos congruentes



Fonte: Própria autoria com uso do software Geogebra

De fato, para que dois triângulos sejam congruentes é necessário que as seis congruências acima sejam satisfeitas. Porém, se queremos verificar se dois triângulos são congruentes será suficiente verificar apenas algumas delas.

Existem cinco casos nos quais se pode concluir que dois triângulos são congruentes. Estes casos são conhecidos como *casos ou critérios de congruência de triângulos*. Aqui não iremos nos deter a essas demonstrações, caso o leitor tenha interesse em consultar essas demonstrações, pode conferir-las em (DOLCE; POMPEO, 2013).

### 2.6.1 1° caso de congruência: LAL - Lado, Ângulo, Lado

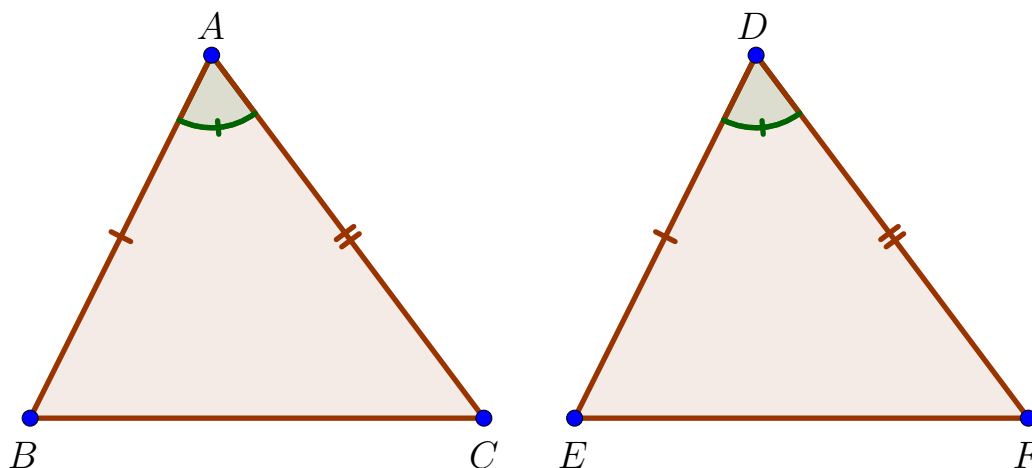
**Proposição 2.6.1.** *Se dois triângulos têm ordenadamente congruentes, dois lados e o ângulo compreendido entre eles, estes triângulos são congruentes.*

Esta proposição indica que, se dois triângulos têm ordenadamente congruentes dois lados e o ângulo compreendido entre eles, então o lado restante e os dois ângulos restantes também são ordenadamente congruentes.

Consideremos dois triângulos  $ABC$  e  $DEF$  conforme a Figura 35 de modo que satisfaça as seguintes condições:

$$med(\overline{AB}) \equiv med(\overline{DE}) \quad med(\overline{AC}) \equiv med(\overline{DF}) \quad e \quad med(\hat{A}) \equiv med(\hat{D})$$

Figura 35 – Caso de congruência LAL



Fonte: Própria autoria com uso do software Geogebra

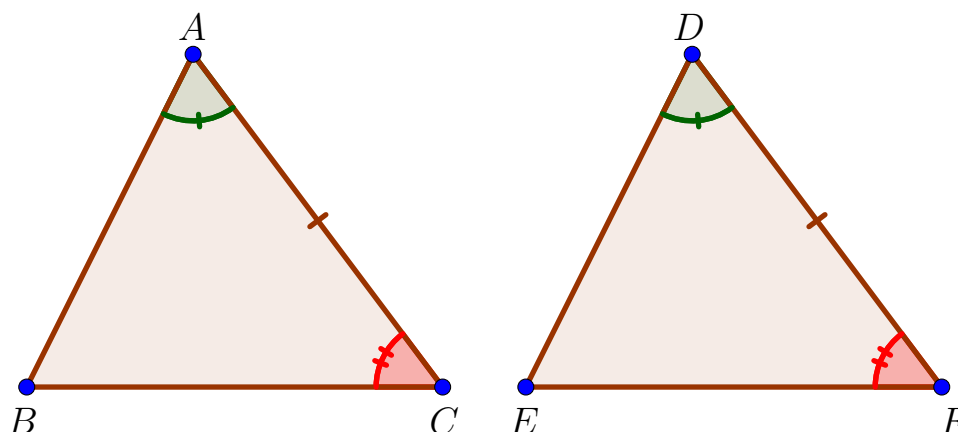
Como os triângulos  $ABC$  e  $DEF$  são congruentes pelo caso de congruência LAL, temos que:

$$med(\overline{BC}) \equiv med(\overline{EF}) \quad med(\hat{B}) \equiv med(\hat{E}) \quad e \quad med(\hat{C}) \equiv med(\hat{F})$$

### 2.6.2 2º caso de congruência: ALA - Ângulo, Lado, Ângulo

**Proposição 2.6.2.** *Se dois triângulos têm ordenadamente congruentes, um lado e os dois ângulos a ele adjacentes, então esses triângulos são congruentes.*

Figura 36 – Caso de congruência ALA



Fonte: Própria autoria com uso do software Geogebra

Na Figura 36, temos os triângulos  $ABC$  e  $DEF$  obedecendo as condições da proposição anterior.

Como os triângulos  $ABC$  e  $DEF$  são congruentes pelo caso de congruência ALA, temos que:

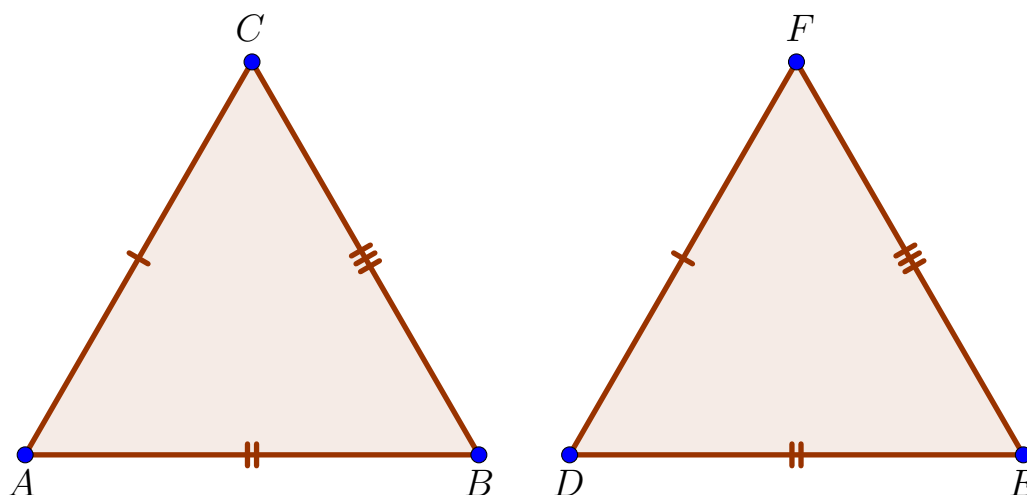
$$med(\overline{AB}) \equiv med(\overline{DE}) \quad med(\overline{BC}) \equiv med(\overline{EF}) \quad e \quad med(\hat{B}) \equiv med(\hat{E})$$

### 2.6.3 3º caso de congruência: LLL - Lado, Lado, Lado

**Proposição 2.6.3.** *Se dois triângulos têm ordenadamente congruentes os três lados, então esses triângulos são congruentes.*

Na Figura 37, temos os triângulos  $ABC$  e  $DEF$  obedecendo as condições da proposição anterior.

Figura 37 – Caso de congruência LLL



Fonte: Própria autoria com uso do software Geogebra

Como os triângulos  $ABC$  e  $DEF$  são congruentes pelo caso de congruência LLL, temos que:

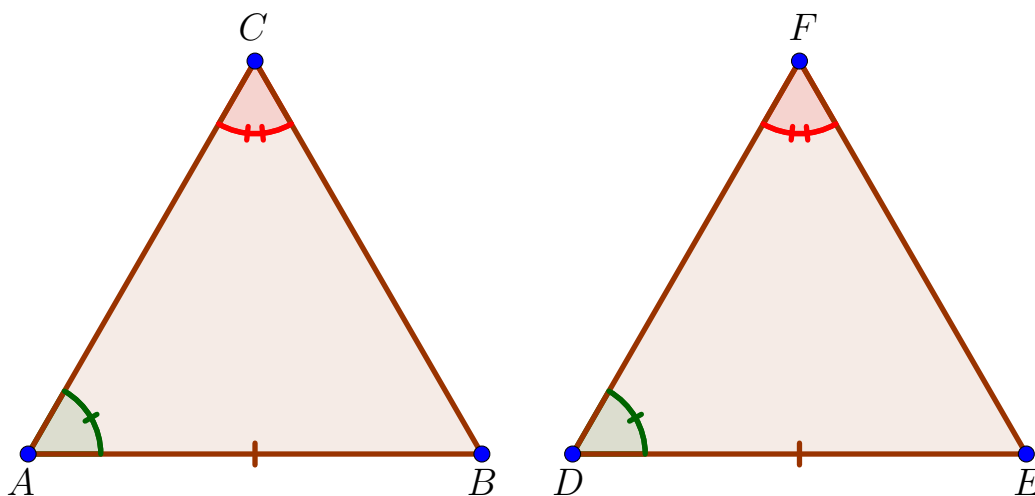
$$med(\hat{A}) \equiv med(\hat{D}) \quad med(\hat{B}) \equiv med(\hat{E}) \quad e \quad med(\hat{C}) \equiv med(\hat{F})$$

### 2.6.4 4º caso de congruência: LAA<sub>0</sub> - Lado, Ângulo, Ângulo oposto

**Proposição 2.6.4.** *Se dois triângulos têm ordenadamente congruentes um lado, um ângulo adjacente e o ângulo oposto a esse lado, então esses triângulos são congruentes.*

Na Figura 38, temos os triângulos  $ABC$  e  $DEF$  obedecendo as condições da proposição anterior. Como os triângulos  $ABC$  e  $DEF$  são congruentes pelo caso de congruência LAA<sub>0</sub>, temos que:

Figura 38 – Caso de congruência  $LAA_O$



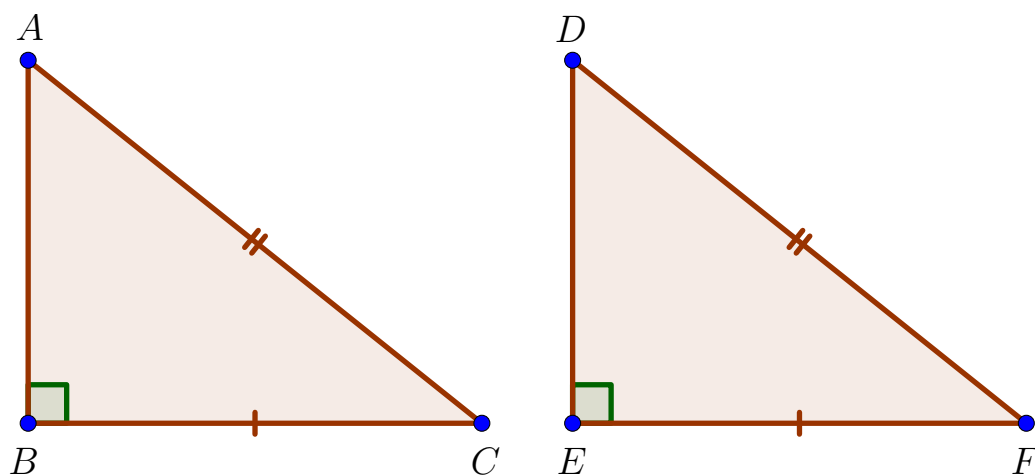
Fonte: Própria autoria com uso do software Geogebra

$$med(\overline{AC}) \equiv med(\overline{DF}) \quad med(\overline{BC}) \equiv med(\overline{EF}) \quad e \quad med(\hat{B}) \equiv med(\hat{E})$$

### 2.6.5 Caso especial de congruência de triângulos retângulos

**Proposição 2.6.5.** *Se dois triângulos retângulos têm ordenadamente congruentes as medidas de um cateto e da hipotenusa, então esses triângulos são congruentes.*

Figura 39 – Caso especial de congruência



Fonte: Própria autoria com uso do software Geogebra

Na Figura [39](#) temos que:

$$\begin{aligned} med(\hat{B}) &\equiv med(\hat{E}) = 90^\circ \\ med(\overline{BC}) &\equiv med(\overline{EF}) \\ med(\overline{AC}) &\equiv med(\overline{DF}) \end{aligned}$$

Assim, os triângulos  $ABC$  e  $DEF$  são congruentes pelo caso especial de congruência de triângulos.

Desta forma, concluímos que:

$$med(\overline{AB}) \equiv med(\overline{DE})$$

$$med(\widehat{A}) \equiv med(\widehat{D})$$

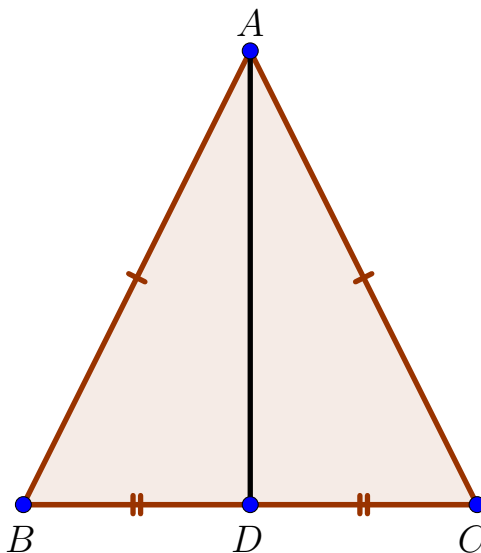
$$med(\widehat{C}) \equiv med(\widehat{F})$$

## 2.7 RELAÇÃO DE ÂNGULOS INTERNOS NO TRIÂNGULO ISÓSCELES

**Teorema 2.7.1.** *As medidas dos ângulos da base de um triângulo isósceles são congruentes.*

**Demonstração:** Seja  $ABC$  um triângulo isósceles de base  $\overline{BC}$  e  $D$  o ponto médio de  $\overline{BC}$ . Ligando o vértice  $A$  a esse ponto médio, obtemos dois triângulos  $ABD$  e  $ACD$  congruentes pelo caso de congruência  $LLL$ , como podemos ver na Figura 40:

Figura 40 – Ângulos da base congruentes de um triângulo



**Fonte:** Própria autoria com uso do *software Geogebra*

Como os dois triângulos são congruentes pelo caso  $LLL$ , segue:

$$med(\widehat{ABD}) \equiv med(\widehat{ACD})$$

Ou seja,

$$med(\widehat{B}) \equiv med(\widehat{C})$$

□

**Teorema 2.7.2.** *Se as medidas dos ângulos da base de um triângulo são congruentes, então ele é isósceles.*

**Demonstração:** Seja um triângulo  $ABC$  com as medidas dos ângulos da base congruentes e seja um segmento  $\overline{AH}$  perpendicular a base  $\overline{BC}$ .

Como os ângulos da base possuem medidas congruentes, ou seja,

$$\text{med}(\widehat{B}) \equiv \text{med}(\widehat{C})$$

e

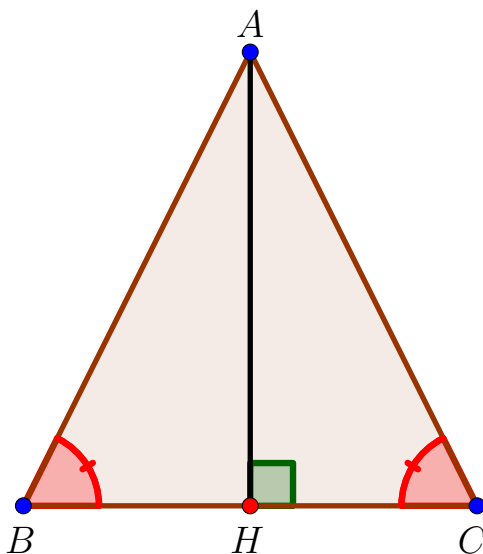
$$\text{med}(B\widehat{H}A) \equiv \text{med}(C\widehat{H}A) = 90^\circ$$

consequentemente temos:

$$\text{med}(H\widehat{A}B) \equiv \text{med}(H\widehat{A}C)$$

Assim, pelo caso de congruência  $LAA_O$  os triângulos  $HAB$  e  $HAC$  são congruentes como podemos observar na Figura 41.

Figura 41 – Triângulo com ângulos da base congruentes



**Fonte:** Própria autoria com uso do *software Geogebra*

Logo, temos:

$$\text{med}(\overline{AB}) \equiv \text{med}(\overline{AC})$$

Portanto, o triângulo  $ABC$  é isósceles.

## 2.8 ALGUNS ELEMENTOS NOTÁVEIS PRESENTES NO TRIÂNGULO

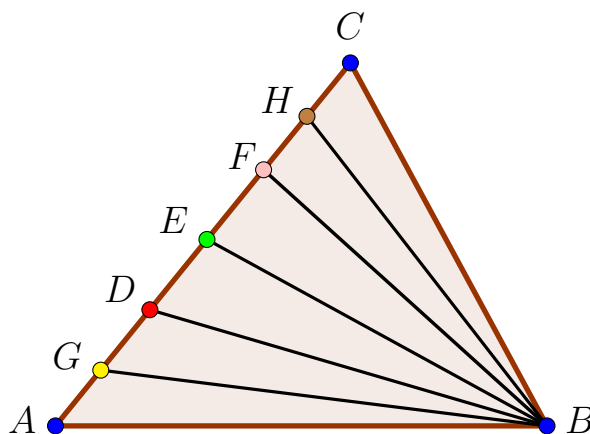
**Definição 2.8.1.** *Ceviana é qualquer segmento que parte de um vértice de um triângulo e intersecta o lado oposto ou o prologamento do lado oposto a esse vértice.*



Em um triângulo existem várias cevianas, dentre elas, iremos estudar as chamadas de cevianas notáveis denominadas de: **mediana**, **bissetriz interna**, **altura** e **mediatriz**.

Na Figura 42, tem-se que os segmentos  $\overline{BE}$ ,  $\overline{BF}$ ,  $\overline{BG}$ ,  $\overline{BD}$  e  $\overline{BH}$  são algumas das cevianas do triângulo  $ABC$ .

Figura 42 – Cevianas de um triângulo



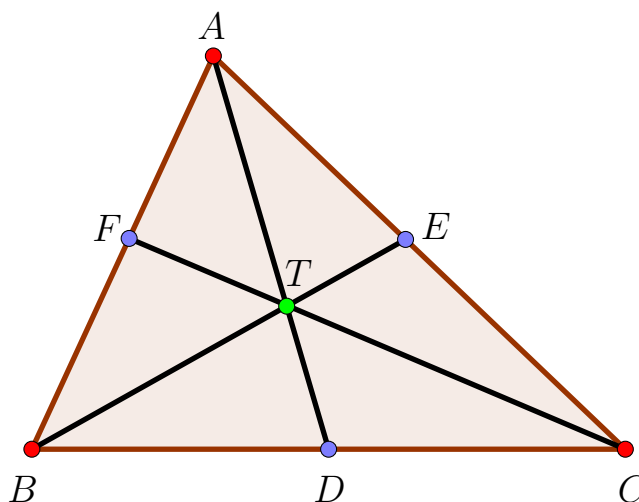
Fonte: Própria autoria com uso do software Geogebra

Este termo **cevianas** vem do nome do matemático italiano Giovanni Ceva<sup>2</sup>, que publicou em 1678 o seguinte teorema de Ceva.

O teorema de Ceva é um teorema de geometria elementar, que estabelece uma condição necessária e suficiente para que três cevianas sejam concorrentes em um único ponto.

Considere a Figura 43 em que três cevianas  $\overline{AD}$ ,  $\overline{BE}$  e  $\overline{CF}$  se intersectam no ponto  $T$ , tal que:  $med(\overline{AE}) \equiv med(\overline{EC})$   $med(\overline{AF}) \equiv med(\overline{FB})$   $med(\overline{BD}) \equiv med(\overline{DC})$

Figura 43 – Cevianas concorrentes



Fonte: Própria autoria com uso do software Geogebra

<sup>2</sup> Giovanni Ceva (1647-1734) foi um matemático italiano. Trabalhou principalmente com geometria. Em 1678 publicou o livro "De lineis rectis se invicem secantibus, statica constructio", que contém o teorema que leva o seu nome.

**Teorema 1.** *Se três cevianas  $\overline{AD}$ ,  $\overline{BE}$  e  $\overline{CF}$  de um triângulo  $ABC$  são concorrentes, então:*

$$\frac{\overline{BD}}{\overline{DC}} \cdot \frac{\overline{CE}}{\overline{EA}} \cdot \frac{\overline{AF}}{\overline{FB}} = 1.$$

**Demonstração:** Seja  $T$  o ponto de encontro das três cevianas como podemos ver na Figura 43:

Denote por  $S_{ABC}$  a área<sup>3</sup> de um triângulo  $ABC$ . Observe que os triângulos  $BDT$  e  $CDT$  possuem a mesma altura  $h$  com respeito às bases  $\overline{BD}$  e  $\overline{DC}$ , respectivamente.

Da mesma maneira, os triângulos  $ABD$  e  $ACD$  têm altura  $H$  com respeito às bases  $\overline{BD}$  e  $\overline{DC}$ , respectivamente. Assim:

$$S_{ABD} = \frac{1}{2}H \cdot \overline{BD} \quad \text{e} \quad S_{ACD} = \frac{1}{2}H \cdot \overline{DC}$$

$$S_{BDT} = \frac{1}{2}h \cdot \overline{BD} \quad \text{e} \quad S_{CDT} = \frac{1}{2}h \cdot \overline{DC}$$

Isto implica que:

$$\frac{S_{ABT}}{S_{ACT}} = \frac{S_{ABD} - S_{BDT}}{S_{ACD} - S_{CDT}} = \frac{\frac{1}{2}H \cdot \overline{BD} - \frac{1}{2}h \cdot \overline{BD}}{\frac{1}{2}H \cdot \overline{DC} - \frac{1}{2}h \cdot \overline{DC}} = \frac{\overline{BD}}{\overline{DC}}$$

Portanto:

$$\frac{S_{ABT}}{S_{ACT}} = \frac{\overline{BD}}{\overline{DC}}$$

De maneira análoga, tem-se:

$$\frac{S_{BCT}}{S_{ABT}} = \frac{\overline{CE}}{\overline{EA}} \quad \text{e} \quad \frac{S_{ACT}}{S_{BCT}} = \frac{\overline{AF}}{\overline{FB}}$$

Assim, se conclui que:

$$\frac{\overline{BD}}{\overline{DC}} \cdot \frac{\overline{CE}}{\overline{EA}} \cdot \frac{\overline{AF}}{\overline{FB}} = \frac{S_{ABT}}{S_{ACT}} \cdot \frac{S_{BCT}}{S_{ABT}} \cdot \frac{S_{ACT}}{S_{BCT}} = 1$$

□

A recíproca desse teorema também é verdadeira, vejamos:

**Teorema 2.** *Se três cevianas  $\overline{AD}$ ,  $\overline{BE}$  e  $\overline{CF}$  satisfazem:*

$$\frac{\overline{BD}}{\overline{DC}} \cdot \frac{\overline{CE}}{\overline{EA}} \cdot \frac{\overline{AF}}{\overline{FB}} = 1$$

*então elas são concorrentes.*

<sup>3</sup> Intuitivamente, a área de uma região no plano é um número positivo que associamos à mesma e que serve para quantificar o espaço por ela ocupado.

**Demonstração:** Seja  $T$  o ponto de interseção das cevianas  $\overline{AD}$  e  $\overline{BE}$ . Vamos mostrar que  $\overline{CF}$  passa por  $T$ . Seja  $\overline{CP}$  uma ceviana que passa por  $T$ . Pelo Teorema 1 anterior, temos:

$$\frac{\overline{BD}}{\overline{DC}} \cdot \frac{\overline{CE}}{\overline{EA}} \cdot \frac{\overline{AP}}{\overline{PB}} = 1$$

. Usando a hipótese, obtém-se:

$$\frac{\overline{AP}}{\overline{PB}} = \frac{\overline{AF}}{\overline{FB}}$$

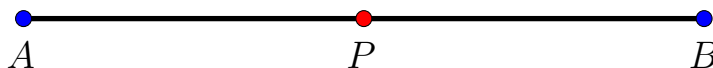
O que implica que  $\overline{AP} = \overline{AF}$ , ou ainda, que o ponto  $P$  coincide com o ponto  $F$ , pois  $P$  e  $F$  estão no mesmo segmento  $\overline{AB}$ . Desta forma, a ceviana  $\overline{CF}$  passa pelo ponto  $T$ .  $\square$

### 2.8.1 Mediana de um triângulo

Para entender a definição de mediana, vamos relembrar a definição de ponto médio.

**Definição 2.8.2.** *Seja  $P$  um ponto do segmento de reta  $\overline{AB}$ . Dizemos que  $P$  é o Ponto Médio desse segmento de reta, quando  $P$  divide o segmento  $\overline{AB}$  em duas partes congruentes.*

Figura 44 – Ponto Médio de um segmento



**Fonte:** Própria autoria com uso do *software Geogebra*

$$med(\overline{AP}) \equiv med(\overline{PB})$$

Agora que já sabemos a definição de ponto médio, introduziremos a definição de mediana.

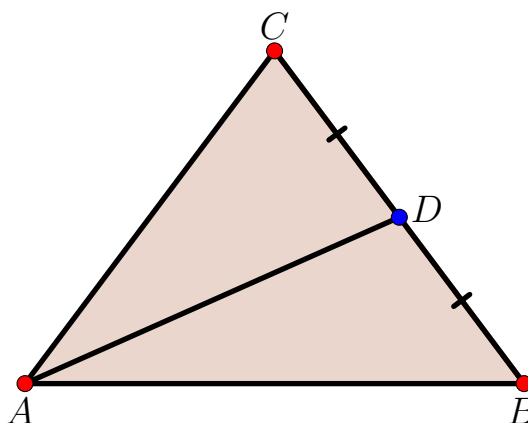
**Definição 2.8.3.** *Em um triângulo qualquer, uma mediana é o segmento de reta que liga um vértice ao ponto médio do lado oposto a este vértice.*

Seja o triângulo  $ABC$  conforme a Figura 45. Tem-se que  $D$  é o ponto médio do segmento  $\overline{BC}$ , assim  $\overline{AD}$  é a mediana do triângulo  $ABC$  em relação ao vértice  $A$  ou ao lado  $BC$ . Como existem três vértices em um triângulo, consequentemente irá existir três medianas.

Na Figura 46, tem-se um triângulo  $ABC$  e suas três medianas. Os pontos  $D$ ,  $E$  e  $F$  são pontos médios dos segmentos  $\overline{BC}$ ,  $\overline{AC}$  e  $\overline{AB}$  respectivamente. Logo, tem-se que os segmentos  $\overline{AD}$ ,  $\overline{BE}$  e  $\overline{CF}$  são as medianas relativas aos vértices  $A$ ,  $B$  e  $C$ .

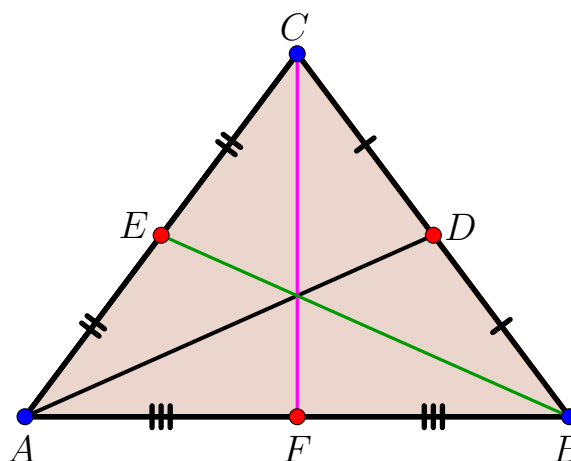
Perceba que as medianas desse triângulo se intersectam em um ponto interno ao triângulo  $ABC$ . Esse ponto de intersecção é denominado de **Baricentro**, o qual será abordado no próximo capítulo.

Figura 45 – Mediana de um triângulo



Fonte: Própria autoria com uso do software Geogebra

Figura 46 – Medianas de um triângulo



Fonte: Própria autoria com uso do software Geogebra

### 2.8.2 Bissetriz Interna de um Triângulo

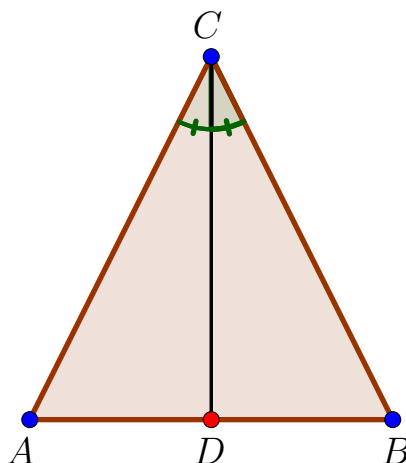
**Definição 2.8.4.** *Bissetriz interna de um triângulo é o segmento que liga um vértice do triângulo ao lado oposto, dividindo o ângulo desse vértice em dois ângulos de medidas iguais, ou seja, congruentes.*

Na Figura 47, tem-se um triângulo  $ABC$  em que  $\overline{CD}$  é uma das bissetrizes internas desse triângulo em relação ao vértice  $C$  ou em relação ao lado  $\overline{AB}$ . Pois, o ponto  $D$  pertence ao segmento  $\overline{AB}$  de modo que o segmento  $\overline{CD}$  divide o ângulo do vértice  $C$  em dois ângulos de mesma medida, ou seja:

$$med(\widehat{DCA}) = med(\widehat{DCB})$$

Desta forma, dizer que  $\overline{CD}$  é bissetriz em relação ao lado  $\overline{AB}$  ou é bissetriz relativa ao vértice  $C$ , são formas equivalentes de representá-la.

Figura 47 – Bissetriz Interna de um triângulo

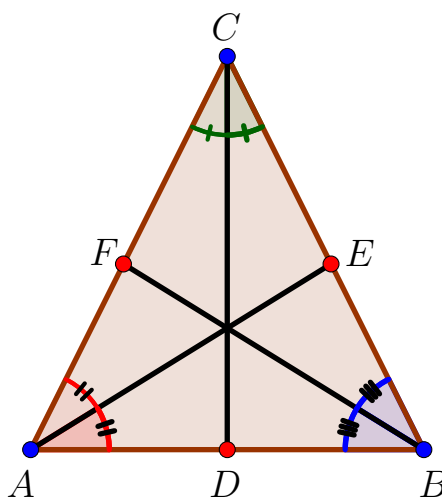


Fonte: Própria autoria com uso do software Geogebra

Em qualquer triângulo existem três bissetrizes e elas se encontram em um ponto chamado de **Incentro**, que é o centro da circunferência inscrita a um triângulo.

Na Figura 48, temos um triângulo  $ABC$  e suas bissetrizes.

Figura 48 – Bissetrizes Internas de um triângulo



Fonte: Própria autoria com uso do software Geogebra

Assim, temos:

- $\overline{CD}$  é bissetriz relativa ao ângulo  $\widehat{C}$  ou relativa ao lado  $\overline{AB}$ .
- $\overline{BF}$  é bissetriz relativa ao ângulo  $\widehat{B}$  ou relativa ao lado  $\overline{AC}$ .
- $\overline{AE}$  é bissetriz relativa ao ângulo  $\widehat{A}$  ou relativa ao lado  $\overline{BC}$ .

Desta forma, pode-se dizer que a bissetriz é o lugar geométrico dos pontos que estão a mesma distância das retas que formam o ângulo.

Logo, o incentro está a mesma distância dos três lados do triângulo, ou seja, ele é o centro da circunferência inscrita no triângulo.

Não iremos se aprofundar aqui nesta temática, pois será abordado no próximo capítulo.

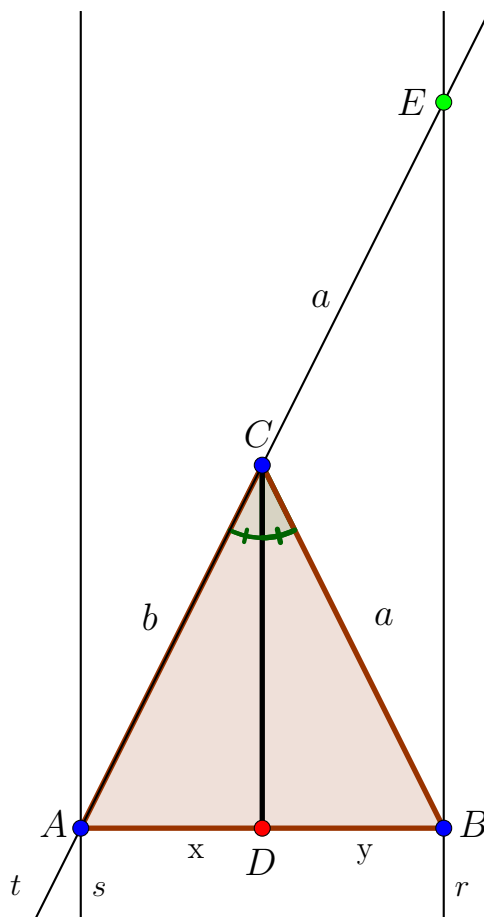
**Teorema 3.** *A bissetriz interna de um triângulo divide o lado oposto em dois segmentos de medidas proporcionais aos lados adjacentes.*

Na figura 47 mostrada anteriormente, tem-se um triângulo e desta forma é válido o teorema 3, ou seja:

$$\frac{\overline{AD}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{DB}}{\overline{BC}}$$

**Demonstração do teorema:** Dado o triângulo como mostrado na Figura 47, como  $\overline{CD}$  é bissetriz relativa ao vértice  $C$ , tracemos duas retas  $s$  e  $r$  paralelas a essa bissetriz passando pelos pontos  $A$  e  $B$  respectivamente (a existência dessas retas é garantida pelo postulado das paralelas), como podemos ver na Figura 49:

Figura 49 – Figura que ajuda entender o Teorema da Bissetriz Interna de um triângulo



Fonte: Própria autoria com uso do software Geogebra

A reta  $r$  que passa pelo ponto  $B$ , intersecta a reta  $t$  que contém o segmento  $\overline{AC}$  em um ponto o qual denotaremos por  $E$ .

Note que os segmentos  $\overline{CE}$  e  $\overline{CB}$  são congruentes, pois, o ângulo  $\widehat{ACD}$  e  $\widehat{AEB}$  são congruentes, ou seja,  $med(\widehat{ACD}) = med(\widehat{E})$ .

Por outro lado, como o ângulo  $\widehat{CBE}$  é alterno interno ao ângulo  $\widehat{DCB}$ , assim tem-se:  $med(\widehat{CBE}) = med(\widehat{DCB})$ .

Pelo fato de  $\overline{CD}$  ser bissetriz relativa ao vértice  $C$ , temos que:

$$\text{med}(\widehat{ACD}) = \text{med}(\widehat{DCB})$$

Como  $\text{med}(\widehat{CBE}) = \text{med}(\widehat{DCB})$ , obtemos:

$$\text{med}(\widehat{CBE}) = \text{med}(\widehat{DCB}) = \text{med}(\widehat{ACD}) = \text{med}(\widehat{AEB})$$

E conseqüentemente,

$$\text{med}(\widehat{CBE}) = \text{med}(\widehat{AEB})$$

Diante disso, concluímos que o triângulo  $CBE$  é isósceles de base  $\overline{EB}$ , pois os ângulos da base são congruentes. Portanto:

$$\text{med}(\overline{BC}) = \text{med}(\overline{CE}) = a$$

Agora usando o Teorema de Tales<sup>1</sup> (cuja demonstração pode ser encontrada em (DOLCE; POMPEO, 2013)) podemos concluir que:

$$\frac{\overline{AD}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{DB}}{\overline{BC}} \Rightarrow \frac{x}{b} = \frac{y}{a}$$

□

Vejamos agora um exemplo de exercício que pode ser resolvido utilizando o teorema da bissetriz interna.

**Exemplo 2.8.1.** *O perímetro do triângulo  $ABC$  vale 60 cm e a bissetriz do ângulo  $\hat{A}$  divide o lado oposto em dois segmentos de 9cm e 11cm, conforme a Figura 50.*

Determinar a medida do maior lado do triângulo  $ABC$ .

**Solução.**

Sabemos que o perímetro do triângulo é de 60cm, então:

$$b + c + 9 + 11 = 60$$

Assim:

$$c = 40 - b$$

Usando o Teorema da bissetriz interna temos:

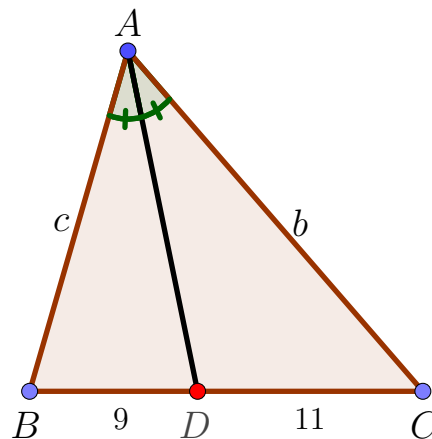
$$\frac{\overline{BD}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{DC}}{\overline{AC}} \Rightarrow \frac{9}{c} = \frac{11}{b} \Rightarrow \frac{9}{40-b} = \frac{11}{b} \Rightarrow 9 \cdot b = 11 \cdot (40 - b) \Rightarrow b = 22$$

Perceba que o valor de  $b = 22\text{cm}$  é o maior valor para os lados do triângulo  $ABC$ , uma vez que  $c = 40 - b$ , ou seja,  $c = 40 - 22 = 18\text{cm}$  e  $a = 9 + 11 = 20\text{cm}$ .

Portanto, o maior lado desse triângulo tem medida igual a 22cm.

<sup>1</sup> Teorema de Tales afirma que um feixe de retas paralelas determina, em duas transversais quaisquer, segmentos proporcionais. Desse modo, se temos duas retas paralelas “cortadas” por duas transversais, os segmentos formados por essa intersecção são proporcionais.

Figura 50 – Ilustração com os dados do problema

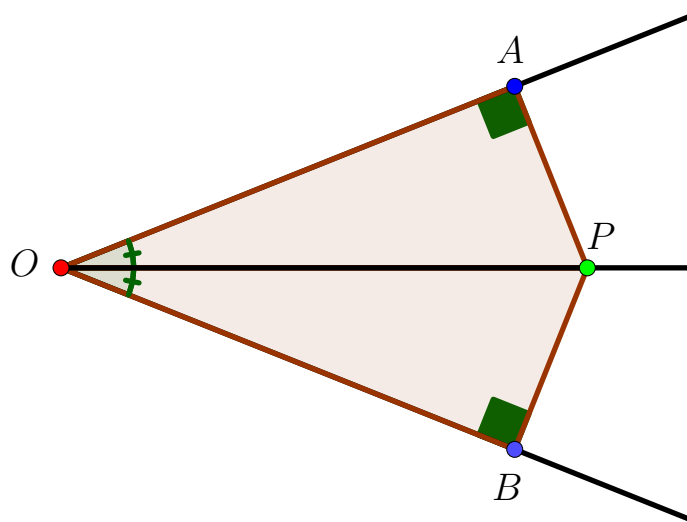


Fonte: Própria autoria com uso do software Geogebra

**Proposição 2.8.1.** *Qualquer ponto pertencente a bissetriz de um ângulo é equidistante aos lados que formam esse ângulo.*

**Demonstração:** Suponhamos que o ponto  $P$  esteja contido na bissetriz relativa ao vértice  $O$  e sejam  $A$  e  $B$  respectivamente os pés das perpendiculares baixadas de  $P$  sobre as semirretas  $\overrightarrow{OA}$  e  $\overrightarrow{OB}$ , como podemos observar na Figura 51.

Figura 51 – Bissetriz de um ângulo



Fonte: Própria autoria com uso do software Geogebra

Assim, os triângulos  $OPA$  e  $OPB$  possuem o lado  $\overline{OP}$  em comum, e além disso, os ângulos  $\widehat{AOP}$  e  $\widehat{BOP}$  são congruentes, pois  $\overline{OP}$  é bissetriz do ângulo  $\widehat{AOB}$ . Como ambos os triângulos possuem um ângulo reto, esses dois triângulo são congruentes pelo caso  $LAA_O$ .

Desta forma, temos que:

$$med(\overline{PA}) = med(\overline{PB})$$



Portanto o ponto  $P$  é equidistante das semirretas  $\overrightarrow{OA}$  e  $\overrightarrow{OB}$ .  $\square$

### 2.8.3 Altura de um triângulo

Das cevianas, talvez a mais utilizada seja a altura, por estar presente no cálculo de área do triângulo, sendo a única das cevianas que pode ficar fora da região interna do triângulo.

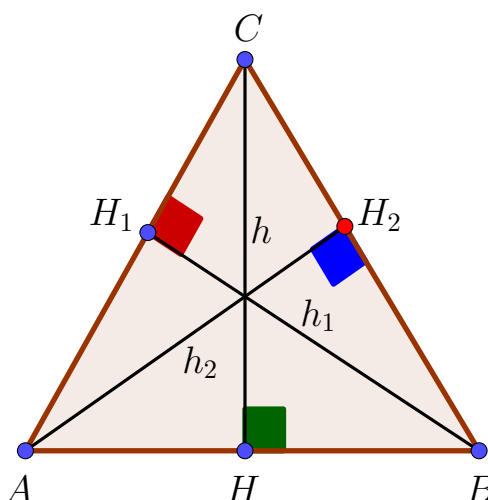
**Definição 2.8.5.** *Altura de um triângulo é a ceviana que une perpendicularmente um dos vértices ao seu lado oposto ou ao seu prolongamento, ou seja, é um segmento de reta que parte de um vértice e é perpendicular ao lado oposto ou ao seu prolongamento.*

De acordo com o tipo de triângulo considerado, a altura relativa a cada vértice desse triângulo, pode está internamente ou externamente da região triangular.

Diante disso, vamos analisar as alturas nos casos em que os triângulos seja acutângulo, retângulo ou obtusângulo.

- **1º caso: triângulo acutângulo.**

Figura 52 – Alturas de um triângulo Acutângulo



Fonte: Própria autoria com uso do software Geogebra

Na Figura 52, tem-se um triângulo  $ABC$  acutângulo onde  $h$ ,  $h_1$  e  $h_2$  são alturas desse triângulo, pois parte dos vértices  $C$ ,  $B$  e  $A$  e formam ângulos de  $90^\circ$  com os lados  $\overline{AB}$ ,  $\overline{AC}$  e  $\overline{BC}$  respectivamente.

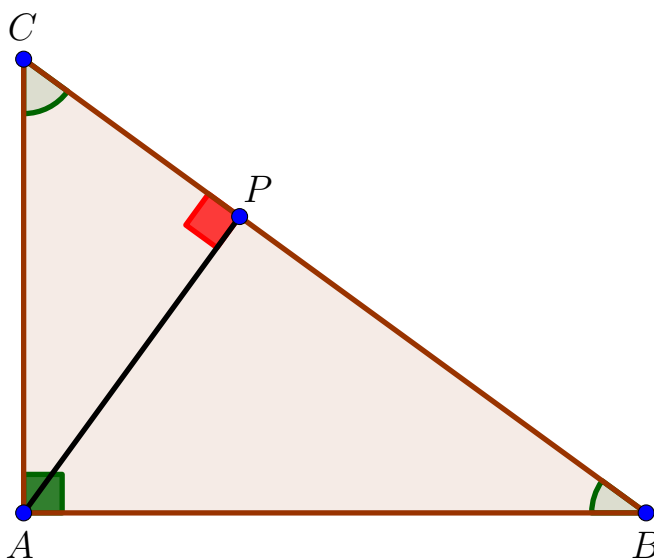
Portanto, para triângulo acutângulo foi verificado que as altura relativa a cada um de seus vértices estão internamente ao triângulo.

- **2º caso: triângulo retângulo.**

Na Figura 53, tem-se um triângulo retângulo  $ABC$ , onde  $\overline{AP}$ ,  $\overline{AB}$  e  $\overline{AC}$  são as alturas relativas aos vértices  $A$ ,  $B$  e  $C$ , respectivamente. Pois,  $\overline{AP}$  parte do vértice  $A$  e forma um ângulo de  $90^\circ$  no ponto  $P$ , que pertence ao segmento  $\overline{BC}$ , que é oposto ao vértice  $A$ .

Como o vértice  $A$  é o pé da altura em relação ao vértice  $B$  e  $C$ , segue que as três alturas pertence a região internamente ao triângulo  $ABC$ .

Figura 53 – Alturas de um triângulo Retângulo

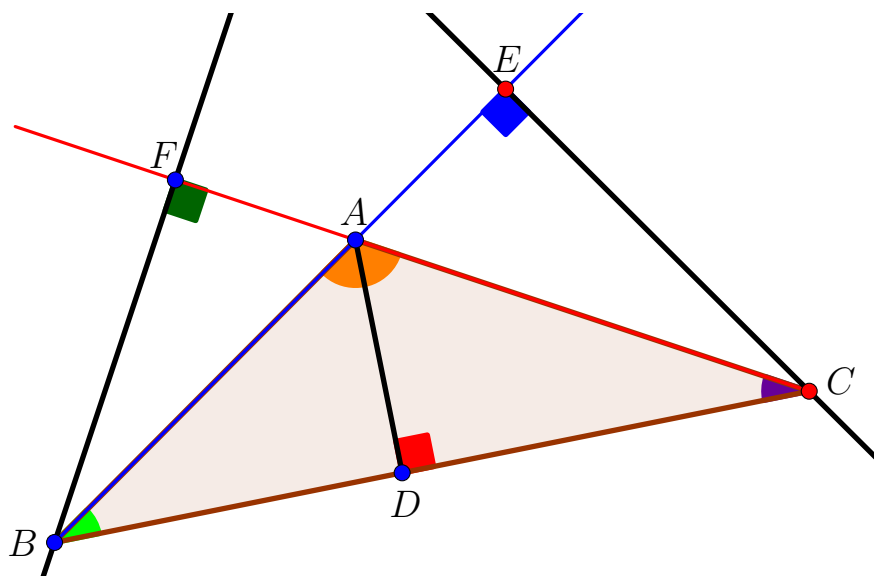


Fonte: Própria autoria com uso do software Geogebra

• 3º caso: triângulo obtusângulo.

Na Figura 54, tem-se um triângulo  $ABC$  obtusângulo, onde  $\overline{AD}$ ,  $\overline{CE}$  e  $\overline{BF}$  são as alturas relativas aos vértices  $A$ ,  $C$  e  $B$ , respectivamente. Pois,  $\overline{AD}$  parte do vértice  $A$  e forma um ângulo de  $90^\circ$  no ponto  $D$ , que pertence ao segmento  $\overline{BC}$ , que é oposto ao vértice  $A$ .

Figura 54 – Alturas de um triângulo Obtusângulo



Fonte: Própria autoria com uso do software Geogebra

O segmento  $\overline{AE}$  é o prolongamento do segmento  $\overline{BA}$  com  $med(\widehat{AEC}) = 90^\circ$ , ou seja o segmento  $\overline{CE}$  é a altura do triângulo  $ABC$  relativa ao vértice  $C$ .

Já o segmento  $\overline{AF}$  é o prolongamento do segmento  $\overline{CA}$  com  $med(\widehat{AFB}) = 90^\circ$ , ou seja o segmento  $\overline{BF}$  é a altura do triângulo  $ABC$  relativa ao vértice  $B$ .

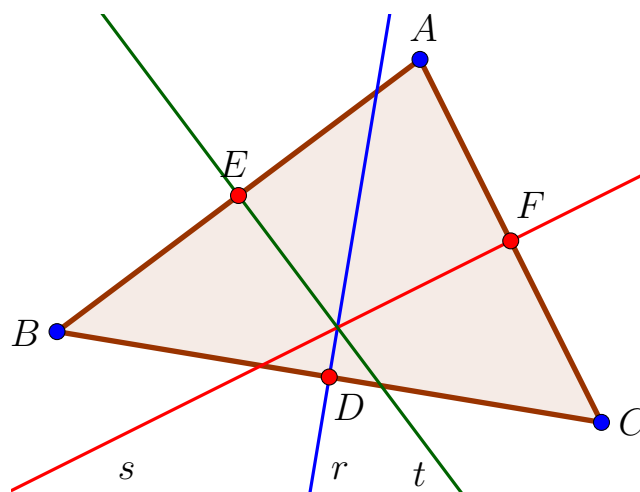
Portanto, se o triângulo dado for obtusângulo, tem-se que existem alturas relativas aos vértices que não estão internamente a esse triângulo, ou seja, estão externamente a região triangular.

## 2.8.4 Mediatriz de um triângulo

**Definição 2.8.6.** *Mediatriz de um segmento de reta é a reta perpendicular, a esse segmento, no seu ponto médio.*

Na Figura 55, tem-se um triângulo  $ABC$  em que os pontos  $D$ ,  $E$  e  $F$  são pontos médios dos segmentos  $\overline{BC}$ ,  $\overline{AB}$  e  $\overline{AC}$  respectivamente. Desta forma, as retas  $r, s$  e  $t$  são as mediatrizes relativas aos segmentos  $\overline{BC}$ ,  $\overline{AC}$  e  $\overline{AB}$ , pois são retas perpendiculares a esses segmentos em seus pontos médios.

Figura 55 – Mediatrizes de um triângulo



**Fonte:** Própria autoria com uso do software Geogebra

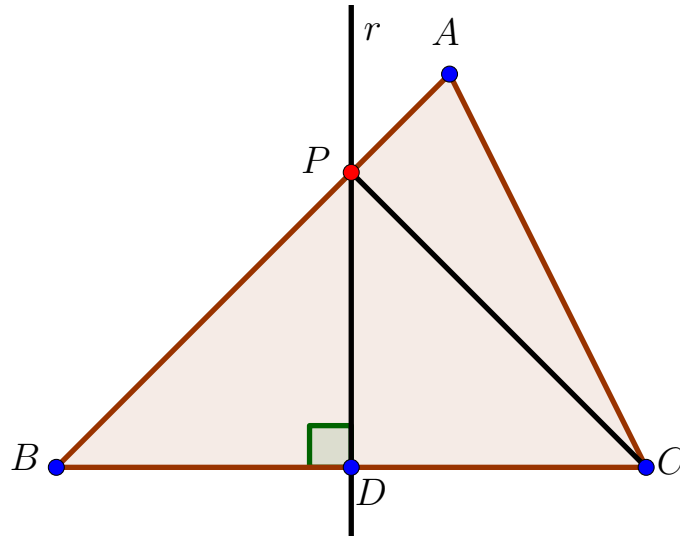
Note que as três mediatrizes do triângulo  $ABC$  da Figura 55 se intersectaram em um ponto, esse ponto é denominado circuncentro do triângulo.

Esse circuncentro é o centro da circunferência circunscrita ao triângulo, ou seja, a circunferência que passa pelos três vértices do triângulo. Voltaremos a falar de circuncentro no capítulo seguinte.

**Proposição 2.8.2.** *Qualquer ponto que pertença à mediatriz de um segmento é equidistante dos pontos que são extremidades desse segmento.*

**Demonstração:** Considere o segmento de reta  $\overline{BC}$ , a sua mediatriz  $r$  e um ponto  $P$  qualquer da mediatriz. Observando os triângulos  $BDP$  e  $CDP$  na figura 56, tem-se :

Figura 56 – Pontos de uma mediatriz



Fonte: Própria autoria com uso do software Geogebra

- $med(\overline{BD}) = med(\overline{DC})$  pois  $D$  é ponto médio de  $\overline{BC}$ .
- $med(\widehat{BDP}) = med(\widehat{CDP})$ , pois ambos são ângulos de  $90^\circ$ .
- $\overline{PD}$  é lado comum aos dois triângulos  $BDP$  e  $CDP$ .

Então, pelo caso  $LAL$ , os dois triângulos  $BDP$  e  $CDP$  são congruentes. Assim,  $\overline{PB} \equiv \overline{PC}$ , ou seja, o ponto  $P$  é equidistante de  $B$  e de  $C$ .

Como foi considerado que  $P$  era um ponto qualquer, provamos que todo ponto da mediatriz de um segmento de reta é equidistante das extremidades desse segmento.

## 2.9 QUADRILÁTEROS NOTÁVEIS

**Definição 2.9.1.** Um quadrilátero convexo é um **paralelogramo** se possuir os pares de lados opostos paralelos.

Vamos enunciar várias maneiras equivalentes de definir paralelogramos.

**Proposição 2.9.1.** Um quadrilátero convexo é um paralelogramo se, e somente se, seus ângulos opostos forem congruentes.

**Demonstração:** Suponha, primeiro, que o quadrilátero convexo  $ABCD$  é um paralelogramo, como podemos ver na Figura 57:

Assim,  $\overleftrightarrow{AD} \parallel \overleftrightarrow{BC}$  e, como os ângulos  $\widehat{A}$  e  $\widehat{B}$  do paralelogramo são colaterais internos em relação a reta  $\overleftrightarrow{AB}$ , temos  $med(\widehat{BAD}) + med(\widehat{ABC}) = 180^\circ$ .

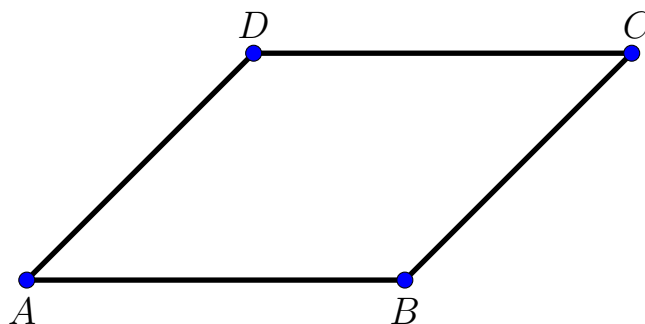
Analogamente,

$$med(\widehat{ABC}) + med(\widehat{BCD}) = 180^\circ$$

Daí,

$$med(\widehat{BAD}) = 180^\circ - med(\widehat{ABC}) = med(\widehat{BCD}).$$

Figura 57 – Paralelogramo



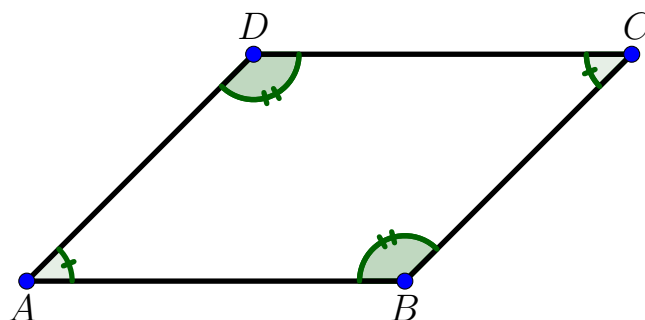
Fonte: Própria autoria com uso do software Geogebra

Do mesmo modo,

$$med(\widehat{ABC}) = med(\widehat{ADC})$$

Reciprocamente, seja  $ABCD$  um quadrilátero convexo tal que  $med(\widehat{BAD}) = med(\widehat{BCD})$  e  $med(\widehat{ABC}) = med(\widehat{ADC})$  como podemos ver na Figura 58:

Figura 58 – Ilustração dos ângulos opostos congruentes de um paralelogramo



Fonte: Própria autoria com uso do software Geogebra

Então,  $med(\widehat{BAD}) + med(\widehat{ABC}) = med(\widehat{BCD}) + med(\widehat{ADC})$  e como  $med(\widehat{BAD}) + med(\widehat{ABC}) + med(\widehat{BCD}) + med(\widehat{ADC}) = 360^\circ$ , temos que,  $med(\widehat{BAD}) + med(\widehat{ABC}) = med(\widehat{BCD}) + med(\widehat{ADC}) = 180^\circ$ .

Analogamente,

$$med(\widehat{BAD}) + med(\widehat{ADC}) = med(\widehat{ABC}) + med(\widehat{BCD})$$

Agora, como  $med(\widehat{BAC}) + med(\widehat{ABC}) = 180^\circ$ , temos que  $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$ .

Da mesma forma,

$$med(\widehat{ABC}) + med(\widehat{BCD}) = 180^\circ$$

Logo  $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$ , de maneira que  $ABCD$  tem lados opostos paralelos, isto é, é um paralelogramo.

**Proposição 2.9.2.** *Um quadrilátero convexo é um paralelogramo se, e somente se, seus pares de lados opostos forem congruentes.*

**Proposição 2.9.3.** *Um quadrilátero é um paralelogramo se, e somente se, suas diagonais se intersectam nos respectivos pontos médios.*

**Proposição 2.9.4.** *Se um quadrilátero possui dois lados opostos paralelos e congruentes, então ele é um paralelogramo.*

As demonstrações dessas últimas três proposições, podem ser encontradas em (NETO, 2013).

**Definição 2.9.2.** *Base Média de um triângulo é um segmento que une os pontos médios de dois de seus lados.*

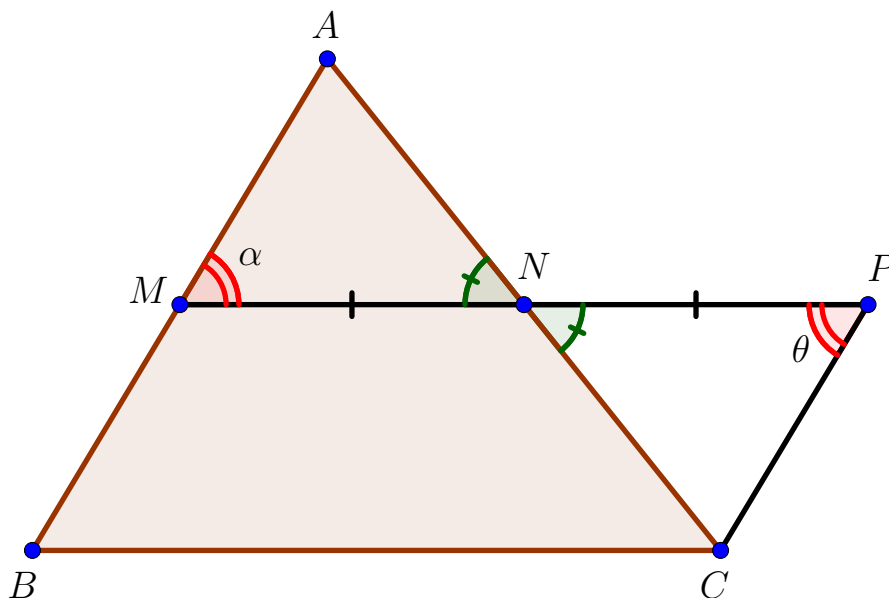
Assim, todo triângulo possui exatamente três bases médias. As propriedades de paralelogramos obtidas anteriormente nos permitem provar, um resultado importante sobre as bases médias de um triângulo, conhecido como o **Teorema da Base Média**.

**Teorema 2.9.5.** *Seja  $ABC$  um triângulo qualquer. Se  $\overline{MN}$  é a base média do triângulo  $ABC$  relativa ao lado  $\overline{BC}$ , então  $\overline{MN} \parallel \overline{BC}$ . Reciprocamente, se pelo ponto médio  $M$  do lado  $\overline{AB}$  traçarmos a paralela ao lado  $\overline{BC}$  então tal reta intersecta o lado  $\overline{AC}$  em seu ponto médio  $N$ . Para qualquer dos casos acima, vale que:*

$$\overline{MN} = \frac{1}{2} \overline{BC}$$

**Demonstração:** Seja  $P \in \overleftrightarrow{MN}$  tal que  $\overline{MN} = \overline{NP}$  como  $\widehat{ANM} \equiv \widehat{PNC}$  (Ângulos opostos pelo vértice). Veja a Figura 59:

Figura 59 – Ilustração do Teorema da Base Média de um Triângulo



Fonte: Própria autoria com uso do software Geogebra

Temos pelo caso de congruência LAL que  $\triangle ANM \equiv \triangle CNP$ .

Assim,  $\overline{PC} \equiv \overline{AM} \equiv \overline{MB}$  e também temos que  $\hat{\alpha} \equiv \hat{\theta}$ .

Veja que  $\hat{\alpha}$  e  $\hat{\theta}$  são ângulos alternos internos quando olhamos a transversal  $\overline{MP}$  intersectando os segmentos  $\overline{AB}$  e  $\overline{PC}$ .

Como  $\widehat{AMN} \equiv \widehat{NPC}$ , pelo axioma das paralelas, temos  $\overline{AB} \parallel \overline{PC}$ .

Veja que, no quadrilátero  $BCPM$  temos dois lados paralelos e iguais, a saber, os lados  $\overline{BM}$  e  $\overline{PC}$ . Portanto, pela proposição anterior, o quadrilátero  $BCPM$  é um paralelogramo.

Como  $BCPM$  é um paralelogramo, temos os lados opostos  $\overline{MP}$  e  $\overline{BC}$  paralelos e congruentes. Daí,  $\overline{MN} \parallel \overline{BC}$  e  $\overline{MP} = \overline{BC}$  o que resulta:

$$\overline{MN} = \frac{1}{2}\overline{MP} = \frac{1}{2}\overline{BC}$$

□

### 3 PONTOS NOTÁVEIS DE UM TRIÂNGULO E A RETA DE EULER

Neste capítulo será abordado os seguintes pontos notáveis presentes no triângulo: **baricentro**, **incentro**, **circuncentro** e **ortocentro**, com a finalidade de aplicá-los na demonstração da **reta de Euler**, que nos diz que em um triângulo qualquer não-equilátero, o baricentro, o circuncentro e o ortocentro são pontos colineares.

Tratam-se de elementos importantes na caracterização e formação estrutural de uma determinada forma geométrica. No caso, quando nos referimos a triângulos, os pontos notáveis apresentam características únicas, sendo essencial estudá-las de forma mais robusta, abordando os principais conceitos e resultados.

#### 3.1 BARICENTRO

No capítulo anterior foi considerado que as três medianas de um triângulo se encontravam em um ponto internamente ao triângulo, independentemente de qual tipo seja sua classificação e a esse ponto de intersecção foi denominado de **baricentro**.

O baricentro também pode ser chamado de centróide, centro de massa ou centro de gravidade, porque é o ponto de equilíbrio. Isso significa que, se apoiarmos um objeto exatamente nesse ponto, o triângulo ficará equilibrado.

O baricentro foi descoberto na Geometria, mas podemos encontrar sua aplicação em outras áreas de conhecimentos como na Física, na Arquitetura, na Engenharia e muitas outras áreas presentes no nosso cotidiano.

Ele é o ponto em que a força da gravidade atua em um corpo, então é nele que podemos equilibrar as forças de atração. Graças a esse conceito, é que as construções de diversos formatos se mantêm em pé, e além disso, contribui para a criação de foguetes e trajes espaciais.

**Proposição 3.1.1.** *As três medianas de um triângulo concorrem em um único ponto chamado de **baricentro**.*

**Demonstração:** Consideremos a Figura 60 em que  $\overline{AD}$ ,  $\overline{BE}$  e  $\overline{CF}$  são as medianas relativas aos vértices  $A, B$  e  $C$  respectivamente.

Agora utilizando o Teorema de Ceva temos:

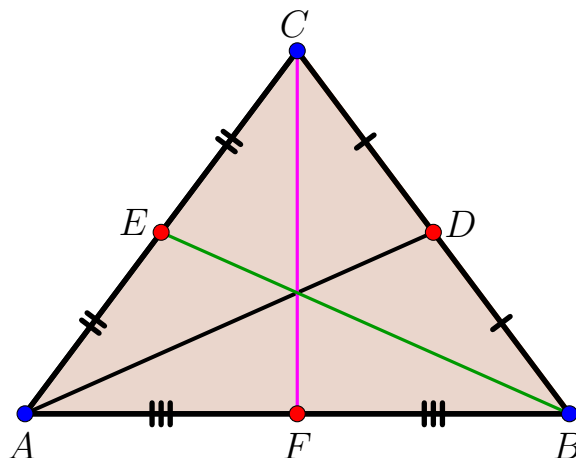
$$\frac{\overline{AF}}{\overline{FB}} = \frac{\overline{BD}}{\overline{DC}} = \frac{\overline{CE}}{\overline{EA}} = 1$$

Então:

$$\frac{\overline{AF}}{\overline{FB}} \cdot \frac{\overline{BD}}{\overline{DC}} \cdot \frac{\overline{CE}}{\overline{EA}} = 1$$



Figura 60 – Baricentro de um triângulo

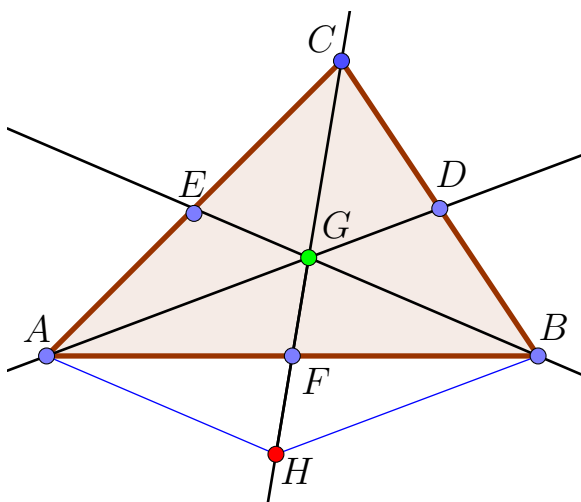


Fonte: Própria autoria com uso do software Geogebra

**Proposição 3.1.2.** *O baricentro divide cada segmento dessas medianas em duas partes na razão 2 : 1*

**Demonstração:** Considere um triângulo ABC qualquer, tal que, suas medianas sejam  $\overline{AD}$ ,  $\overline{BE}$  e  $\overline{CF}$  respectivamente aos vértices A, B e C que se intersectam no ponto G (baricentro). Observe a Figura 61 :

Figura 61 – Ilustração que mostra as relações do Baricentro



Fonte: Própria autoria com uso do software Geogebra

Provaremos que a medida de  $\overline{CG}$  é o dobro da medida de  $\overline{GF}$ , ou seja,

$$\overline{CG} = 2 \cdot \overline{GF}$$

ou ainda,

$$\overline{CG} = \frac{2}{3} \cdot \overline{CF}$$

De fato, Seja H pertencente a reta que passa pelos pontos C e G, tal que  $\overline{GH} = \overline{CG}$  e tracemos os segmentos  $\overline{AH}$  e  $\overline{BH}$ .

No triângulo  $CHA$ ,  $\overline{EG}$  é paralelo à  $\overline{AH}$ , pois  $G$  e  $E$  são pontos médios dos lados  $\overline{CH}$  e  $\overline{CA}$ , respectivamente (Base média).

De maneira análoga,  $\overline{GD}$  é paralelo à  $\overline{HB}$  no triângulo  $CHB$ . Assim, tem-se que  $AHBG$  é um paralelogramo (Definição) e suas diagonais  $\overline{AB}$  e  $\overline{GH}$  se encontram em seus pontos médios.

Por outro lado, temos que:

$$\overline{CG} = \overline{GH} - 2 \cdot \overline{GF} \quad \text{ou} \quad \overline{CG} = \overline{GH} = \frac{2}{3} \cdot \overline{CF}$$

. De modo análogo, se prova que:

$$\overline{AG} = 2 \cdot \overline{GD} \quad \text{e} \quad \overline{BG} = 2 \cdot \overline{GE}$$

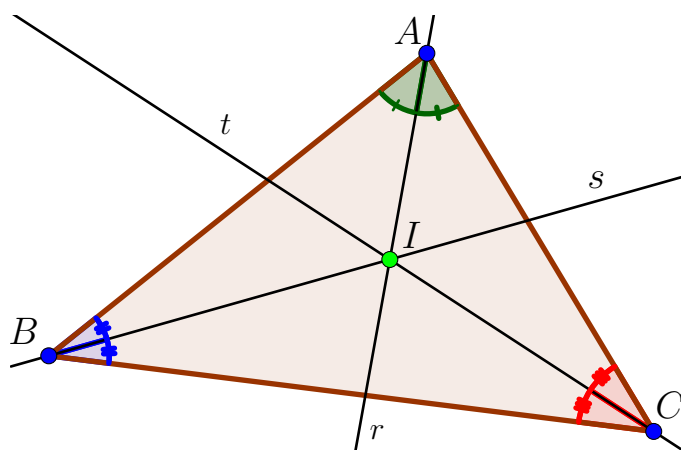
Desta forma, fica demonstrado o resultado. □

### 3.2 INCENTRO

**Proposição 3.2.1.** *Em todo triângulo as bissetrizes internas se intersectam no mesmo ponto chamado de **Incentro**. Esse ponto é o centro da circunferência inscrita ao triângulo.*

**Demonstração:** Considere um triângulo  $ABC$  qualquer em que as retas  $r, s, e t$  são as bissetrizes dos ângulos dos vértices  $A, B$  e  $C$  respectivamente. O ponto de encontro dessas bissetrizes chamaremos de  $I$  e assim construímos a Figura 62.

Figura 62 – Incentro de um triângulo



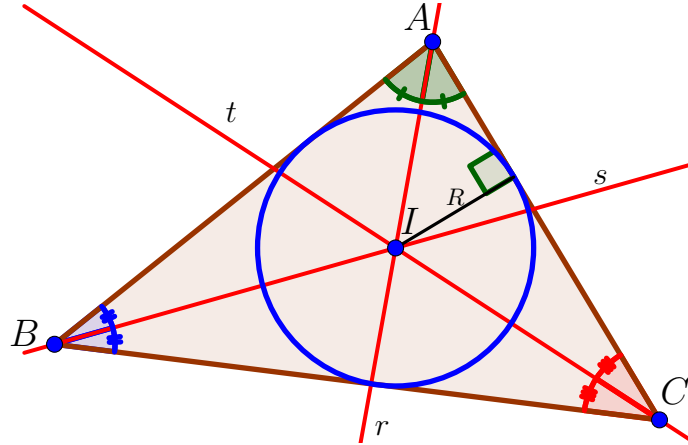
**Fonte:** Própria autoria com uso do software Geogebra

As retas  $r, s$  e  $t$  são respectivamente as bissetrizes dos ângulos  $A, B$  e  $C$  do triângulo  $ABC$  e  $I$  é o ponto de intersecção das retas  $r$  e  $s$ . Como  $I$  pertence a reta  $r$  ( $I \in r$ ), segue que  $I$  equidista de  $\overline{AB}$  e  $\overline{AC}$  conforme foi mostrado esse resultado no capítulo anterior.

Analogamente, como  $I$  pertence a reta  $s$ , temos que  $I$  equidista dos lados  $\overline{AB}$  e  $\overline{BC}$ . Portanto, concluímos que  $I$  também pertence a bissetriz do ângulo  $C$ , já que  $I$  é equidistante a  $\overline{AC}$  e a  $\overline{BC}$ , ou seja pertence a reta  $t$ .

Desta forma, temos que as retas  $r$ ,  $s$  e  $t$  concorrem no ponto  $I$ . Assim, como esse ponto  $I$  está a uma mesma distância  $R$  (raio) dos lados do triângulo, concluímos que a circunferência de centro em  $I$  e raio  $R$  está inscrita ao triângulo, isto é, tangencia os seus lados, com podemos observar na Figura 63.

Figura 63 – Circunferência inscrita em um triângulo



Fonte: Própria autoria com uso do software Geogebra

### 3.3 CIRCUNCENTRO

**Proposição 3.3.1.** *Em todo triângulo, as três mediatrizes se intersectam no ponto chamado de **circuncentro**. Esse ponto é centro de uma circunferência que circunscreve esse triângulo.*

**Demonstração:** Seja o triângulo  $ABC$  qualquer, tal que as mediatrizes em relação aos lados  $\overline{BC}$ ,  $\overline{AC}$  e  $\overline{AB}$  sejam as retas  $r$ ,  $s$  e  $t$  respectivamente, e seja  $O$  o ponto de encontro dessas mediatrizes.

Devemos mostrar que  $med(\overline{OA}) = med(\overline{OB}) = med(\overline{OC})$  e que as intersecções das mediatrizes é o ponto  $O$ , ou seja,

$$r \cap s \cap t = \{O\}$$

Seja  $O$  o ponto de encontro das retas  $s$  e  $t$ , ou seja:

$$s \cap t = \{O\}$$

. Como a mediatriz é o conjunto de pontos que equidistam dos extremos temos que:

- Se o ponto  $O \in t$  então  $med(\overline{OA}) = med(\overline{OB})$ .
- Se o ponto  $O \in s$  então  $med(\overline{OA}) = med(\overline{OC})$ .

Assim, tem-se que  $med(\overline{OB}) = med(\overline{OC})$  e portanto  $O \in r$ .

Logo,

$$r \cap s \cap t = \{O\}$$

□

Agora mostraremos que o circuncentro é o centro da circunferência circunscrita ao triângulo, com raio igual a distância do circuncentro a um dos vértices.

Seja  $ABC$  um triângulo qualquer e as retas  $r$ ,  $s$  e  $t$ , mediatrizes dos segmentos  $\overline{BC}$ ,  $\overline{AC}$  e  $\overline{AB}$ , respectivamente se intersectando no ponto  $O$ .

Como já foi mencionado, os pontos das mediatrizes estão sempre equidistantes dos extremos do segmento, e portanto:

$$med(\overline{OA}) = med(\overline{OC}), \quad med(\overline{OC}) = med(\overline{OB}), \quad \text{e} \quad med(\overline{OB}) = med(\overline{OA})$$

Uma vez que  $O$  pertence a  $r$ ,  $s$  e  $t$ , os vértices  $A$ ,  $B$  e  $C$  pertencem a circunferência de centro em  $O$  e raio igual a:

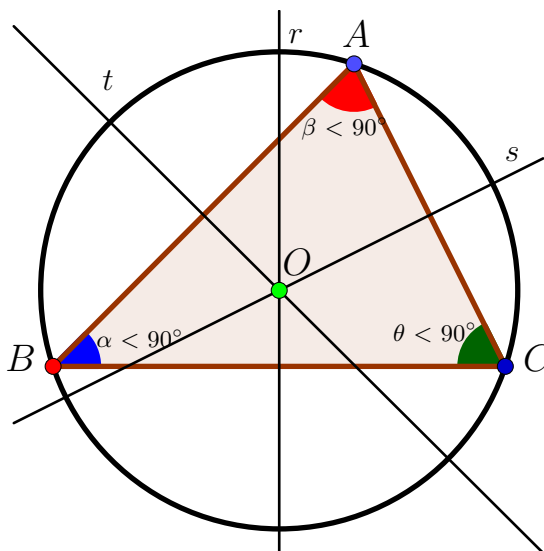
$$R = med(\overline{OA}) = med(\overline{OB}) = med(\overline{OC})$$

□

**Observação 3.3.1.** Dependendo do triângulo considerado, o **circuncentro** pode está localizado internamente, externamente ou em dos seus lados. Diante disso, nas Figuras [64](#), [65](#) e [66](#), temos três possibilidades para o circuncentro.

• **1º Caso: o triângulo é acutângulo.**

Figura 64 – Circuncentro no triângulo Acutângulo

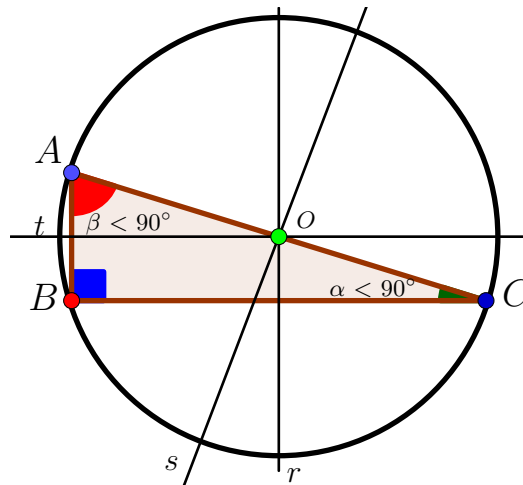


Fonte: Própria autoria com uso do software Geogebra

No caso em que temos triângulo acutângulo, o ponto do circuncentro será internamente ao triângulo.

• 2º Caso: o triângulo é retângulo.

Figura 65 – Circuncentro no triângulo Retângulo

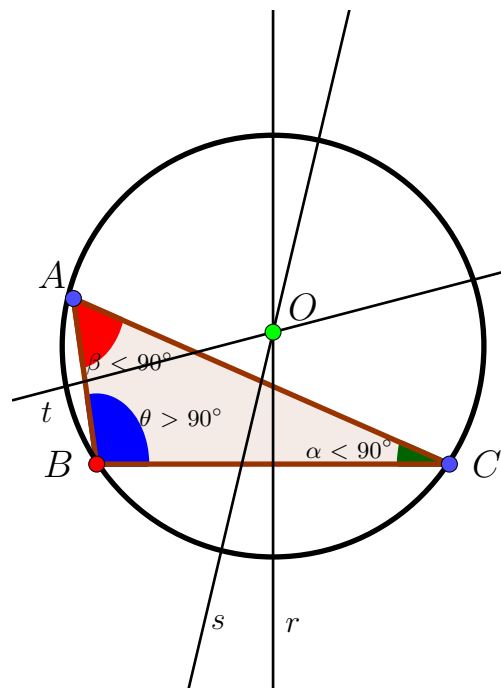


Fonte: Própria autoria com uso do software Geogebra

Quando o triângulo é retângulo o ponto de circuncentro pertence a sua hipotenusa.

• 3º Caso: o triângulo é obtusângulo.

Figura 66 – Circuncentro no triângulo Obtusângulo



Fonte: Própria autoria com uso do software Geogebra

No triângulo obtusângulo, o ponto do circuncentro sempre será externo ao triângulo.

### 3.4 ORTOCENTRO

**Proposição 3.4.1.** *Em qualquer triângulo, as três alturas se intersectam em um único ponto, que é denominado de ortocentro.*

**Demonstração:** Considere um triângulo  $ABC$  qualquer, e diante disso, vamos analisar os três tipos de triângulos possíveis a saber: acutângulo, retângulo e obtusângulo.

• **1º Caso -Triângulo Acutângulo:**

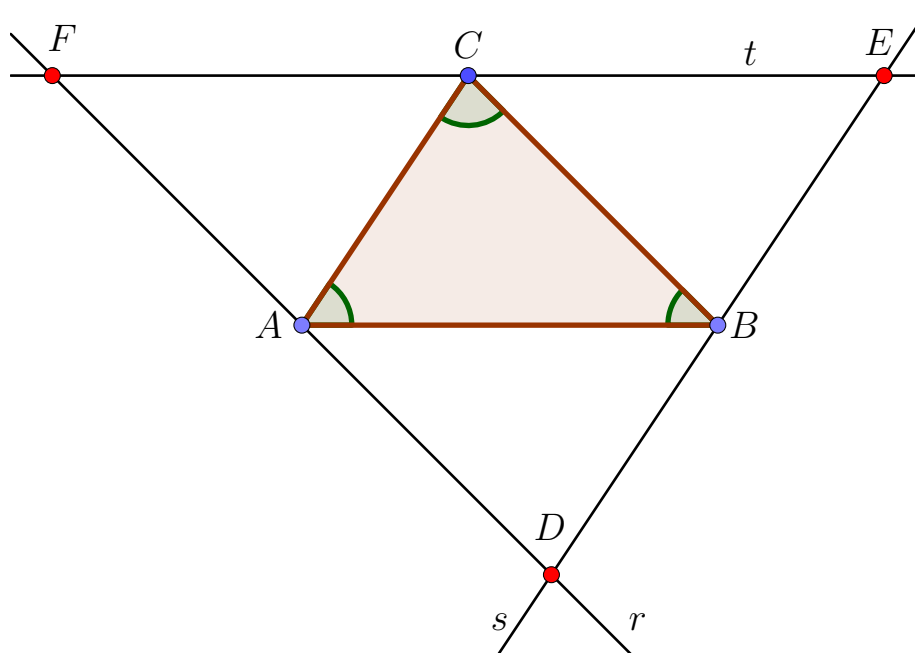
Seja o triângulo acutângulo  $ABC$  e tracemos por  $A$ ,  $B$  e  $C$  respectivamente, as retas  $r$ ,  $s$  e  $t$  paralelas a  $\overline{BC}$ ,  $\overline{AC}$  e  $\overline{AB}$ .

Seja  $F$  o ponto de intersecção das retas  $r$  e  $t$ , ou seja,  $r \cap t = \{F\}$ .

Agora, seja  $D$  o ponto de intersecção das retas  $r$  e  $s$ , ou seja,  $r \cap s = \{D\}$ .

Também, seja  $E$  o ponto de intersecção das retas  $s$  e  $t$ , ou seja,  $s \cap t = \{E\}$ , como podemos ver na Figura 67:

Figura 67 – Ortocentro de um triângulo Acutângulo



**Fonte:** Própria autoria com uso do *software Geogebra*

Como os quadriláteros  $ABCF$  e  $ABEC$  são paralelogramos, segue que

$$\text{med}(\overline{CF}) = \text{med}(\overline{AB}) = \text{med}(\overline{CE}).$$

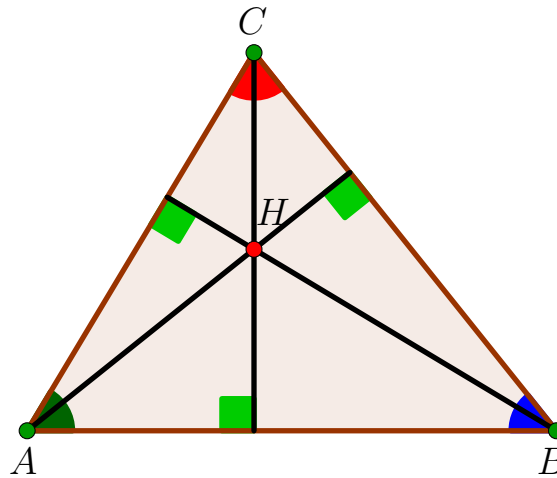
Assim, o ponto  $C$  é o ponto médio do segmento  $\overline{FE}$ . Analogamente, o ponto  $B$  é o ponto médio do segmento  $\overline{ED}$  e o ponto  $A$  é o ponto médio do segmento  $\overline{FD}$ .

Por outro lado, a altura relativa ao segmento  $\overline{BC}$  também é perpendicular a  $\overline{DF}$ , já que  $\overline{BC}$  e  $\overline{DF}$  são paralelos. Do mesmo modo, as alturas relativas a  $\overline{AC}$  e  $\overline{AB}$  são perpendiculares respectivamente a  $\overline{ED}$  e  $\overline{EF}$ .

Segue que as alturas do triângulo  $ABC$  equilátero são mediatrizes dos lados do triângulo  $EFD$ . Mas já provamos que as mediatrizes de um triângulo são concorrentes, assim, as alturas de  $ABC$  devem se intersectarem no mesmo ponto.

Neste caso, o ortocentro se encontra interno ao triângulo, como podemos ver na Figura 68:

Figura 68 – Ortocentro Interno em um triângulo



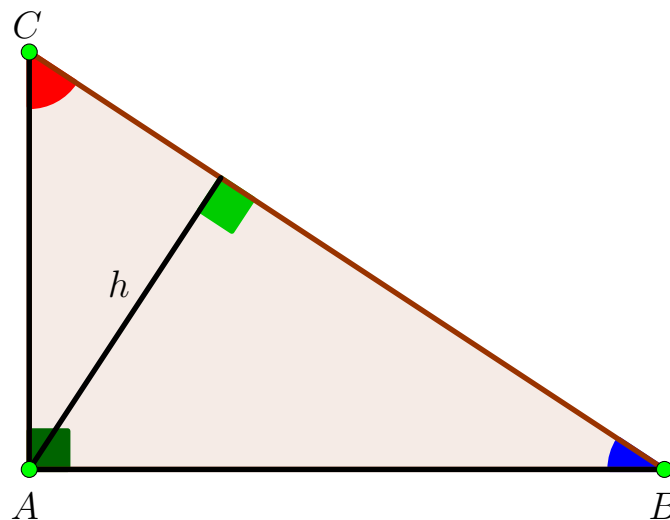
Fonte: Própria autoria com uso do *software Geogebra*

• **2º Caso -Triângulo retângulo:**

Seja  $ABC$  um triângulo retângulo e suponhamos sem perda de generalidade que  $\widehat{BAC} = 90^\circ$ .

Assim,  $A$  é o pé das alturas relativas aos lados  $\overline{AB}$  e  $\overline{AC}$ . Como a altura relativa ao lado  $\overline{BC}$  passa (por definição) por  $A$ , segue que as alturas de  $ABC$  concorrem em  $A$ , como mostra na Figura [69](#):

Figura 69 – Ortocentro sobre o vértice de um triângulo



Fonte: Própria autoria com uso do *software Geogebra*

Desta maneira, o vértice  $A$  será o ponto onde ortocentro do triângulo retângulo  $ABC$  concorrerá.

• **3º Caso -Triângulo Obtusângulo:**

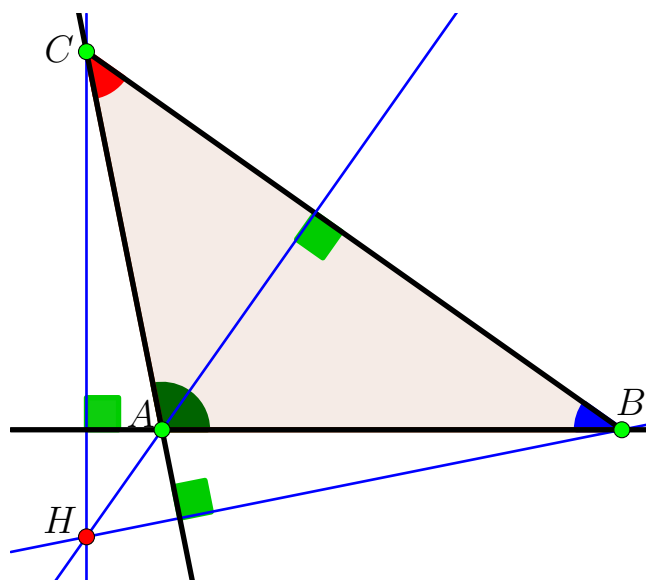
Esse caso é análogo ao 1º caso. Sendo assim, iremos fazer apenas a representação

para o ortocentro de um triângulo obtuso.

Pelo fato do triângulo  $ABC$  ser obtusângulo, temos que as alturas relativas a cada um dos vértices serão interceptadas no lado oposto ou no prolongamento de cada um dos lados opostos aos respectivos vértices.

Assim, temos a Figura 70.

Figura 70 – Ortocentro Externo em um triângulo



Fonte: Própria autoria com uso do *software Geogebra*

Diante disso, concluímos que o ponto que é o **ortocentro** será interno se o triângulo considerado for acutângulo, que coincidirá com um dos vértices se for retângulo e será externo se o triângulo for obtusângulo.

### 3.5 RETA DE EULER

**Leonhard Euler** que viveu no século XVIII, fez grandes contribuições para matemática, desde de métodos para resolução de problemas de cunho prático, a outros que sobressaiam às mentes mais curiosas. Um destes problemas levou Euler a descobrir de forma acidental a reta de Euler.

Para chegar na reta de Euler foi necessário revisar alguns conceitos primitivos e também utilizar de alguns pontos notáveis do triângulo, como: Baricentro, circuncentro e ortocentro.

Sendo assim, **Leonardo Euler** demonstrou a seguinte proposição que é conhecida como a *reta de Euler*.

**Proposição 3.5.1.** *Em qualquer triângulo não equilátero, o Baricentro( $G$ ), o Circuncentro( $O$ ) e o Ortocentro( $H$ ) são sempre pontos colineares, e além disso, a distância do Ortocentro ao baricentro é sempre o dobro da distância do Baricentro ao Circuncentro. A reta que contém esses três pontos é denominada de **Reta de Euler**.*



**Demonstração:** Devemos considerar que o triângulo  $ABC$  não seja equilátero, pois se for equilátero, os pontos notáveis baricentro( $G$ ), circuncentro( $O$ ) e o ortocentro( $H$ ) coincidem no mesmo ponto.

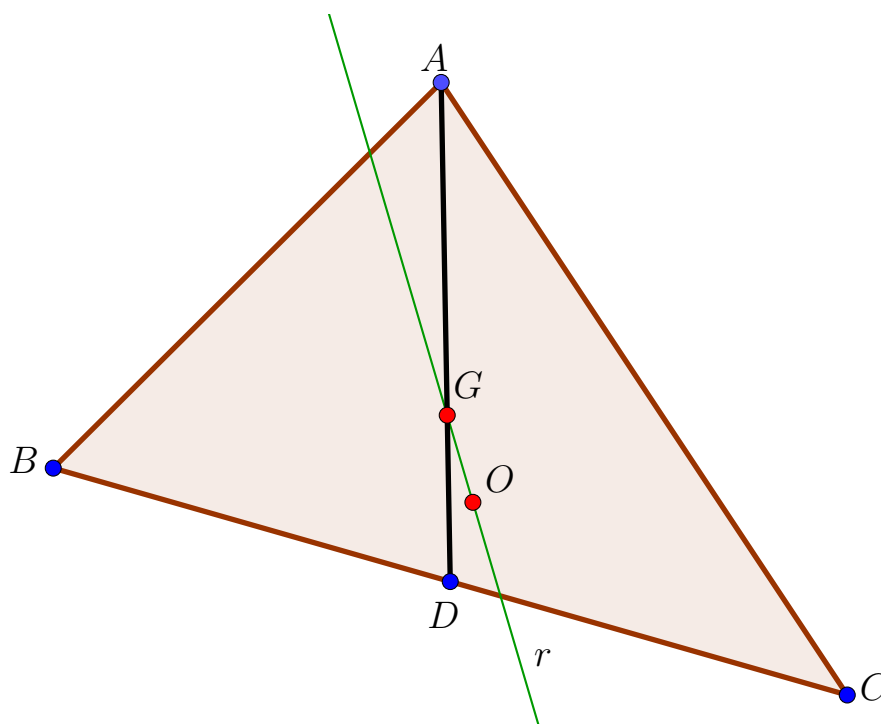
Isso ocorre, porque no triângulo equilátero as medidas das medianas, as medidas das alturas e as medidas das bissetrizes internas são congruentes.

Em triângulos isósceles, temos que a mediana, a mediatriz e altura relativa a base são coincidentes. Assim, o baricentro, o circuncentro e o ortocentro pertencem à um mesmo segmento e desta forma a reta que contém esse segmento é a **reta de Euler** desse triângulo.

Diante disso, Suponhamos que todas as medidas dos ângulos internos do  $\Delta ABC$  sejam agudas para garantirmos que os três pontos notáveis sejam internos ao triângulo. Para os casos em que o triângulo seja retângulo ou obtusângulo, a prova é feita de maneira análoga. Suponha que o triângulo acutângulo seja não isósceles.

Como o triângulo é não isósceles, a mediana é distinta da mediatriz e isso implica que o baricentro( $G$ ) e o circuncentro( $O$ ) são pontos distintos. Tomemos a reta  $r$  que contém os pontos  $G$  e  $O$ . Assim, seja  $D$  o ponto médio do lado  $\overline{BC}$  e além disso, considere a mediana  $\overline{AD}$  relativa ao lado  $\overline{BC}$ . Como podemos ver na Figura 71.

Figura 71 – Reta que contém os pontos: Baricentro e Circuncentro



**Fonte:** Própria autoria com uso do *software Geogebra*

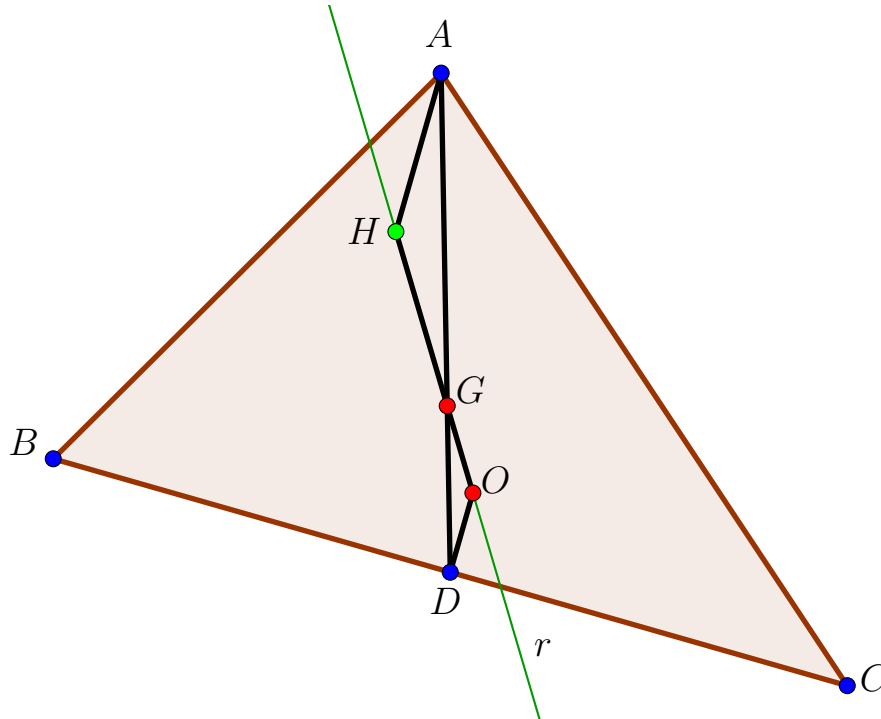
Na semirreta com origem no ponto  $O$  (Circuncentro) e contendo o ponto  $G$  (baricentro) tomemos um ponto  $H$  tal que:

$$\overline{GH} = 2 \cdot \overline{GO}$$

Assim, na Figura 72, os triângulos  $GHA$  e  $GOD$  são semelhantes pelo caso LAL, pois  $\overline{GH} = 2 \cdot \overline{GO}$  (por construção), os ângulos  $\widehat{AGH} \equiv \widehat{DGO}$  (Ângulos opostos pelo vértice) e  $\overline{AG} = 2 \cdot \overline{GD}$  (propriedade de baricentro).

Logo, os ângulos  $\widehat{AHG}$  e  $\widehat{DÔG}$  são congruentes.

Figura 72 – Ilustração da Reta de Euler



Fonte: Própria autoria com uso do software Geogebra

Portanto, as retas contendo  $\overline{AH}$  e  $\overline{OD}$  são paralelas pelo Teorema do Ângulo Interno Alternado. Mas, como a reta que contém  $\overline{OD}$  é perpendicular ao lado  $\overline{BC}$  e paralela a reta que contém  $\overline{AH}$ , segue que  $H$  pertence a altura do  $\Delta ABC$  relativa ao lado  $\overline{BC}$ . E de mesma forma, mostramos que  $H$  pertence a altura de  $\Delta ABC$  relativa ao lado  $\overline{AC}$ .

Como o ponto  $H$  é a intersecção de duas alturas, então  $H$  é o ortocentro do triângulo  $ABC$ .

□

## 4 SUGESTÃO METODOLÓGICA

Nos últimos anos as academias e universidades procuram formar professores que busquem acompanhar a ampliação da tecnologia, professores esses que através de metodologias atuais e modernas ofereçam as melhores condições para contribuir no processo de ensino aprendizagem do seu aluno. Porém, nem sempre existe por parte do professor essa busca por novos conhecimentos, seja pelos afazeres e ocupações da própria profissão, seja por motivos próprios ou pessoais.

Como afirma Melo (2012),

"O exercício da atividade prática da grande maioria dos profissionais da área de educação é recheado de muitos compromissos e muitas responsabilidades, o que, não raras vezes, acarreta carência de tempo para dar sequência em seus estudos de atualização e aperfeiçoamento. Entretanto, se esse fato é uma realidade, não pode ser tomado com justificativa para paralisações e estagnações, que levam alguns profissionais da área a permanecerem anestesiados e fiéis seguidores de práticas e concepções desatualizadas."

Nessa perspectiva, as metodologias ativas de educação são válidas, tanto no ensino presencial quanto no ensino a distância, pois atende a essa demanda e o perfil dos alunos. Portanto, as aulas devem ser baseadas em estratégias de ensino que ofereçam desafios mais complexos, que desenvolvam, nos alunos, uma postura proativa, tanto nas tarefas individuais, quanto no trabalho colaborativo.

Ressaltamos que isso é uma necessidade da sociedade atual, e ainda, é imprescindível uma mudança de postura do professor e do aluno e que as atividades sejam desenvolvidas em um trabalho conjunto entre ambos, e, portanto, a aula não estará baseada apenas na apropriação de técnicas ou conceitos puramente científicos.

Logo, esse ambiente proporciona aos alunos uma formação cultural, no qual estes têm acesso a conhecimentos relativos às necessidades de criação dos conceitos estudados, o contexto cultural no qual surgiram, dentre muitas outras variáveis, influenciadas pela cultura e pelo meio social.

Pensando nisso, sugerimos uma proposta de aula que envolva a Geometria Euclidiana Plana, mais precisamente, o objeto de estudo pontos notáveis de um triângulo e Reta de Euler com a utilização de metodologias ativas, no que se refere a *Storytelling*.

## 4.1 STORYTELLING: COMO UMA ABORDAGEM METODOLÓGICA PARA O ENSINO DE GEOMETRIA

O termo "*Storytelling*", deriva de duas palavras do inglês, sendo elas: *Story* (história) e *Telling* (dizendo ou contando). Logo, pela formação de palavras pode se concluir que essa metodologia consiste em "contar histórias".

Porém não basta apenas ter uma história para contar, essa deve ser boa, relevante e ter propósitos definidos (ROJAS-SUAREZ; PÉREZ; VERGEL-ORTEGA, 2020). Essa técnica é antiga e utilizada em enredos de filmes, novelas, literaturas, porém na educação é algo moderno e que a cada dia mais ganha espaço, pois é uma das metodologias recomendadas para o ensino à distância (EAD), porém sua utilização no ensino presencial também é aconselhada.

De acordo (PALACIOS; TERENCEZ, 2016) os benefícios inerentes dessa metodologia são:

1. Cativar a atenção, ou seja, entreter;
2. Despertar a imaginação;
3. Facilitar a aceitação de mensagens;
4. Garantir relevância por meio do contexto.

A utilização proporciona oportunidades de intertextualidade entre disciplinas ou temas e dá leveza ao ensino de um conteúdo mais denso. Quanto maior a captação de atenção gerada pela história maior será absorção daquilo que é contado por parte do aluno (ORTEGA, 2020), logo é preciso uma preparação para que não haja frustrações, para que a história contada na aula tenha o resultado esperado.

## 4.2 PROPOSTA DE ENSINO

Esta seção apresenta uma sugestão de ensino na educação básica, com enfoque propriamente no conteúdo de Geometria Euclidiana Plana.

Sugerimos que ao transcorrer pelo conteúdo de geometria plana e pelo método proposto, o professor relacione com as aplicações sugeridas nesse trabalho, iniciando, respectivamente, da seguinte forma: Apresentar ao aluno o software Geogebra para que ele tenha seu primeiro contato com essa poderosa ferramenta educacional, ensiná-lo de como utilizar essa ferramenta de forma prazerosa para que possa fazer bom uso no seu dia a dia, como prática recorrente nas aulas de geometria.

Dessa forma, o professor poderá conseguir prender a atenção do aluno mais facilmente, devido a utilização de recursos tecnológicos presentes no cotidiano do aluno. Diante disso, vejamos em que consiste a sugestão:

**1º Passo:** Para introduzir o conteúdo sobre pontos notáveis de um triângulo e Reta de Euler, o professor fará uma abordagem histórica, ainda sem de fato começar sua história, contará aos alunos a existência do Livro de Geometria de Euclides e fará uma pequena abordagem sobre Leonard Euler. A fim de mostrar para os alunos como se deram alguns dos estudos a respeito do conteúdo (nesse caso pontos notáveis de um triângulo e Reta de Euler);

**2º Passo:** Após a introdução e a explicação feita, tentará se aproximar de um conceito ou ideia do que seria os pontos notáveis de um triângulo, podendo explanar e mostrar relações com o cotidiano do aluno, como para que serve?, onde é utilizado? citar alguns exemplos mais pertinentes de que o leve a perceber a importância de se estudar esse conteúdo. Sempre permitindo a participação e interação desse aluno;

**3º Passo:** Nesse momento você professor começará de fato sua história, através de uma narrativa poderá criar um personagem que tenha perpassado por diversas civilizações antigas estudando e procurando evidências das aplicações sobre o conteúdo em questão. E que esse personagem, passando o seu conhecimento para as suas futuras gerações, conseguiu influenciar seus descendentes, da civilização moderna, no estudo e na procura dessas aplicações. Dessa forma você professor, poderá caminhar estabelecendo uma linha do tempo e a relação entre essas aplicações num período de tempo tão distante, poderá despertar a curiosidade do aluno.

**4º Passo:** Após sua narrativa, o professor poderá desenvolver o conteúdo com o auxílio do Geogebra e com a ajuda dos alunos construindo retas, segmentos de reta, triângulos, circunferência dando sentido para esse conteúdo. Dessa forma, inspirando os seus alunos a participarem da oficina que foi planejada pelo professor. O professor deverá utilizar conceitos e conhecimentos a respeito pontos notáveis e reta de Euler, visto ao longo do desse trabalho.

**5º Passo:** Em seguida proporcionará aos alunos um momento de reflexão e discussão, interagindo e fazendo perguntas acerca da utilização do Geogebra, com aplicação no conteúdo sobre pontos notáveis de um triângulo e reta de Euler, fazendo relação com a realidade e tirando as possíveis dúvidas que venham a surgir e esclarecendo formalmente o conteúdo, como forma de registro físico.

**6º Passo:** Para finalizar a aula, o professor deverá iniciar uma oficina, separando sua turma em grupos de 3 ou 4 alunos, a depender da quantidade de alunos da turma, e disponibilizando um material impresso, deverá sugerir que os alunos façam o que está determinado no material impresso proposto, como nas mesmas condições que foi feito no 4º passo. Feito isso, poderá pedir que os alunos discutam entre si, o resultado obtido com os demais colegas dos outros grupos, e assim, poderão comparar os seus resultados com os dos outros colegas e verificar as expectativas, para as próximas tarefas.

Como visto acima, temos uma sugestão de história, a autonomia da narrativa também é uma das características do Storytelling.

A utilização dessa nova metodologia, nos causa medo, o fato de mudar, sair da zona de conforto é o que nos causa esse sentimento desconfortável (MARQUES, 2018), o primeiro passo é uma das coisas mais difíceis porém mais importantes, como afirma Lambert(LAMBERT, 2010):

"Uma das coisas mais difíceis, mas mais importante, é começar. Porque muitos dessas histórias nos pedem para revelar coisas sobre nós que nos fazem sentir vulneráveis, montar uma história pode ser o paraíso de um procrastinador. Basta se levantar, comece a responder perguntas em um gravador, escreva coisas, reúna as fotos, revise seus vídeos e compartilhe suas ideias com seus amigos e familiares. A vida é cheia de histórias, mas você pode não ter uma vida inteira para capturá-las como filmes, então,vá..."

A proposta didática usando o storytelling uma ferramenta de múltiplas potencialidades, pois a partir das narrativas dos alunos os professores podem explorar os assuntos de Matemática, os temas transversais e ainda pode ocorrer de os alunos trazerem informações diferentes dessas propostas e, com isso, aumenta também o leque de objetivos a serem alcançados com a atividade. Dessa forma, corroboramos o pensamento de (TEODOSIO, 2021), ao defender que o acesso a um maior número de instrumentos e técnicas intelectuais dá, quando devidamente contextualizado, muito maior capacidade de enfrentar situações e de resolver problemas novos, de modelar adequadamente, uma situação real para, com esses instrumentos, chegar a uma possível solução ou curso de ação.

Ressaltamos que o planejamento e o empenho do professor são muito importantes para o engajamento dos alunos no storytelling que essa experiência tem a função de provocar emoções, questionamentos, novas ideias e imaginações, promovendo, com isso, uma aprendizagem por excelência que é a capacidade de explicar, aprender e compreender, de enfrentar criticamente situações novas (D'AMBROSIO, 2012)

## 5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

A construção dos pontos notáveis em sala de aula já deveria ser bem assimilada pelos alunos desde o oitavo ano até o final do Ensino Médio. Por outro lado, as cevianas, apesar de serem elementos de definições simples, geram dúvidas quando aplicados a triângulos com características diferentes em relação aos ângulos internos. Por isso, o uso de algum software em sala de aula é de suma importância, uma vez que facilita a visualização, principalmente ao se tratar de geometria.

Fizemos uso do geogebra para a construção das figuras presentes no trabalho que é um software livre que pode ser bem explorado em sala de aula, nas aulas de matemática, fazendo com que os alunos o utilizem afim de descobrir o que acontece alterando as características de uma figura movendo alguns de seus pontos. Desta forma, deixamos a cargo do leitor, caso tenha interesse em buscar mais informações à respeito do referido software.

O professor deve sair da zona de conforto e sempre buscar se capacitar para levar uma aula mais atrativa e proveitosa para seus alunos, sendo assim, é de suma importância dominar os recursos computacionais disponíveis a fim de tirar deles o máximo de proveito em benefício da aprendizagem de seus alunos como por exemplo o uso do software que utilizamos para a construção das figuras deste trabalho.

Ao fazer uso do Geogebra, traçar um triângulo qualquer e suas cevianas, além de fazer uso de manipulação em seus vértices, alterando suas características, possibilita um padrão maior em relação à percepção de todas as características desejadas.

O grande desafio desse trabalho foi construir toda a parte do corpo dessa monografia, que por si só, traz uma carga de demonstrações e definições matemáticas envolvendo a geometria que é muito temida por parte dos professores que muitas das vezes não tiveram uma boa formação nessa área de estudo.

Sendo assim, o objetivo desse trabalho foi de trazer os principais resultados da geometria plana Euclidiana envolvendo o polígono **triângulo**, enfatizando os principais pontos notáveis para serem utilizadas na demonstração da reta de Euler, o que mostra a importância de conhecer e saber cada uma de suas características estudados nesse trabalho.

Entendemos que a sugestão metodológica, o storytelling, é uma estratégia de ensino inserida nas metodologias ativas, no qual o estudante constrói a narrativa e a partir dela o professor sistematiza o conhecimento, portanto há uma interação maior do aluno na construção do seu próprio conhecimento, o mesmo passa até um controle maior do seu aprendizado, pois a dinâmica proposta exige ações e construções mentais como: leitura, escrita, comparação, observação, imaginação, criatividade, interpretação, análise e tomada de decisões. Essa ferramenta oportuniza também um aprendizado baseado em experiências histórico-cultural, pois a partir da narrativa, em uma atitude proativa, professores e

estudantes constroem e reconstroem valores e ideias e assim a problematização favorece um ambiente colaborativo de aprendizagem.

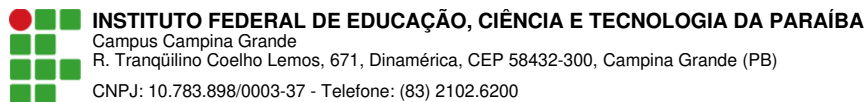


## REFERÊNCIAS

- BARBOSA, J. L. M. *Geometria euclidiana plana*. 4. ed. [S.l.]: SBM, 1995. Citado 2 vezes nas páginas [17](#) e [23](#).
- BIANCHINI, E. *Matemática Bianchini: Ensino fundamental - 8 anos finais*. 9. ed. [S.l.]: Moderna, 2018. Citado na página [17](#).
- BICUDO, I. *Os elementos: tradução e introdução*. São Paulo: Editora UNESP, 2009. Citado 2 vezes nas páginas [15](#) e [17](#).
- BONJORNO, J. R. *Prisma matemática: Geometria: Ensino médio - matemática e suas tecnologias*. 1. ed. [S.l.]: Editora FTD, 2020. Citado na página [17](#).
- D'AMBROSIO, U. *Educação Matemática: da teoria à prática*. [S.l.]: Papyrus Editora, 2012. Citado na página [77](#).
- DANTE, L. R. D. *Teláris Matemática: Ensino fundamental - 8 anos finais*. 3. ed. [S.l.]: Editora Ática, 2018. Citado na página [17](#).
- DOLCE, O.; POMPEO, J. N. *Fundamentos de matemática elementar*. [S.l.]: São Paulo: atual, 2013. v. 9. 468 p. Citado 6 vezes nas páginas [17](#), [18](#), [23](#), [28](#), [42](#) e [54](#).
- JUNIOR, A. S. B. Pontos notáveis de um triângulo: uma abordagem geométrica e analítica. Mestrado Profissional em matemática em rede nacional - Universidade Federal do Ceará- Fortaleza - CE, 2014. Citado na página [17](#).
- NETO, A. C. M. *Geometria: Coleção profmat*. Rio de Janeiro: SBM, 2013. Citado 4 vezes nas páginas [17](#), [22](#), [28](#) e [61](#).
- PALACIOS, F.; TEREZZO, M. *O guia completo do Storytelling*. [S.l.]: Alta Books Editora, 2016. v. 1. Citado na página [75](#).
- ROJAS-SUAREZ, J. P.; PÉREZ, H. G.; VERGEL-ORTEGA, M. Descriptive analysis of storytelling concepts in physics. In: IOP PUBLISHING. *Journal of Physics: Conference Series*. [S.l.], 2020. v. 1672, n. 1, p. 012018. Citado na página [75](#).
- SAMPAIO, F. A. *Thilhas da Matemática: Ensino fundamental - 8 anos finais*. 9. ed. [S.l.]: Moderna, 2018. Citado na página [17](#).
- SILVA, B. C. da. Além dos pontos notáveis: Identificação e propriedades dos centros do triângulo. Mestrado Profissional em matemática em rede nacional - Universidade de Brasília- DF, 2020. Citado na página [17](#).
- SILVA, E. J. da. Pontos notáveis do triângulo: quantos você conhece? Mestrado Profissional em matemática - São Cristóvão - SE, 2013. Citado 2 vezes nas páginas [15](#) e [17](#).
- TEODOSIO, E. de S. Storytelling como uma metodologia ativa no ensino de matemática. *Boletim Cearense de Educação e História da Matemática*, v. 8, n. 23, p. 258–268, 2021. Citado na página [77](#).

VIGLIONI, H. H. d. B. S. A. R. *Geometria Euclidiana Planna*. Sergipe: UFS, 2011. Citado na página [17](#).

VILAR, I. S. M. de M. Alguns pontos notáveis do triângulo e aplicações. Mestrado Profissional em matemática em rede nacional - Universidade estadual da Paraíba Uepb-pb, 2020. Citado 2 vezes nas páginas [14](#) e [17](#).



## Documento Digitalizado Ostensivo (Público)

### Entrega de TCC de pós graduação especialização em ensino de matemática

<b>Assunto:</b>	Entrega de TCC de pós graduação especialização em ensino de matemática
<b>Assinado por:</b>	Geovane Tavares
<b>Tipo do Documento:</b>	Relatório
<b>Situação:</b>	Finalizado
<b>Nível de Acesso:</b>	Ostensivo (Público)
<b>Tipo do Conferência:</b>	Cópia Simples

Documento assinado eletronicamente por:

- **Geovane Tavares Nogueira, DISCENTE (202111280001) DE ESPECIALIZAÇÃO EM ENSINO EM MATEMÁTICA - CAMPINA GRANDE**, em 03/01/2023 17:47:18.

Este documento foi armazenado no SUAP em 03/01/2023. Para comprovar sua integridade, faça a leitura do QRCode ao lado ou acesse <https://suap.ifpb.edu.br/verificar-documento-externo/> e forneça os dados abaixo:

Código Verificador: 712431  
Código de Autenticação: 9f71617c4e

