INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA
PARAÍBA

INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA DA PARAÍBA

CURSO DE PÓS GRADUAÇÃO EM ESPECIALIZAÇÃO EM ENSINO DA MATEMÁTICA DO IFPB

JULIÉRIKA VERAS FERNANDES

PROPOSTA DE APLICAÇÃO DE DUAS ABORDAGENS PARA UM PROBLEMA EM ABERTO NA MATEMÁTICA E SUAS RELAÇÕES COM A BNCC: O PROBLEMA DO CAIXEIRO VIAJANTE

CAMPINA GRANDE- PB

2022

JULIÉRIKA VERAS FERNANDES

PROPOSTA DE APLICAÇÃO DE DUAS ABORDAGENS PARA UM PROBLEMA EM ABERTO NA MATEMÁTICA E SUAS RELAÇÕES COM A BNCC: O PROBLEMA DO CAIXEIRO VIAJANTE

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado no Curso de Especialização em Ensinoda Matemática do Instituto Federal de Educação,Ciência e Tecnologia da Paraíba (IFPB), como requisito parcial para obtenção do título de Especialista em Ensino da Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Jonathas Jerônimo Barbosa

CAMPINA GRANDE- PB

2022

JULIÉRIKA VERAS FERNANDES

PROPOSTA DE APLICAÇÃO DE DUAS ABORDAGENS PARA UM PROBLEMA EM ABERTO NA MATEMÁTICA E SUAS RELAÇÕES COM A BNCC: O PROBLEMA DO CAIXEIRO VIAJANTE

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado no Curso de Especialização em Ensinoda Matemática do Instituto Federal de Educação,Ciência e Tecnologia da Paraíba (IFPB), como requisito parcial para obtenção do título de Especialista em Ensino da Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Jonathas Jerônimo Barbosa

Aprovado em: 29/12/2022

BANCA EXAMINADORA

Jonathas Jerônimo Barbosa

Prof. Dr. Jonathas Jerônimo Barbosa - IFPB

Baldoino Sonildo da Nóbrega

Prof. Me. Baldoino Sonildo da Nóbrega - IFPB

Joab dos Santos Silva

Prof. Me. Joab dos Santos Silva - IFPB

F363p Fernandes, Juliérika Veras.
Proposta de aplicação de duas abordagens para um problema em aberto na matemática e suas relações com a BNCC: o problema do caixeiro viajante. - Campina Grande, 2022.
50 f. : il.

Trabalho de Conclusão de Curso (Curso Graduação em Licenciatura em Ensino de Matemática) - Instituto Federal da Paraíba, 2022.
Orientador: Prof. Me. Jonathas Jerônimo Barbosa.

1. Educação matemática 2. Ensino-aprendizagem 3.Habilidades e competências I. Barbosa, Jonathas Jerônimo II. Título.

CDU 51: 37

Dedicatória

Dedico este trabalho a Deus, a minha família e a todos os amigos que me acompanharam durante a jornada. Por fim, dedico a todos os professores que lutam diariamente para melhorar o ensino.

AGRADECIMENTOS

Esperei muito, com fé e paciência pelo momento em que estaria concluindo mais uma etapa na formação acadêmica. Tornar-me professora de matemática foi uma escolha que trouxe consigo lutas e desafios que pensei, muitas vezes, que não venceria. Durante o percurso acadêmico entre a conclusão da graduação e entrada na especialização, o mundo vivenciou um dos momentos mais delicados do útimo século: uma pandemia que infelizmente levou muitos dos nossos irmãos a encerrarem suas jornadas no planeta Terra. Por isso o principal agradecimento vai à Deus, por ter dado saúde para que todo o trabalho restante fosse possível de ser realizado.

Agradeço a minha família pela compreensão e amor devotado a mim, em especial aos meus pais Joéliton Alves Fernandes e Edvânia Veras Fernandes por estarem ao meu lado em vários momentos da jornada, mesmo eu estando por perto de corpo presente, porém, sem dar-lhes a atenção merecida por causa dos estudos. Espero que um dia eu consiga ser a filha que eles merecem ter.

As amizades que fiz durante a especialização, colegas que estarão juntos na caminhada da educação e que se dispõem, a estudar e a se melhorar enquanto pessoas e profissionais, contribuindo na formação inteletual de diversos alunos e, desta forma, auxiliando na melhoria da educação brasileira continuamente e ao grande amigo Hélder P. Alves, por ter me apresentado o tema Teoria dos Grafos, por toda a disposição em ajudar e amizade verdadeira.

A todos os professores do IFPB que fizeram parte da especialização e dispuseramdo seu tempo e boa vontade para passar seus conhecimentos de forma didática e com excelência. Ào meu orientador, professor Doutor Jonathas Jerônimo Barbosa, por toda a sua dedicação não apenas na execução deste trabalho, mas especialmente durante todas as suas excelentes aulas ministradas nos módulos da especialização.

"A vida são as incessantes oportunidades que surgem pela frente, jamais os insucessos que ocorreram no passado" (Joanna de Ângelis)

RESUMO

O Problema do Caixeiro Viajante surgiu em meados de 1930. Considerado um dos grandes problemas do milênio relativo a Teoria dos Grafos ele é de natureza NP-Difícil com inúmeras aplicações na ciência da computação, engenharia, redes sociais, matemática e áreas correlatas. Embora seja um problema em aberto, a questão a ser resolvida é acessivel a alunos do ensino básico. Neste trabalho abordaremos dois métodos de como um problema ainda sem solução, pode ser inserido no ensino básico e relacionar as metodologias sugeridas com as habilidades e competências da BNCC.

Palavras-chave: Ensino.Habilidades.Competências. Matemática.

ABSTRACT

The Traveling Salesman Problem emerged in the mid-1930s. Considered one of the great problems of the millennium related to Graph Theory, it is NP-Hard in nature with numerous applications in computer science, engineering, social networks, mathematics and related areas. Although it is an open problem, the issue to be resolved is accessible to primary school students. In this work we will approach two methods of how a problem still without solution can be inserted in basic education and relate the suggested methodologies with the skills and competences of the BNCC.

Keywords: Teaching. Competences. Skills. Math.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE TABELAS

SUMÁRIO

1. Introdução

A teoria dos grafos surgiu de uma forma simples e despretensiosa, por meio de uma anedota conhecida como as Sete Pontes de Königsberg. O seu precursor, Leonhard Euler, resolveu o problema e não aprofundou os seus estudos na área, pois achou o desafio simples demais. Entretanto, de acordo com SOUZA (2016)

> “Com os avanços computacionais a referida teoria tem elevado ainda mais seu rol de aplicações e apreciadores, tal característica levantou o interesse de alguns professores pesquisadores a estudar a possibilidade de implantar alguns de seus conceitos iniciais ainda no ensino básico

Sendo assim, pode ser papel da escola e dos professores de matemática atualizar conhecimentos e reformular currículos para as novas tendências do ensino, de forma tal que abranja uma sociedade progressivamente tecnológica. Segundo SOUZA (2016)

> "A forma de ver o mundo mudou pois com o advento da internet e os avanços na área de comunicação, um número bem maior de pessoas, comparado a décadas atrás, conhecem o que ocorre mundo afora. Esse novo indivíduo precisa de um novo tipo de orientação e sendo a escola, a principal instituição de formação intelectual, cabe a ela adequar-se a esse novo molde de alunos que ela recebe."

Esse "novo molde” está atrelado a alunos que assistem às aulas munidos de aparelhos celulares, os quais podem ser aliados do professor no momento de ensinar alguns temas da matemática. Estes celulares, com aplicativos como o Geogebra e o jogo Pokémon Go, por exemplo, podem ser utilizados em sala de aula para facilitar o entendimento de temas relacionados a geometria e percursos, por exemplo.

Com o processo de ensino tornando-se dinâmico e dia após dia mais atrativo, a inserção de problemas matemáticos que dialoguem com o dia a dia dos estudantes e professores, tornou-se uma excelente oportunidade para que profissionais da área da educação matemática investiguem problemas que possam aguçar a curiosidade dos alunos em modelagens interessantes as quais, muitas vezes podem estar ao alcance das mãos, por exemplo, por meio dos aplicativos de jogos de celular ou jogos de tabuleiro.

Neste sentido, um interessante tema em aberto da Teoria dos Grafos, conhecido como o Problema do Caixeiro Viajante (PCV), surge como uma das alternativas para inserção da Teoria dos Grafos no ensino básico por meio de aplicações lúdicas e acessíveis aos alunos.

O Problema do Caixeiro viajante é considerado um dos sete maiores enigmas do nosso milênio. Foi descoberto na década de 1930 pelo matemático Karl Menger (DEVLIN, 2004), no entanto, posteriormente outros matemáticos descobriram problemas semelhantes e importantes utilizados na indústria .O problema do Caixeiro Viajante apresenta um sério desafio, pois consiste em analisar o menor percurso possível para a tomada de decisão (DEVLIN, 2004). Contudo, como trata-se de um tema importante da teoria dos grafos, aborda-se o Problema do Caixeiro Viajante para aplicações na tecnologia e através dele pode-se utilizar processos de tomada de decisão, localização, análise combinatória, fatorial, entre outros temas que são abordados nas mais diversas instâncias do ensino e constam como requisitos básicos de matemática na Base Nacional Comum Curricular, a BNCC (BRASIL, 2022).

O problema do menor percurso, ou problema do Caixeiro Viajante, é usado na aviação, no comércio, indústria, trânsito, em computação, engenharias, matemática aplicada, pesquisa operacional, redes sociais, dentre outras áreas. Através dele, pode-se fazer um largo estudo sobre os melhores percursos a serem explorados e quais temas matemáticos são abordados em suas aplicações.

1.1. Objetivos Gerais e específicos

Com o objetivo de propor abordagens metodológicas do problema do Caixeiro Viajante no ensino e aprendizagem da Matemática, este trabalho tem os seguintes objetivos específicos:

- Apresentar duas propostas lúdicas presentes na bibliografia para inserção em sala de aula;
- Analisar quais habilidades e competências da BNCC estão inclusas na abordagem do tema objeto de estudo no ensino fundamental I;
- Analisar quais habilidades e competências da BNCC estão inclusas na abordagem do tema objeto de estudo no ensino fundamental II;
- Analisar quais habilidades e competências da BNCC estão inclusas na abordagem do tema objeto de estudo no ensino médio.

1.2. Relevância e aplicações

Para atingir os objetivos supracitados na sessão 1.1 a pesquisa carcterizou-se como bibliográfica e exploratória. A princípio os estudos voltaram-se à leitura de livros, artigos, dissertações e teses. As principais fontes foram o livro GRAFOS, teoria, modelos e algoritmos do Boaventura Netto, Matemática Discreta dos autores L. Lovász, J. Pelikán e K. e o livro Os Problemas do Milênio, de Keith Devlin. Estes livros serviram de embasamento teórico nos estudos do problema do Caixeiro Viajante e algumas definições básicas referentes à Teoria dos Grafos. Os artigos foram utilizados para pesquisar o que está sendo estudado sobre o PCV atualmente, e serviram de base para pesquisar as metodologias de ensino do PCV neste trabalho.

1.1.1. Matemática e Computação: uma relação histórica

A matemática e a informática estão intimamente ligadas desde os rudimentos do que chamamos de computador. O primeiro passo veio com a construção da primeira máquina de calcular – a pascalina em 1642 - pelo matemático francês Blaise Pascal (1623-1662). Décadas depois, em 1671, o também matemático Gottfried Leibniz (1646-1719) aperfeiçoou a pascalina. A calculadora de Leibniz realizava as 4 (quatro) operações básicas enquanto a pascalina “apenas” somava e subtraia. Vale ressaltar que Leibniz inventou também o sistema numérico binário que mais tarde seria a linguagem utilizada pelos computadores modernos.

O caminho da calculadora para o que é conhecido como computador ainda foi longo, mas o trabalho do inglês Charles Babbage (1792-1871) foi decisivo nesta caminhada com a apresentação do projeto que intitulou máquina diferencial, uma máquina analítica que seria capaz de resolver equações polinomiais e construir tabelas de logaritmos além de armazenar informações.

O projeto de Babbage materializou-se apenas em 1890 quando o primeiro computador mecânico é construído. Mais de 50 anos depois, em 1946, e 300 anos após a pascalina, devido aos trabalhos do inglês Alan Turing (1912-1954) e húngaro John von Neumann (1903-1957) os primeiros computadores eletrônicos puderam ser construídos. Chamado de *Eletronic Numerical Integrator and Computer* (ENIAC) este foi o nome dado ao primeiro computador eletrônico e digital automático que pesava 30 toneladas e era composto por 18 mil válvulas e realizava 4500 cálculos por segundo. A evolução veio rapidamente com os transistores, chips, circuitos integrados, microprocessadores…

Atualmente com o avanço da tecnologia os computadores são auxiliares na realização de tarefas que requerem muitos cálculos “enquanto os humanos que operam os computadores pensam, as máquinas calculam” e isso elas fazem muito bem. Desde o ENIAC com 4500 operações por segundo até os supercomputadores que atualmente realizam operações da ordem de 1,1 quintilhões por segundo.

Nem sempre essas quantidades, talvez até inimagináveis, são inatingíveis. Quando se trata de problemas de otimização combinatória onde a operação fatorial está presente a quantidade de possibilidades de solução pode envolver tantas alternativas que é possível alcançar números que até os melhores computadores com alto poder de processamento de operações por segundo levariam um tempo impraticável de esperar para retornar a melhor solução.

Para esclarecer, um exemplo. Uma empresa de logística (distribuição de encomendas) está em início de operações e dispõe de apenas um transporte para operar. As encomendas devem ser entregues em n cidades diferentes de forma que as entregas iniciam e terminam na cidade sede do galpão da empresa sem que a ordem de entrega seja importante e que de qualquer cidade é possível chegar a outra passando pelo percurso uma única vez. Para conter despesas é preciso que as entregas sejam feitas com o menor custo possível (menor rota). Qual a rota que torna mínima a viagem total?

A indagação enunciada conhecida como O Problema do Caixeiro Viajante (PCV), é da classe dos problemas NP-completos (problema cujas soluções são verificáveis com o custo de tempo polinomial e não exponencial). Os problemas NP são questões computacionais que ainda não foram resolvidas em tempo polinomial, ou seja, um computador real não executou um programa contendo a solução do problema no entanto esta solução possivelmente existe. Neste sentido, nessa categoria de problemas computaconais, encontram-se os NP-completos, que além de não estarem solúveis por um computador real, quase certamente não podem ser resolvidos por um computador existente. DEVLIN (2004).

Na realidade estes são problemas em aberto na matemática aos quais cientistas da matemática e da computação debruçam-se para solucionar. Tabela 1 representa a ideia do crescimento das possibilidades do PCV:

Tabela 1. Posssibilidades de rotas para o PCV

Número de cidades	Número de rotas

4	6
5	24
10	362880
15	87178291200
20	121645100408832000
30	8841761993739700000000000000000

Fonte: própria

Atualmente (2022) o computador com a maior velocidade de processamento pode realizar $1,1x10^{18}$ operações por segundo. Por razões óbvias o acesso a esse tipo de máquina é extremamente restrito, o custo para mantê-la ligada é alto e normalmente são utilizadas para pesquisa em grandes centros. Mesmo assim, para ilustrar o crescimento das possibilidades de um problema de otimização combinatória o parâmetro utilizado será o maior processamento possível atualmente.

Na prática significa que em rotas entre até 20 cidades o tempo para processamento é praticamente desprezível pois para *n=20* mesmo com 12164510040883200 rotas para serem analisadas o tempo de resposta seria apenas 2 segundos para retornar a menor rota. A partir daí, para 21 cidades seriam 44 segundos, para 22 já passaria para 16 horas e com 23 cidades envolvidas seriam mais de 6 dias de processamento. Mesmo assim, não seria "problema" esperar 6 dias por um resultado, uma vez determinado, a menor rota já estaria traçada e poderia ser infinitamente utilizada para as cidades envolvidas.

Quando o número de cidades aumenta, por exemplo, para 30 - se considerarmos o estado da Paraíba, que possui 223 municípios, não é nada improvável ocorrer rotas com 30 ou mais cidades, o tempo para processamento é de mais de 7 milhões de anos! Conforme mostra a Tabela 2 a seguir

Tabela 2. Tempo de processamento

Número de cidades	Tempo (calcular a menor rota)
Até 20	< 2,01 segundos
21	44,20 segundos
22	16,24 minutos
23	6,23 horas
24	6,25 dias

25	156,55 dias
26	11,17 anos
30	7,38 milhões de anos

Fonte: própria

Obviamente que analisando o problema superficialmente, parece tudo simples, pois, a princípio é “só adicionar mais uma cidade” ou rota. Contudo, a quantidade total de rotas multiplica-se por um fator crescente. A partir do acréscimo de novas cidades, o número de rotas cresce exorbitantemente (DEVLIN, 2004).Por isso este problema é interessante para aplicação em sala de aula pois, através dele é possível investigar respostas a questionamentos como: Qual matemática está por trás de um problema como este? Quais as estratégias utilizar para abordar o tema em cada ano do ensino básico?

Para responder a esses questionamentos, esta pesquisa foi estruturada da seguinte forma:

No capítulo 2 consta um histórico da teoria dos grafos e o elo com o PCV. Nele foi fundamentado o surgimento da teoria no artigo Euler e as Pontes (LOPES; TÁBOAS, 2015), apresentou-se um grafo semelhante ao desenhado por Euler na resolução do problema das sete pontes de Königsberg. Em seguida, fundamentado em (LOVÁSZ; PELIKÁN; VESZTERGOMBI, 2013) e (STEIN; SCHEINERMAN; CHIRIKJIAN, 2003) explica-se a impossibilidade de passar por cada ponte apenas uma vez sem repetir nenhum caminho. Após a resolução do problema, Netto (2011) explica que se passaram 150 anos desde a descoberta da teoria dos grafos, e após este hiato as pesquisas sobre grafos ganharam assiduidade através do desenvolvimento da tecnologia computacional. Por meio do Problema do Caixeiro Viajante, a teoria dos grafos se faz presente no dia a dia das empresas de distribuição de energia elétrica e distribuição de alimentos, por exemplo.

Após as pesquisas envolvendo o PCV, no capítulo 3, “Lisa” apresenta a primeira proposta de metodologia para o ensino do problema em sala de aula: “Um jogo de tabuleiro por meio do problema do Caixeiro Viajante como auxílio pedagógico” (RODRIGUES et al., 2019). Foram feitas propostas metodológicas de aplicação do jogo para todos os anos do ensino fundamental e, posteriormente, as competências e habilidades da BNCC que o jogo abrange.

O capítulo 4 aborda a aplicação do PCV no ensino médio através do jogo de aplicativo de celular Pokémon Go. Neste jogo o usuário deve ter um celular (*smartphone*) para “caçar” Pokémons, os quais aparecem na tela do aparelho sempre que o jogador se deslocar no espaço físico real extrajogo. A atividade proposta foi baseada em Barros (2021) e, em seguida, foram elencadas as competências da BNCC que a atividade abrange.

Por fim, trazemos as considerações finais referentes a este trabalho e sugestões para laborações futuras.

2. Teoria dos grafos: contexto histórico

A teoria dos Grafos é um ramo da matemática discreta que surgiu no século XVIII através de Euler, por meio da solução do problema das 7 pontes de Königsberg -atual Kaliningrado. A princípio considerada uma anedota, nesta situação buscava-se descobrir se seria possível atravessar as 7 pontes existentes em Königsberg sem repetir nenhum caminho (LOPES; TÁBOAS, 2015). Euler descobriu que não seria possível atravessar as pontes nesta condição. A solução deu-se por meio de um desenho semelhante a Figura 1 a seguir, na qual Euler representou os quatro distritos que formam a cidade por pontos (ou vértices) e as 7 pontes que ligam os distritos por "elos “conhecidos como arestas.

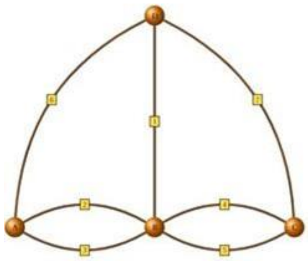

Figura 1. Grafo das Pontes de Königsberg

Com um desenho semelhante a este, Euler desenvolveu o primeiro Grafo da história da matemática e com isso deduziu a impossibilidade da condição. Por definição, um grafo é uma estrutura G= (V, E), donde V é o conjunto de vértices (ou nós) e E é o conjunto de arestas (ou ligações). O objetivo do problema era não repetir nenhum caminho. Ele observou, por meio de uma lista de possibilidades de rotas, que nenhuma delas pode ser concluída como requer o problema, pois seria impraticável devido ao número de possibilidades (LOVÁSZ; PELIKÁN; VESZTERGOMBI, 2013). Entretanto, uma forma de obter a solução deste problema, é tentar desenhar a Figura 1 sem tirar o lápis do papel e sem retraçar nenhuma das linhas. Na Figura 1, existem quatro vértices onde as linhas se cruzam; em cada vértice o número de linhas conectadas é ímpar (STEIN; SCHEINERMAN; CHIRIKJIAN, 2003).

Raciocínio matemático de Euler: Para a quantidade ímpar de linhas. Se traçarmos a Figura 1 da forma como o problema designa, os vértices que se encontram no número ímpar de linhas ou é o vértice inicial do desenho ou o vértice final. Supondo um vértice o qual não seja o vértice inicial nem final do desenho, neste vértice deve haver um número par de linhas. Desta forma, sempre que chegarmos a este ponto no decorrer de uma linha, deixamo-lo ao longo da outra, pois não se permite retraçar uma linha. Portanto, todo ponto de vértice no diagrama deve ser ou o primeiro ou o último ponto no desenho. Sendo assim isto não é possível, pois a Figura 1 tem quatro pontos, logo é impossível passear por toda a cidade de Königsberg atravessando cada uma das pontes somente uma vez (STEIN; SCHEINERMAN; CHIRIKJIAN, 2003).

O resultado de Euler, segundo LOVÁSZ; PELIKÁN; VESZTERGOMBI (2013), pode ser considerado o primeiro teorema em teoria dos grafos. Após a resolução de Euler, a teoria dos grafos foi "esquecida" pelos matemáticos por quase um século. Justifica-se esse desinteresse inicial pela falta de aplicações que a teoria dos grafos apresentava até aquele momento. Após um hiato nos estudos durante mais de um século, a teoria dos grafos foi redescoberta inúmeras vezes através de estudos de interesses de diversas áreas separadamente (NETTO, 2011). Passaram-se 150 anos desde a demonstração de Euler até o ressurgimento dos grafos nas diversas áreas de estudos das ciências.

O desenvolvimento da tecnologia trouxe proficuidade aos estudos da teoria dos grafos, fazendo com que os grafos fizessem parte do nosso dia a dia indiretamente, através dos computadores, das redes elétricas nos estudos de redes ópticas elétricas (XIE et al., 2019), do planejamento urbano, transmissão de informações, genética, psicologia, economia, jogos, física, química, antropologia, linguística, entre outras (MÜLLER; BAIER, 2021; RABUSKE, 1992). Com o desenvolvimento dos estudos em teoria dos grafos, foi elaborada toda uma formalização matemática que é necessária para fundamentar as descobertas nesta área tão abrangente e relativamente recente da modelagem matemática, quando comparada a outros temas da área.

A relação da teoria dos grafos com a tecnologia consiste no fato que existem conteúdos dentro da teoria que são utilizados na rotina de empresas, como o Problema do Caixeiro Viajante. Este problema, conforme mencionado no cap. 1, possui relação com a ciência da computação por ser de natureza NP-completo.

Contudo, as suas aplicações não restringem-se a isto. A teoria dos grafos, por meio do PCV, auxilia empresas a calcular menor percurso e custos de viagem. Por exemplo, uma empresa de energia elétrica necessita fazer reparos em suas subestações de energia. Para que a manutenção seja realizada, é necessário que equipes de manutenção façam viagens (FERREIRA, 2020). Para que não haja gastos desnecessários, grafos são modelados via algoritmos computacionais. Estes grafos auxiliam as equipes a visualizarem os percursos ótimos de viagem, os quais tenham o melhor custo-benefício. Conforme restrições da teoria dos grafos, cada percurso deve ser executado uma única vez.

O setor de logística nas indústrias de distribuição de alimentos utiliza da teoria dos grafos e do PCV para realizar a roteirização de veículos. Segundo Miranda et.al.(MIRANDA; SOLIANI; FREITAS, 2021) :

> De acordo com Chen et al. (2019), a seleção de rotas ótimas para a realização de entregas minimiza o custo de transporte em relação ao valor da venda do produto. A redução dos custos deve-se à diminuição da quilometragem rodada, a consequente redução dos custos de manutenção dos veículos, gastos com combustível e maior aproveitamento da capacidade de carga do veículo (SOLIANI et al., 2020). Cattaruzza et al. (2017) enfatizam a importância da roteirização para as organizações, uma vez que se obtém benefícios significativos, tanto em relação às despesas operacionais quanto na qualidade da prestação dos serviços”

Ainda de acordo com Miranda et al.(MIRANDA; SOLIANI; FREITAS, 2021) “O PCV é, sem dúvida, o conceito mais conhecido quando se fala em otimização de recursos e operações, recebendo muita atenção por causa de suas aplicações na indústria, problemas de transporte e serviços”.

Contudo, o PCV apesar da sua dificuldade de execução computacional e ser um problema matemático cuja solução está em aberto, pode ser ensinado nas escolas desde os anos iniciais. O capítulo 3 exemplifica com detalhes o Problema do Caixeiro Viajante, envolvendo Lisa e Homer Simpson.

3. Lisa Simpson e o Problema do Caixeiro Viajante

A partir da retomada aos estudos de grafos e a descoberta das suas aplicações na tecnologia, durante os anos 1930 um matemático vienense chamado Karl Menger enunciou um problema em teoria dos grafos denominado O Problema do Caixeiro Viajante (DEVLIN, 2004), o qual tenta determinar o menor caminho para percorrer vários locais.

O problema do Caixeiro Viajante (PCV) é considerado um dos maiores problemas do milênio, segundo Keith Devlin (2004). Sendo um enigma essencialmente computacional, enquadra-se em Teoria da Complexidade Computacional. A Teoria da Complexidade Computacional estuda a análise de processos computacionais para avaliar a eficiência com que eles podem ser executados.

Para exemplificar um problema desta categoria, vide a seguinte situação: imagine que Homer Simpson saiu da usina nuclear e decidiu tornar-se Caixeiro Viajante. Seu produto é a venda dos seus Donuts. Sendo assim, Homer precisa viajar por várias cidades para vender seus produtos, no entanto, Donuts são perecíveis e ele precisa percorrer o máximo de cidades no menor tempo possível. Sem saber como resolver o seu problema Homer pede ajuda da sua filha saxofonista, Lisa conforme Figura 2.

Figura 2 Lisa e Homer Fonte: https://www.animationconnection.com/view/4680-homer-and-lisa-3013 Acesso em 02/01/2023

Lisa sugere que há apenas uma forma de solucionar a situação: Homer precisa sempre buscar o menor percurso entre as cidades, economizando o máximo de combustível e tempo. Sendo assim, Lisa começa uma pesquisa em um aplicativo de mapas e localização e encontra o mapa da Figura 3, contando as cidades circunvizinhas.

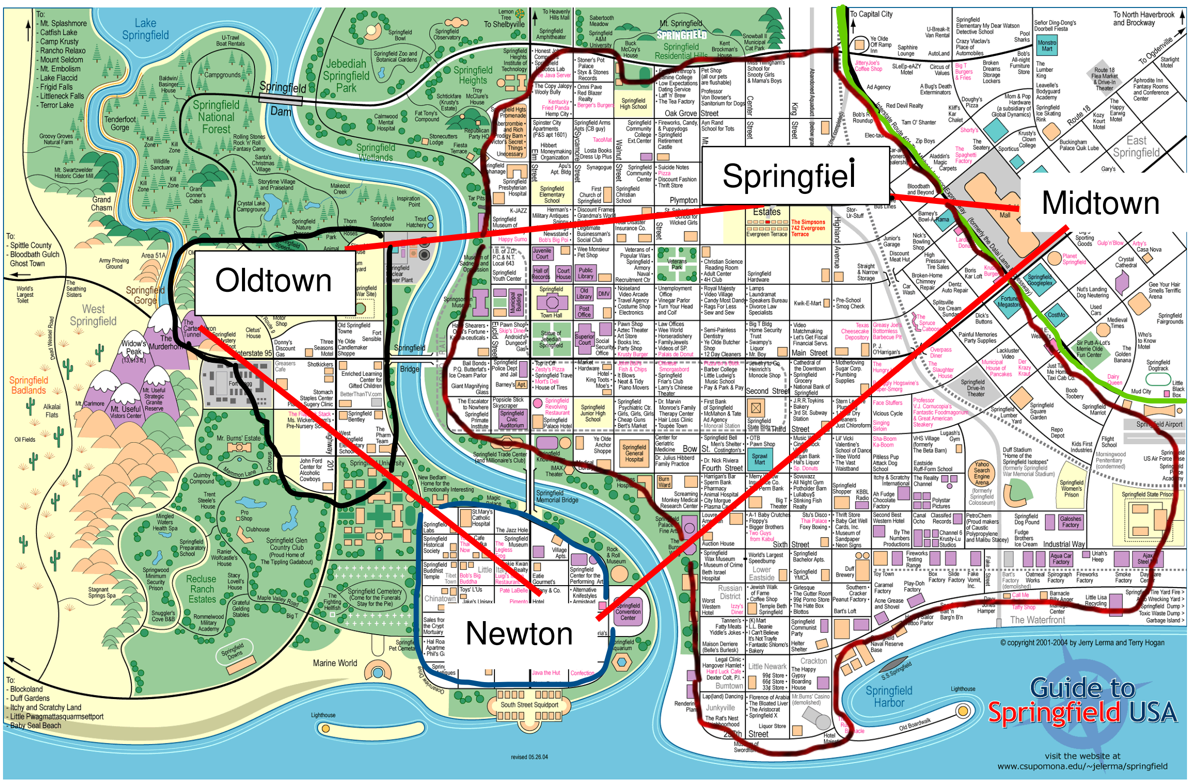

Figura 3. Mapa ilustrativo das cidades vizinhas a Springfield. (Fonte:Disponível em: https://www.farofeiros.com.br/mapa-de-springfield-de-os-simpsons/ Acessado em 26/12/2022)

Utilizando o mapa, Lisa conseguiu visualizar as cidades vizinhas a Springfield: Oldtown, Midtown e Newtown, e monta a Tabela 3, contendo as distâncias entre os pares de cidades em quilômetros.

Tabela 3. Distância entre as cidades em quilômetros

Cidades	**Distâncias**			
	Springfield	Oldtown	Midtown	Newtown
Springfield	0	54	17	79
Oldtown	54	0	49	104
Midtown	17	49	0	91
Newtown	79	109	91	0

De acordo com Tabela 3, Lisa Simpson observou que a distância de Newtown a Oldtown é maior do que a distância de Oldtown a Newtown, pois o sistema rodoviário de Newtown admite apenas ruas de mão única. Entretanto, para todos os demais pares de cidades contidos na tabela, as distâncias de ida e volta são iguais. Para encontrar o menor percurso possível entre as quatro cidades que Homer vai viajar, Lisa montou a Tabela 4 com as possibilidades de percursos partindo de Springfield e os quilômetros totais:

Tabela 4. Possibilidades de Percursos

Rota	**Quilômetros totais**
S-O-M-N-S	54+49+91+79=273
S-O-N-M-O-S	54+104+91+17=266
S-M-N-O-S	17+91+109+54=271
S-M-O-N-S	17+49+104+79=249
S-N-O-M-S	79+109+49+17=254
S-N-M-O-S	79+91+49+54=273

A partir da Tabela 4, Lisa conseguiu descobrir que a rota S-M-O-N-S é a melhor rota para Homer Simpson vender seus Donuts, pois a distância total é de 229 quilômetros sendo a menor entre todas as rotas possíveis. Sendo assim, com esta informação obtida, Homer iniciou a sua viagem seguindo a rota S-M-O-N-S, porém, Lisa sempre curiosa e interessada em matemática quis descobrir quantas possibilidades de rotas poderiam existir entre mais de seis cidades e menos de seis cidades. Pesquisando no livro de Devlin (DEVLIN, 2004), Lisa leu que "Com apenas três cidades para visitar, não há muita diferença entre as possíveis rotas e nem parece valer muito a pena fazer os cálculos. Mas para um vendedor ambicioso, com mais cidades para visitar, um monte de pequenas diferenças pode se tornar muito. Portanto, o problema torna-se maior se Homer decidir viajar para 10 cidades, pois ele alcançaria o valor de 3.628.800 rotas diferentes. Neste caso, o auxílio de um computador para escrever um programa pode ser um caminho mais eficiente e rápido para calcular as rotas, já que Lisa não teria que gastar muito tempo com os cálculos e sobraria tempo e disposição para tocar seu saxofone.

Este problema aparentemente simples é considerado um dos problemas do milênio e atualmente sua resolução encontra-se em aberto. Entretanto, pesquisas recentes apontam que hardwares computacionais japoneses tenham conseguido a resolução do problema do Caixeiro Viajante, contudo uma resolução através dos conhecimentos matemáticos, usando conteúdos básicos ainda não foi possível, uma vez que é necessário a utilização de ferramentas matemáticas aprofundadas juntamente com linguagem de programação. Em contrapartida a complexidade de uma possível solução para o problema do Caixeiro Viajante usando a matemática, nos permite explorar formas metodológicas de ensino e aprendizagem para diversos assuntos matemáticos que versam desde os anos iniciais do ensino fundamental até pesquisas envolvendo tecnologia.

3.1 Proposta metodológica 1: Aplicação do PCV por meio do jogo de tabuleiro no ensino fundamental I

Interessada em pesquisar mais sobre o problema dos percursos, Lisa Simpson descobriu que na realidade a situação vivenciada por Homer, trata-se do Problema do Caixeiro Viajante. Após Homer iniciar a sua viagem, Lisa iniciou uma viagem pessoal ao universo da pesquisa em teoria dos grafos, visando descobrir mais sobre o problema do menor percurso. Descobriu, em seus estudos, aplicações diversas, mas dedicou maior parte do tempo a conhecer aplicações que poderiam ser empregadas em sala de aula. Cada vez mais instigada pelos estudos, nossa pesquisadora decidiu apresentar o problema para a sua professora, Elizabeth Hoover.

Ao se deparar com a situação, a professora Hoover pesquisou formas de inserir o problema do Caixeiro Viajante nas turmas do ensino fundamental I e II. Com base na BNCC, a metodologia proposta pela professora é a ludicidade aplicada por meio de um jogo de tabuleiro criado por Rodrigues et al (RODRIGUES et al., 2019). “A escolha da ludicidade deu-se porque nesta fase do ensino é crucial considerar o papel heurístico e investigativo da matemática” (BRASIL, 2022). Nas sessões seguintes abordaremos quais competências e habilidades da BNCC respaldam a utilização do jogo e como ele pode adequar-se nas diversas turmas do ensino fundamental.

3.1.1 Ensino Fundamental I - 1º ao 5º ano

A proposta metodológica a seguir surgiu da leitura do artigo "Um jogo de tabuleiro por meio do problema do Caixeiro Viajante como auxílio pedagógico” (RODRIGUES et al., 2019). O trabalho enfatiza que em meio a tantos temas de difícil complexidade, nasceu a necessidade da criação de uma abordagem diferente para a sua aplicação (RODRIGUES et al., 2019).

Pode-se através do jogo mostrado no artigo supracitado, explorar alguns contextos matemáticos contidos na BNCC de matemática do 1º ao 5º ano. Neste trabalho, os autores desenvolveram um jogo de tabuleiro que foi aplicado nas turmas de 9º ano, no entanto, o mesmo tabuleiro pode ser aplicado a turmas de séries iniciais do ensino fundamental considerando outros contextos da matemática. Segundo os autores (RODRIGUES et al., 2019), o jogo funcionará da seguinte forma:

> "[...] Os participantes sairão de um mesmo ponto do mapa, onde quem escolherá será o jogador que tiver tirado o menor número na sorte, jogando os dados e após isso, cada indivíduo deverá começar a traçar uma rota, sem passar duas vezes por um mesmo ponto no mapa, no decorrer de sua trilha, ele contará com obstáculos como pedágios e perguntas e respostas que deverão ser respondidas. A cada cidade passada, onde por meio disso poderão receber bonificações ou penalidades. Ao final da partida, o ganhador será aquele que tiver passado pelo número de cidades combinadas que será definida logo no início e tiver o menor número de quilômetros rodados, caso haja empate, o que influenciará na decisão, será a quantidade de dinheiro, onde o que possuir o maior valor, ganha".

Ainda segundo os autores, o professor poderá modificar as regras do jogo de acordo com a necessidade, desta forma, o tabuleiro poderá sofrer alterações nas regras do jogo em decorrência do nível de ensino que a turma esteja. A Figura 4 e Figura 5 representam o tabuleiro do jogo, e as cartas que são utilizadas durante a execução do jogo, respectivamente.

Figura 4. Tabuleiro Jogo do Caixeiro Viajante (Fonte:(RODRIGUES et al., 2019))

Ao longo do percurso de jogo, os participantes deverão encontrar alguns obstáculos que estarão contidos nas cartas, conforme mostra a Figura 5. Nestas cartas estão contidas perguntas que os jogadores deverão responder para avançar percursos de viagem no jogo. Caso os integrantes da partida respondam as perguntas corretamente, poderão progredir no deslocamento. Em contrapartida, se responderem aos questionamentos equivocadamente, poderão receber penalidades como por exemplo, atraso no percurso de viagem no tabuleiro, maior tarifa de pedágio, entre outros.

Figura 5. Cartas do Jogo do Caixeiro Viajante (Fonte: (RODRIGUES et al., 2019))

1º ano do ensino fundamental:

Unidades Temáticas: Números e Geometria.

Objeto de conhecimento: Quantificação de elementos de uma coleção:

estimativas, contagem um a um, pareamento ou outros agrupamentos e comparação; Localização e movimentação de pessoas e objetos no espaço, segundo pontos de referência, e indicação de mudanças de direção e sentido; Figuras geométricas planas (círculo, quadrado, retângulo e triângulo): reconhecimento e características.

Sugestão de aplicação: Contar quantas cidades os alunos passaram e certificar se não passaram pela mesma cidade mais de uma vez, contando desta forma o mesmo elemento mais de uma vez. Neste contexto, caso haja repetição na contagem, o professor pode intervir explicando que em um conjunto de números o mesmo elemento não pode ser contado mais de uma vez. Os alunos podem mostrar os percursos que fizeram para atingir o objetivo do jogo. A Figura 6 apresenta as habilidades da BNCC que o jogo abrange.

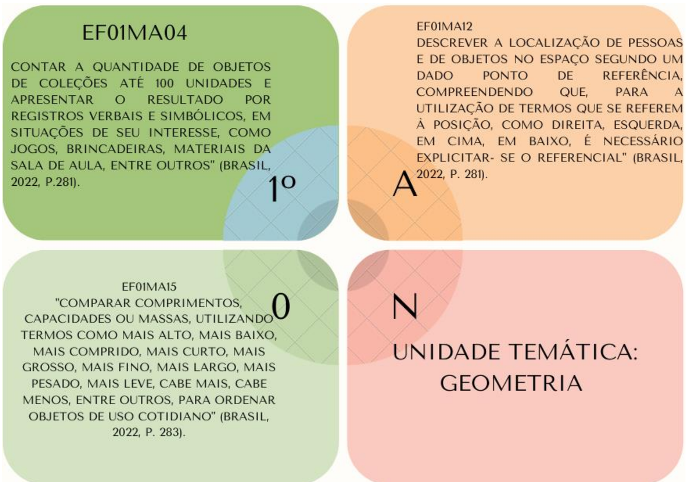

Figura 6. Habilidades da BNCC referentes ao 1º ano do ensino fundamental

2º ano do ensino fundamental

Unidade temática: Geometria;

Objeto de conhecimento: Localização e movimentação de pessoas e objetos no espaço, segundo pontos de referência, e indicação de mudanças de direção e sentido (BRASIL, 2022) .

Sugestão de aplicação: A aplicação do jogo no 2º ano do ensino fundamental pode ser realizada de forma semelhante ao primeiro ano, apenas atentando-se para as competências e habilidades abordadas neste ano do ensino fundamental. As habilidades a seguir podem ser exploradas quando o professor(a) analisar quais percursos os alunos realizaram durante o jogo e quais foram as tomadas de decisão para a realização do objetivo. A Figura 7 apresenta quais habilidades da BNCC o jogo abrange.

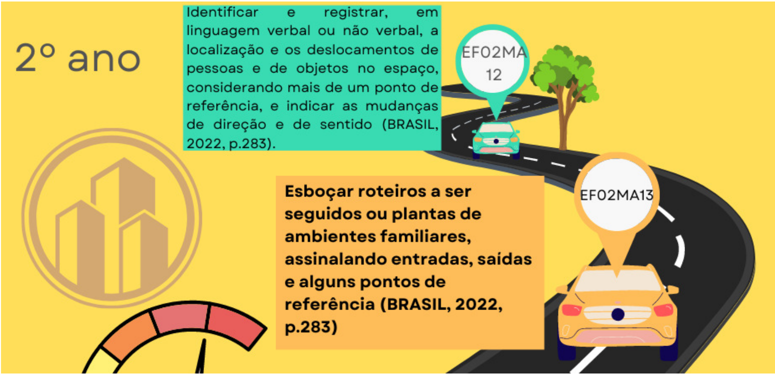

Figura 7 Habilidades da BNCC referentes ao 2º ano do ensino fundamental

3° ano do ensino fundamental

Unidade temática: Geometria;

Objeto de conhecimento: Localização e movimentação: representação de objetos e pontos de referência;

Sugestão de aplicação: Nesta etapa do ensino, o jogo pode ser explorado com nuances mais profundas do que em anos anteriores. Além de descobrir "quantos “caminhos foram feitos, pode-se analisar quais percursos são mais curtos e instigar os alunos a desenvolver o senso de "tomada de decisão", uma vez que nesta etapa pode-se enfatizar que o Caixeiro não pode repetir e nem retornar percurso, pois o retorno de percurso aumentará o gasto da viagem. A Figura 8 apresenta quais habilidades da BNCC o jogo abrange.

Figura 8. Habilidades da BNCC referentes ao 3º ano do ensino fundamental

4º Ano do Ensino Fundamental

Unidade temática: Geometria;

Objeto de conhecimento: Localização e movimentação: pontos de referência, direção e sentido; Paralelismo e perpendicularismo

Sugestão de aplicação: Nesta fase do ensino fundamental, o jogo pode ser aplicado enfatizando a unidade temática “Geometria”, por meio da localização e pontos de referência. Através do processo de tomada de decisão, os alunos podem justificar os motivos que os guiaram a escolher alguns caminhos e quais caminhos são perpendiculares e paralelos, caso haja. A Figura 9 apresenta quais habilidades da BNCC o jogo abrange.

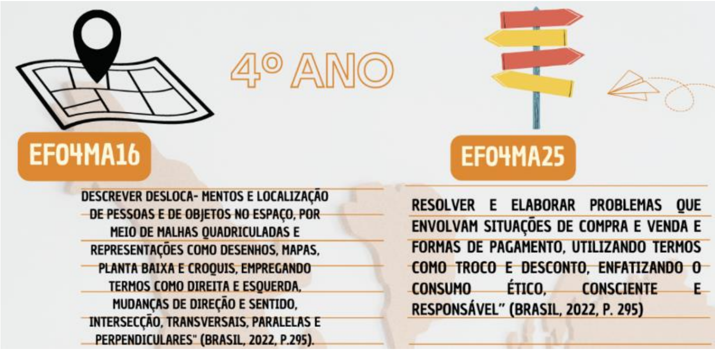

Figura 9 Habilidades da BNCC referentes ao 4º ano do ensino fundamental

5º Ano do Ensino Fundamental

Unidade temática: Geometria

Objeto de conhecimento: Plano cartesinao: coordenadas cartesianas e representação de deslocamentos no plano cartesiano (BRASIL, 2022).

Sugestão de aplicação: A partir do 5º ano o jogo pode abranger um aspecto matemático que engloba a localização geográfica, por meio do plano cartesiano. Neste sentido, professores e alunos além de explorar o conceito de “tomada de decisão, podem estudar o plano cartesiano por meio de coordenadas geográficas, donde os alunos poderão analisar se o Caixeiro Viajante está perto do seu destino, onde ele encontra-se no mapa, se está dentro do seu roteiro de viagem ou se precisará melhorar a rota. Este jogo pode ser útil didaticamente para os alunos compreenderem a importância da matemática dentro do contexto geográfico. A Figura 10 apresenta quais habilidades da BNCC o jogo abrange.

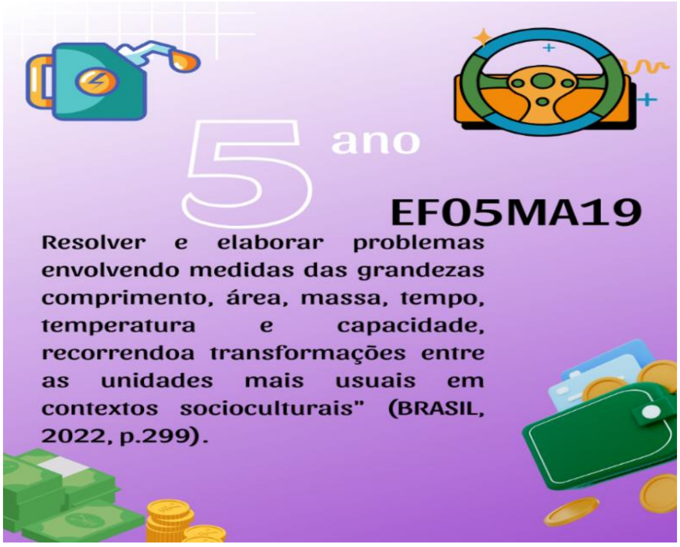

Figura 10. Habilidades da BNCC referentes ao 5º ano do ensino fundamental

3.2 Proposta metodológica 1: Aplicação do PCV por meio do jogo de tabuleiro no ensino fundamental II

O ensino fundamental II abrange turmas de 6º a 9º ano. Nesta fase do ensino básico os alunos deverão utilizar-se de conhecimentos outrora adquiridos em anos anteriores, para que seja possível a realização de atividades que explorem capacidades quantitativas e qualitativas da realidade, desenvolvendo ideias mais complexas. Segundo a BNCC 2022 (BRASIL, 2022):

> "Essas situações precisam articular múltiplos aspectos dos diferentes conteúdos, visando ao desenvolvimento das ideias fundamentais da matemática, como equivalência, ordem, proporcionalidade, variação e interdependência."

Nessa etapa, a utilização de recursos tecnológicos como Geogebra, calculadoras, planilhas, ábacos, jogos, recursos de softwares matemáticos tornam-se importantes aliados no processo de ensino e aprendizagem, pois auxiliam na compreensão e visualização das situações-problema trabalhadas em sala de aula. Entretanto, a utilização desses recursos precisa estar atrelada a contextos que "propiciem reflexão, contribuindo para a sistematização e a formalização dos conceitos matemáticos" (BRASIL, 2022, p.300).

3.2.1 Ensino Fundamental II - 6º ao 9º ano

Ainda utilizando o jogo do Caixeiro Viajante, as seguintes habilidades da BNCC estão presentes nesta etapa do ensino:

6º ano do Ensino Fundamental

Unidade temática: Geometria, Grandezas e medidas.
Objeto de conhecimento: Plano cartesiano: associação dos vértices de um polígono a pares ordenados; Construção de figuras semelhantes: ampliação e redução de figuras planas em malhas quadriculadas; Construção de retas paralelas e perpendiculares fazendo uso de réguas, esquadros e softwares; Problemas sobre medidas envolvendo grandezas como comprimento, massa, tempo, temperatura, área, capacidade e volume; Plantas baixas e vistas aéreas.
Sugestão de aplicação: A exploração desta atividade pode ser executada das seguintes formas:
I. Após a aplicação do jogo pede-se para os alunos desenharem no mapa, os caminhos que foram percorridos pelo Caixeiro sem que retirem o lápis do papel. Pede-se para que observe se ao terminar o desenho, alguma figura geométrica foi formada. Neste caso, os pontos de "parada" do caixeiro representam os vértices do polígono caso exista;
II. Em seguida, os alunos devem identificar se o polígono é regular ou não e com isto, construir figuras planas semelhantes com o uso de régua; posteriormente o desenho deve ser transferido para uma malha quadriculada, respeitando as mesmas medidas do traçado anterior feito no mapa, e com isto os alunos deverão fazer ampliações e reduções respeitando as proporções matemáticas do polígono;
III. Ainda neste polígono, pode-se pedir que os alunos identifiquem a área e o volume caso a imagem formada seja um polígono regular;
IV. Se o desenho formado na primeira etapa não for um polígono, pode-se pedir para os alunos para analisar paralelismo e perpendicularismo entre as retas/caminhos formados. Nesta atividade, o uso de transferidor torna-se útil, uma vez que o perpendicularismo e paralelismo dependem dos ângulos formados pelas retas.

A Figura 11 apresenta quais habilidades da BNCC o jogo abrange.

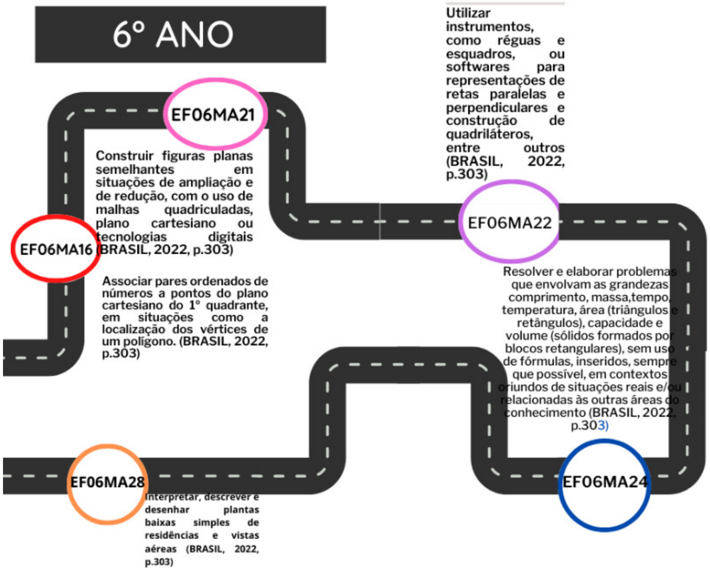

Figura 11 Habilidades da BNCC referentes ao 6º ano do ensino fundamental

7º ano do Ensino Fundamental

Unidade temática: Números

Objeto de conhecimento: Cálculo de porcentagens e de acréscimos e decréscimos simples; Fração e seus significados: como parte de inteiros, resultado da divisão, razão e operador**.**

Sugestão de aplicação:

I. Ao aplicar o jogo, os alunos serão questionados quanto à utilização da matemática financeira que envolve o contexto de compra e venda do Caixeiro Viajante;

II. Em contrapartida, será necessário que ao iniciar a partida os alunos tomem a primeira “decisão” do jogo, que é “qual será o primeiro caminho a percorrer”;

III. Ao decidir o primeiro caminho, uma equipe estará reponsável por desenhar em uma folha a parte o precurso que foi estabelecido. Sendo assim, em cada decisão que o grupo jogador está tomando, a equipe de desenho vai registrando e formando um fluxograma com as decisões feitas ao longo da partida.

A Figura 12 apresenta quais habilidades da BNCC o jogo abrange.

Figura 12 Habilidades da BNCC referentes ao 7º ano do ensino fundamental

8º ano do Ensino Fundamental

Unidade temática: Grandezas e medidas;

Objeto de conhecimento: Área de figuras planas; área do círculo e comprimento de sua circunferência;

Sugestão de aplicação: O jogo poderá ser aplicado conforme as regras descritas por Barros (BARROS, 2021).

A Figura 13 apresenta quais habilidades da BNCC o jogo abrange.

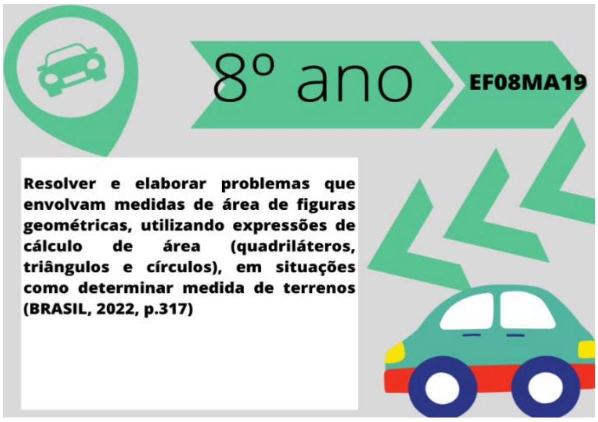

Figura 13 Habilidades da BNCC referentes ao 8ºano do ensino fundamental

9º ano do Ensino Fundamental

Unidade temática: Números; grandezas e medidas;

Objeto de conhecimento: Necessidade dos números reais para medir qualquer segmento de reta; Unidades de medida para medir distâncias muito grandes e muito pequenas; Unidades de medida utilizadas na informática.

Sugestão de aplicação: O jogo poderá ser aplicado conforme as regras descritas por Barros (BARROS, 2021).

A Figura 14 apresenta quais habilidades da BNCC o jogo abrange.

Figura 14 Habilidades da BNCC referentes ao 9º ano do ensino fundamental.

Através das descobertas feitas por Lisa, foi possível realizar atividades nas turmas de 1º a 9º ano do ensino fundamental. No entanto, as suas descobertas não cessaram e a incansável estudante aprofundou as suas pesquisas, conforme apresentado a seguir.

4. A ideia de Lisa: O Caixeiro Viajante no Pokemón Go

Com a realização da atividade do jogo de tabuleiro no ensino fundamental proposto por Lisa e professora Hoover, a Escola Elementar de Springfield sugeriu aos professores do ensino médio que propusessem uma atividade semelhante, englobando os temas de matemática do ensino médio alicerçados com a BNCC. Animada com a aceitação da sua pesquisa pela escola, Lisa contou todos os acontecimentos para Bart e Van Houten enquanto voltavam para suas casas de bicicleta, buscando o menor percurso, conforme mostra a Figura 15.

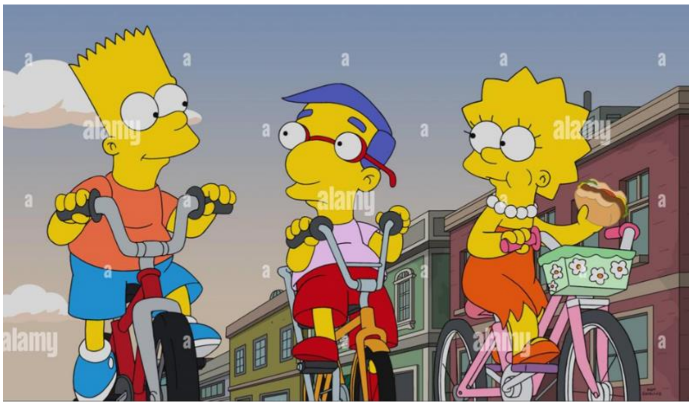

Figura 15 Lisa, Bart e Van Houten (Fonte: https://www.alamy.com/the-simpsons-from-left-bart-simpson-voice-nancy-cartwright-milhouse-van-houten-voice-pamela-hayden-lisa-simpson-voice-yeardley-smith-burger-kings-season-32-ep-3211-aired-apr-11-2021-photo-fox-courtesy-everett-collection-image418193917.html) acessad0 em 04/01/2023

Naquela tarde, ansiosa por discutir sobre o assunto e sem seu amigo gênio Van Houten por perto, Lisa chamou o seu irmão Bart para falar sobre o tema, mesmo sabendo que ele não entenderia a princípio. Ao olhar pela janela do seu quarto, observou que Bart estava no jardim jogando no celular e andando pelo lugar sem destino certo, compenetrado no jogo e parecendo não a ouvir.

Irritada e confusa, Lisa desceu e chamou Bart para uma conversa no sofá da sala, nesta “conversa” Lisa falou sobre os temas que a matemática do Ensino médio abrange. Baseando-se na BNCC, ela explicou que a matemática do ensino médio é um aprofundamento dos conteúdos apresentados na etapa anterior. Neste contexto, a BNCC sugere habilidades e competências que possam melhorar a compreensão dos alunos referente a esta ciência exata. Por meio dos assuntos apresentados, os alunos têm a oportunidade de desenvolver o pensamento algébrico, geométrico, computacional, lógico-dedutivo, Grandezas e Medidas, cálculo de probabilidades, estatística, fluxogramas, entre outros.

A esta altura, Bart estava completamente alheio ao assunto de Lisa, mas ela só queria desabafar o conhecimento e continuou com as suas ideias. Seguindo com o seu raciocínio, ela explicou que precisaria criar uma atividade para o ensino médio onde a qual o foco é a continuidade das aprendizagens supracitadas e aprofundamentos deste**s** conhecimento**s** Segundo a BNCC de matemática do Ensino Médio, 2022:

> "Em continuidade a essas aprendizagens, no Ensino Médio o foco é a construção de uma visão integrada da Matemática, aplicada à realidade, em diferentes contextos. Consequentemente, quando a realidade é a referência, é preciso levar em conta as vivências cotidianas dos estudantes do Ensino Médio – impactados de diferentes maneiras pelos avanços tecnológicos, pelas exigências do mercado de trabalho, pelos projetos de bem viver dos seus povos, pela potencialidade das mídias sociais, entre outros."

Seguindo estes paradigmas, a atividade a ser criada deve conter o uso dos recursos digitais. Os quais tornaram-se aliados importantes do professor de matemática, uma vez que a Matemática enquanto ciência está presente diretamente no cotidiano dos estudantes e professores, seja por meio de jogos, aplicativos, redes sociais. Com isso, segue-se uma infinidade de recursos digitais que se utilizam da matemática para a executar as suas funções.

Lendo o texto a seguir, que foi extraído da Base Nacional Comum Curricular referente à Matemática no ensino médio para o ano de 2022, Lisa explicou algumas competências básicas que a atividade precisa abranger para estar alicerçada com a BNCC. Neste texto lido por ela, pode-se encontrar as competências específicas e suas tecnologias para o ensino da matemática, as quais são:

1. "Utilizar estratégias, conceitos e procedimentos matemáticos para interpretar situações em diversos contextos, sejam atividades cotidianas, sejam fatos das Ciências da Natureza e Humanas, das questões socioeconômicas ou tecnológicas, divulgados por diferentes meios, de modo a contribuir para uma formação geral**.**

2. Propor ou participar de ações para investigar desafios do mundo contemporâneo e tomar decisões éticas e socialmente responsáveis, com base na análise de problemas sociais, como os voltados a situações de saúde, sustentabilidade, das implicações da tecnologia no mundo do trabalho, entre outros, mobilizando e articulando conceitos, procedimentos e linguagens próprios da Matemática.

3. Utilizar estratégias, conceitos, definições e procedimentos matemáticos para interpretar, construir modelos e resolver problemas em diversos contextos, analisando a plausibilidade dos resultados e a adequação das soluções propostas, de modo a construir argumentação consistente.
4. Compreender e utilizar, com flexibilidade e precisão, diferentes registros de representação matemáticos (algébrico, geométrico, estatístico, computacional etc.), na busca de solução e comunicação de resultados de problemas.
5. Investigar e estabelecer conjecturas a respeito de diferentes conceitos e propriedades matemáticas, empregando estratégias e recursos, como observação de padrões, experimentações e diferentes tecnologias, identificando a necessidade, ou não, de uma demonstração cada vez mais formal na validação das referidas conjecturas."

Ao terminar de ler o texto, Lisa Simpson olhou animada para Bart que a esta altura já estava longe da conversa proposta e compenetrado no celular. Nossa querida pesquisadora viu que Bart andava pela sala "sem destino certo" e aquilo deixou-a irritada e desesperançosa quanto a capacidade intelectual do irmão...Observando que não poderia contar com o seu irmão a respeito da atividade, Lisa pensou que a teoria dos grafos pode ser abordada no Ensino Médio por meio da ludicidade, aliado ao conhecimento teórico que o conteúdo necessita. Ainda sentada no sofá, pensou em propor para esta etapa do ensino, um projeto científico que possa envolver alunos de todas as séries do ensino médio, pelo qual possa fazer uso dos recursos tecnológicos como celular, jogos, computadores e recurso como Geogebra, por exemplo.

Sem ter mais nenhuma ideia e incomodada com a inquietação de Bart naquele jogo, que a esta altura já andava na cozinha, Lisa resolveu perguntar ao irmão que jogo era aquele que o prendia tanto. Respondendo à sua pergunta, Bart disse que se tratava de Pokémon Go a mais nova sensação digital do momento. Sem dar muita importância, Lisa vai ao jardim e percebe que as crianças de Springfield estão agindo semelhante a Bart com os seus smartphones. Curiosa com aquilo, ela resolve falar mais uma vez com Bart e pergunta a ele como o jogo funciona, com o intuito de distrair-se um pouco.

Buscando a distração por intermédio do jogo, Lisa pesquisou na internet a respeito e encontrou o seguinte vídeo demonstrativo:

https://www.youtube.com/watch?v=R04u9E5INTI

Com esse vídeo Lisa começou a esboçar as primeiras ideias sobre o seu próximo trabalho escolar proposto pela sua professora.

Neste sentido, propomos a abordagem do tema deste trabalho por meio de uma atividade que fará uso do jogo Pokémon Go, aplicativo muito popular entre jovens e adolescentes. Por mais que seja uma problemática inusitada, este trabalho passa a ser mais um exemplo da enorme variedade de aplicações que podem ser solucionadas através dos conceitos estudados no campo da Matemática Aplicada (BARROS, 2021).

4.1 A explicação de Bart sobre Pokemón Go

Segundo a explicação de Bart, o jogo Pokemón Go consiste em um aplicativo para celular, pelo qual os jogadores se locomovem por espaços físicos reais para caçar Pokemóns que se encontram naqueles lugares virtualmente. O jogo foi programado para celulares smartphones por meio da parceria das empresas Nintendo, Nianc Inc e The Pokémon Company (BARROS, 2021), desenvolvido para as plataformas Android e iOS. A explicação de Barty corrobora com a pesquisa de Barros (BARROS, 2021) conforme citado abaixo:

> “Com o uso do GPS e as câmeras dos dispositivos compatíveis, o jogo permite aos jogadores capturar, batalhar e treinar criaturas virtuais chamadas Pokémons, que surgem nas telas dos Smartphones por meio da utilização dos recursos de realidade aumentada”

A Figura 16 exemplifica a utilização do jogo nos espaços urbanos.

Figura 16. Pokémon Go em espaços urbanos (Fonte:disponível em: https://tecnoblog.net/testamos/pokemon-go-como-jogar/ acessado em 12/12/2022)

Bart explicou que através de um mapa virtual fornecido pelo software Open-Street-Map, o aplicativo fornece imagens em realidade virtual dos Pokémons, os quais os jogadores localizarão ao andar pelo espaço físico mostrado no mapa. De acordo com (BARROS; 2021)

> “À medida que ele se desloca, o Smartphone vibra para avisar sobre a presença das criaturas virtuais pelo caminho. Ao tocar, a tela é possível visualizar o Pokemón no mesmo local onde o jogador está, pois o jogo sobrepõe à visualização da câmera com a imagem do Pokémon e simula que a criatura virtual está próxima ao jogador, de forma semelhante à realidade virtual e, para capturar o monstrinho [...] basta arremessar uma Pokébola”.

Por meio da explicação de Bart e sua experiência empírica, Lisa percebeu que aquele jogo tem muita aplicação na área de Teoria dos Grafos, em especial, seria uma aplicação do problema do Caixeiro Viajante. Neste contexto, a nossa incansável pesquisadora dedicou-se a encontrar formas de aplicar o Caixeiro Viajante no ensino médio, por meio do jogo Pokémon Go. A seguir, apresentamos a ideia de Lisa Simpson.

4.2 Aplicação do jogo no ensino médio: A ideia de Lisa.

A ideia de Lisa Simpson consistiu em reunir todas as turmas de ensino médio, para a realização de um projeto itinerário na escola, previsto na BNCC 2022. Baseada no trabalho de Barros (BARROS, 2021), ela optou por analisar um evento no jogo chamado *Jantar Lendário.* Um Jantar Lendário consiste em uma premiação dentro dos ginásios Pokémon durante um período de 1 hora. Dentro deste intervalo de uma hora, os jogadores deverão duelar com o máximo de Pokémon disponíveis nos Ginásios e coletar recompensas. Desta forma, a escolha do caminho percorrido pelo jogador influenciará diretamente no resultado do jantar lendário, pois dependendo do percurso escolhido, o jogador poderá duelar com o máximo de ginásios possíveis e obter mais premiações (BARROS, 2021).

O espaço “físico” escolhido por Lisa foi Escola de Springfield, onde existem diversos ginásios espalhados pelo pátio. Nele os professores dividiriam suas turmas em equipes, as quais cada equipe seria responsável para uma parte na execução da atividade. O objetivo do trabalho seria baseado em Barros (BARROS, 2021), onde o foco é encontrar um percurso ideal para adquirir o máximo de premiações possíveis considerando o menor tempo e distância percorrida. Sendo assim, cada professor de matemática dividiria suas turmas em equipes de acordo com o número de alunos em sala de aula. Cada equipe seria responsável por uma parte do desenvolvimento do trabalho, que dar-se-ia como a seguir:

1. Divisão da turma em três equipes;
2. Equipe de execução: Instalar o jogo no smartphone e jogar;
3. Equipe gráfica: registrar por meio de desenho em papel os percursos feitos por cada jogador da equipe de execução;
4. Equipe de análise de resultados: Avaliar, mediante os desenhos o melhor percurso com maior premiação em menor tempo.

Todas as equipes reunidas para plotar no Geogebra os mapas desenhados pela equipe gráfica e registrar em computadores os resultados obtidos em cada percurso.

4.3 Habilidades e Competências da BNCC

A BNCC é um documento voltado para a educação no qual constam habilidades e competências específicas para cada área do ensino, até o ensino médio. Com base na BNCC de Matemática para o ano de 2022, a atividade desenvolvida por Lisa abrange habilidades e competências específicas contidas no documento. Segundo a BNCC, existem 4 competências específicas e, dentro delas, suas habilidades. A seguir detalharemos cada competência e habilidade que a prática da atividade proposta abrange.

Competência Específica 1

“Utilizar estratégias, conceitos e procedimentos matemáticos para interpretar situações em diversos contextos, sejam atividades cotidianas, sejam fatos das Ciências da Natureza e Humanas, ou ainda questões econômicas ou tecnológicas, divulgados por diferentes meios, de modo a consolidar uma formação científica geral” (BRASIL, 2022, p.532)

> “O desenvolvimento da competência, que é bastante ampla, pressupõe habilidades que podem favorecer a interpretação e compreensão da realidade pelos estudantes, utilizando conceitos de diferentes campos da Matemática para fazer julgamentos bem fundamentados. ”(BRASIL, 2022, p. 532)

A Figura 17 especifica qual habilidade a prática da atividade abrange.

Figura 17 Habilidades da BNCC com POKÉMON GO no ensino médio para a competência específica 1

A habilidade EM13MA103 auxiliará aos alunos compreender a grandeza distância, uma vez que ao saber a diferença entre um percurso e outro no jogo, os alunos diferenciarão qual a distância leva ao melhor caminho.

Competência Específica 2

"Articular conhecimentos matemáticos ao propor e/ou participar de ações para investigar desafios do mundo contemporâneo e tomar decisões éticas e socialmente responsáveis, com base na análise de problemas de urgência social, como os voltados a situações de saúde, sustentabilidade, das implicações da tecnologia no mundo do trabalho, entre outros, recorrendo a conceitos, procedimentos e linguagens próprios da Matemática." (BRASIL, 2022, p. 534)

> "A competência amplia a anterior por colocar os estudantes em situações nas quais precisam tomar decisão conjunta para investigar questões de impactos sociais que os mobilizem e, assim, propor e/ou participar de iniciativas e/ou ações que visem solucionar esses problemas. As habilidades indicadas para o desenvolvimento dessa competência colocam em jogo conhecimentos e ferramentas matemáticas necessárias para desenvolver um projeto cuja finalidade é responder questões como as relativas aos diferentes territórios geográficos e/ou sociais e fundamentar conclusões sobre elas." (BRASIL, 2022, p.534)

A Figura 18 especifica qual habilidade a prática da atividade abrange.

Figura 18. Habilidades da BNCC com POKÉMON GO no ensino médio para a competência específica 2

Competência Específica 3

"Utilizar estratégias, conceitos e procedimentos matemáticos, em seus campos – Aritmética, Álgebra, Grandezas e Medidas, Geometria, Probabilidade e Estatística –, para interpretar, construir modelos e resolver problemas em diversos contextos, analisando a plausibilidade dos resultados e a adequação das soluções propostas, de modo a construir argumentação consistente."(BRASIL, 2022, p. 535)

> "As habilidades indicadas para o desenvolvimento da competência estão relacionadas à interpretação, construção de modelos, resolução e formulação de problemas matemáticos envolvendo noções, conceitos e procedimentos quantitativos, espaciais, estatísticos, probabilísticos, entre outros." (BRASIL, 2022, p. 535)

A Figura 18 especifica qual habilidade a prática da atividade abrange.

Figura 19. Habilidades da BNCC com POKÉMON GO no ensino médio para a competência específica 3

Competência Específica 4

“Compreender e utilizar, com flexibilidade e fluidez, diferentes registros de representação matemáticos (algébrico, geométrico, estatístico, computacional etc.), na busca de solução e comunicação de resultados de problemas, de modo a favorecer a construção e o desenvolvimento do raciocínio matemático.” (BRASIL, 2022, p. 538)

> “As habilidades vinculadas a essa competência tratam da utilização das diferentes representações de um mesmo objeto matemático, tendo em vista que elas têm um papel decisivo na aprendizagem dos estudantes. Ao conseguirem utilizar as representações matemáticas, compreender as ideias que elas expressam e, quando possível, fazer a conversão entre elas, os estudantes passam a dominar um conjunto de ferramentas que potencializa de forma significativa a capacidade de resolver problemas, comunicar e argumentar; enfim, ampliar a capacidade de pensar matematicamente” (BRASIL, 2022, p. 538)

A Figura 19 especifica qual habilidade a prática da atividade abrange.

Figura 20. Habilidades da BNCC com POKÉMON GO no ensino médio para a competência específica 4

Competência Específica 5

“O desenvolvimento dessa competência específica pressupõe um conjunto de habilidades voltadas às capacidades de investigação e de formulação de explicações e argumentos que podem emergir de experiências empíricas. Os estudantes deverão ser capazes de fazer induções por meio de investigações e experimentações com materiais concretos, apoios visuais e a utilização de tecnologias digitais.” (BRASIL, 2022, p. 540)

A Figura 20 especifica qual habilidade a prática da atividade abrange.

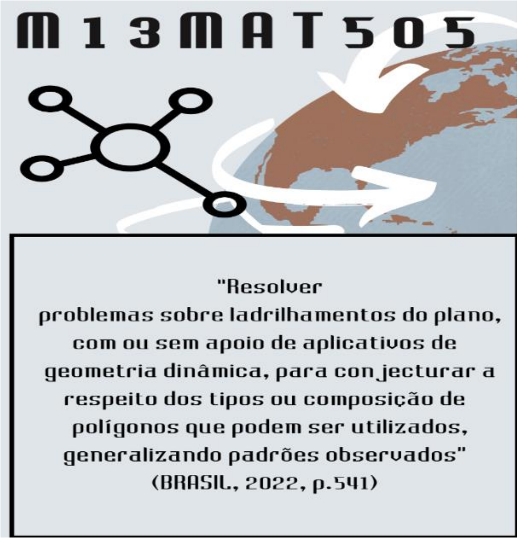

Figura21. Habilidades da BNCC com POKÉMON GO no ensino médio para a competência específica 5

Um dos fatores que tornam este problema ainda mais intrigante e instigante é o fato de ser uma ideia aparentemente simples, mas cuja solução (caso haja) possa ser extremante complexa. Porém, toda a matemática que embasa o problema é estudada no ensino básico e, com isso, o problema pode ser pelo menos conhecido por todos os estudantes através de atividades lúdicas no ensino fundamental e médio, mas que tragam competências e habilidades previstas na BNCC que possam auxiliar no ensino e aprendizagem dos conteúdos

CONSIDERAÇÕES FINAS

A teoria dos grafos, surgiu desprentenciosamente através de uma anedota na cidade de konigsberg, atual Kalingrado. Após um hiato de mais de 150 anos, os estudos em grafos desenvolveram-se em decorrência do desenvolvimento da ciência e tecnologia, com esses estudos descobriu-se uma infinidade de aplicações na modelagem matemática envolvendo engenharia elétrica, ciências da computação, entre outras áreas correlatas.

Com o desenvolvimento profícuo da tecnologia aliado as descobertas em teoria dos grafos, empresas de distribuição necessitaram da utilização deste conhecimento para economizar recursos em percursos de viagem. Com isso, o Problema do Caixeiro Viajante (PCV), é um recurso fundamental na escolha do menor percurso. Diante disto, esta pesquisa de caráter bibliográfico, analisou duas propostas de metodológicas e as relacionou com as habilidades e competências específicas da Base Nacional Comum Curricular (BNCC).

Aproximar a ciência dos alunos é um caminho que pode ser trilhado de várias maneiras. O que o presente trabalho trouxe foram personagens conhecidos de crianças e jovens (os pokemons) para servir como aliados na introdução de um tipo de problema ligado diretamente à matemática e à computação que se presta a soluções em diversas áreas. Além disso, traz à luz uma categoria de problemas que aguçam a curiosidade de leigos e doutos que são os problemas em aberto ou problemas sem solução. Nem todos os problemas abertos são de fácil entendimento, aliás, este é um daquelas que não precisa ter conhecimento matemático profundo para entendê-lo o que não pode ser dito sobre tantos outros problemas famosos da mesma classe.

É possível visualizar a matemática envolvida mesmo em problemas que não sejam, a priori, adequados àquele nível de ensino. As propostas abordadas nos mostram que habilidades e competências são requisitadas nos diferentes níveis quando requerem as mais variadas ferramentas matemáticas. Este apanhado pode direcionar o professor a enfatizar tópicos específicos associando aos recursos tecnológicos que estão acessíveis aos alunos na tentativa de tornar o processo de ensino e aprendizagem mais dinâmico, dialógico, tecnológico sem deixar à margem o embasamento teórico.

Propostas para trabalhos futuros

Durante esta pesquisa surgiram as seguintes propostas de trabalhos futuros:

- Investigar a relação entre a enumerabilidade de conjuntos e os Grafos;
- Propor uma sequência didática para tratar de outras modelagens para o PCV;
- Estudar demandas reais para aplicar o PCV na Paraíba;
- Estudar algumas aplicações do PCV para o ensino superior;
- Estudar a aplicação do PCV nas rotas do Uber.

REFERÊNCIAS

BARROS, D. R. **O Problema do Caixeiro Viajante: Uma aplicação ao jogo Pokémon Go**. Seropédica: Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro, 2021.

BRASIL. **Ministério da Educação. Base Nacional Comum Curricular**. Brasília, 2022.

DEVLIN, K. **Os Problemas do Milênio, sete grandes enigmas matemáticos do nosso tempo**. Rio de Janeiro: Record, 2004.

FERREIRA, I. A. Caixeiro viajante: aplicação da modelagem matemática na otimização de rotas em uma concessionária de energia elétrica. **Revista Científica Eletrônica de Engenharia de Produção**, v. 20, n. 1, p. 221–246, 2020.

LOPES, F. J. A.; TÁBOAS, P. Z. Euler e as Pontes de Konigsberg. **Revista Brasileira de História da Matemática**, v. 15, n. 30, p. 23–32, 2015.

LOVÁSZ, L.; PELIKÁN, J.; VESZTERGOMBI, K. **Matemática Discreta**. 2º ed. Rio de Janeiro: SBM, 2013.

MIRANDA, A. L.; SOLIANI, R. D.; FREITAS, C. G. **Roteirização de Veículos: Uma Aplicação do Problema do Caixeiro Viajante no Setor de Alimentos**. “Contribuições da Engenharia de Produção para a Gestão de Operações Energéticas Sustentáveis. **Anais**...Foz do Iguaçu: 2021.

MÜLLER, J. G.; BAIER, T. Teoria dos Grafos: uma possibilidade pedagógica para o Ensino Fundamental I. **Revista de Educação Matemática e Tecnológica Iberoamericana**, v. 12, n. 1, p. 1–17, 2021.

NETTO, P. O. B. **Grafos, Teoria, Modelos, Algoritmos** . 5° ed. São Paulo: Edgard Blucher, 2011.

RABUSKE, M. A. **Introdução à Teoria dos Grafos**. Florianópolis: Daufsc, 1992.

RODRIGUES, J. et al. **Um jogo de tabuleiro por meio do problema do caixeiro viajante como auxílio pedagógico**. IV Encontro de Iniciação Científica e Tecnológica. **Anais**...2019.

SOUZA, M. S. **Aplicação da Teoria dos Grafos no Ensino Médio à Luz das Contribuições do PROFMAT**. São Cristovão: Universidade Federal de Sergipe, 2016.

STEIN, D.; SCHEINERMAN, E. R.; CHIRIKJIAN, G. S. Mathematical models of binary spherical-motion encoders. **Transactions on Mechatronics**, v. 8, n. 2, p. 234–244, jun. 2003.

XIE, B. et al. **The applications of graph theory in electric network**. International Conference on Sensing, Diagnostics, Prognostics, and Control. **Anais**...Institute of Electrical and Electronics Engineers Inc., 1 ago. 2019.

Cópia de documento digital impresso por LUIS HAVELANGE (2730485) em 23/01/2023 14:21.

INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA DA PARAÍBA
Campus Campina Grande
R. Tranqüilino Coelho Lemos, 671, Dinamérica, CEP 58432-300, Campina Grande (PB)
CNPJ: 10.783.898/0003-37 - Telefone: (83) 2102.6200

Documento Digitalizado Ostensivo (Público)

Entrega de Trabalho de conclusão de curso

Assunto:	Entrega de Trabalho de conclusão de curso
Assinado por:	Juliérika Fernandes
Tipo do Documento:	Dissertação
Situação:	Finalizado
Nível de Acesso:	Ostensivo (Público)
Tipo do Conferência:	Cópia Simples

Documento assinado eletronicamente por:

- **Juliérika Veras Fernandes, DISCENTE (202111280030) DE ESPECIALIZAÇÃO EM ENSINO EM MATEMÁTICA - CAMPINA GRANDE**, em 23/01/2023 11:37:05.

Este documento foi armazenado no SUAP em 23/01/2023. Para comprovar sua integridade, faça a leitura do QRCode ao lado ou acesse https://suap.ifpb.edu.br/verificar-documento-externo/ e forneça os dados abaixo:

Código Verificador: 725077
Código de Autenticação: f684c61b46