

INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA DA PARAÍBA
CAMPUS CAJAZEIRAS

EVILLY RAQUEL HENRIQUE DA SILVEIRA

ANÁLISE NÃO LINEAR GEOMÉTRICA E MATERIAL DE TRELIÇAS PLANAS

Cajazeiras-PB
2023

EVILLY RAQUEL HENRIQUE DA SILVEIRA

ANÁLISE NÃO LINEAR GEOMÉTRICA E MATERIAL DE TRELIÇAS PLANAS

Trabalho de Conclusão de Curso submetido à Coordenação do Curso de Bacharelado em Engenharia Civil do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia da Paraíba-*Campus* Cajazeiras, como parte dos requisitos para a obtenção do Título de Bacharel em Engenharia Civil, sob Orientação do Prof. Dr. Sebastião Simão da Silva.

Cajazeiras-PB
2023

IFPB / Campus Cajazeiras
Coordenação de Biblioteca
Biblioteca Prof. Ribamar da Silva
Catalogação na fonte: Cícero Luciano Félix CRB-15/750

S587a Silveira, Evilly Raquel Henrique da.
Análise não linear geométrica e material de treliças planas / Evilly Raquel Henrique da Silveira. – 2023.

75f. : il.

Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação em Engenharia Civil) - Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia da Paraíba, Cajazeiras, 2023.

Orientador(a): Prof. Dr. Sebastião Simão da Silva.

1. Engenharia civil. 2. Geometria. 3. Equação não linear. 4. Treliça plana. I. Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia da Paraíba. II. Título.

EVILLY RAQUEL HENRIQUE DA SILVEIRA

ANÁLISE NÃO LINEAR GEOMÉTRICA E MATERIAL DE TRELIÇAS PLANAS

Trabalho de Conclusão de Curso submetido à Coordenação do Curso de Bacharelado em Engenharia Civil do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia da Paraíba, *Campus* Cajazeiras, como parte dos requisitos para a obtenção do Título de Bacharel em Engenharia Civil.

Aprovado em 15 de fevereiro de 2023.

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Sebastião Simão da Silva – IFPB-*Campus* Cajazeiras
Orientador

Prof. Esp. John Williams Ferreira de Souza – IFPB-*Campus* Cajazeiras
Coorientador

Profa. Dra. Taciana Araújo de Souza – IFPB-*Campus* Cajazeiras
Examinadora

Somos abençoados para abençoar. Recebemos
para partilhar. Aprendemos para reproduzir o
ensino.

AGRADECIMENTOS

Primeiramente a Deus por todas as bênçãos em minha vida.

Aos meus pais, Avanilda Henrique e José Evilázio, por estarem sempre ao meu lado, apoiando-me em todas as minhas decisões. Em especial, minha mãe, que é um exemplo inspirador de mulher forte e dedicada aos filhos.

Aos meus avós, Raimunda Idalina e Adomiro Henrique, e ao meu irmão, Anderson Henrique, pelo apoio.

Ao meu companheiro Arthur Joaquim pela compreensão e incentivo constante.

Ao Professor Sebastião Simão por sua dedicação e paciente orientação neste e em outros trabalhos. Suas contribuições foram valiosas para minha vida acadêmica e pessoal e serei eternamente grata por isso.

Ao Professor John Williams e a Professora Taciana Araújo por todas as contribuições neste trabalho e pelo incentivo em seu desenvolvimento.

Aos meus amigos: Harla, Mikaias, Andressa Gomes, Simone, Fernanda e Andressa Pedrosa. Com quem tive o prazer de dividir bons momentos durante o tempo em que morei em Cajazeiras.

Aos meus amigos da faculdade – Rodrigo, Ana Carla, Nicolas, Adenilda, Letícia, Luanda e Galdino – por todos os momentos vividos, os quais sempre permanecerão na minha memória como lembranças valiosas e significativas.

A todos os meus professores pelas contribuições inestimáveis durante minha jornada acadêmica. Agradeço pelos conhecimentos transmitidos, pelos desafios propostos e pelo comprometimento com a educação.

Aos servidores do IFPB – Campus Cajazeiras, que me acolheram nesta jornada com muito carinho, dedicação e cuidado.

Por fim, a todos que de certa maneira contribuíram para que esse sonho tornasse realidade.

RESUMO

Anteriormente ao desenvolvimento das tecnologias computacionais, das técnicas e materiais construtivos avançados, e da compreensão mais profundada do comportamento estrutural, as análises estruturais ficaram limitadas a abordagens lineares elásticas. Entretanto, em projetos mais complexos as soluções obtidas por estas teorias não representam o comportamento real das estruturas. Nesse caso, torna-se necessário utilizar métodos mais avançados, como as teorias não lineares, para o estudo do comportamento estrutural. Os elementos de treliça possuem uma ampla variedade de aplicações e, em determinadas condições de carregamento, podem exibir um comportamento não linear geométrico. Ademais, a maioria dessas estruturas são constituídas por materiais com comportamento elástico-plástico, o que aponta para uma análise não linear material. Contudo, uma análise não linear requer uma consideração mais aprofundada de formulações envolvidas nos fenômenos não lineares e, métodos numéricos para obtenção das soluções dos sistemas de equações não lineares. Diante da relativa simplicidade, a pesquisa em análise de treliça é justificada pelo fato de que muitos fenômenos como a plasticidade e métodos envolvidos nas análises não lineares podem ser inicialmente estudados, servindo de base para o desenvolvimento de formulações mais complexas do campo da mecânica computacional. Nesse sentido, este trabalho busca desenvolver uma ferramenta computacional de fácil uso, e de livre acesso para modelagem e análise não linear geométrica e material de treliças planas com base no Método dos Elementos Finitos. Também é objetivo deste estudo explorar e apresentar as noções fundamentais e as formulações necessárias para a realização das análises. Com a finalidade de avaliar a efetividade da ferramenta implementada, vários problemas clássicos da literatura foram selecionados, de acordo com seu grau de dificuldade, desde casos simples envolvendo apenas uma barra, até exemplos com múltiplas barras e geometrias mais complexas. Os valores referentes as cargas críticas obtidas nas análises foram apresentados para a maioria dos problemas numéricos, uma vez que são relevantes para a etapa de dimensionamento. Os resultados alcançados nesta pesquisa foram comparados com soluções já estabelecidas na literatura e apresentaram uma excelente correspondência, confirmando a qualidade das formulações implementadas.

Palavras-chave: análise não linear; treliças planas; método dos elementos finitos.

ABSTRACT

Prior to the development of computational technologies, advanced construction techniques and materials, and a deeper understanding of structural behavior, structural analyzes were limited to elastic linear approaches. However, in more complex projects, the solutions obtained by these theories do not represent the real behavior of the structures. In this case, it becomes necessary to use more advanced methods, such as nonlinear theories, for the study of structural behavior. Truss elements have a wide variety of applications and, under certain loading conditions, can exhibit geometric nonlinear behavior. Furthermore, most of these structures are made up of materials with elastic-plastic behavior, which points to a material nonlinearity analysis. However, a nonlinear analysis requires a deeper consideration of formulations involved in nonlinear phenomena and of numerical methods used to obtain the solutions of systems of nonlinear equations. Therefore, in view of the relative simplicity, research lattice analysis is justified by the fact that many phenomena such as plasticity and methods involved in nonlinear analysis can be initially studied, serving as a basis for the development of more complex formulations in the field of computational mechanics. In this sense, this work seeks to develop an easy-to-use, freely accessible computational tool for modeling and nonlinear geometric and material analysis of plane trusses based on the Finite Element Method. It is also the objective of this study to explore and present the fundamental notions and formulations necessary for carrying out the analysis. In order to evaluate the effectiveness of the implemented tool, several classic problems from the literature were selected, according to their degree of difficulty, from simple cases involving only one bar, to examples with multiple bars and more complex geometries. The values referring to the critical loads obtained in the analysis were presented for most of the numerical problems, since they are relevant for the dimensioning step. The results achieved in this research were compared with solutions already established in the literature, and presented an excellent correspondence, confirming the quality of the implemented formulations.

Keywords: nonlinear analysis; plane truss; finite element method.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 2.1 - Relação constitutiva dos materiais aço e concreto.....	19
Figura 2.2 - Configuração inicial e final de barra.....	19
Figura 2.3 - Exemplo de não linearidade de contato.	19
Figura 2.4 - Trajetória de equilíbrio.	20
Figura 2.5 - Pontos especiais do caminho de equilíbrio: (a) <i>Snap-through</i> ; (b) <i>Snap-back</i> ; (c) Bifurcação.....	21
Figura 3.1 - Arena do Futuro.	22
Figura 3.2 - Arena das Dunas	22
Figura 3.3 - Ampliação do Aeroporto Internacional Tom Jobim.	23
Figura 3.4 - Elemento finito de barra.	24
Figura 4.1 - Configurações inicial e atual do elemento corrotacional de treliça 2D.	29
Figura 5.1 - Dispositivo friccional unidimensional.	33
Figura 5.2 - Plasticidade perfeita.	34
Figura 5.3 - Plasticidade com encruamento isotrópico.....	35
Figura 5.4 - Algoritmo de mapeamento e retorno.	36
Figura 6.1 - Método de Newton Raphson.....	39
Figura 7.1 - Fluxograma de execução do programa.	45
Figura 8.1 - Barra articulada 2D.....	46
Figura 8.2 - Trajetória de equilíbrio (barra articulada 2D).....	47
Figura 8.3 - Detecção de pontos limites (barra articulada 2D).....	48
Figura 8.4 - Treliça assimétrica 2D.	48
Figura 8.5 - Trajetória de equilíbrio (treliça assimétrica).....	49
Figura 8.6 - Detecção de pontos limites (treliça assimétrica).....	49
Figura 8.7 - Treliça de von Mises.....	50
Figura 8.8 - Trajetória de equilíbrio (treliça de von Mises).	51
Figura 8.9 - Detecção de pontos limites (treliça de von Mises).	52
Figura 8.10 - Torre Treliçada.	53
Figura 8.11 - Trajetória de equilíbrio (torre Treliçada).....	53
Figura 8.12 - Viga treliçada em balanço.	54
Figura 8.13 - Trajetória de equilíbrio (viga treliçada).....	55
Figura 8.14 - Treliça plana com 3 barras.....	56

Figura 8.15 - Trajetória de equilíbrio (treliça com 3 barras).....	56
Figura 8.16 - Detecção de pontos especiais (treliça com 3 barras).	57
Figura 8.17 - Estrutura com barras interligadas.	58
Figura 8.18 - Trajetória de equilíbrio (estrutura com barras interligadas).	58
Figura 8.19 - Treliça articulada 2D assimétrica.	59
Figura 8.20 - Trajetória de equilíbrio nó 8 e 13 (treliça articulada 2D assimétrica).	60
Figura 8.21 - Detecção de pontos especiais (treliça articulada 2D assimétrica).	60
Figura 8.22 - Deformadas ao longo de processo incremental (treliça articulada 2D assimétrica).	61
Figura 8.23 - Arco de Crisfield.....	62
Figura 8.24 - Trajetória de equilíbrio (arco de Crisfield).	63
Figura 8.25 - Deformadas ao longo do processo incremental (arco de Crisfield).....	64
Figura 8.26 - Detecção de pontos especiais (arco de Crisfield).	65

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Algoritmo de plasticidade com endurecimento.	37
Tabela 2 – Resultados numéricos: Trelça de von Mises (material elástico).	73
Tabela 3 – Resultados numéricos: Trelça de von Mises (material elastoplástico).....	74

LISTA DE SÍMBOLOS

- \tilde{u} – função de aproximação do deslocamento
- ∂ – derivada parcial
- L – comprimento
- x – coordenada horizontal
- u_i – deslocamento do nó i
- N_i – função de forma do nó i
- \mathbf{N} – matriz de funções de forma
- \mathbf{u} – vetor deslocamento total
- ε – deformação
- \mathbf{B} – matriz de derivadas parciais das funções de forma
- W_I – trabalho das forças internas
- W_E – trabalho das forças externas
- δ – deslocamentos
- σ – tensão
- T – transposta
- V – volume
- p – carga axial
- \mathbf{D} – matriz constitutiva
- \mathbf{F} – vetor de forças
- E – módulo de elasticidade
- A – área
- \mathbf{k} – matriz de rigidez
- C_0 – configuração inicial
- C_R – configuração corrotacionada
- \mathbf{x} – vetor posição na configuração atual
- \mathbf{X} – vetor posição na configuração inicial
- \mathbf{u}_D – vetor de deslocamento deformacional no sistema global
- \mathbf{u}_R – vetor de deslocamento do corpo rígido no sistema global
- \mathbf{u}_D^e – vetor de deslocamento deformacional no sistema local
- \mathbf{Q} – matriz de rotação
- C_x, C_y – cossenos diretores

\mathbf{x}^e – vetor posição na configuração atual no sistema local
 \mathbf{u}_0 – vetor deslocamento da origem do sistema
 \mathbf{I} – matriz identidade
 L_0 – comprimento inicial do elemento de treliça
 U_0 – energia de deformação do elemento na configuração inicial
 U – energia de deformação do elemento na configuração atual
 λ – nível de carga ou razão (L/L_0)
 N_0 – esforço axial no elemento de treliça na configuração inicial
 N – esforço axial no elemento de treliça na configuração atual
 \mathbf{f} – vetor de forças internas
 \mathbf{R} – matriz de rotação
 \mathbf{K} – matriz de rigidez tangente
 ε^e – deformação elástica
 ε^p – deformação plástica
 σ_y – tensão de fluência ou tensão de escoamento
 $\dot{\cdot}$ – taxa
 γ – valor absoluto da taxa de escoamento
 f – condição de escoamento
 α – variável de endurecimento
 q – variável *back stress*
 H – módulo de encruamento plástico
 $\Delta\varepsilon$ – incremento de deformação
 $\Delta\gamma$ – multiplicador de lagrange
 K – módulo plástico
 \mathbf{g} – vetor de forças desequilibradas
 \mathbf{F}_r – vetor de forças externas
 \mathbf{F}_i – vetor de forças internas
 $'$ – derivada parcial
 Δl – comprimento de arco
 CST – *current stiffness parameter*

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	15
1.1	OBJETIVO GERAL	16
1.2	OBJETIVOS ESPECÍFICOS	16
1.3	ESTRUTURA DO TEXTO	17
2	ANÁLISE NÃO LINEAR DE ESTRUTURAS	18
2.1	FONTES DE NÃO LINEARIDADE.....	18
2.2	TRAJETÓRIAS DE EQUILÍBRIO	20
2.2.1	<i>Pontos especiais do trajetória de equilíbrio</i>	20
3	ASPECTOS GERAIS DE TRELIÇAS PLANAS	22
3.1	FORMULAÇÃO LINEAR DO ELEMENTO FINITO DE TRELIÇA	24
4	ANÁLISE NÃO LINEAR GEOMÉTRICA DE TRELIÇAS PLANAS	28
4.1	FORMULAÇÃO CORROTACIONAL.....	28
4.1.1	<i>Descrição cinemática</i>	28
4.1.2	<i>Sistemas de coordenadas</i>	29
4.1.3	<i>Deslocamentos deformacionais</i>	30
4.1.4	<i>Movimento deformacional em função dos deslocamentos nodais</i>	30
4.1.5	<i>Energia de deformação</i>	31
4.1.6	<i>Vetor de forças internas</i>	31
4.1.7	<i>Matriz de rigidez tangente</i>	32
5	ELASTOPLASTICIDADE UNIDIMENSIONAL	33
5.1	MODELOS FRICCIONAIS UNIDIMENSIONAIS	33
5.1.1	<i>Modelo constitutivo elastoplástico ideal</i>	33
5.1.2	<i>Modelo constitutivo elastoplástico com encruamento isotrópico</i>	35

5.1.3 Modelo constitutivo elastoplástico ideal com encruamento misto (isotrópico e cinemático)	35
5.2 ALGORITMO DE INTEGRAÇÃO PARA PLASTICIDADE COM EVOLUÇÃO INDEPENDENTE DO TEMPO.....	36
6 SOLUÇÃO DE SISTEMAS DE EQUAÇÕES NÃO LINEARES.....	39
6.1 MÉTODO DE NEWTON RAPHSON	39
6.2 MÉTODO DE COMPRIMENTO DE ARCO	41
6.3 DETECÇÃO DE PONTOS CRÍTICOS	42
7 METODOLOGIA	43
7.1 CLASSIFICAÇÃO DA PESQUISA	43
7.2 PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS.....	43
7.2.1 Código computacional	44
8 APLICAÇÕES NUMÉRICAS.....	46
8.1 BARRA 2D COM UM GRAU DE LIBERDADE	46
8.2 TRELIÇA ASSIMÉTRICA 2D	48
8.3 TRELIÇA PLANA DE VON MISES.....	50
8.4 TORRE TRELIÇADA	52
8.5 VIGA TRELIÇADA EM BALANÇO.....	54
8.6 TRELIÇA PLANA COM BARRAS ARTICULADAS	55
8.7 ESTRUTURA COM VÁRIAS BARRAS	57
8.8 TRELIÇA ARTICULADA 2D ASSIMÉTRICA	59
8.9 ARCO DE TRELIÇA DE CRISFIELD.....	62
9 CONCLUSÕES	66
9.1 SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS	67
REFERÊNCIAS	68
APÊNDICE A – RESULTADOS NUMÉRICOS	72

1 INTRODUÇÃO

A engenharia civil abrange várias áreas de especialização, sendo a área de estruturas uma delas. É da competência do engenheiro estrutural projetar e dimensionar os elementos estruturais de maneira que ao serem solicitados por carregamentos se mantenham estáveis, atendendo os requisitos de capacidade resistente, desempenho em serviço e durabilidade.

A elaboração de um projeto estrutural segue um procedimento padrão que de acordo com Kimura (2018) se inicia com o lançamento do sistema estrutural, com base no projeto arquitetônico da construção, em sequência a realização da análise estrutural, dimensionamento, detalhamento e, por fim, emissão das plantas finais.

De acordo com Sussekind (1981), a análise estrutural é a parte da mecânica responsável pela determinação dos esforços e das deformações das estruturas. No geral, diante da complexidade deste processo, as teorias que modelam o comportamento dos elementos estruturais são baseadas em hipóteses simplificadoras. É o caso, por exemplo, da conhecida Lei de Hooke, que estabelece uma relação constitutiva linear entre tensões e deformações.

A desvantagem na utilização destas teorias é o fato delas serem restritas a materiais pouco deformáveis, ou seja, que apresentam pequenos deslocamentos e pequenas deformações (BELYTSCHKO; LIU; MORAN, 2000). Logo, em determinadas situações, as soluções obtidas não representam o comportamento real das estruturas. Assim, cabe ao engenheiro estrutural utilizar teorias mais elaboradas, como as teorias não lineares para análise estrutural.

São dois os tipos básicos de não linearidade que podem ocorrer nas estruturas: a não linearidade geométrica e a não linearidade material. Segundo Muñoz (2001), a não linearidade geométrica surge devido a efeitos decorrentes do processo de deformação de um corpo. Por outro lado, a não linearidade física decorre do fato do material não apresentar uma relação tensão-deformação linear (PEREIRA, 2002).

A proposta deste trabalho é a realização da análise estrutural não linear geométrica e material de treliças planas usando o Método dos Elementos Finitos (MEF). O MEF é atualmente uma ferramenta bastante utilizada para análise estrutural em engenharia e os *softwares* de elementos finitos são amplamente empregados para realização de análises lineares e também não lineares (ZIENKIEWICZ; TAYLOR, 2005; BATHE, 2006). Entretanto, a utilização dessas ferramentas sem uma base de conhecimento consistente é realizada por suposições, o que torna a análise suscetível a erros e põem em risco as estruturas dimensionadas (AZEVEDO, 2003). Além disso, muitos *softwares* de elementos finitos apresentam limitações para fins didáticos,

como restrições no número de nós e elementos para análise.

Em contraste com a análise linear elástica, uma análise não linear requer uma consideração mais aprofundada dos parâmetros envolvidos em métodos numéricos. Portanto, para se criar e utilizar um código de análise não linear, é fundamental que o usuário tenha uma compreensão básica de algoritmos de solução e do comportamento do modelo em questão (RANGEL, 2019).

Por conseguinte, a realização de pesquisas visando o desenvolvimento e a validação de códigos computacionais acessíveis e fáceis de uso é crucial para a disseminação de conceitos sobre o Método dos Elementos Finitos (MEF) e métodos relacionados à análise não linear. Adicionalmente, essas pesquisas são essenciais para o desenvolvimento de códigos computacionais mais complexos.

Neste contexto, é objetivo deste trabalho desenvolver um algoritmo numérico para análise não linear de treliças planas fazendo uso da linguagem de programação livre *Scilab*. Também é propósito desta pesquisa apresentar os principais conceitos e as formulações utilizadas no processo de análise não linear. Além disso, serão avaliadas aplicações numéricas em treliças já estabelecidas na literatura e os resultados obtidos pelo algoritmo serão comparados com aqueles disponíveis na literatura, a fim de validar a implementação das formulações estudadas.

1.1 OBJETIVO GERAL

Desenvolver um código computacional, a partir de formulações baseadas no Método dos Elementos Finitos, para estudar o comportamento estrutural de treliças planas através de análises não lineares geométrica e material.

1.2 OBJETIVOS ESPECÍFICOS

- a) descrever e implementar a formulação corrotacional para análise não linear geométrica dos elementos de treliça plana, fazendo uso da linguagem de programação *Scilab*;
- b) descrever e implementar os procedimentos incrementais-iterativos utilizados para a obtenção das soluções dos sistemas de equações não lineares;
- c) descrever e implementar o modelo elastoplástico unidimensional;
- d) desenvolver e apresentar rotinas computacionais flexíveis e de fácil utilização para a realização de análises não lineares de treliças;
- e) implementar rotina que possibilite a saída de arquivos necessários para a visualização

dos deslocamentos das treliças por meio do *software* Paraview;

f) avaliar os resultados obtidos por meio do algoritmo comparando-os com aqueles disponíveis na literatura.

1.3 ESTRUTURA DO TEXTO

O presente trabalho é composto de nove capítulos e um apêndice. No capítulo 2 apresenta-se uma breve fundamentação teórica sobre análise não linear de estruturas, os principais tipos de não linearidades e algumas particularidades acerca das trajetórias de equilíbrio estrutural.

O capítulo 3 descreve aspectos gerais sobre treliças planas, entre eles, a importância, a justificativa sobre a escolha do elemento de estudo e a descrição da formulação linear do elemento finito de treliça. Já o capítulo 4 apresenta os principais conceitos sobre a análise não linear geométrica de treliças planas e uma das descrições cinemática mais recente utilizada neste tipo de análise: a formulação corrotacional.

O capítulo 5 descreve a formulação do fenômeno da elastoplasticidade unidimensional, apresenta o algoritmo para implementação computacional, entre outros conceitos intrínsecos a análise. No capítulo 6 são apresentados os dois métodos numéricos mais utilizados para resolver sistemas de equações não lineares que surge na análise não linear de estruturas: o método de Newton-Raphson e o método do comprimento de arco.

O capítulo 7, descreve os procedimentos metodológicos utilizados no desenvolvimento desta pesquisa e classifica o estudo quanto a abordagem, os objetivos, a natureza e os procedimentos utilizados. Neste capítulo, apresenta-se também algumas particularidades do funcionamento do código numérico.

No capítulo 8 são apresentados os exemplos numéricos analisados neste trabalho. No total tratam-se de nove exemplos numéricos clássicos, apresentados de acordo com seu grau de complexidade (desde problemas com apenas uma barra até exemplos com inúmeras barras e configurações geométricas mais complicadas).

Por fim, o capítulo 9 expõe as conclusões deste trabalho diante dos resultados obtidos nas análises numéricas e suas contribuições. Além disto, são apresentadas sugestões para trabalhos futuros relacionados ao tema. Finalmente, no Apêndice A são apresentados os resultados numéricos completos do problema da Treliça Plana de von Mises discutido no capítulo 8.3 deste trabalho.

2 ANÁLISE NÃO LINEAR DE ESTRUTURAS

Anteriormente ao desenvolvimento das tecnologias computacionais, das técnicas e materiais construtivos e da compreensão do comportamento estrutural, os projetos estruturais eram realizados desconsiderando os efeitos não lineares. Assim, as análises eram realizadas considerando o regime linear elástico, levando em conta algumas hipóteses, como, por exemplo: equilíbrio do sistema obtido a partir da configuração indeformada; não interferência de pequenas deformações na resposta; material com comportamento elástico; e idealização das ligações entre os membros como sendo rotuladas ou rígidas.

Entretanto, de acordo com Pereira (2002), após a fase linear e anterior ao colapso, a maioria das estruturas apresentam comportamento não linear. Para que o comportamento real dessas estruturas seja simulado são necessárias análises mais complexas que considerem os efeitos geométricos e materiais. Esses efeitos são descritos na maioria das normas técnicas atuais como (o Eurocode 2, 2004; a ABNT NBR 8800, 2008; a ABNT NBR 6118, 2014, dentre outras) — especialmente as baseadas no critério da resistência última. Tais diretrizes trazem prescrições para que os engenheiros projetistas considere tais efeitos em suas análises.

Ainda segundo Pereira (2002), o comportamento não linear de uma estrutura sob ação de um carregamento, pode ser classificado de acordo com seus respectivos efeitos. Na sessão seguinte são descritas brevemente as principais fontes de não linearidade.

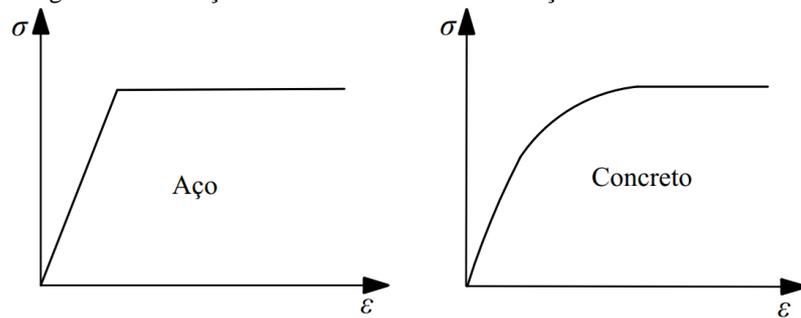
2.1 FONTES DE NÃO LINEARIDADE

As três principais fontes de não linearidades, são:

- Não linearidade material;
- Não linearidade geométrica;
- Não linearidade nas condições de contorno (contato).

A não linearidade material caracteriza-se pelo surgimento de uma relação constitutiva não linear entre tensão e deformação (Figura 2.1). Este fato ocorre em modelos inelásticos (plasticidade, viscosidade, etc) e em modelos hiperelásticos (MUÑOZ-ROJAS; DUARTE FILHO, 2001). De acordo com Borges (1999), esta não linearidade está relacionado com as propriedades pertencentes ao material e origina uma não proporcionalidade entre causa e efeito.

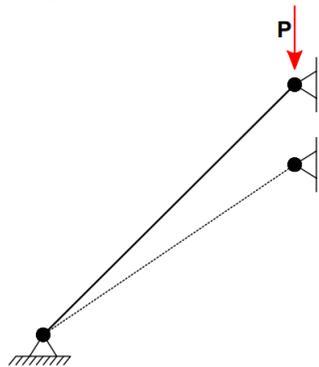
Figura 2.1 - Relação constitutiva dos materiais aço e concreto.



Fonte: Autoria própria.

Por outro lado a não linearidade geométrica está relacionada a ideia que grandes deslocamentos (e/ou deformações) e rotações podem alterar a configuração inicial da estrutura ao longo do processo de deformação do corpo. Nessa condição a estrutura deixa de expressar equilíbrio, a geometria inicial se altera a medida que o carregamento externo é aplicado (Figura 2.2).

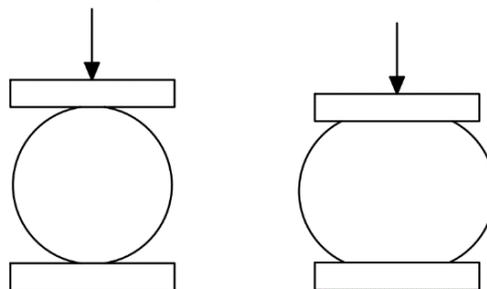
Figura 2.2 - Configuração inicial e final de barra.



Fonte: Autoria própria.

Por fim, a não linearidade de contato, ilustrada na Figura 2.3, está relacionada a situação de mudança nas condições de apoio ou de aplicação das cargas, e por consequência disto, alteração da configuração inicial do elemento (MUÑOZ-ROJAS; DUARTE FILHO, 2001).

Figura 2.3 - Exemplo de não linearidade de contato.

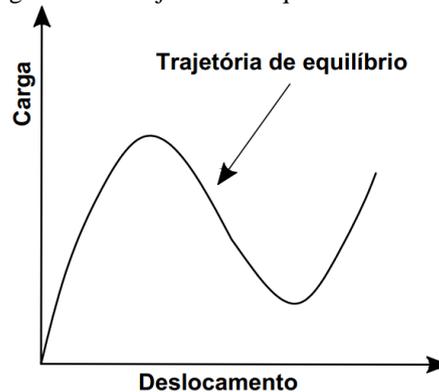


Fonte: Autoria própria.

2.2 TRAJETÓRIAS DE EQUILÍBRIO

O curva frequentemente utilizada para estudar o comportamento estrutural é caracterizado pela relação de carga *versus* deslocamento (Figura 2.4). Se essa curva é não linear, isto significa que a estrutura apresenta comportamento não linear.

Figura 2.4 - Trajetória de equilíbrio.



Fonte: Autoria própria.

A curva contínua apresentada no gráfico é designada de trajetória de equilíbrio, e cada ponto desta trajetória representa uma configuração de equilíbrio estático da estrutura. De acordo com Lacerda (2014), o estudo da trajetória de equilíbrio é essencial para revelar conceitos chaves de um comportamento estrutural não linear.

2.2.1 Pontos especiais do trajetória de equilíbrio

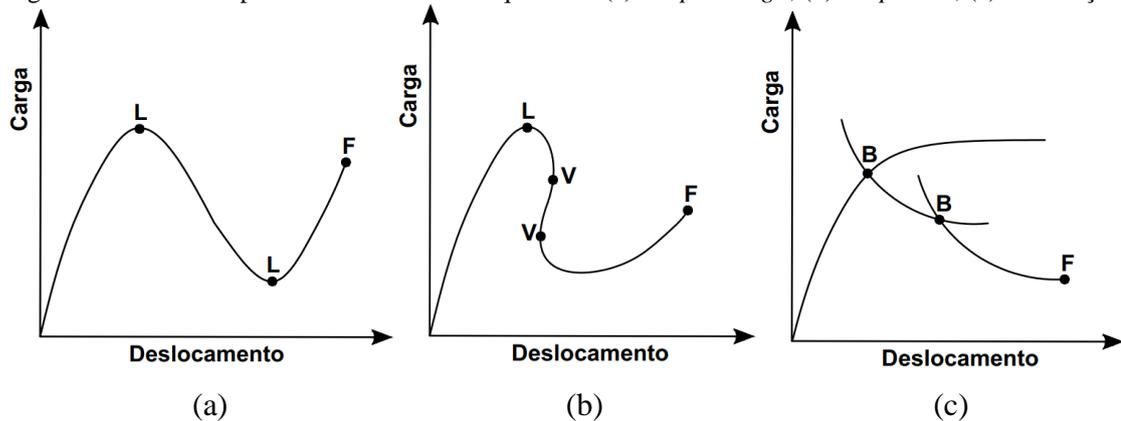
Em problemas estruturais não lineares geralmente as estruturas atingem um nível de carga máximo, na qual ficam incapazes de resistir a carregamentos mais elevados sem que ocorra uma mudança significativa em sua geometria. Estes pontos são denominados de pontos críticos, e são caracterizados por uma matriz de rigidez tangente singular (SILVA, 2019). Alguns desses pontos especiais da trajetória de equilíbrio, são:

- Ponto limite: É um ponto de máximo ou de mínimo da trajetória de equilíbrio, em que a tangente a curva é horizontal e paralela ao eixo dos deslocamentos;
- Ponto de bifurcação: Trata-se de um ponto onde duas ou mais trajetórias de equilíbrio se cruzam;
- Ponto de viragem: Ponto em que a tangente ao caminho de equilíbrio é vertical, paralela ao eixo das cargas. Geralmente estes pontos estão relacionados ao fenômeno de *snap-back* e são conhecidos como *turning points*.
- Ponto de falha: Ponto onde termina a trajetória de equilíbrio e geralmente ocorre a falha

da estrutura.

A Figura 2.5 ilustra os pontos limites (L), pontos de bifurcação (B), pontos de viragem (V) e pontos de falha (F). Na Figura 2.5(a) o fenômeno de *snap-through* é ilustrado. Nesta situação, após a carga atingir um valor crítico a estrutura torna-se instável. Já a Figura 2.5(b) ilustra o fenômeno de *snap-back*, que é uma forma amplificada do *snap-through*, em que o caminho de equilíbrio chega a virar em certo ponto da trajetória. Por fim, a Figura 2.5(c) ilustra o ponto de bifurcação, podendo-se verificar o cruzamento entre duas trajetórias de equilíbrio.

Figura 2.5 - Pontos especiais do caminho de equilíbrio: (a) *Snap-through*; (b) *Snap-back*; (c) Bifurcação.



Fonte: Autoria própria.

Segundo Lacerda (2014), para um projeto de engenharia é importante que os pontos críticos (pontos limites ou de bifurcação) da trajetória de equilíbrio sejam identificados, pois após atingir esses pontos a estrutura pode tornar-se instável. Já os pontos de viragem não são considerados pontos críticos, porém, são de grande interesse porque possuem capacidade de alterar o desempenho de alguns métodos numéricos (MENIN, 2006).

No próximo capítulo serão apresentados os aspectos gerais das treliças planas, bem como a descrição da formulação linear do elemento finito de treliça.

3 ASPECTOS GERAIS DE TRELIÇAS PLANAS

O aço está presente em todas as aplicações da construção civil, desde construções de edifícios residenciais, comerciais e industriais, até arranha céus, barragens, viadutos, pontes e construções de modo geral.

A crescente aplicação de estruturas de aço na construção civil brasileira pode ser justificada pela facilidade de adaptação desses sistemas ao projeto arquitetônico, rapidez na montagem, alívio no peso próprio total da estrutura e preço competitivo com relação aos outros sistemas estruturais (SILVA, 2020).

Estruturas de aço do tipo treliça possuem uma presença bastante expressiva em obras da construção civil como aeroportos, rodoviárias, estádios de futebol e galpões. Nas obras executadas para a copa do mundo da FIFA de 2014 e nos Jogos Olímpicos de 2016, as estruturas de aço treliçadas foram amplamente utilizadas, tais como: Arena do Futuro (Figura 3.1); Arena das Dunas na cidade de Natal (Figura 3.2); Ampliação do Aeroporto Internacional do Rio de Janeiro (Figura 3.3), entre outras.

Figura 3.1 - Arena do Futuro.



Fonte: Soutello, 2015.

Figura 3.2 - Arena das Dunas



Fonte: UOL, 2014.

Figura 3.3 - Ampliação de Aeroporto Internacional Tom Jobim.



Fonte: Rede do Esporte, 2015.

Este fato justifica-se, dentre as inúmeras vantagens, devido as características de alta resistência e baixo peso próprio do sistema estrutural. De acordo com Gomes (2016), utilizando estes elementos estruturais conseguimos vencer grandes vãos e cobrir áreas com uma relação entre resistência e peso bastante eficaz. Além disso, as estruturas treliçadas possibilitam ao projetista diversas possibilidades, tais como:

- Elementos estruturais mais esbeltos e mais leves – Makowski, (1972), Ramaswamy, Mick e Suresh (2002) e Bezerra *et al.* (2009);
- Estética elegante para cobrir amplos espaços – Souza (2003) e Koushky *et al.* (2007);
- Ganho de produtividade na construção, pelo fato dessas estruturas usarem técnicas de produção rápida, tais como produção em fábrica, fora dos canteiros de obra. Além disto, fácil manuseio, levando em conta sua leveza e facilidade na instalação – Magalhães (1996), Sabatto (2010) e Silva *et al.* (2018).

Treliças são estruturas simples, porém quando solicitadas a carregamentos de grande intensidade podem experimentar grandes deslocamentos, alterando significativamente a sua geometria o que exige que as suas equações de equilíbrio sejam formuladas para a estrutura deformada (HRINDA, 2007).

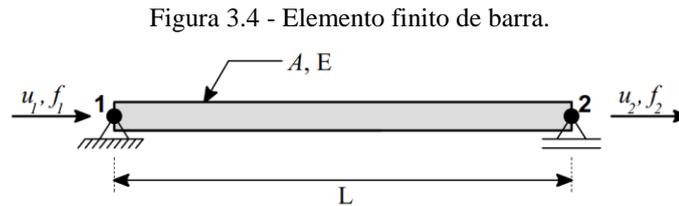
Essas estruturas frequentemente exibem na sua trajetória de equilíbrio (deslocamento *versus* força) pontos críticos que estão relacionados à instabilidade da estrutura. Obter os pontos críticos e o caminho de equilíbrio dessas estruturas requer estratégias numéricas especiais como o método de Newton Raphson e o método do comprimento de arco (LACERDA, 2014).

Vale evidenciar ainda que, diante da relativa simplicidade, a pesquisa em análise de treliça é justificada pelo fato de que muitos fenômenos como a plasticidade e métodos envolvidos nas análises não lineares podem ser inicialmente estudados, servindo de base para o entendimento de formulações mais complexas.

3.1 FORMULAÇÃO LINEAR DO ELEMENTO FINITO DE TRELIÇA

A aplicação do Método dos Elementos Finitos (MEF) inicia-se através da divisão da estrutura em elementos chamados elementos finitos. No caso das treliças, os elementos finitos são as próprias barras.

O campo de deslocamento do elemento é definido em função dos deslocamentos nodais, através de funções de aproximações chamadas funções interpoladoras.



Fonte: Autoria própria.

Seja o elemento de barra ilustrado na Figura 3.4. A função de aproximação do deslocamento do elemento em função dos deslocamentos nodais é igual a:

$$\tilde{u} = \left(1 - \frac{x}{L}\right) u_1 + \left(\frac{x}{L}\right) u_2. \quad (3.1)$$

Reescrevendo, têm-se:

$$\tilde{u} = N_1 u_1 + N_2 u_2, \quad (3.2)$$

em que, “ N_i ” são as chamadas funções interpoladoras ou funções de forma e “ u_i ” são os deslocamentos nodais. As funções interpoladoras, são definidas como as derivadas parciais da função de aproximação do deslocamento em relação aos deslocamentos nodais:

$$\begin{cases} N_1 = \frac{\partial \tilde{u}}{\partial u_1} = 1 - \frac{x}{L} \\ N_2 = \frac{\partial \tilde{u}}{\partial u_2} = \frac{x}{L} \end{cases}. \quad (3.3)$$

Reescrevendo a Equação 3.2 na função na forma matricial, têm-se:

$$\tilde{u} = \mathbf{N} \cdot \mathbf{u}. \quad (3.4)$$

O campo de deformação da barra é definido pela expressão:

$$\varepsilon = \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{u}, \quad (3.5)$$

onde \mathbf{B} é a matriz das derivadas parciais das funções de interpolação. Para o caso de uma barra unidimensional, a matriz é igual:

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial x} & \frac{\partial N_2}{\partial x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ L & L \end{bmatrix}. \quad (3.6)$$

De acordo com Azevedo (2003), um corpo no estado de equilíbrio estático se deforma devido a um conjunto de deslocamentos muito pequenos, compatíveis com as condições de contorno, que podem ser chamados de deslocamentos virtuais (δ). Segundo Sussekind (1980), o princípio de d'Alembert pode ser descrito como "para um ponto material em equilíbrio, o trabalho virtual realizado pelo sistema de forças reais em equilíbrio que atua sobre o ponto, quando este sofre um deslocamento virtual arbitrário qualquer, é nulo", ou seja, o trabalho realizado pelas forças internas é igual ao trabalho realizado pelas forças externas:

$$W_I = W_E. \quad (3.7)$$

De acordo com Azevedo (2003), uma estrutura é modificada devido a um conjunto de forças de volume e de superfície, sendo possível reescrever a igualdade da Equação 3.7 da seguinte forma:

$$\int_V \delta \boldsymbol{\varepsilon}^T \boldsymbol{\sigma} dV = \int_L \delta \tilde{u}^T p dL, \quad (3.8)$$

sendo p a carga axial, $\boldsymbol{\sigma}$ o vetor de tensão na barra, $\delta \boldsymbol{\varepsilon}$ o vetor de deformação e $\delta \tilde{u}$ a função deslocamento da barra em termos de deslocamentos virtuais. Logo, torna-se necessário acrescentar o prefixo δ a formulação apresentada na Equação 3.5 para o campo de deformações da barra, obtendo:

$$\delta \boldsymbol{\varepsilon} = \delta \mathbf{u} \cdot \mathbf{B}. \quad (3.9)$$

Sendo equivalente a:

$$\delta \boldsymbol{\varepsilon}^T = \delta \mathbf{u}^T \cdot \mathbf{B}^T. \quad (3.10)$$

Analogamente, a função de deslocamento é igual a:

$$\delta \tilde{u} = \mathbf{N} \cdot \delta \mathbf{u}, \quad (3.11)$$

e, portanto:

$$\delta \tilde{u}^T = \delta \mathbf{u}^T \cdot \mathbf{N}^T. \quad (3.12)$$

Além disso, a relação constitutiva do material é definida por:

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}, \quad (3.13)$$

em que \mathbf{D} é a matriz de elasticidade ou matriz constitutiva. De acordo com Fish e Belytschko

(2007), para problemas em uma dimensão a matriz \mathbf{D} será igual ao módulo de elasticidade E . Sendo assim, substituindo a Equação 3.5 na Equação 3.13, têm-se:

$$\sigma = E\mathbf{B}\mathbf{u}. \quad (3.14)$$

Logo, substituindo as Equações 3.10, 3.14 e 3.12 na Equação 3.8, obtêm-se:

$$\int_V \delta\mathbf{u}^T \mathbf{B}^T E\mathbf{B}\mathbf{u} dV = \int_L \delta\mathbf{u}^T \mathbf{N}^T p dL. \quad (3.15)$$

Uma vez que a área da seção transversal do elemento permanece constante, a integral de volume pode ser substituída por uma integral ao longo do comprimento do elemento, assim, $dV = A dx$ e $dL = dx$. Reescrevendo a Equação 3.15 têm-se:

$$\int_0^L \delta\mathbf{u}^T \mathbf{B}^T E\mathbf{B}\mathbf{u} A dx = \int_0^L \delta\mathbf{u}^T \mathbf{N}^T p dx. \quad (3.16)$$

Colocando os deslocamentos virtuais em evidência e rearranjando-se a Equação 3.16, a seguinte expressão é alcançada:

$$\mathbf{u} \int_0^L \mathbf{B}^T E\mathbf{B} A dx = \int_0^L \mathbf{N}^T p dx. \quad (3.17)$$

Comparando esta equação com a seguinte relação de rigidez:

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{k} = \mathbf{F}, \quad (3.18)$$

sendo,

\mathbf{k} : matriz de rigidez do elemento;

\mathbf{u} : vetor que contém os deslocamentos nodais;

\mathbf{F} : vetor que contém as forças nodais.

A matriz de rigidez \mathbf{k} do elemento em uma dimensão é igual a:

$$\mathbf{k} = \int_0^L \mathbf{B}^T E\mathbf{B} A dx. \quad (3.19)$$

No caso de E (módulo de elasticidade) e A (área) serem constantes, e substituindo a Equação 3.6 em 3.19, têm-se:

$$\mathbf{k} = EA \int_0^L \begin{bmatrix} -1 \\ \frac{L}{L} \\ 1 \\ \frac{L}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ \frac{L}{L} & \frac{L}{L} \end{bmatrix} dx, \quad (3.20)$$

e, portanto:

$$\mathbf{k} = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}. \quad (3.21)$$

Além disso, sendo q constante, o vetor que contém as forças axiais será igual a:

$$\mathbf{F} = p \int_0^L \mathbf{N}^T dx = p \int_0^L \begin{bmatrix} 1 - \frac{x}{L} \\ x \\ \frac{L}{L} \end{bmatrix} dx = p \begin{bmatrix} \frac{L}{2} \\ \frac{L}{2} \\ \frac{L}{2} \end{bmatrix}. \quad (3.22)$$

O próximo capítulo descreve os principais conceitos sobre análise não linear geométrica de treliças planas.

4 ANÁLISE NÃO LINEAR GEOMÉTRICA DE TRELIÇAS PLANAS

A não linearidade geométrica surge na situação de perda de linearidade entre a relação de deslocamento e deformação, levando a estrutura a grandes mudanças na geometria, e conseqüentemente, uma reformulação das equações de equilíbrio iniciais.

Este tipo de análise é classificado em dois tipos: quando há pequenas deformações, porém há grandes deslocamentos ou rotações; e quando ocorre grandes deformações, acompanhando geralmente a não linearidade física (LACERDA, 2014).

4.1 FORMULAÇÃO CORROTACIONAL

A descrição cinemática corrotacional é uma das mais recente formulações utilizadas na análise não linear geométrica de estruturas e, em função disto, uma grande variedade de assuntos continuam ainda sendo explorados.

O principal conceito desta formulação é a divisão ou decomposição da configuração de referência em duas parcelas:

- 1) Configuração inicial (C_0) que é mantida fixa ao longo de toda a análise, em que geralmente se adota um sistema de coordenadas globais para toda a estrutura nesta configuração, sendo utilizada para medir os deslocamentos do corpo rígido;
- 2) Configuração corrotacionada (C_R) que acompanha cada um dos elementos, a partir da qual são obtidos, exclusivamente, os deslocamentos deformacionais, que definem as tensões e deformações.

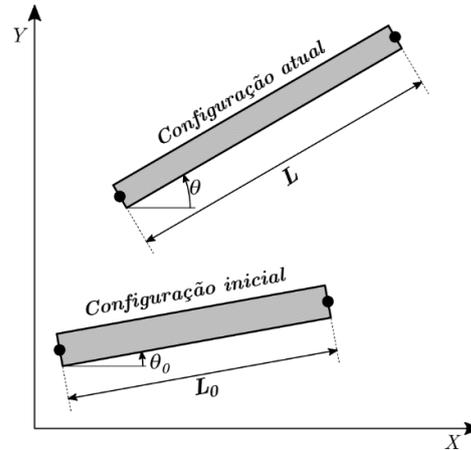
Seguindo as formulações constantes em Crisfield (1991), são apresentadas quatro medidas distintas de deformações, sendo duas delas descritas em coordenadas materiais (deformação de engenharia e Green-Lagrange) e duas descritas em coordenadas espaciais (deformação de Biot e Almansi).

A descrição cinemática do elemento é feita em relação à configuração inicial ou indeformada, supondo uma relação linear entre o par conjugado de tensão e deformação.

4.1.1 Descrição cinemática

Considerando um elemento finito de barra que se move de acordo a Figura 4.1.

Figura 4.1 - Configurações inicial e atual do elemento corrotacional de treliça 2D.



Fonte: Autoria própria.

O deslocamento total \mathbf{u} de um elemento finito de barra articulado que se move no plano, em coordenadas globais, pode ser descrito por:

$$\mathbf{u} = \mathbf{x} - \mathbf{X}. \quad (4.1)$$

Este pode ser decomposto em uma parte deformacional, designada por \mathbf{u}_D , e a outra parte correspondente ao deslocamento do corpo rígido, intitulada \mathbf{u}_R . De modo que:

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_R + \mathbf{u}_D = (\mathbf{x}_R - \mathbf{X}) + (\mathbf{x} - \mathbf{x}_R). \quad (4.2)$$

Na formulação corrotacional as equações de movimento deformacional devem ser escritas em função das coordenadas locais (x^e, y^e) na configuração atual C , conforme a seguinte equação:

$$\mathbf{u}_D^e = \mathbf{Q} \cdot \mathbf{u}_D. \quad (4.3)$$

Para o caso de uma treliça plana, \mathbf{Q} é uma matriz de rotação com dimensão 2×2 . Cabe ressaltar que, os deslocamentos deformacionais \mathbf{u}_D^e são utilizados para obter a matriz de rigidez tangente e o vetor de forças internas.

4.1.2 Sistema de coordenadas

O sistema de coordenadas locais (x^e, y^e) na configuração atual C , relaciona-se com o sistema de coordenadas global (x, y) , através da seguinte expressão:

$$\mathbf{x}^e = \mathbf{Q} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{u}_0). \quad (4.4)$$

A matriz de rotação \mathbf{Q} é definida, segundo Gere & Weaver (1981), como:

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} C_x & C_y \\ -C_y & C_x \end{bmatrix}, \quad (4.5)$$

sendo C_x e C_y , os cossenos diretores dos elementos de barra na configuração atual C , em relação ao sistema de coordenadas global.

Além disto, uma vez que a matriz \mathbf{Q} é ortogonal, isto é $\mathbf{Q}^T \mathbf{Q} = \mathbf{Q} \mathbf{Q}^T = \mathbf{I}$, sendo \mathbf{I} a matriz identidade, a Equação 4.4 pode ser reescrita como:

$$\mathbf{x} = \mathbf{Q}^T \mathbf{x}^e + \mathbf{u}_0. \quad (4.6)$$

4.1.3 Deslocamento deformacional

O deslocamento deformacional em relação as coordenadas locais para o caso de treliças planas, é definido como:

$$\mathbf{u}_D^e = \mathbf{Q} \cdot \mathbf{u}_D = (\mathbf{Q} - \mathbf{I})\mathbf{X} + \mathbf{Q}(\mathbf{u} - \mathbf{u}_0). \quad (4.7)$$

4.1.4 Movimento deformacional em função dos deslocamentos nodais

O movimento deformacional em função dos deslocamentos nodais é determinado utilizando a equação:

$$\mathbf{u}_D^e = \begin{Bmatrix} u_{1D}^e \\ v_{1D}^e \\ u_{2D}^e \\ v_{2D}^e \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_x & C_y & 0 & 0 \\ -C_y & C_x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & C_x & C_y \\ 0 & 0 & -C_y & C_x \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 - u_0 \\ v_1 - v_0 \\ u_2 - u_0 \\ v_2 - v_0 \end{Bmatrix} + \frac{1}{2} L_0 \begin{Bmatrix} 1 - C_x \\ C_y \\ C_x - 1 \\ -C_y \end{Bmatrix}. \quad (4.8)$$

Os cossenos diretores são obtidos em função dos deslocamentos nodais utilizando as expressões:

$$C_x = \cos \theta = \frac{L_0 + (u_2 - u_1)}{L}, \quad C_y = \sin \theta = \frac{(v_2 - v_1)}{L}. \quad (4.9)$$

sendo L o comprimento do elemento na configuração atual, obtido pela equação:

$$L = \sqrt{(L_0 + (u_2 - u_1))^2 + (v_2 - v_1)^2}. \quad (4.10)$$

A derivada primeira de L com relação aos deslocamentos nodais \mathbf{u} é expressa na forma vetorial por:

$$\frac{\partial L}{\partial \mathbf{u}} = \begin{Bmatrix} -\cos \theta \\ -\sin \theta \\ \cos \theta \\ \sin \theta \end{Bmatrix}. \quad (4.11)$$

E a derivada segunda igual a:

$$\frac{\partial^2 L}{\partial \mathbf{u}^2} = \frac{1}{L} \begin{bmatrix} \sin^2 \theta & -\sin \theta \cos \theta & -\sin^2 \theta & \sin \theta \cos \theta \\ -\sin \theta \cos \theta & \cos^2 \theta & \sin \theta \cos \theta & -\cos^2 \theta \\ -\sin^2 \theta & \sin \theta \cos \theta & \sin^2 \theta & -\sin \theta \cos \theta \\ \sin \theta \cos \theta & -\cos^2 \theta & -\sin \theta \cos \theta & \cos^2 \theta \end{bmatrix}. \quad (4.12)$$

4.1.5 Energia de deformação

A energia de deformação do elemento de treliça na configuração inicial e atual, são definidas, respectivamente, pelas seguintes expressões:

$$U_0 = \frac{1}{2} \int_0^{L_0} EA \varepsilon_X^2 dX^e, \quad \text{em } C_0 \quad (4.13)$$

$$U = \frac{1}{2} \int_0^L EA \varepsilon_x^2 dx^e, \quad \text{em } C. \quad (4.14)$$

Podem ser utilizadas medidas distintas de deformações, como: deformação de Engenharia e Green-Lagrange (deformações descritas em coordenadas materiais) e deformação de Biot e Almansi (deformações descritas em coordenadas espaciais). Estas são definidas pelas formulações:

$$\left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_X^{eng} = \frac{L - L_0}{L_0} = \lambda - 1 \\ \varepsilon_X^{green} = \frac{L^2 - L_0^2}{2L_0^2} = \frac{1}{2}(\lambda^2 - 1) \\ \varepsilon_x^{biot} = \frac{L - L_0}{L} = 1 - \lambda^{-1} \\ \varepsilon_x^{almansi} = \frac{L^2 - L_0^2}{2L^2} = \frac{1}{2}(1 - \lambda^{-2}) \end{array} \right. . \quad (4.15)$$

4.1.6 Vetor de forças internas

O vetor de forças internas em coordenadas materiais e espaciais, são obtidos respectivamente por meio das equações:

$$\hat{\mathbf{f}}^e = N_0 \beta_0 \frac{\partial L}{\partial \mathbf{u}}, \quad \mathbf{f}^e = N \beta \frac{\partial L}{\partial \mathbf{u}}, \quad \left\{ \begin{array}{l} \beta_0 = 1 \Rightarrow \text{def. engenharia} \\ \beta_0 = \lambda \Rightarrow \text{Green Lagrange} \\ \beta = \lambda^{-1} \Rightarrow \text{Biot} \\ \beta = \lambda^{-2} \Rightarrow \text{Almansi} \end{array} \right. \quad (4.16)$$

em que, N_0 e N são os esforços axiais dos elementos de treliça nas configurações inicial e atual, definidos, respectivamente, por:

$$N_0 = EA_0 \varepsilon_X, \quad N = EA \varepsilon_x. \quad (4.17)$$

Em uma formulação mais geral, deve-se escrever o vetor de forças internas em coordenadas materiais e espaciais, em relação ao sistema de eixos globais através das seguintes relações:

$$\hat{\mathbf{f}}_g^e = \mathbf{R}^T \hat{\mathbf{f}}^e, \quad \mathbf{f}_g^e = \mathbf{R}^T \mathbf{f}^e, \quad (4.18)$$

em que \mathbf{R}^T é a matriz de rotação que transforma do sistema de coordenadas do local, para o sistema de coordenadas global, utilizando a expressão:

$$\mathbf{R}^T = \begin{bmatrix} \mathbf{Q}^T & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{Q}^T \end{bmatrix}, \quad (4.19)$$

$\mathbf{0}$ é uma matriz nula e \mathbf{Q}^T , a matriz transporta de \mathbf{Q} , definida anteriormente neste capítulo.

4.1.7 Matriz de rigidez tangente

Por fim, a matriz de rigidez tangente em relação às coordenadas materiais pode ser obtida, fazendo-se o cálculo da segunda derivada funcional da energia de deformação da configuração inicial com relação aos deslocamentos nodais, obtendo como resultado final a seguinte expressão:

$$\hat{\mathbf{K}}^e = \frac{EA_0}{L_0} \alpha_0 \left(\frac{\partial L}{\partial \mathbf{u}} \right) \left(\frac{\partial L}{\partial \mathbf{u}} \right)^T + N_0 \beta_0 \frac{\partial^2 L}{\partial \mathbf{u}^2} \quad \begin{cases} \alpha_0 = 1 \Rightarrow \text{Engenharia} \\ \alpha_0 = \frac{3\lambda^2 - 1}{2} \Rightarrow \text{Green - Lagrange} \end{cases} \quad (4.20)$$

Analogamente, a matriz de rigidez tangente em relação às coordenadas espaciais, pode ser encontrada fazendo o cálculo da segunda derivada funcional da energia de deformação da configuração atual com relação aos deslocamentos nodais é igual a:

$$\mathbf{K}^e = \frac{EA}{L} \alpha \left(\frac{\partial L}{\partial \mathbf{u}} \right) \left(\frac{\partial L}{\partial \mathbf{u}} \right)^T + N\beta \frac{\partial^2 L}{\partial \mathbf{u}^2} \quad \begin{cases} \alpha = 3\lambda^{-2} - 2\lambda^{-1} \Rightarrow \text{Biot} \\ \alpha = \frac{5\lambda^{-4} - 3\lambda^{-2}}{2} \Rightarrow \text{Almansi} \end{cases} \quad (4.21)$$

Conforme comentado anteriormente para o caso do vetor de forças internas, é necessário transformar do sistema de coordenadas local para o sistema de coordenadas global através da seguinte operação:

$$\hat{\mathbf{K}}_g^e = \mathbf{R}^T \hat{\mathbf{K}}^e \mathbf{R}, \quad \mathbf{K}_g^e = \mathbf{R}^T \mathbf{K}^e \mathbf{R}, \quad (4.22)$$

onde \mathbf{R}^T é a matriz de rotação definida anteriormente.

Um aporte teórico completo sobre a formulação corrotacional de elementos de treliça pode ser encontrado em Crisfield (1991) e, mais recentemente, em Yaw (2009), dentre outras referências.

O próximo capítulo descreve a formulação do fenômeno da elastoplasticidade unidimensional, apresenta o algoritmo para implementação computacional, entre outros conceitos intrínsecos a análise não linear física.

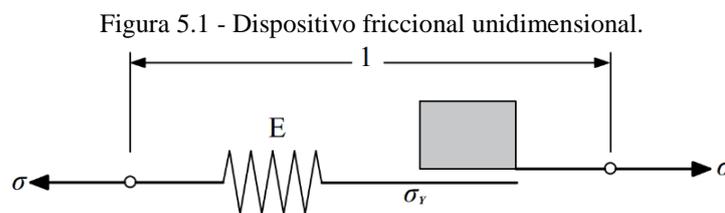
5 ELASTOPLASTICIDADE UNIDIMENSIONAL

Para alguns materiais, o gráfico de tensão *versus* deformação é linear para tensões abaixo de um certo limite chamado de tensão de escoamento. Nesta situação após encerrada a aplicação de carga, o corpo volta a sua configuração inicial e não apresenta deformações residuais. Caso o material seja carregado além deste ponto o material cede e começa a se deformar plasticamente, e após cessado o carregamento, a deformação torna-se irreversível ou permanente – Owen e Hinton (1980), Chen e Han (1988) e Lemaitre e Chaboche (1994). Segundo Bazzaro e Zerpa (2017), essa deformação residual é produzida quando a magnitude de tensão supera um certo valor de tensão fluência σ_y .

A teoria da plasticidade, tratada de forma detalhada em Simo e Hughes (1998), fornece modelos que descrevem o comportamento da relação tensão-deformação, para materiais que quando submetidos a carregamentos externos apresentam uma resposta elastoplástica. Este capítulo descreve a formulação do fenômeno de elastoplasticidade para o estado unidimensional de tensão.

5.1 MODELOS FRICCIONAIS UNIDIMENSIONAIS

Com o intuito de estudar o fenômeno da plasticidade, idealiza-se modelos simples compostos de dispositivos com respostas conhecidas que representam o que ocorre fisicamente na realidade. Neste capítulo examina-se a resposta mecânica do dispositivo friccional unidimensional apresentado na Figura 5.1:



Fonte: Autoria própria.

Assume-se que o dispositivo possui comprimento e área unitária, e que ele consiste de uma mola com constante E e elemento de fricção de Coulomb com constante $\sigma_y > 0$. Inicialmente se fornece ao dispositivo uma tensão σ e uma deformação ϵ .

5.1.1 Modelo constitutivo elastoplástico ideal

A deformação total sofrida pelo o dispositivo é separada em duas parcelas: uma parte elástica, relacionada a mola com constante E , e a outra parte plástica relacionada a interface de

atrito σ_y . Dessa forma,

$$\varepsilon = \varepsilon^e + \varepsilon^p. \quad (5.1)$$

Considerando o equilíbrio do sistema, a tensão na mola é dada pela relação:

$$\sigma = E\varepsilon^e = E(\varepsilon - \varepsilon^p). \quad (5.2)$$

Para este modelo constitutivo devemos levar em consideração outras características como a regra de fluxo, a condição de escoamento, as condições de Kuhn-Tucker, e a condição de persistência. A regra de fluxo, é representada pela relação:

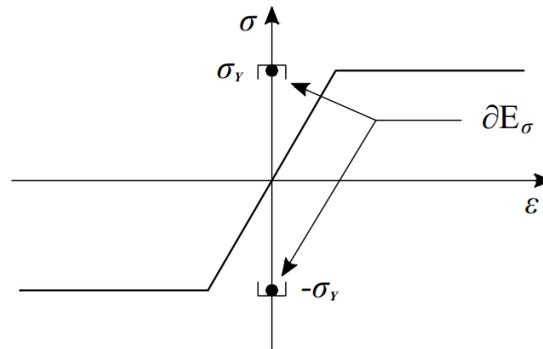
$$\dot{\varepsilon}^p = \gamma \text{sign}(\sigma). \quad (5.3)$$

A condição de escoamento é definida por:

$$f(\sigma) = |\sigma| - \sigma_y \leq 0. \quad (5.4)$$

Na Figura 5.2 é ilustrado o modelo constitutivo elastoplástico ideal.

Figura 5.2 - Plasticidade perfeita.



Fonte: Autoria própria.

O material apresenta comportamento elástico na situação:

$$f(\sigma) < 0. \quad (5.5)$$

Já o processo de plastificação ocorre quando a tensão atinge um certo valor de tensão de fluência, ou condição de escoamento. Nesta situação, ocorre a plasticidade perfeita:

$$f(\sigma) = 0. \quad (5.6)$$

As condições de Kuhn-Tucker, são:

$$f(\sigma) \leq 0, \gamma \geq 0, \gamma f(\sigma) = 0. \quad (5.7)$$

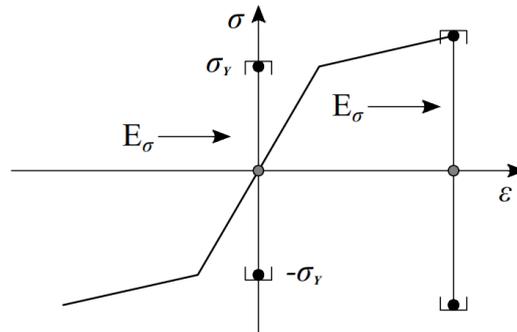
E por fim, a condição de persistência é representada pela equação:

$$\gamma \dot{f}(\sigma) = 0 \quad (\text{se } f(\sigma) = 0). \quad (5.8)$$

5.1.2 Modelo constitutivo elastoplástico com encruamento isotrópico

Um modelo elastoplástico com encruamento isotrópico produz uma curva tensão deformação como a apresentada na Figura 5.3.

Figura 5.3 - Plasticidade com encruamento isotrópico.



Fonte: Autoria própria.

A expansão do conjunto de tensões admissíveis E_σ caracteriza o encruamento do material. Além disso, o encruamento é isotrópico, pois, o centro de E_σ se encontra na origem, e linear em relação a $|\dot{\epsilon}^p|$.

O fato do encruamento ser isotrópico, produz a seguinte função de escoamento:

$$f(\sigma, \alpha) = |\sigma| - [\sigma_y - K\alpha] \leq 0, \alpha \geq 0 \quad (5.9)$$

em que, K é chamado de módulo plástico e α é uma função do montante de fluxo plástico acumulado. Como o encruamento obedece uma certa relação linear, pode-se definir a seguinte lei de evolução para α :

$$\dot{\alpha} = |\dot{\epsilon}^p| = \gamma. \quad (5.10)$$

Para este modelo constitutivo, a regra do fluxo, as condições de Kuhn-Tucker e a condição de persistência não alteram suas expressões gerais apresentadas anteriormente.

5.1.3 Modelo constitutivo elastoplástico ideal com encruamento misto (isotrópico e cinemático)

A introdução do encruamento cinemático num modelo unidimensional é caracterizada pelo deslocamento do centro do conjunto de tensões admissíveis E_σ . Neste modelo, a expressão da condição de escoamento definida anteriormente para o encruamento isotrópico, pode ser estendida para contemplar o encruamento cinemático, da seguinte maneira:

$$f(\tau, q, \alpha) = |\tau - q| - [\sigma_y - K\alpha] \leq 0, \alpha \geq 0 \quad (5.11)$$

sendo q uma variável que define a localização do centro da superfície de escoamento. Além disso, esta variável é chamada de *back stress* e sua lei de evolução é dada por:

$$\dot{q} = H\dot{\varepsilon}^p = \gamma H \text{sign}(\sigma - q) \quad (5.12)$$

em que H é chamado de módulo de encruamento cinemático.

Para tanto, a regra de fluxo pode ser reescrita como sendo:

$$\dot{\varepsilon}^p = \gamma \text{sign}(\sigma - q). \quad (5.13)$$

Assim como, a condição de persistência:

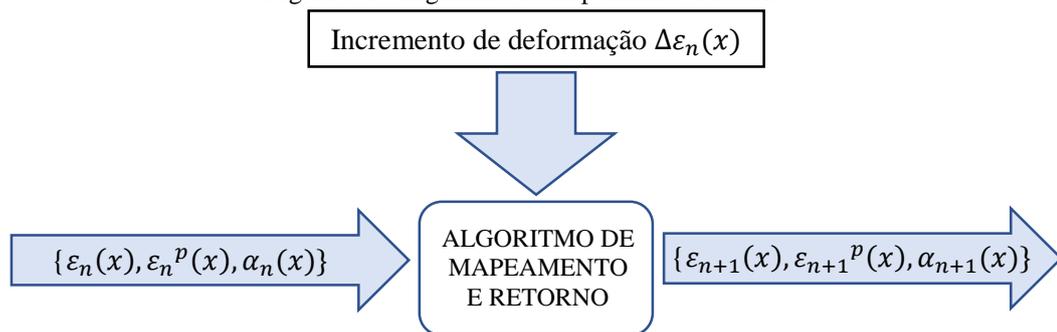
$$\gamma \dot{f}(\sigma) = 0 \quad (\text{se } f(\sigma, q, \alpha) = 0). \quad (5.14)$$

A lei de evolução de α e as condições de Kuhn-Tucker, antes definidas, permanecem inalteradas.

5.2 ALGORITMO DE INTEGRAÇÃO PARA PLASTICIDADE COM EVOLUÇÃO INDEPENDENTE DO TEMPO

O modelo elastoplástico é integrado localmente em pontos específicos do corpo, geralmente correspondentes a pontos de quadratura de um elemento finito. A Figura 5.4 ilustra um fluxograma básico das variáveis envolvidas nesse processo.

Figura 5.4 - Algoritmo de mapeamento e retorno.



Fonte: Autoria própria

Para o algoritmo do problema de plasticidade 1D suponha que um incremento de deformação é fornecido de modo que o valor da deformação total ε é atualizado. A partir desta informação é necessário verificar se com o incremento de deformação, ocorreu a plastificação do material. Para tanto é necessário calcular inicialmente o estado teste, determinado apenas em termos das condições iniciais e do incremento de deformação fornecido $\Delta\varepsilon_n$. Uma vez

calculado, os seguintes critérios são estabelecidos: se $f_{y(n+1)}^{teste} \leq 0$ a deformação é elástica e a solução é trivial, logo o estado teste é capaz de representar o estado atual do material. Por outro lado, se $f_{y(n+1)}^{teste} > 0$, então ocorreu plastificação do material. Nesta situação o problema é encontrar σ_{n+1} , α_{n+1} , tal que $\Delta\gamma > 0$. Ter esta informação permite o cálculo de ε_{n+1}^p , que é o valor atualizado da deformação plástica.

Na Tabela 1, apresenta-se o algoritmo incremental de mapeamento e retorno para plasticidade unidimensional com endurecimento, tal como descrito em Simo e Hughes (1998).

Tabela 1 – Algoritmo de plasticidade com endurecimento.

<p>1) Dados em $x \in B$: $\{\varepsilon_n^p, \alpha_n\}$</p> <p>2) Dado um campo de deformações em $x \in B$: $\varepsilon_{n+1} = \varepsilon_n + \Delta\varepsilon_n$</p> <p>3) Calcule a tensão elástica teste e verifique se há plastificação: $\sigma_{n+1}^{teste} = E(\varepsilon_{n+1} - \varepsilon_n^p)$ $f_{y(n+1)}^{teste} = \sigma_{n+1}^{teste} - [\sigma_y + K\alpha_n]$ Se $f_{y(n+1)}^{teste} \leq 0$ Passo elástico: Faça $(\bullet)_{n+1} = (\bullet)_{n+1}^{teste} \rightarrow$ Sair! Se não Passo plástico: $\Delta\gamma = \frac{f_{y(n+1)}^{teste}}{E+K} > 0$ $\varepsilon_{n+1}^p = \varepsilon_n^p + \Delta\gamma \text{sign}(\sigma_{n+1}^{teste})$ $\alpha_{n+1} = \alpha_n + \Delta\gamma$ $\sigma_{n+1} = \left[1 - \frac{\Delta\gamma E}{ \sigma_{n+1}^{teste} }\right] \sigma_{n+1}^{teste}$ Fim Se</p>

Fonte: Autoria própria.

em que:

ε_n^p a deformação plástica no incremento n ;

α_n a variável de endurecimento no incremento n ;

ε_{n+1} a deformação total no incremento $n + 1$;

ε_n a deformação total no incremento n ;

$\Delta\varepsilon_n$ o incremento n de deformação;

σ_{n+1}^{teste} a tensão teste no incremento $n + 1$;

E o módulo de elasticidade;

$f_{y(n+1)}^{teste}$ a condição de escoamento teste no incremento $n + 1$;

$\Delta\gamma$ é o multiplicador de Lagrange;

K o módulo plástico;

ε_{n+1}^p a deformação plástica atualizada no incremento $n + 1$;

α_{n+1} a variável de endurecimento no incremento $n + 1$;

σ_{n+1} a tensão no incremento $n + 1$.

No próximo capítulo são apresentados os dois métodos numéricos mais utilizados para resolver os sistemas de equações não lineares que surgem na análise não linear de estruturas: o método de Newton-Raphson e o método do comprimento de arco.

6 SOLUÇÃO DE SISTEMAS DE EQUAÇÕES NÃO LINEARES

O problema básico da análise não linear é encontrar a configuração de equilíbrio de uma estrutura submetida a ação de forças aplicadas. Este problema fundamenta-se na resolução do seguinte sistema de equações não lineares:

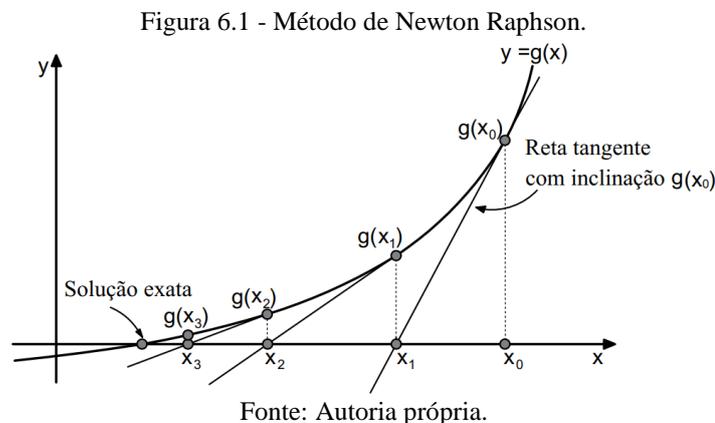
$$\mathbf{g} = \mathbf{F}_r - \mathbf{F}_i = \mathbf{0}, \quad (6.1)$$

em que \mathbf{g} é o vetor de forças desequilibradas, \mathbf{F}_r o vetor de forças externas e \mathbf{F}_i o vetor de forças internas. A solução do sistema é obtida por meio de um esquema incremental iterativo. A parte incremental da solução é empregada para prever os incrementos de deslocamentos e a parte iterativa é utilizada para verificar o erro de equilíbrio.

Vários métodos numéricos podem ser utilizados para resolver os sistemas de equações não lineares, e conseqüentemente, obter as trajetórias de equilíbrio das estruturas. Os principais métodos empregados são: o método de Newton-Raphson e o método do comprimento de arco.

6.1 MÉTODO DE NEWTON RAPHSON

O método de Newton-Raphson é um método clássico aplicado em problemas da engenharia para resolver sistemas de equações não lineares. De forma genérica, considere uma equação na forma $g(x) = 0$. Suponha que a função é contínua, diferenciável e tenha raiz próxima de um ponto estimado. O método tem início na escolha de um valor inicial x_0 para a função, geralmente este valor é uma simples suposição. A próxima estimativa x_1 é obtida pelo cruzamento do eixo x com a reta tangente a função $g(x)$ no ponto $(x_0, g(x_0))$. Na Figura 6.1 ilustra-se este procedimento:



As estimativas seguintes são obtidas de maneira semelhante, utilizando a formulação:

$$x_{i+1} = x_i - \frac{g(x_i)}{g'(x_i)}. \quad (6.2)$$

Esta fórmula pode ser deduzida por geometria observando a Figura 6.1 e aplicando a equação da reta tangente e também por outros métodos como a expansão em série de Taylor.

Para um problema estrutural, a resolução do sistema de equações não lineares apresentado na Equação 6.1, utilizando o procedimento incremental e iterativo, toma a forma:

$$\mathbf{g}(\mathbf{u}) = \lambda \mathbf{F}_r - \mathbf{F}_i(\mathbf{u}) = \mathbf{0}, \quad (6.3)$$

em que o vetor de forças internas é avaliado em função do vetor de deslocamentos totais \mathbf{u} nos pontos nodais da estrutura, e λ é o parâmetro de força responsável pelo escalonamento do vetor \mathbf{F}_r , sendo este um vetor de referência e de magnitude arbitrária.

Aplicando o método de Newton-Raphson (Equação 6.2) para encontrar a raiz da Equação 6.3, obtém-se:

$$\mathbf{u}_{i+1} = \mathbf{u}_i - \mathbf{K}_t^{-1} \mathbf{g}(\mathbf{u}_i), \quad (6.4)$$

sendo

$$\mathbf{K}_t = \mathbf{g}'(\mathbf{u}_i) = \frac{\partial \mathbf{g}(\mathbf{u}_i)}{\partial \mathbf{u}_i}, \quad (6.5)$$

em que \mathbf{K}_t é a tangente de rigidez, conhecida também como matriz jacobiana.

A Equação 6.4 pode ser reescrita da seguinte forma:

$$\Delta \mathbf{u}_i = -\mathbf{K}_t^{-1} \mathbf{g}(\mathbf{u}_i), \quad (6.6)$$

em que,

$$\Delta \mathbf{u}_i = \mathbf{u}_{i+1} - \mathbf{u}_i. \quad (6.7)$$

Para este método, o código numérico executa uma solução com base no vetor de carga em desequilíbrio (resíduo) e verifica a convergência. Caso a convergência não seja alcançada, o vetor resíduo \mathbf{g} é recalculado, seguido da atualização da matriz de rigidez tangente e o conjunto de equações da análise é resolvido novamente para obter uma nova solução. Dois critérios de parada do método podem ser estabelecidos (GILAT; SUBRAMANIAN, 2008):

1. Erro relativo estimado - As iterações são interrompidas quando o erro relativo é menor que o valor prefixado para tolerância:

$$\left| \frac{u_{i+1} - u_i}{u_i} \right| \leq tol. \quad (6.8)$$

2. Tolerância - As iterações são interrompidas quando o valor absoluto $g(u_{i+1})$ é menor que a tolerância estabelecida:

$$|g(u_{i+1})| \leq tol. \quad (6.9)$$

6.2 MÉTODO DE COMPRIMENTO DE ARCO

A solução numérica de problemas estruturais não lineares, geralmente, é mais complexa, uma vez que os sistemas resultantes são acometidos por instabilidades que tornam o processo de obtenção da resposta desafiador para estratégias de solução de equações não lineares mais comuns, como o método de Newton-Raphson. Assim, técnicas mais robustas, como o método de comprimento de arco, têm sido desenvolvidas e utilizadas.

De acordo com Lacerda (2014), o método do comprimento de arco consegue superar as dificuldades apresentadas por outros métodos numéricos de maneira eficiente e elegante. Além disso, é o método mais utilizado para determinação do caminho de equilíbrio de problemas estruturais. Neste método incrementa-se simultaneamente a carga e o deslocamento. Para isso, uma nova incógnita surge no sistema de equações de equilíbrio: o fator de carga (λ).

O problema não linear é reescrito para o método de comprimento de arco da seguinte forma:

$$\mathbf{g}^{i+1} = \mathbf{F}_i^{i+1} - \mathbf{F}_r^{i+1} = \mathbf{0}, \quad (6.10)$$

$$\mathbf{g}^{i+1} = \mathbf{F}_i(\mathbf{u}^{i+1}) - \lambda^{i+1} \mathbf{F}_r = \mathbf{0}. \quad (6.11)$$

E as variáveis \mathbf{u}^{i+1} e λ^{i+1} são iguais a:

$$\begin{cases} \mathbf{u}^{i+1} = \mathbf{u}^i + \Delta \mathbf{u}^{i+1} \\ \lambda^{i+1} = \lambda^i + \Delta \lambda^{i+1} \end{cases} \quad (6.12)$$

Torna-se necessário utilizar uma nova equação para determinar a variável adicional $\Delta \lambda^{i+1}$. Esta equação pode tomar diferentes formas e no caso do comprimento de arco esférico é igual a:

$$(\Delta \mathbf{u}^{i+1})^T \Delta \mathbf{u}^{i+1} + (\Delta \lambda^{i+1})^2 (\mathbf{F}_r)^T \mathbf{F}_r = \Delta l^2 \quad (6.13)$$

em que, Δl corresponde ao comprimento de arco.

Para o método do comprimento de arco o critério de convergência considerando uma tolerância pré-fixada toma a seguinte forma:

$$|g(u^{i+1}, \lambda^{i+1})| \leq tol. \quad (6.14)$$

6.3 DETECÇÃO DE PONTOS CRÍTICOS

Durante o percurso de equilíbrio não linear de uma estrutura, que é obtido por meio de um método incremental iterativo, podem surgir vários pontos críticos de importância para a análise. Diferentes mecanismos podem ser utilizados para identificar esses pontos críticos, incluindo o parâmetro de rigidez *CST* - *current stiffness parameter*. Conforme Bergan (1980), este parâmetro é uma ferramenta eficaz para detectar tais pontos.

Segundo Menin (2006), a equação não normalizada que define o *CST* é igual a:

$$k_n = \frac{\mathbf{F} \cdot \Delta \mathbf{u}_F}{\Delta \mathbf{u}_F \cdot \Delta \mathbf{u}_F}, \quad (6.15)$$

em que \mathbf{F} é o valor da carga externa aplicada na estrutura na iteração atual e $\Delta \mathbf{u}_F$ o incremento de deslocamento relacionado a carga externa. A partir da Equação 6.15 obtêm-se a expressão normalizada do parâmetro *CST*, dividindo-se o valor atual de k_n pelo seu valor no início do processo de carregamento k_0 :

$$CST = \frac{k_n}{k_0}. \quad (6.16)$$

De acordo com Menin (2006), ao atingir um ponto limite o parâmetro *CST* tende a zero, e nos pontos de bifurcação assume um valor arbitrário diferente de zero. Além disso, o parâmetro também possui capacidade de detectar os pontos chamados de *turning points*.

O próximo capítulo descreve os procedimentos metodológicos utilizados no desenvolvimento desta pesquisa e apresenta algumas particularidades do funcionamento do código numérico implementado.

7 METODOLOGIA

Este capítulo é destinado a classificação da pesquisa quanto a natureza, abordagem, objetivos e procedimentos. Também são abordadas as ações realizadas no decorrer do trabalho para atingir os objetivos indicados.

7.1 CLASSIFICAÇÃO DA PESQUISA

A natureza do trabalho tem caráter de pesquisa aplicada, pois o estudo desenvolvido apresenta um problema específico da engenharia de estruturas. De acordo com Fleury e Werlang (2018), este tipo de pesquisa se caracteriza por uma ação em que conhecimentos previamente adquiridos são utilizados para selecionar e coletar fatos e dados com o objetivo de obter e confirmar resultados.

Quanto a forma de abordagem, o trabalho se caracteriza como uma pesquisa qualitativa, uma vez que os resultados das análises são valores numéricos, evidenciando assim o caráter quantitativo da pesquisa. Além disso, estes resultados são comparados por meio de gráficos com os resultados disponíveis na literatura e por meio da visualização dos deslocamentos no *software* Paraview, com o intuito de aferir qualitativamente o potencial da ferramenta utilizada.

Com relação aos seus objetivos trata-se de uma pesquisa exploratória. Uma vez que, inicialmente foi realizada pesquisas bibliográficas para familiarização com o problema, com vista a torná-lo mais explícito, e também levantar hipóteses para sua solução, caracterizando assim, de acordo com Gil (2002), este tipo de pesquisa.

No que diz respeito aos procedimentos técnicos, a pesquisa caracteriza-se por ser bibliográfica e também experimental. Como evidenciado anteriormente, a etapa de levantamento do referencial teórico é necessária para embasar a pesquisa. Por outro lado, o trabalho se enquadra como uma pesquisa experimental, pois além de propor o desenvolvimento de códigos numéricos para realização das análises, são investigados os resultados que serão obtidos por meio dos experimentos numéricos.

7.2 PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS

Inicialmente algumas referências clássicas foram selecionadas e exploradas para a aprendizagem e aprofundamento dos conceitos relativos ao problema da análise não linear geométrica e material de treliças planas.

Em seguida, com vista ao alcançar os objetivos propostos, códigos computacionais foram desenvolvidos para a realização da análise elasto-plástica e geométrica de treliças planas. A linguagem de programação escolhida para as implementações foi o *Scilab*, por tratar-se de uma linguagem de programação de livre acesso.

Logo após, aplicações numéricas clássicas selecionadas da literatura foram analisadas. Por fim, os resultados obtidos por meio dos códigos computacionais são comparados com os resultados disponíveis na literatura, com a finalidade de verificar a confiabilidade da formulação implementada. A comparação entre os resultados foi realizada por meio de gráficos e da visualização dos deslocamentos por meio do *software* Paraview.

7.2.1 Código computacional

Os objetos de análise do algoritmo são treliças planas, isostáticas ou hiperestáticas, que possuam apenas apoios do 1º gênero e/ou 2º gênero.

A medida de deformação utilizada no código é a deformação de engenharia. Os modelos constitutivos que podem ser utilizados são o modelo elástico linear e os modelos bilineares com endurecimento e sem endurecimento.

As principais etapas do código computacional, na ordem de execução, são:

1. Entrada de dados (pré-processamento);
2. Processamento dos dados;
3. Apresentação dos resultados (pós processamento);

Na primeira etapa alguns cálculos para inicialização do problema são realizados e o usuário deve informar ao algoritmo os dados referentes a geometria e ao material dos elementos da estrutura:

- Coordenadas nodais;
- Conectividades dos elementos;
- Nós restritos e direção de restrição;
- Nós com cargas aplicadas e seu carregamento;
- Área da seção transversal dos elementos;
- Tipo de análise: não linear geométrica ou não linear física e geométrica;
- Módulo de elasticidade;
- Módulo plástico (na situação de análise não linear física);
- Coeficiente de Poisson (quando necessário);
- Tensão de escoamento (na situação de análise não linear física);

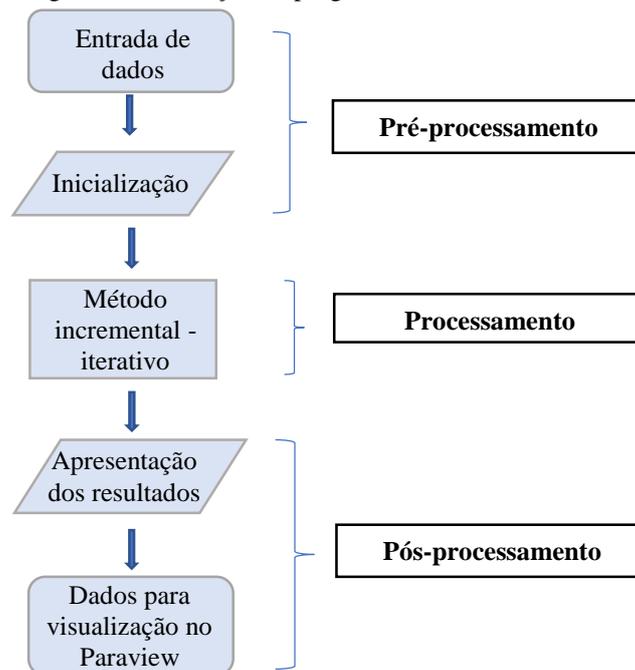
- Parâmetros para utilização do método de Newton-Raphson associado a técnica de comprimento de arco (número máximo de incrementos e de iterações, comprimento de arco inicial, comprimento de arco máximo e mínimo);
- Tolerância para convergência;
- Parâmetros para apresentação dos resultados (grau de liberdade para obtenção da trajetória de equilíbrio, fator de escala).

Na etapa de processamento dos dados o código numérico através do método incremental e iterativo (método de Newton-Raphson associado a técnica de comprimento de arco) avalia a estrutura. Várias funções são executadas para calcular a matriz de rigidez para todos os elementos de barra, montar a matriz de rigidez global da estrutura, aplicar as condições de contorno para o problema, calcular as forças internas e os deslocamentos, além de checar a convergência.

Na terceira etapa (pós-processamento), o código numérico apresenta os resultados obtidos na análise. Além disso, tendo em vista que a visualização de resultados gráficos é essencial para uma correta interpretação do analista, foi implementado no algoritmo uma função para salvar os dados necessários para visualização das deformadas da análise ao longo do processo incremental por meio do *software* Paraview.

O esquema resumido de execução do código numérico é apresentado no fluxograma ilustrado na Figura 7.1.

Figura 7.1 - Fluxograma de execução do programa.



Fonte: Autoria própria.

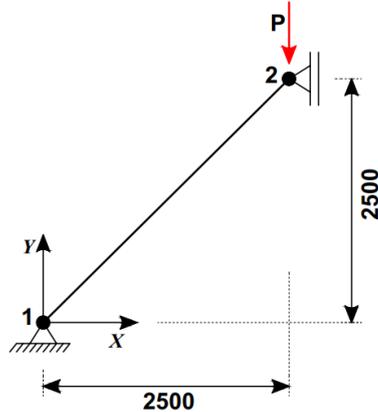
8 APLICAÇÕES NUMÉRICAS

O objetivo deste capítulo é estudar problemas clássicos da literatura relacionados ao tema desta pesquisa. Os exemplos numéricos foram selecionados e são apresentados de acordo com o grau de complexidade das análises. Os resultados obtidos para os problemas por meio do código numérico implementado são comparados com os resultados apresentados em referências relevantes na área de mecânica computacional, a fim de validar a qualidade da ferramenta utilizada. Além disso, considerando que a visualização de resultados gráficos é essencial para correta uma interpretação do analista, são apresentados em alguns exemplos a configuração deformada da estrutura ao longo da análise numérica por meio da utilização do *software* Paraview.

8.1 BARRA 2D COM UM GRAU DE LIBERDADE

O primeiro problema analisado nesta pesquisa trata-se de uma barra articulada 2D com um grau de liberdade, cuja características geométricas são apresentadas na Figura 8.1. Este problema foi estudado inicialmente por Crisfield (1991). A barra possui área de seção transversal $A = 100$ e módulo de elasticidade igual a 5×10^5 .

Figura 8.1 - Barra articulada 2D.



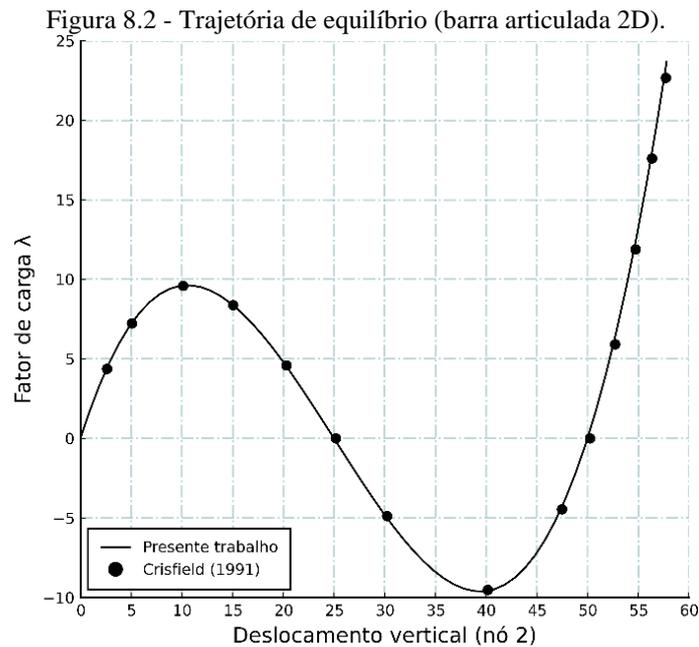
Fonte: Autoria própria.

Os parâmetros utilizados como dados de entrada no código numérico implementado, foram:

- Número máximo de incrementos: $n_{max} = 60$;
- Número máximo de iterações: $i_{max} = 100$;
- Tolerância de convergência: $tol = 1 \times 10^{-6}$;
- Comprimento de arco inicial: $\Delta l = 0,1$;

- Número desejado de iterações para cada passo de carga: $N_d = 5$;
- Fator de razão do método do comprimento de arco: $\zeta = 0,5$.

Na Figura 8.2 é apresentada a trajetória de equilíbrio para a direção vertical do nó 2 da estrutura, considerando o material elástico e utilizando a medida de deformação de engenharia. Pode-se observar a coincidência entre os resultados obtidos por meio do código numérico e os resultados obtidos por Crisfield (1991). Valida-se, assim, o código computacional implementado por meio do *Scilab*.

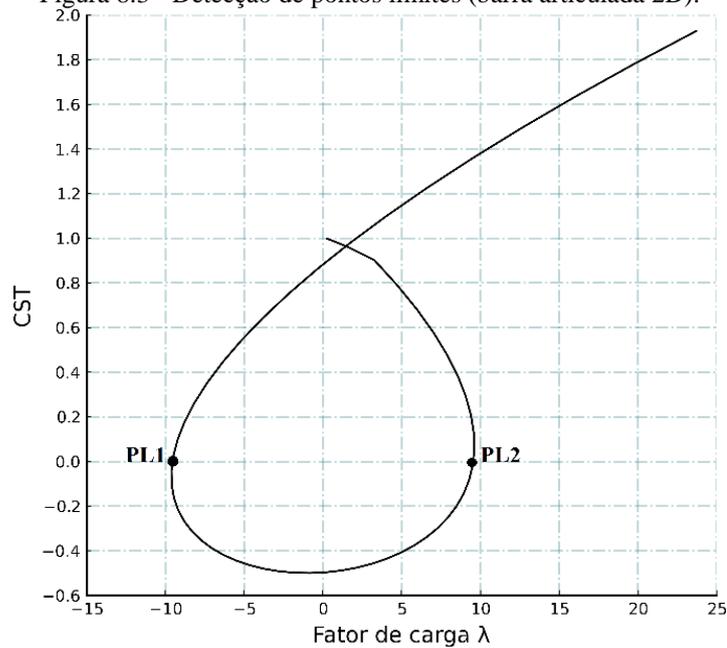


Fonte: Autoria própria.

Conforme apresentado na Figura 8.2, a trajetória de equilíbrio apresenta dois pontos limites de força, a tangente nesses pontos é paralela ao eixo de deslocamentos. Para detectar precisamente esses pontos limites foi utilizado o parâmetro de rigidez *CST*.

Na Figura 8.3 o parâmetro de rigidez é apresentado em função do fator de carga. Durante a trajetória de carregamento, o parâmetro se anula 2 vezes (P_{L1} e P_{L2}), representando a ocorrência do fenômeno conhecido como *snap-through* (pontos limites de carga). No ponto P_{L1} , a carga crítica apresenta um valor de - 9,61, e no ponto P_{L2} esse valor é igual a + 9,62.

Figura 8.3 - Detecção de pontos limites (barra articulada 2D).

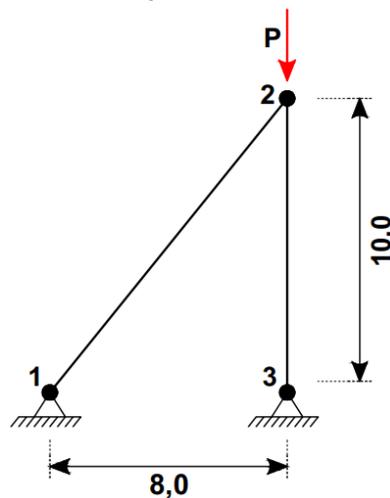


Fonte: Autoria própria.

8.2 TRELIÇA ASSIMÉTRICA 2D

Este problema trata-se de uma treliça assimétrica composta por duas barras, este problema foi estudado por Munoz-Rojas e Filho (2001). A Figura 8.4 apresenta a disposição geométrica da estrutura em questão. As barras da estrutura possuem área igual a 1 cm^2 e módulo de elasticidade igual a 1000 kN/cm^2 .

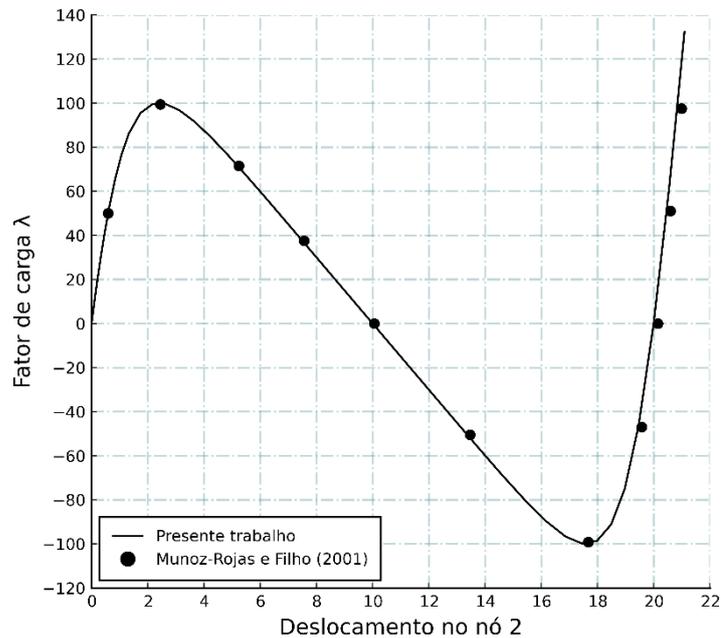
Figura 8.4 - Treliça assimétrica 2D.



Fonte: Autoria própria.

A Figura 8.5 ilustra a trajetória de equilíbrio para a direção vertical do nó 2 da estrutura, considerando o material elástico e utilizando a medida de deformação de engenharia.

Figura 8.5 - Trajetória de equilíbrio (treliça assimétrica).

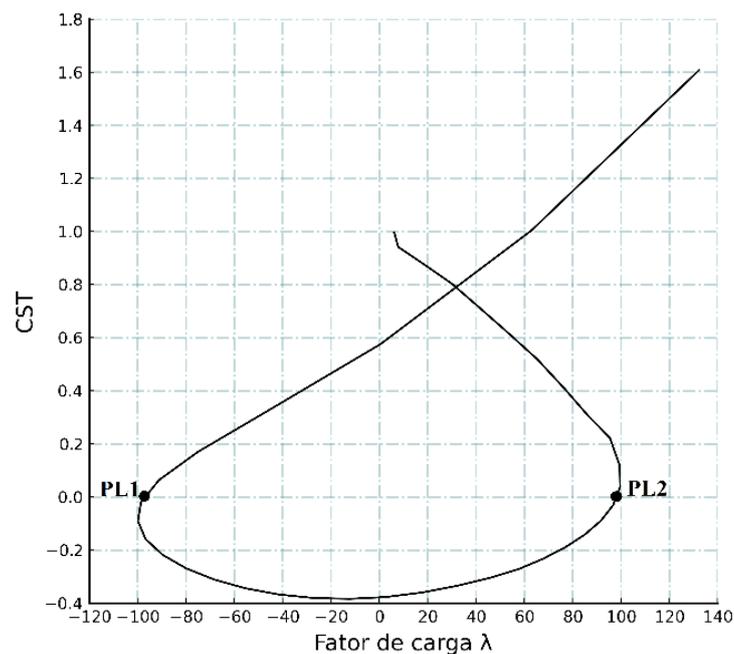


Fonte: Autoria própria.

Pode-se observar que os resultados obtidos por meio do código numérico implementado são idênticos aos resultados obtidos por Munoz-Rojas e Filho (2001), validando mais uma vez, o código computacional implementado.

Na Figura 8.6 o parâmetro de rigidez é apresentado em função do fator de carga. Durante a trajetória de carregamento, o parâmetro se anula duas vezes, representando a ocorrência do fenômeno *snap-through*, ou seja, pontos limites de carga.

Figura 8.6 - Detecção de pontos limites (treliça assimétrica).



Fonte: Autoria própria.

Os valores da carga crítica em P_{L1} e P_{L2} são, respectivamente, - 99,83 kN e + 99,52 kN.

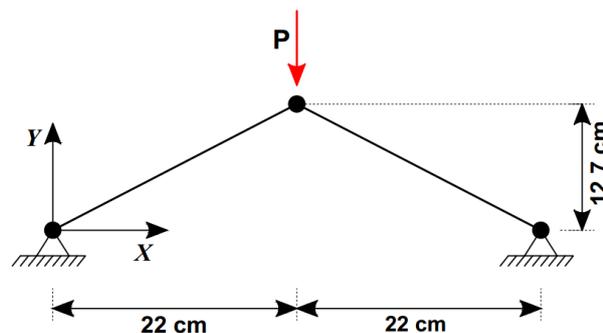
Os parâmetros utilizados como dados de entrada no código numérico para este problema, foram:

- Número máximo de incrementos: $n_{max} = 40$;
- Número máximo de iterações: $i_{max} = 60$;
- Tolerância de convergência: $tol = 1 \times 10^{-6}$;
- Comprimento de arco inicial: $\Delta l = 0,1$;
- Número desejado de iterações para cada passo de carga: $N_d = 5$;
- Fator de razão do método do comprimento de arco: $\zeta = 0,5$.

8.3 TRELIÇA PLANA DE VON MISES

Nesta sessão analisa-se uma treliça composta por duas barras, conhecida como treliça de von Mises, submetida a uma carga concentrada no nó central. Esta estrutura representa o modelo mais simples de um plano simétrico e tem sido estudado por muitos autores entre eles Crisfield (1997). Neste problema investiga-se o fenômeno de não linearidade física. A Figura 8.7 ilustra algumas das características geométricas da estrutura. Ambas barras possuem área de seção transversal igual a $0,07 \text{ cm}^2$ e módulo de elasticidade igual a 2100 kN/cm^2 .

Figura 8.7 - Treliça de von Mises.



Fonte: Autoria própria.

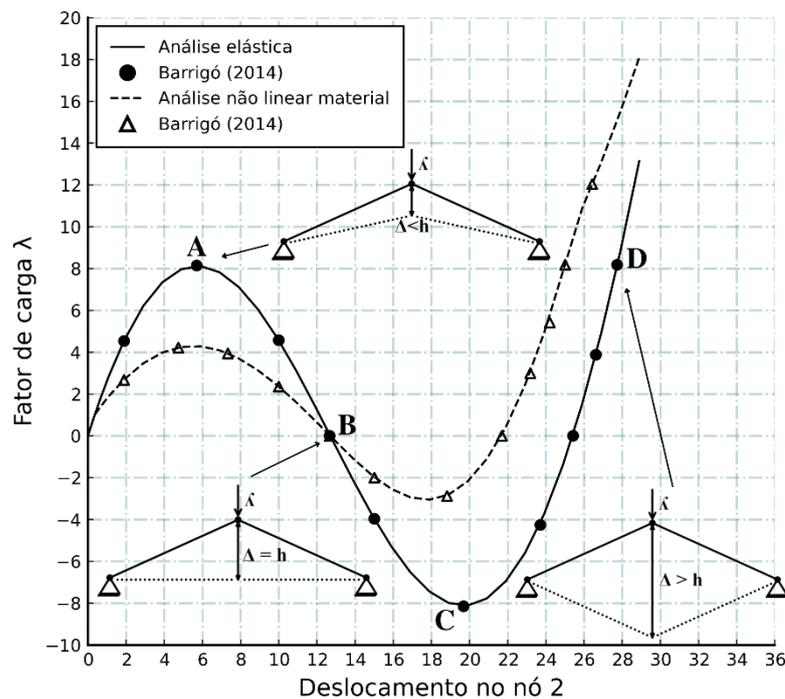
Para este problema numérico os parâmetros utilizados como dados de entrada no código numérico implementado, foram:

- Número máximo de incrementos: $n_{max} = 36$;
- Número máximo de iterações: $i_{max} = 10$;
- Tolerância de convergência: $tol = 1 \times 10^{-6}$;
- Comprimento de arco inicial: $\Delta l = 0,01$;
- Número desejado de iterações para cada passo de carga: $N_d = 3$;

- Fator de razão do método do comprimento de arco: $\zeta = 0,5$;
- Módulo de elasticidade após o escoamento do material: $H = 2.000 \text{ kN/cm}^2$;
- Tensão de escoamento do material: $\sigma_{teste} = 15 \text{ kN/cm}^2$;
- Força externa: $P = 1 \text{ kN}$.

Na Figura 8.8 apresenta-se a trajetória de equilíbrio para a treliça considerando o regime de deformação elástico e também a situação de escoamento do material das barras.

Figura 8.8 - Trajetória de equilíbrio (treliça de von Mises).



Fonte: Autoria própria.

O Ponto **A** da trajetória de equilíbrio apresentada na Figura 8.8 é o primeiro ponto limite de carga, conhecido também como limite crítico. Este ponto é alcançado com um incremento de carga de 8,11 kN e um deslocamento do nó central de 5,90 cm.

O ponto **B** é o local onde a estrutura experimenta o esforço de compressão máximo, nesta situação as duas barras da treliça ficam totalmente retas e o deslocamento vertical é igual à altura da estrutura ($\Delta = h$, conforme ilustrado na Figura 8.8). Este ponto é comum tanto na análise elástica quanto na análise não linear material.

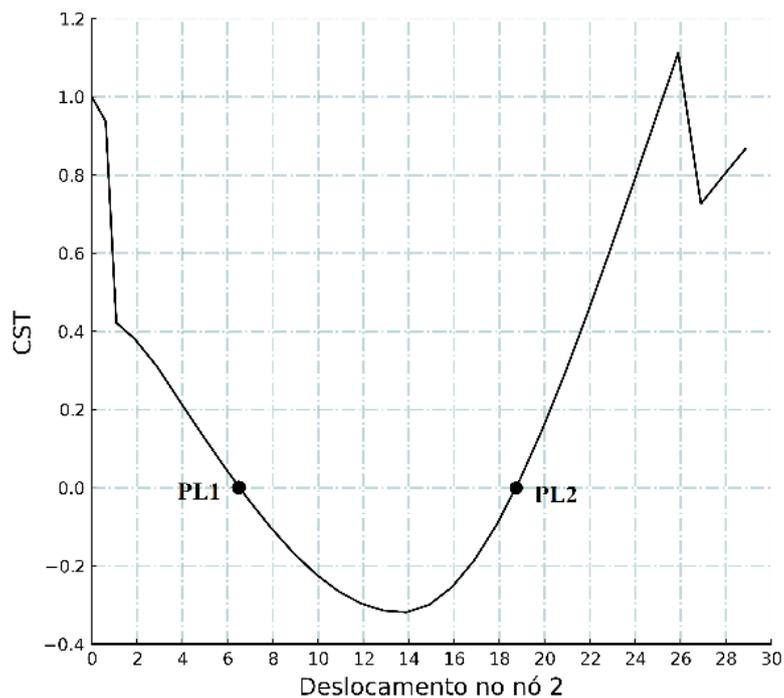
Já quando o incremento de carga atinge valor de - 8,12 kN, que ocorre no ponto **C**, a carga inverte a trajetória, e neste ponto ocorre o segundo ponto limite de carga. Por fim, o ponto **D** é alcançado com um incremento de carga igual a + 8,81 kN.

No caminho de equilíbrio entre os pontos **A** e **D** o incremento de carga reverte duas vezes enquanto os deslocamentos continuam para aumentar ao longo da trajetória. De acordo

com Bathe (2014), em uma estrutura real a hipótese de aumento sequencial da força aplicada ocasionaria um salto entre os pontos **A** e **D**, caracterizando assim um exemplo de *snap-through*.

Os dois pontos limites (ponto **A** e ponto **C**), são detectados com precisão através da anulação do parâmetro de rigidez *CST*, considerando o escoamento do material das barras, representado na Figura 8.9. Estes pontos são caracterizados por tangentes horizontais, ou seja, retas paralelas ao eixo de deslocamentos.

Figura 8.9 - Detecção de pontos limites (treliça de von Mises).



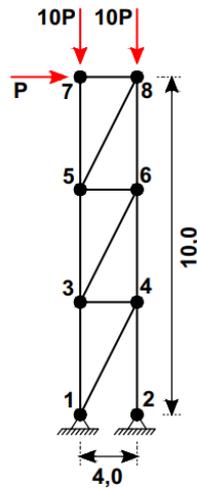
Fonte: Autoria própria.

A análise dos valores da carga crítica em P_{L1} e P_{L2} aponta para 8,11 kN e - 8,12 kN, respectivamente. Além disso, foram observados deslocamentos de 5,90 cm no nó central da estrutura em P_{L1} e de 19,90 cm em P_{L2} .

8.4 TORRE TRELIÇADA

A estrutura apresentada na Figura 8.10 foi estudada por Powell e Simons (1981) e trata-se de uma torre treliçada apoiada na base e solicitada por forças externas verticais e também horizontal. As propriedades das barras da estrutura possuem $A = 1 \text{ cm}^2$ (área da seção) e $E = 1000 \text{ kN/cm}^2$ (módulo de elasticidade longitudinal).

Figura 8.10 - Torre Trelaçada.



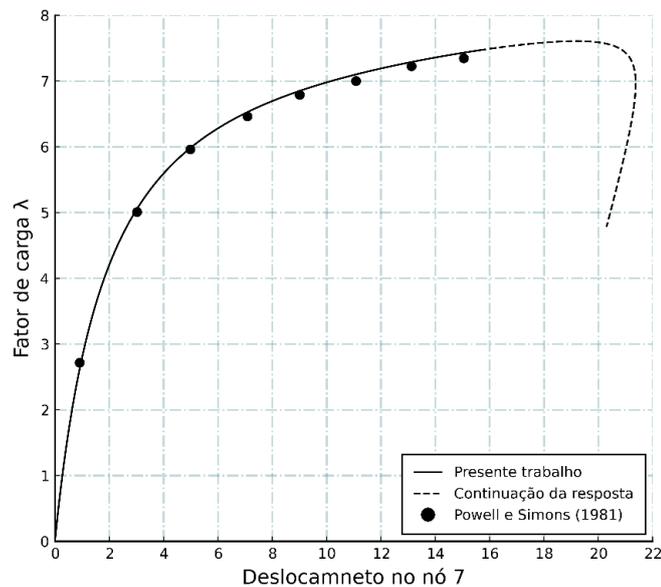
Fonte: Autoria própria.

Os parâmetros utilizados para solução numérica, foram:

- Número máximo de incrementos: $n_{max} = 180$;
- Número máximo de iterações: $i_{max} = 10$;
- Tolerância de convergência: $tol = 1 \times 10^{-5}$;
- Comprimento de arco inicial: $\Delta l = 0,01$;
- Número desejado de iterações para cada passo de carga: $N_d = 3$;
- Fator de razão do método do comprimento de arco: $\zeta = 0,5$.

Na Figura 8.11 é apresentada a trajetória de equilíbrio (curva fator de carga λ versus deslocamento nodal) para o nó 7 da estrutura. Todas as barras são consideradas com comportamento elástico.

Figura 8.11 - Trajetória de equilíbrio (torre Trelaçada).



Fonte: Autoria própria.

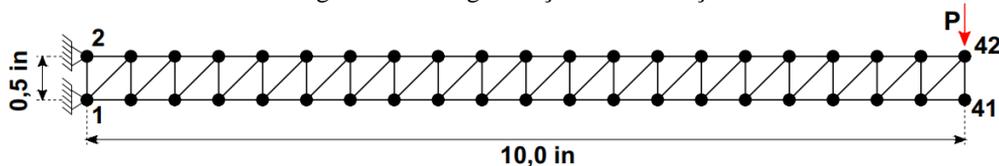
Os resultados obtidos por meio do código numérico implementado são comparados com aqueles obtidos por meio do autor de referência (Powell e Simons, 1981). Os resultados estão de acordo com obtidos pelos autores supracitados, validando mais uma vez a qualidade do código numérico implementado.

Além disso, conforme pode-se observar na Figura 8.11, por meio do código computacional desenvolvido pode-se ainda prosseguir com a obtenção da resposta, este fato é ilustrado pela trajetória tracejada do gráfico.

8.5 VIGA TRELIÇADA EM BALANÇO

Neste exemplo numérico investiga-se o comportamento de uma viga treliçada carregada por uma carga pontual em sua extremidade. Esta estrutura é conhecida como *cantilever truss*, e foi estudada por Yaw (2009). Todos os membros da treliça têm um área de seção transversal $A = 0,1 \text{ in}^2$ e módulo de elasticidade $E = 29000 \text{ ksi}$. A treliça possui 10 polegadas de comprimento, com membros verticais de 0,5 polegadas de comprimento e membros horizontais de 0,5 polegadas de comprimento, como ilustra a Figura 8.12. Como resultado da geometria e disposição das barras, a treliça possui no total 42 nós e 81 membros. Os resultados são avaliados no nó 42.

Figura 8.12 - Viga treliçada em balanço.



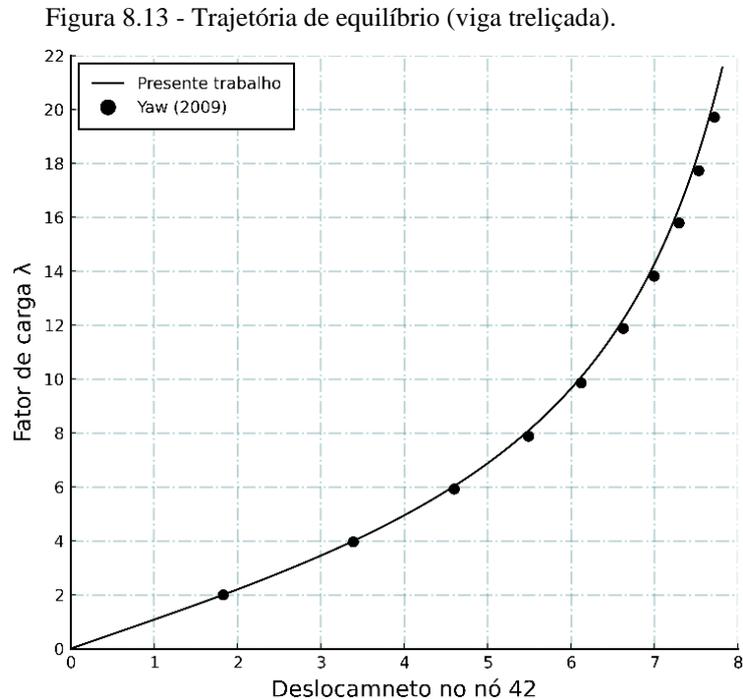
Fonte: Autoria própria.

Para análise do problema os seguintes parâmetros foram utilizados como dados de entrada no código numérico implementado:

- Número máximo de incrementos: $n_{max} = 250$;
- Número máximo de iterações: $i_{max} = 10$;
- Tolerância de convergência: $tol = 1 \times 10^{-4}$;
- Comprimento de arco inicial: $\Delta l = 0,25$;
- Número desejado de iterações para cada passo de carga: $N_d = 3$;
- Fator de razão do método do comprimento de arco: $\zeta = 0,5$.

Além disto, o tipo de deformação utilizada na análise foi a de engenharia e o comportamento do material foi considerado elástico. Os resultados obtidos por meio do código

numérico foram comparados com os encontrados em Yaw (2009). Podemos visualizar na Figura 8.13 a coincidência entre eles, atestando mais uma vez a qualidade da ferramenta desenvolvida.



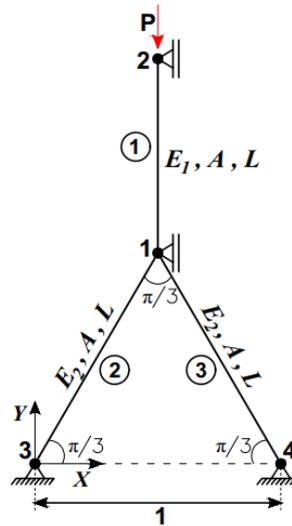
Fonte: Autoria própria.

Diante do resultado apresentado podemos verificar que para pequenas cargas a curva fator de carga *versus* deslocamento apresenta um comportamento linear, porém a medida que a intensidade da carga aumenta a curva evidencia o comportamento não linear da trajetória de equilíbrio da estrutura. Além disso, a medida que a carga aumenta e a configuração geométrica da estrutura se altera significativamente, a estrutura torna-se mais rígida (a curva apresenta comportamento reto). De acordo com Yaw (2009) esta característica é causada pelo enrijecimento por tração da treliça em sua configuração deformada.

8.6 TRELIÇA PLANA COM BARRAS ARTICULADAS

Este exemplo numérico consiste em uma treliça plana com 3 barras articuladas. As barras 2 e 3 formam a configuração de um triângulo equilátero como visualizado na Figura 8.14. Todas as barras possuem área de seção unitária, já o módulo de elasticidade se diferem entre elas. A barra 1 possui módulo de elasticidade $E_1 = 1,0 \text{ kN/cm}^2$, enquanto as barras 2 e 3 possuem módulo de elasticidade $E_2 = 10,00 \text{ kN/cm}^2$. Além disso, todas as barras possuem mesmo comprimento e área unitária ($L = 1 \text{ cm}$).

Figura 8.14 - Treliça plana com 3 barras.

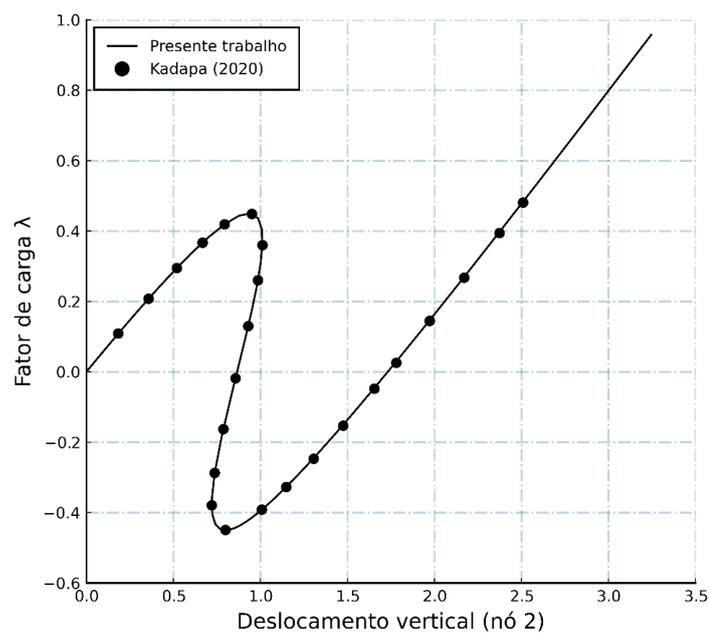


Fonte: Autoria própria.

Os seguintes parâmetros foram utilizados como dados de entrada no código numérico implementado:

- Número máximo de incrementos: $n_{max} = 52$;
- Número máximo de iterações: $i_{max} = 10$;
- Tolerância de convergência: $tol = 1 \times 10^{-5}$;
- Comprimento de arco inicial: $\Delta l = 0,05$;
- Número desejado de iterações para cada passo de carga: $N_d = 3$;
- Fator de razão do método do comprimento de arco: $\zeta = 0,5$.

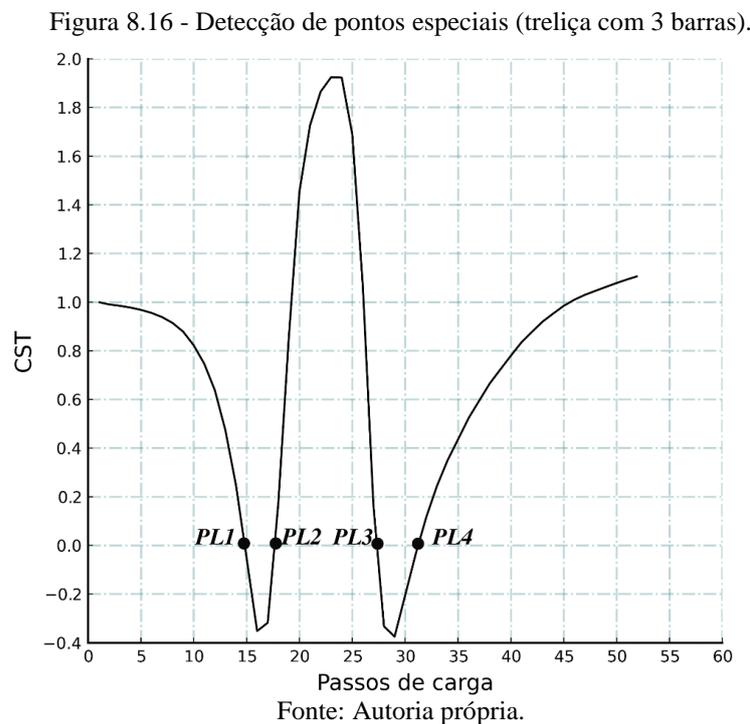
Figura 8.15 - Trajetória de equilíbrio (treliça com 3 barras).



Fonte: Autoria própria.

A Figura 8.15 mostra a trajetória de equilíbrio (curva deslocamento vertical *versus* fator de carga λ) do nó 2 da estrutura. A trajetória apresenta alguns pontos especiais (pontos limites e *turning points*), havendo boa concordância com a curva de equilíbrio estrutural obtida por Kadapa (2020).

Os pontos são obtidos com previsão por meio da anulação do parâmetro de rigidez *CST* (Figura 8.16). Os pontos limites de carga são identificados por linhas tangentes horizontais na curva de equilíbrio, enquanto que os *turning points* são caracterizados por tangentes verticais a trajetória.



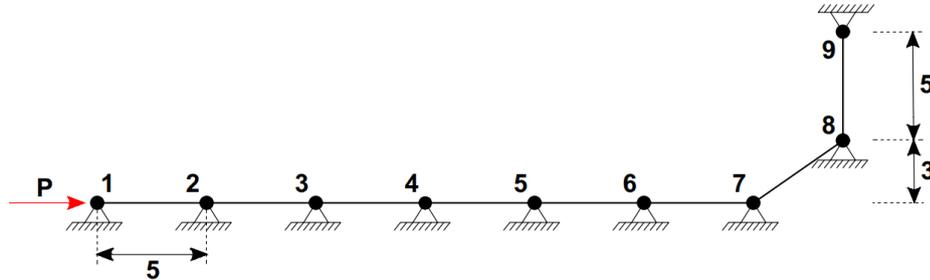
O ponto P_{L1} é definido como um ponto limite de carga, onde a carga atinge o valor crítico de 0,45 kN. Este ponto é alcançado no passo de carga 15. Já o ponto P_{L2} é considerado um *turning point*, e é atingido no passo de carga 18, com valor de deslocamento igual a 1,01 cm. O terceiro ponto P_{L3} é atingido no passo de carga 27 e trata-se também de um *turning point*. Neste ponto o deslocamento vale 0,72 cm. Por fim, o último ponto da trajetória P_{L4} é um ponto de limite de carga, atingido no passo de carga 31, com um valor crítico de -0,45 kN.

8.7 ESTRUTURA COM VÁRIAS BARRAS

Este exemplo corresponde a uma rede de barras interligadas estudada por vários autores, entre eles Powell e Simons (1981). A estrutura é constituída de 6 barras horizontais, 1 barra inclinada e 1 barra vertical, totalizando oito barras e nove nós. Todas as barras possuem rigidez

axial igual a $EA = 3,0 \times 10^6$ e as características geométricas deste problema são apresentadas na Figura 8.17. Uma força horizontal unitária é aplicada no nó 1 da estrutura e a trajetória de equilíbrio é analisada para os nós 1 e 7.

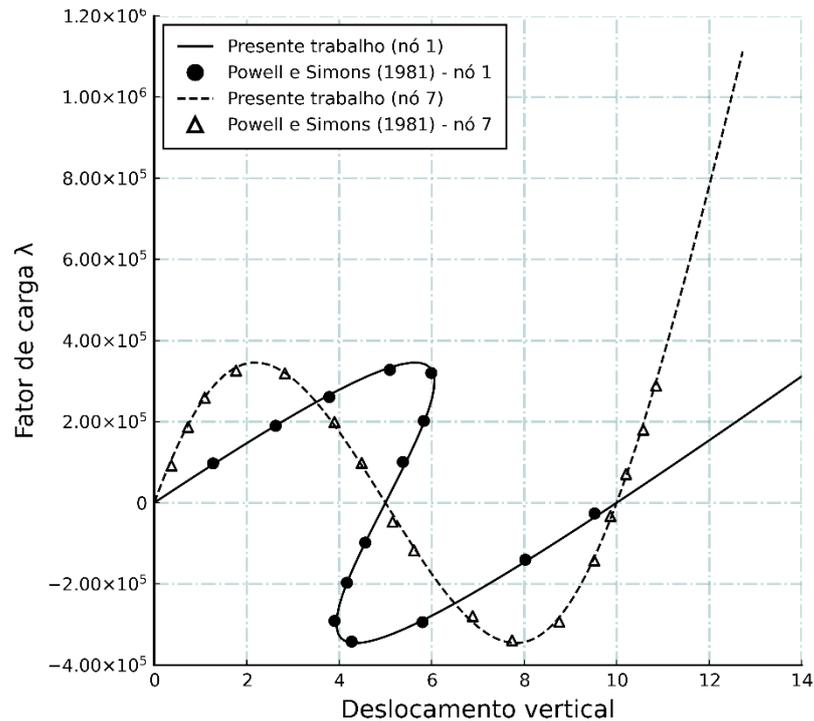
Figura 8.17 - Estrutura com barras interligadas.



Fonte: Autoria própria.

A Figura 8.18 apresenta as trajetórias de equilíbrio para os nós 1 e 7. As respostas são idênticas às contidas em Powell e Simons, o que evidencia a precisão da implementação.

Figura 8.18 - Trajetória de equilíbrio (estrutura com barras interligadas).



Fonte: Autoria própria.

Como pode-se visualizar, as trajetórias de equilíbrio apresentam vários pontos limites de carga e também pontos de viragem (ou *turning points*), sendo estes caracterizados respectivamente por tangentes horizontais e verticais.

Para o nó 1, os limites críticos de carga alcançados são: $+3,45 \times 10^5$ e $-3,46 \times 10^5$, respectivamente. Como era previsto, o nó 7 apresenta valores críticos de carga idênticos.

Os seguintes parâmetros foram utilizados como dados de entrada no código numérico

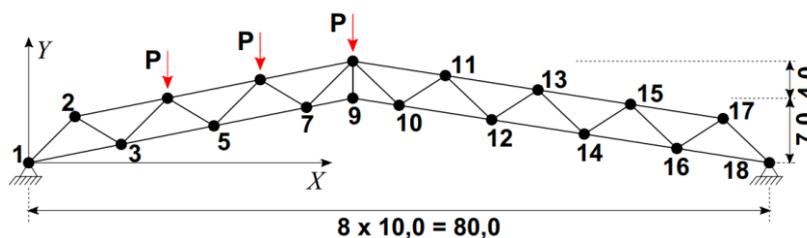
implementado:

- Número máximo de incrementos: $n_{max} = 85$;
- Número máximo de iterações: $i_{max} = 10$;
- Tolerância de convergência: $tol = 1 \times 10^{-5}$;
- Comprimento de arco inicial: $\Delta l = 0,5$;
- Número desejado de iterações para cada passo de carga: $N_d = 3$;
- Fator de razão do método do comprimento de arco: $\zeta = 0,5$.

8.8 TRELIÇA ARTICULADA 2D ASSIMÉTRICA

Este problema também foi estudado por Powell e Simons (1981). Trata-se de uma treliça assimétrica plana em forma de arco, constituída por 33 elementos e 18 nós, submetida a três carregamentos pontuais aplicados na direção vertical sobre os nós 4, 6 e 8. Devido a assimetria tanto das cargas quanto de geometria, a trajetória de equilíbrio apresenta uma configuração complexa e sua obtenção só é viável por meio de técnicas mais avançadas de solução como o método de comprimento de arco. Cabe destacar que, a análise deste problema é de bastante interesse pois a trajetória de equilíbrio da estrutura apresenta vários pontos limites de carregamento e de deslocamento. As barras da treliça possuem rigidez axial adimensional $EA = 9,0 \times 10^6$ e os dados geométricos do problema, assim como a malha de elementos finitos utilizada é apresentada na Figura 8.19.

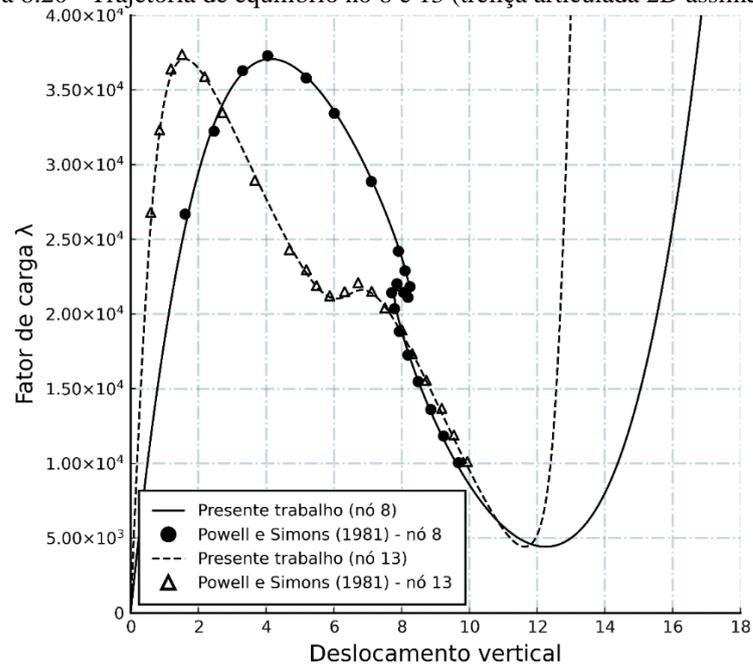
Figura 8.19 - Treliça articulada 2D assimétrica.



Fonte: Autoria própria.

Na Figura 8.20 são apresentados as trajetórias de equilíbrio obtidas com a formulação implementada, para os nós 8 e 13 da estrutura. Ao comparar os resultados obtidos por meio da ferramenta com os obtidos pelos autores Powell e Simons (1981) estes se mostram bastante precisos, assim como ilustrado.

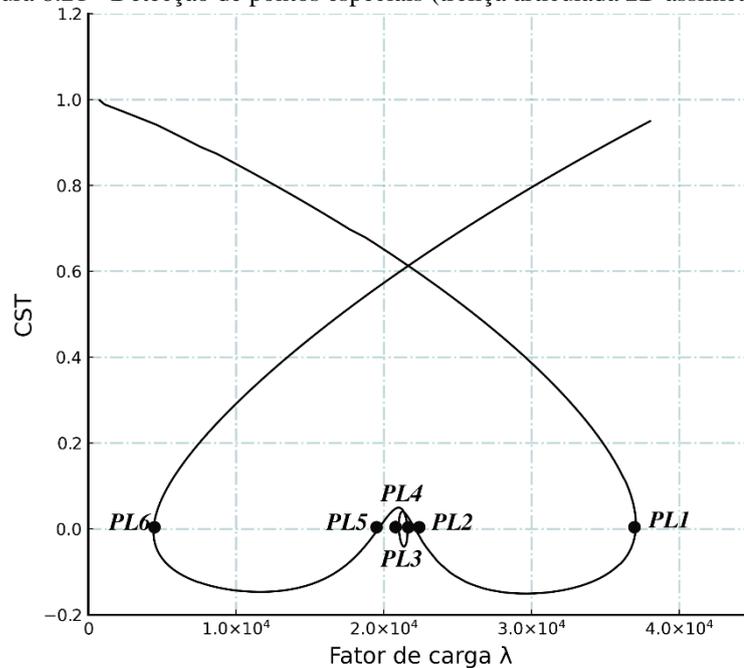
Figura 8.20 - Trajetória de equilíbrio nó 8 e 13 (treliça articulada 2D assimétrica).



Fonte: Autoria própria.

É possível visualizar na Figura 8.20 que por meio do código computacional pode-se ainda prosseguir com a obtenção da resposta. Além disso, as trajetórias de equilíbrio apresentam vários pontos especiais. Na Figura 8.21, o parâmetro de rigidez *CST* anula-se 6 vezes, sendo 4 correspondentes a pontos limites de carga e 2 correspondentes a pontos de viragem.

Figura 8.21 - Detecção de pontos especiais (treliça articulada 2D assimétrica).

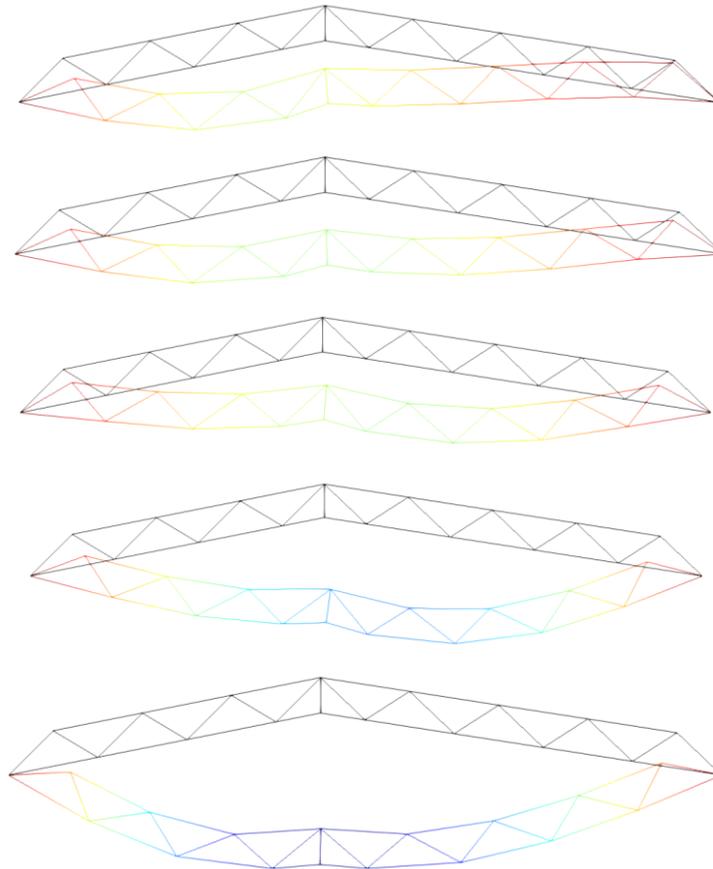


Fonte: Autoria própria.

O ponto P_{L1} é definido como um ponto limite de carga, neste ponto o valor crítico do carregamento é igual a $3,70 \times 10^4$. O ponto P_{L2} trata-se de um ponto de viragem. Já o ponto P_{L3} é considerado um ponto limite de carga. Neste ponto a carga atinge valor igual a $2,16 \times 10^4$. O ponto P_{L4} também é um ponto limite de carga, neste o valor do carregamento é igual a $2,10 \times 10^4$. O quinto ponto limite P_{L5} é um ponto de viragem. Por fim, o último ponto especial da trajetória P_{L6} trata-se de ponto de limite de carga com um valor crítico de $4,42 \times 10^3$.

Em virtude da assimetria geométrica e também de carregamento da estrutura, inicialmente o lado esquerdo da treliça sofre mais deslocamento. Após o aumento gradual de carga esta situação se inverte, como ilustra a Figura 8.22. Pode-se visualizar também que a estrutura se afasta de sua configuração inicial à medida que a força é incrementada.

Figura 8.22 - Deformadas ao longo de processo incremental (treliça articulada 2D assimétrica).



Fonte: Autoria própria.

Neste problema os seguintes parâmetros foram utilizados como dados de entrada no código numérico implementado:

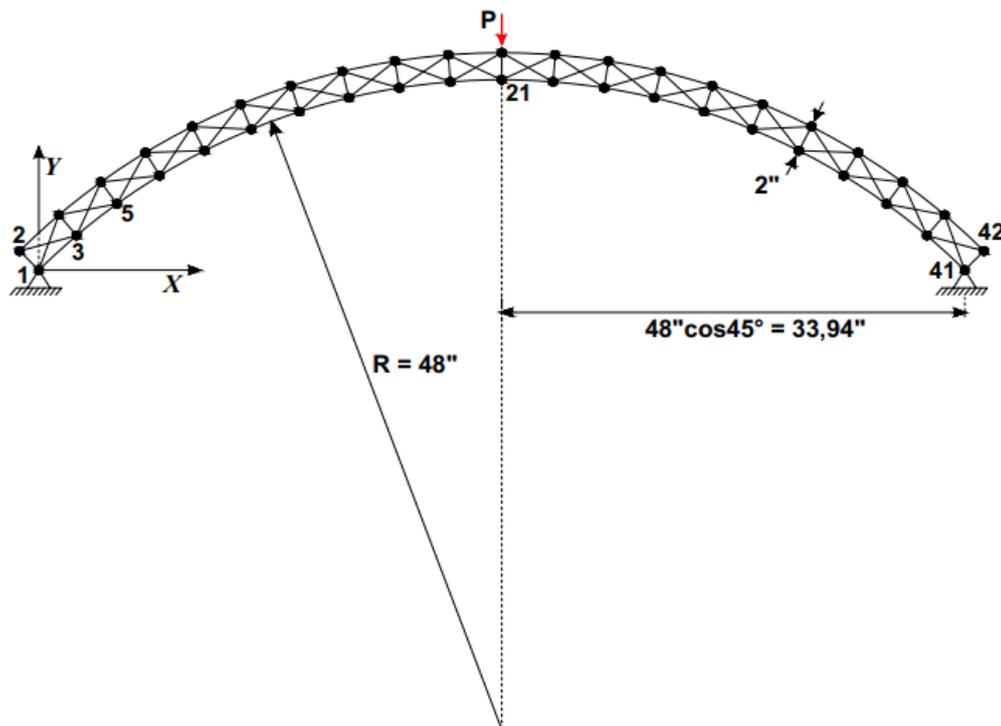
- Número máximo de incrementos: $n_{max} = 300$;
- Número máximo de iterações: $i_{max} = 10$;
- Tolerância de convergência: $tol = 1 \times 10^{-6}$;

- Comprimento de arco inicial: $\Delta l = 0,1$;
- Número desejado de iterações para cada passo de carga: $N_d = 3$;
- Fator de razão do método do comprimento de arco: $\zeta = 0,5$.

8.9 ARCO DE TRELIÇA DE CRISFIELD

O arco de treliça analisado neste trabalho foi estudado inicialmente por Crisfield (1997) entre outros autores (HRINDA, 2010; LACERDA, 2014; MENIN 2006). O modelo possui 101 elementos com 42 nós. Neste exemplo numérico examina-se uma trajetória de equilíbrio com vários *snaps-through* e *snaps-back*. A malha de elementos finitos e as características geométricas do problema são apresentadas na Figura 8.23. As barras possuem rigidez axial $EA = 5,0 \times 10^7$.

Figura 8.23 - Arco de Crisfield.



Fonte: Autoria própria.

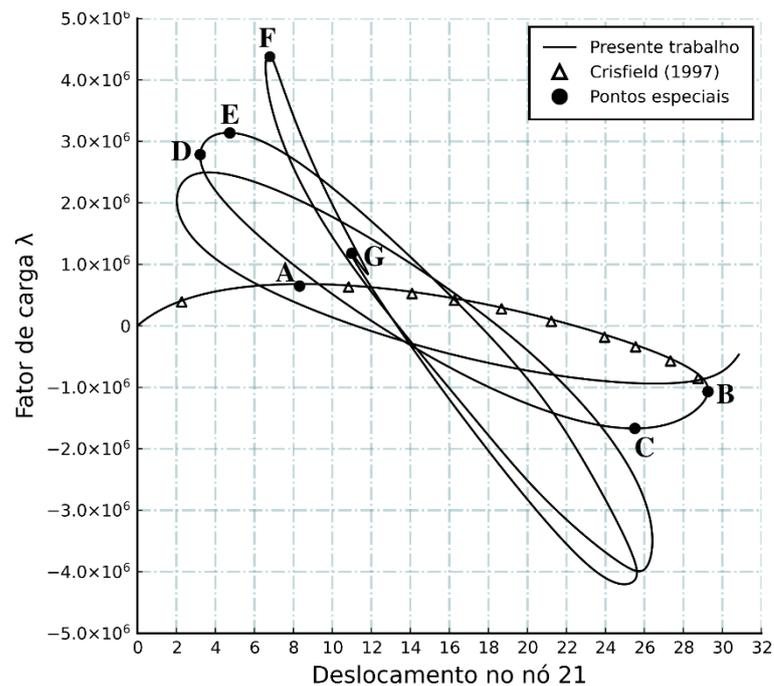
Neste exemplo numérico os seguintes parâmetros foram utilizados como dados de entrada no código numérico implementado:

- Número máximo de incrementos: $n_{max} = 2750$;
- Número máximo de iterações: $i_{max} = 10$;
- Tolerância de convergência: $tol = 1 \times 10^{-6}$;
- Comprimento de arco inicial: $\Delta l = 0,1$;

- Número desejado de iterações para cada passo de carga: $N_d = 3$;
- Fator de razão do método do comprimento de arco: $\zeta = 0,5$.

A Figura 8.24 apresenta o caminho de equilíbrio da estrutura. Os resultados obtidos por meio do código numérico implementado são comparados com os resultados obtidos pelo autor de referência (Crisfield, 1997). Os resultados estão de acordo com obtidos pelo autores supracitado, validando mais uma vez a qualidade do código numérico implementado.

Figura 8.24 - Trajetória de equilíbrio (arco de Crisfield).



Fonte: Autoria própria.

Este exemplo numérico trata-se de um problema bastante complexo e que apresenta ao longo da trajetória de equilíbrio diversos pontos especiais, como pontos limites de carga e também *turning points*.

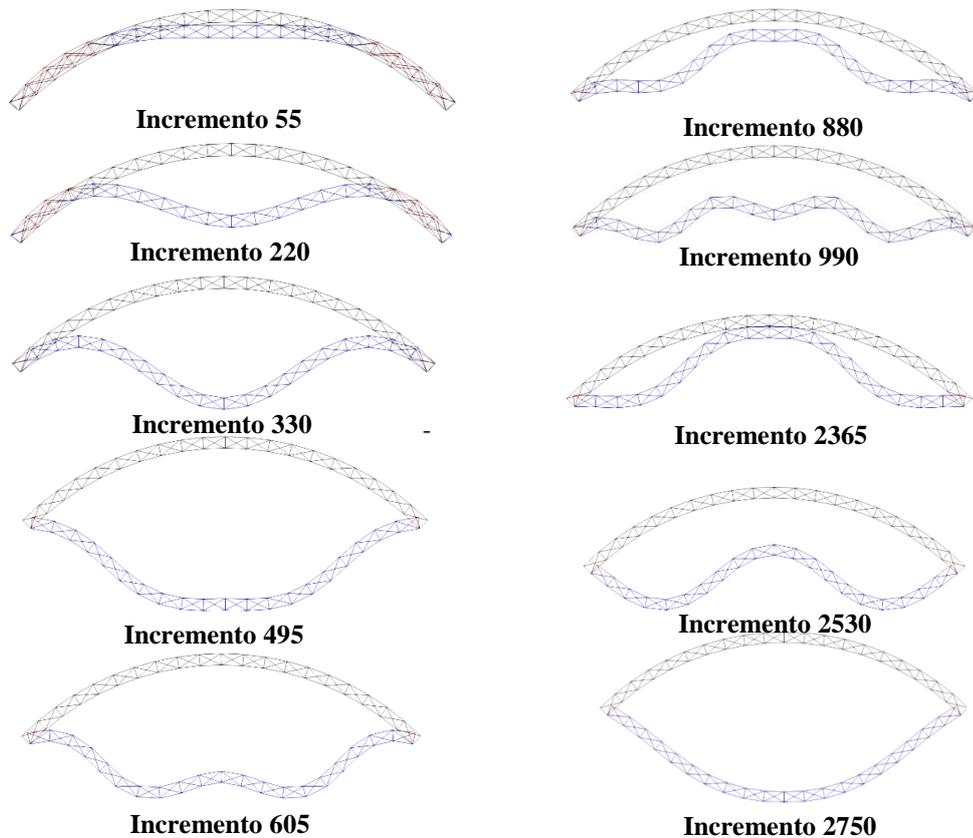
No ponto **A** acontece o primeiro *snap-through*, uma vez que neste ponto a tangente ao caminho de equilíbrio é paralela ao eixo de deslocamento. Além disto, o valor da carga neste ponto limite é igual a $6,7963 \times 10^5$ e o deslocamento vertical assume valor aproximadamente igual a 8,45.

Um *snap-back* começa no ponto **B** e continua do ponto **C** até o ponto **D**. Neste último ponto a tangente ao caminho de equilíbrio é paralela ao eixo de carga, ou seja, trata-se de um *turning point*. O caminho do equilíbrio agora continua para o ponto **E**, onde começa outro *snap-through*. Este ponto corresponde a um ponto limite de carga, em que o valor do carregamento assume valor aproximadamente igual a $3,14 \times 10^6$.

O ponto **F** também é caracterizado pelo o fenômeno de *snap-through*. Neste ponto, o valor de carga é igual a $4,42 \times 10^6$, sendo este o valor crítico de carga encontrado para a análise em questão.

Por fim, no ponto **G** acontece uma mudança brusca na trajetória equilíbrio e a estrutura que vinha sendo tracionada volta a ser comprimida, originando um novo ponto de *snap-through*. Na Figura 8.25 apresenta-se algumas das configurações deformadas da estrutura ao longo do processo incremental.

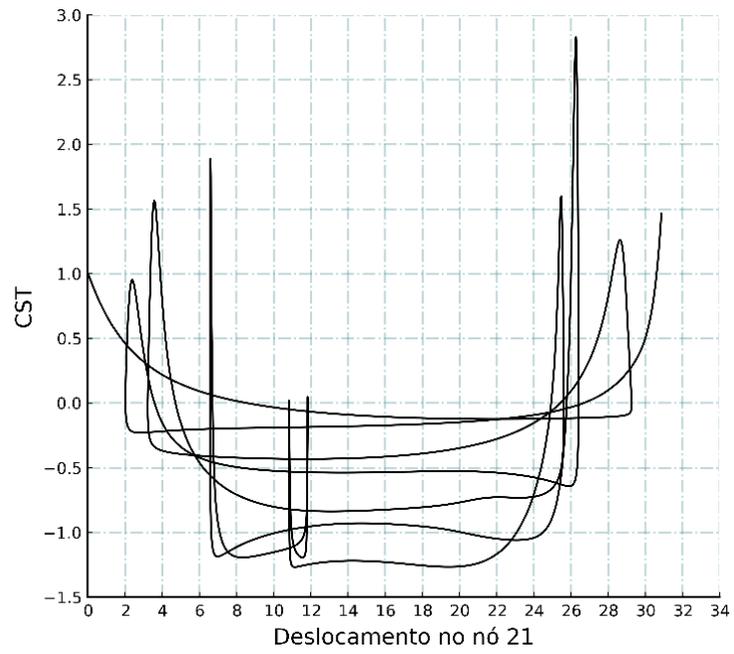
Figura 8.25 - Deformadas ao longo do processo incremental (arco de Crisfield).



Fonte: Autoria própria.

Utilizando o parâmetro de rigidez *CST* podemos visualizar que após uma sequência de mudanças bruscas na trajetória de equilíbrio a estrutura começa a ganhar rigidez de maneira gradual (Figura 8.26). Nesta situação, o banzo superior do arco treliçado passa ser solicitado apenas à tração.

Figura 8.26 - Detecção de pontos especiais (arco de Crisfield).



Fonte: Autoria própria.

9 CONCLUSÕES

Em projetos complexos a realização de uma análise não linear é uma tarefa necessária para o desenvolvimento de projetos seguros, econômicos e eficientes. Esse tipo de análise é realizada por meio de algoritmos numéricos incrementais e iterativos. Para tanto, em virtude da necessidade de resolução dos sistemas de equações não lineares, inerentes a formulação do problema na obtenção das trajetórias de equilíbrio foram utilizados o método de Newton-Raphson associado ao método do comprimento de arco.

Adicionalmente, a formulação corrotacional foi utilizada como descrição cinemática para capturar o comportamento não linear geométrico de treliças planas. Por outro lado, o modelo elastoplástico unidimensional foi empregado para analisar o comportamento não linear físico.

O objetivo deste trabalho foi fornecer uma introdução aos conceitos básicos das formulações usadas na análise não linear de treliças planas, visando uma compreensão inicial e ao mesmo tempo sólida, dos aspectos de implementação computacional dos fenômenos não lineares.

O algoritmo implementado na linguagem de programação livre *Scilab* foi usado para analisar várias treliças clássicas na literatura. Essas estruturas apresentaram trajetórias de equilíbrio com múltiplos *snap-throughs* e *snap-backs*. Os resultados foram apresentados graficamente, permitindo a visualização de pontos especiais e a discussão das diferentes trajetórias de equilíbrio obtidas. Além disso, o parâmetro de rigidez *CST* foi utilizado para uma detecção precisa de pontos limites e *turning points*.

Além disso, para a maioria dos problemas numéricos abordados neste trabalho, foram apresentados os valores críticos das cargas obtidos nas análises. Este resultado é crucial para fins de dimensionamento, já que permite o entendimento da capacidade de carga máxima suportada pela estrutura. Além disso, garante que o dimensionamento seja realizado considerando o cenário de pior carga possível.

Por fim, destaca-se que as formulações utilizadas neste trabalho apresentaram boa qualidade ao traçar todos os caminhos de equilíbrio. Ademais, os resultados obtidos apresentaram boa concordância com os apresentados em outros estudos realizados por outros pesquisadores de referência da área. Vale destacar também que, para alguns problemas, o algoritmo foi capaz de obter a resposta estrutural além daquelas encontrados em alguns

trabalhos. Logo, a ferramenta implementada e utilizada para análise dos problemas foi validada e sua performance mostrou-se eficiente.

9.1 SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS

Apresentam-se algumas sugestões para futuras linhas de investigação, a fim de abordar aspectos não estudados no presente trabalho:

- Utilização de várias medidas de deformações;
- Avaliação do comportamento de diferentes métodos para obtenção da resposta não linear;
- Utilização de outros tipos de descrições cinemáticas;
- Realização de estudo para treliças tridimensionais.

REFERÊNCIAS

ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. **NBR 8800**: Projeto de Estruturas de Aço e de Estruturas Mistas de Aço e Concreto de Edifícios. Rio de Janeiro, 2008.

ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. **NBR 6118**: Projeto e execução de obras de concreto armado e protendido- Procedimento. Rio de Janeiro, 2014.

AZEVEDO, Álvaro F. M. **Método dos elementos finitos**. Porto: Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto, 2003. 248 p.

BATHE, Klaus-Jürgen. **Finite Element Procedures**. Englewood Cliffs: Prentice-Hall, 2006. 1037 p.

BAZZANO, Juan B; ZERPA, Jorge P. **Introducción al análisis no lineal de Estructuras**. Creative Commons Attribution-ShareAlike 4.0 International License, 2017.

BELYTSCHKO, Ted; LIU, Wing Kam; MORAN, Brian. **Nonlinear Finite Elements for Continua and Structures**. Reino Unido: John Wiley, 2000. 834 p.

BERGAN, P. G. **Solution algorithms for nonlinear structural problems**. Computers and Structures. v. 12, n. 4, p. 497–509, 1980.

BEZERRA, Luciano M.; FREITAS, André S.; MATIAS, Taylor W.; YOSIAKI, Nagato. **Increasing load capacity of steel space trusses with end flattened connections**. Journal of Constructional Steel Research. Elsevier, p. 2197–2206, 2009.

BORGES, Ana Cláudia L. **Análise de pilares esbeltos de concreto armado solicitados a flexocompressão oblíqua**. 1999. 98 f. Dissertação (Mestrado) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, 1999.

CHEN, Wai-Fah; HAN, Da-Jian. **Plasticity for structural engineers**. Sprinler-Verlag, New York, USA. 1988.

CRISFIELD, Michael A. **Non-Linear Finite Element Analysis of Solids and Structures: Volume I Essentials**, John Wiley & Sons, Chichester, UK, 1991.

CRISFIELD, Michael A. **Non-Linear Finite Element Analysis of Solids and Structures: Volume II: Advanced Topics**, John Wiley & Sons, Chichester, UK, 1997.

EUROPEAN COMMITTEE FOR STANDARDIZATION (CEN). **Eurocode 2: Design of concrete structures - Part 1-1: General rules and rules for buildings**. EN 1992-1-1. Brussels. 2004.

FISH, Jacob; BELYTSCHKO, Ted. **A first course in finite elements**. S. L: Wiley, 2007. 319 p.

FLEURY, Maria Tereza Leme; WERLANG, Sérgio. **Pesquisa aplicada**: reflexões sobre conceitos e abordagens metodológicas. 2018. Disponível em https://bibliotecadigital.fgv.br/dspace/bitstream/handle/10438/18700/A_pesquisa_aplicada_conceito_e_abordagens_metodol%C3%B3gicas.pdf?sequence=6&isAllowed=y. Acesso em: 15 jan. 2023.

GERE, J; WEAVER, W. **Análise de estruturas reticuladas**. Editora Guanabara, Rio de Janeiro, Brasil, 1981.

GIL, Antonio Carlos. **Como elaborar projetos de pesquisa**. 4. ed. São Paulo: Atlas, 2002. 175 p.

GILAT, Amos; SUBRAMANIAN, Vish. **Métodos Numéricos para Engenheiros e Cientistas**. Porto Alegre/RS: Bookman, 2008.

GOMES, Maria Idália da Silva. **Estudo e Análise de Treliças**. 2016. 30 f. Instituto Superior Engenharia de Lisboa – Área Departamental de Engenharia Civil, 2016 (Notas de aula/Apostila).

HRINDA, Glenn. **Geometrically nonlinear static analysis of 3d trusses using the arclength method**. Comput. Methods and Experimental Measurements, p. 243–252, 2007. WIT Press, vol. XIII.

HRINDA, Glenn. **Snap-through instability patterns in truss structures**. In: 51st AIAA/ASME/ASCE/AHS/ASC Structures, Structural Dynamics, and Materials Conference 18th AIAA/ASME/AHS Adaptive Structures Conference 12th. Orlando, Florida, 2010. p. 2611.

KIMURA, Alio. **Informática aplicada a estruturas de concreto armado**. 2. ed. São Paulo: Oficina de Textos, 2018.

KOUSHKY, A; DEHDASHTI, G; IOUZ, A. **Nonlinear Analysis of Double-Layer Grids with Compositi e Nodes under Symmetric and nsymmetrical Gra ity oads**. International Journal of Space Structures, vol. 22, n. 2, p. 133–140. 2007.

LACERDA, Estéfane Georfe Macedo de. **Análise não linear de treliças pelo método dos elementos finitos posicional**. 2014. 92 f. Dissertação de Mestrado em Engenharia Civil – Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Natal, 2014.

LEMAITRE, J.; CHABOCHE, J-L. **Mechanics of Solids Materials**. Cambridge University Press, Cambridge, UK. 1994.

MACIEL, Rui Miguel da Costa Alves. **Método dos elementos finitos aplicado à análise de sólidos**: concepção e implementação. 2013. 159 f. Dissertação (Mestrado) - Curso de Engenharia Civil, Instituto Superior Técnico, Universidade Técnica de Lisboa, Lisboa, 2013.

MAGALHÃES, João Ricardo Maia de. **Sobre o projeto e a construção de estruturas metálicas espaciais**. 1996. 134 f. Dissertação (Mestrado) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, 1996.

MAKOWSKI, Zygmunt Stanislaw. **Estructuras espaciales de acero**. 2º ed. Editorial Gustavo Gili, Barcelona, 1972.

MENIN, Renato César. G. **Aplicação da descrição cinemática co-rotacional na análise não-linear geométrica de estruturas discretizadas por elementos finitos de treliças, vigas e cascas**. 2006. 172 f. Tese de Doutorado em Estruturas e Construção Civil – Universidade de Brasília, Distrito Federal, 2006.

MUÑOZ-ROJAS, Pablo Andrés; DUARTE FILHO, Luiz Alberto. **Análise Não-Linear Geométrica e Material de Treliças Espaciais: Programa ATENAS**. 2001. 129 f. Caderno de Engenharia, Curso de Pós-Graduação em Engenharia Civil – PPGEC, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2001.

OWEN, D. R. J.; HINTON, E. **Finite Elements in Plasticity: Theory and Practice**. Pineridge, Swansea, UK. 1980.

PEREIRA, Anderson. **Projeto ótimo de pórticos planos com restrição à flambagem**. 2002. 99 f. Dissertação (Mestrado) – Programa de Pós Graduação em Engenharia Civil, Departamento de Engenharia Civil, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2002.

POWELL, G; SIMONS, J. **Improved iteration strategy for nonlinear structures**. International Journal for Numerical Methods in Engineering, vol. 17, n. 10, p. 1455-1467, 1981.

RAMASWAMY, Guruvayour S.; EEKHOUT, M.; SURESH, G. R. **Analysis, Design and Construction of Steel Space Frames**. Thomas Tel. Lonon: Thomas Telford Publishing, 2002.

RANGEL, Rafael Lopez. **Educational Tool for Structural Analysis of Plane Frame Models with Geometric Nonlinearity**. 2019. 200 f. Dissertação (mestrado) – Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Departamento de Engenharia Civil e Ambiental, 2019.

REDE DO ESPORTE, 2015. Disponível em <http://rededoesporte.gov.br/pt-br/noticias/em-ampliacao-para-as-olimpiadas-obras-no-galeao-atingem-75-de-execucao>. Acesso em: 04 jan. 2023.

SABATTO, Steeve. **Konrad Wachsmann. (1901-1980): arpenteur de la pensée-machine dans la conception architecturale**. Histoire de l'art, v. 67, n. 1, p. 103-112, 2010.

SILVA, Sebastião Simão da. **Utilização de elementos finitos de alta performance e da formulação co-rotacional na análise inelástica de placas e lâminas**. 2019. 199 f. Tese de Doutorado em Estruturas e Construção Civil – Universidade de Brasília, Distrito Federal, 2019.

SILVA, Welington Vital da. **Estudo experimental, estático e dinâmico, analítico e numérico de estruturas tridimensionais em aço com correções na ligação típica**

estampada. 2020. 390 f. Tese de Doutorado em Estruturas e Construção Civil – Universidade de Brasília, Distrito Federal, 2020.

SILVA, Welington V.; BEZERRA, Luciano M.; FREITAS, André S; SILVA, Ramon S. Y. R. **Experimental analysis of steel space trusses with correction of the stamped connection with glass fiber reinforced polymer spacer**. International Journal Of Engineering Sciences & Research Technology, p. 1–11, 2018.

SIMO, Juan. C.; HUGHES, Thomas. J. R. **Computacional Inelasticity**. Sprinler-Verlag, New York, USA, 1998.

SOUZA, A. S. C; Gonçalves, R. M; Maiola, C. H; Malite, M. **Theoretical Analysis of the Structural erformance of Space Trusses Commonly sed inrazil**. International Journal of Space Structures. International Journal of Space Structures. p. 167–179. 2003.

SOUTELLO, Gabriela. **Contagem regressiva: O Rio pré-Olimpíadas**. 2015. Disponível em <https://www.dw.com/pt-br/contagem-regressiva-o-rio-pr%C3%A9-olimp%C3%ADadas/g-18628652>. Acesso em: 04 jan. 2023.

SUSSEKIND, José Carlos. **Curso de análise estrutural**. 6. ed. Porto Alegre: Editora Globo, 1981.v 1.

SÜSSEKIND, José Carlos. **Curso de análise estrutural**. 6.ed. Porto Alegre: Editora Globo, 1980. v. 2

UOL. Disponível em <https://copadomundo.uol.com.br/noticias/redacao/2013/12/25/arena-das-dunas-tera-inauguracao-simbolica-dia-31-e-jogo-oficial-em-janeiro.htm>. Acesso em: 04 jan. 2023.

YAW, L. L. **2D Co-rotational Truss Formulation**. Walla Walla University, 2009.

ZIENKIEWICZ, Olek C.; TAYLOR, Robert L. **The Finite Element Method for Solid and Structural Mechanics**. 6. ed. Holanda: Elsevier Science, 2005. 1872 p.

APÊNDICE A – Resultados Numéricos

Neste apêndice são apresentados os resultados numéricos completos obtidos por meio do código computacional implementado na linguagem de programação *Scilab* para o problema numérico da Treliça de von Mises estudado no capítulo 8.3 do presente trabalho.

Tabela 2 – Resultados numéricos: Treliça de von Mises (material elástico).

Treliça de von Mises: Material elástico		
Passos de Carga	Deslocamento (cm)	Fator de Carga (kN)
0	0	0
1	0,01	0,028902635
2	0,027320508	0,078842169
3	0,057320508	0,164975948
4	0,109282032	0,313071245
5	0,199282032	0,566297961
6	0,355166605	0,99503647
7	0,625166605	1,707961053
8	1,092820323	2,853402862
9	1,902820323	4,568013237
10	2,902820323	6,213460339
11	3,902820323	7,343323912
12	4,902820323	7,971030903
13	5,902820323	8,119081818
14	6,902820323	7,819703122
15	7,902820323	7,11515149
16	8,902820323	6,057582721
17	9,902820323	4,708422478
18	10,90282032	3,137213756
19	11,90282032	1,419963989
20	12,90282032	-0,362933042
21	13,90282032	-2,129076799
22	14,90282032	-3,796580943
23	15,90282032	-5,286557861
24	16,90282032	-6,525393568
25	17,90282032	-7,446665673
26	18,90282032	-7,992599406
27	19,90282032	-8,11500777
28	20,90282032	-7,775713282
29	21,90282032	-6,946493203
30	22,90282032	-5,608622655
31	23,90282032	-3,7521087
32	24,90282032	-1,374713813
33	25,90282032	1,519138096
34	26,90282032	4,919492661
35	27,90282032	8,811969172
36	28,90282032	13,1787915

Fonte: Autoria própria.

Tabela 3 – Resultados numéricos: Treliça de von Mises (material elastoplástico).

Treliça de von Mises: Material elastoplástico		
Passos de Carga	Deslocamento (cm)	Fator de Carga (kN)
0	0,00000000000000	0,000000000000000
1	0,01000000000000	0,0289026350191064
2	0,02732050807569	0,0788421688050379
3	0,05732050807569	0,1649759479106680
4	0,10928203230276	0,3130712450716630
5	0,19928203230276	0,5662979607011350
6	0,35516660498395	0,9950364701688130
7	0,62516660498395	1,3506799097035000
8	1,09282032302755	1,8938209896189900
9	1,90282032302755	2,7021917738278700
10	2,90282032302755	3,4685262500733400
11	3,90282032302755	3,9814702845292200
12	4,90282032302755	4,2476227309431100
13	5,90282032302755	4,2780417641966200
14	6,90282032302755	4,0885655131417400
15	7,90282032302755	3,6999615872603800
16	8,90282032302755	3,1378626538232100
17	9,90282032302755	2,4324571789363200
18	10,90282032302750	1,6179230002933900
19	11,90282032302750	0,7316149907948450
20	12,90282032302750	-0,1869562467747700
21	13,90282032302750	-1,0869633126735800
22	14,90282032302750	-1,8947353228000500
23	15,90282032302750	-2,5365067463784500
24	16,90282032302750	-2,9434432696215900
25	17,90282032302750	-3,0534352314723800
26	18,90282032302750	-2,8124591123499300
27	19,90282032302750	-2,1754566410447900
28	20,90282032302750	-1,1067291551853600
29	21,90282032302750	0,4201136153239050
30	22,90282032302750	2,4225807613451100
31	23,90282032302750	4,9100163928602800
32	24,90282032302750	7,8845127547585900
33	25,90282032302750	10,8777412723668000
34	26,90282032302750	13,0840914837895000
35	27,90282032302750	15,4975271603815000
36	28,90282032302750	18,1105680874568000

Fonte: Autoria própria.