

INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA DA  
PARAÍBA  
*CAMPUS CAJAZEIRAS*

JOÃO VITOR NOGUEIRA GOMES  
VALDEIR BALTAZAR DA SILVA

**ESTUDO ANALÍTICO E NUMÉRICO DE PLACAS RETANGULARES**

Cajazeiras-PB  
2022

JOÃO VITOR NOGUEIRA GOMES  
VALDEIR BALTAZAR DA SILVA

**ESTUDO ANALÍTICO E NUMÉRICO DE PLACAS RETANGULARES**

Trabalho de Conclusão de Curso submetido à Coordenação do Curso de Bacharelado em Engenharia Civil do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia da Paraíba-*Campus* Cajazeiras, como parte dos requisitos para a obtenção do Título de Bacharel em Engenharia Civil, sob Orientação do Prof. Dr. Sebastião Simão da Silva e Coorientação do Prof. Me. Iuri Augusto Alves Lustosa.

Cajazeiras-PB  
2022

IFPB / Campus Cajazeiras  
Coordenação de Biblioteca  
Biblioteca Prof. Ribamar da Silva  
Catalogação na fonte: Cícero Luciano Félix CRB-15/750

S587a Gomes, João Vitor Nogueira.  
Estudo analítico e numérico de placas retangulares / João Vitor Nogueira Gomes, Valdeir Baltazar da Silva. – 2022.  
93f. : il.  
Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação em Engenharia Civil) - Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia da Paraíba, Cajazeiras, 2022.  
Orientador(a): Prof. Dr. Sebastião Simão da Silva.  
Co-orientador(a): Prof. Me. Iuri Augusto Alves Lustosa  
1. Engenharia civil. 2. Equação diferencial - Lagrange. 3. Placas delgadas. 4. Resistência estrutural. I. Silva, Valdeir Baltazar da. II. Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia da Paraíba. III. Título.

JOÃO VITOR NOGUEIRA GOMES  
VALDEIR BALTAZAR DA SILVA

**ESTUDO ANALÍTICO E NUMÉRICO DE PLACAS RETANGULARES**

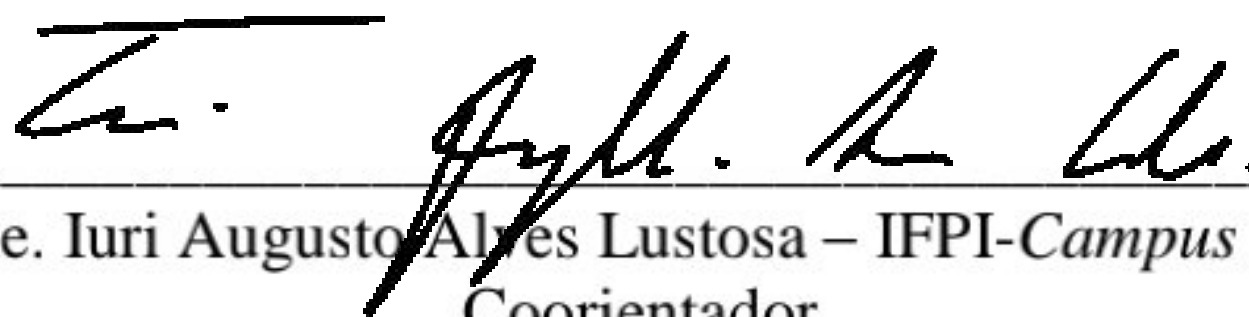
Trabalho de Conclusão de Curso submetido à  
Coordenação do Curso de Bacharelado em  
Engenharia Civil do Instituto Federal de  
Educação, Ciência e Tecnologia da Paraíba,  
*Campus* Cajazeiras, como parte dos  
requisitos para a obtenção do Título de  
Bacharel em Engenharia Civil.

Aprovado em 16 de fevereiro de 2023.

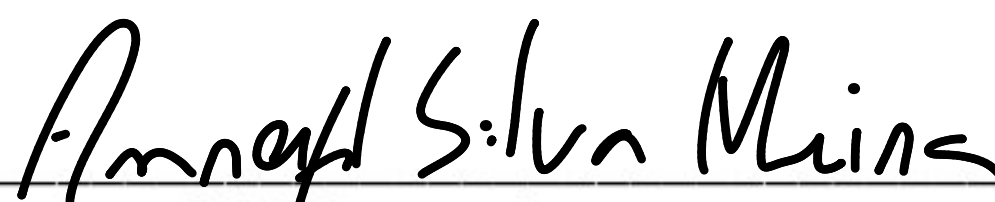
**BANCA EXAMINADORA**



Prof. Dr. Sebastião Simão da Silva – IFPB-*Campus* Cajazeiras  
Orientador



Prof. Me. Iuri Augusto Alves Lustosa – IFPI-*Campus* Parnaíba  
Coorientador



Prof. Dr. Anrafel Silva Meira – IFPB-*Campus* Cajazeiras  
Examinador

Não há lugar onde você possa fugir ou se esconder. A noite e o dia são a mesma coisa pra mim. Eu formei você exatamente como eu queria quando você ainda estava no ventre de sua mãe. Eu tenho um plano perfeito e belo e é para o seu bem. Até antes do seu corpo se formar, eu já havia planejado todos seus dias.

Salmo 139

## AGRADECIMENTOS

Agradecemos primeiramente a Deus por nos guiar em todos os momentos de nossas vidas, bem como por iluminar nossas mentes nos momentos difíceis, dando-nos força e coragem, sem ele, nada somos.

A nossos pais que estiveram sempre ao nosso lado nos apoiando e aconselhando positivamente, que com humildade e honestidade nos fizeram pessoas melhores, sendo eles os pais, de João Vitor, Sr. Ernando Gomes de Sousa e Sra. Dalvani Santana Nogueira, e os pais de Valdeir Baltazar, Sr. Valdimiro da silva e Sra. Terezinha Baltazar da Silva, e também nossos irmãos e irmã que estiveram conosco a todo momento e demais familiares.

Agradecemos as pessoas que fizeram esse trabalho ser possível, os professores Dr. Sebastião Simão e Me. Iuri Augusto, que aceitaram esse desafio de nos auxiliarem, sendo pacientes e compreensivos em todos os momentos. Aos professores Doval Nunes e Vinicius Martins que nos ajudaram nas dúvidas e desenvolvimento de alguns cálculos, ao professor Gastão Coelho que nos auxiliou na escolha do nosso orientador, no qual, assim foi possível realizar esse trabalho, onde todos foram exemplos de profissionais, que levaremos por toda a nossa vida, por serem sempre solícitos e generosos, A vocês e a todos os demais professores que estiveram presente na nossa trajetória, toda admiração.

Não pode faltar aqui, o nosso grupo de estudos que foi criado com um grande objetivo, sendo ele de ajudar em dúvidas de conteúdos, no qual contou com grandes amigos, que levaremos para a vida. Em particularmente, quando Valdeir passou por momentos difíceis Kevin Bezerra esteve presente, sendo ele uma pessoa de grande importância, e não podemos esquecer, em comum, os demais outros amigos, que são muitos, pedimos desculpas por não ter como citar, mais que fizeram parte dessa trajetória e serão sempre lembrados em nossas vidas.

E a todos que direto ou indiretamente veio a contribuir com mais essa etapa, de nossas vidas.

## RESUMO

O avanço tecnológico nas engenharias tem sido de grande importância para a análise e o dimensionamento de estruturas por meio de uma variedade de programas. No entanto, é comum que projetistas que os utilizam desconheçam os processos dos cálculos realizados por esses programas. Assim sendo, é de fundamental relevância o conhecimento das soluções analíticas para que avaliações dos resultados obtidos sejam feitas de maneira correta. As placas delgadas, cuja teoria é descrita em detalhes neste trabalho, é regida por uma equação diferencial parcial de quarta ordem, conhecida como equação de *Lagrange*. A partir desta, e levando em consideração as hipóteses de *Kirchhoff*, pode-se analisar o comportamento das placas em termos de esforços e deslocamentos. Para se chegar na solução, adota-se as expansões em série de *Fourier* e condições de contorno pré-estabelecidas, através dos métodos de *Navier* e *Lévy*. Alternativamente, estas soluções podem ser obtidas de forma aproximadas por meio de métodos numéricos, dentre os quais o método dos elementos finitos. Neste contexto, o presente trabalho apresenta a solução da equação de *Lagrange* para placas delgadas por meio dos métodos de *Navier* e *Levy* e a partir de um elemento finito de placa descrito por *Reddy*. Este elemento foi implementado fazendo uso de uma linguagem de programação livre *Scilab* versão 6.1.0. Dois problemas relacionados a placas retangulares foram analisados, para um carregamento uniformemente distribuído e condições de apoio diferentes (o primeiro, simplesmente apoiado e o segundo, totalmente engastado). Os resultados foram obtidos por meio das formulações analíticas e comparados com aqueles calculados utilizando o código desenvolvido. Verificou-se que os valores encontrados, tem uma boa aproximação, e as máximas deflexões acontecem nos centros das placas, independentemente dos apoios considerados.

**Palavras-chave:** Placas delgadas; método analítico; método numérico.

## ABSTRACT

The advancement of technology, in engineering, has been of great importance for the analysis and design of structures, through a variety of programs. However, most people who use it do not know the process of calculations performed by these programs. Being of fundamental importance, the knowledge of the analytical solutions so that the estimates of the obtained results are made in correct way. The thin plates, whose theory is described in detail, are governed by a fourth order partial differential transmission, known as *Lagrange* authorization. From this, and taking into account *Kirchhoff's* hypotheses, one can analyze the behavior of the plates in terms of efforts and displacements. To arrive at the solution, adopt *Fourier* series expansions and pre-established boundary conditions, through the methods of *Navier* and *Lévy*. Alternatively, these solutions can be followed approximately using numerical methods today, among which the finite element method. In this context, the present work presents the *Lagrange* approval solution for thin plates by means of the *Navier* and *Levy* methods and from a plate finite element described by *Reddy*. This element was implemented using a free programming language *Scilab* version 6.1.0. Two problems related to rectangular plates were analyzed, for a distributed load, changing the supports at the edges. The first being simply supported and the second being fully embedded. The results were obtained through the analytical formulations and compared with those calculated using the developed code. It was verified that the values found, have a good approximation, and the maximum deflections happen in the centers of the plates, independently of their supports.

**Keywords:** Thin plate; analytical method; numerical method



## LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1.1 - Utilização das placas .....	15
Figura 1.2 - Tipos de elementos na estrutura .....	16
Figura 2.1 - Tensões em um elemento infinitesimal .....	23
Figura 2.2 - Deformações do elemento no plano $x - y$ .....	24
Figura 2.3 - Tensões em um elemento tridimensional .....	26
Figura 2.4 - Superposição das tensões .....	27
Figura 2.5 - Distorção no elemento tridimensional .....	29
Figura 2.6 - Cisalhamento no estado plano de tensões .....	30
Figura 2.7 - Círculo de Mohr .....	30
Figura 2.8 - Tensões máxima e mínimas .....	31
Figura 3.1 - Deformação de uma seção transversal .....	33
Figura 3.2 - Elemento tridimensional de placa .....	34
Figura 3.3 - Triângulo retângulo .....	34
Figura 3.4 - Placa tridimensional e esforços solicitantes .....	39
Figura 5.1 - Placa Retangular 2D e 3D .....	46
Figura 6.1 - Placa retangular .....	55
Figura 7.1 - Placa retangular com rotações nos eixos .....	61
Figura 9.1 - Placa simplesmente apoiada .....	66
Figura 9.2 - Placa Totalmente Engastada .....	69
Figura 9.3 - Placa retangular submetida a momentos fletores distribuídos .....	73
Figura 9.4 - Superposição de placas .....	76
Figura 10.1 - Deflexão em placas de Variadas Espessuras .....	84
Figura 10.2 - Deflexão em variados tamanhos de malhas .....	85
Figura 10.3 - Placa quadradas com vários tamanhos de malhas .....	85
Figura 10.4 - Deformada da Placa .....	86

Figura 10.5 - Placa quadradas com vários tamanhos de malhas .....	87
Figura 10.6 - Deflexão em placas de Variadas Espessuras .....	87
Figura 10.7 - Deflexão em variados tamanhos de malhas .....	88
Figura 10.8 - Deformada da Placa .....	89

## LISTA DE TABELAS

Tabela 10.1 - Erro percentual dos valores obtidos com código implementado (MEF) em relação a solução analítica .....	86
Tabela 10.2 - Erro percentual dos valores obtidos com código implementado (MEF) em relação a solução analítica .....	88

## LISTA DE SÍMBOLOS

$\sigma_i$  – Tensão normal

$\tau_{ij}$  – Tensão de cisalhamento

$\varepsilon_i$  – Deformações

$\gamma_{ij}$  – Distorções

$d_i$  – Acréscimo infinitesimal

$\Delta$  – Variação de estado

$\partial$  – Derivada parcial

$\nu$  – Coeficiente de Poisson

$t$  – Espessura

$L$  – Comprimento

$E$  – Módulo de elasticidade

$G$  – Módulo de elasticidade transversal

$\theta_i$  – Rotações das seções da placa

$x, y$  e  $z$  – Coordenadas cartesianas

$u_i, v_i$  e  $w_i$  – Deslocamentos

$u(x, y, z), v(x, y, z)$  e  $w(x, y, z)$  – Funções dos deslocamentos em relação aos eixos

$M_i$  – Momento fletor

$M_{ij}$  – Momento torsor

$Q_i$  – Esforço cortante

$D$  – Rigidez

$p$  – Força concentrada

$q$  – Carga distribuída

$U$  – Energia de deformação

$D_f$  – Matriz constitutiva de flexão

$D_c$  – Matriz constitutiva de cisalhamento

$\xi_i$  e  $\eta_i$  – Coordenadas naturais

$d^e$  – Deslocamentos da estrutura

$B_f$  – Deformação-deslocamento por flexão

$\Omega^e$  – Domínio de interesse da estrutura

$K^e$  – Matriz de rigidez da placa

$|J|$  – jacobiano

$N_i$  – função de forma

## SUMÁRIO

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO .....</b>	<b>15</b>
1.1	Justificativa .....	17
1.2	Objetivo geral .....	17
1.3	Objetivo específico .....	18
1.4	Estrutura do trabalho .....	18
<b>2</b>	<b>TEORIA CLÁSSICA DAS PLACAS DELGADAS .....</b>	<b>20</b>
2.1	Conceito de placas .....	20
2.2	Processo evolutivo da análise de placas .....	20
2.3	Métodos de resoluções .....	21
2.4	Teoria da elasticidade .....	22
<b>3</b>	<b>EQUAÇÃO DIFERENCIAL DE LAGRANGE .....</b>	<b>33</b>
<b>4</b>	<b>SÉRIES DUPLAS DE FOURIER .....</b>	<b>42</b>
<b>5</b>	<b>SOLUÇÃO DE NAVIER .....</b>	<b>46</b>
<b>6</b>	<b>SOLUÇÃO DE LEVY .....</b>	<b>55</b>
<b>7</b>	<b>ELEMENTOS FINITOS DE PLACAS .....</b>	<b>60</b>
7.1	Teoria da placa de Mindlin .....	60
7.2	Deformação .....	61
7.3	Tensão .....	61
7.4	Discretização de elementos finitos .....	62
<b>8</b>	<b>METODOLOGIA .....</b>	<b>64</b>
8.1	Classificação da pesquisa .....	64
8.2	Procedimento de discretização .....	64
<b>9</b>	<b>APLICAÇÕES DAS SOLUÇÕES ANALÍTICAS .....</b>	<b>66</b>
9.1	Placa simplesmente apoiada submetida à uma carga uniforme .....	66
9.2	Placa totalmente engastada submetida à uma carga uniforme .....	68

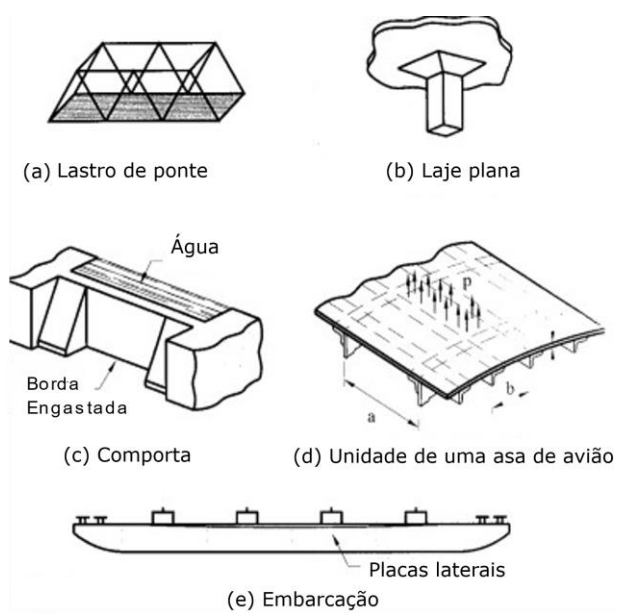
<b>10</b>	<b>APLICAÇÕES NUMÉRICAS .....</b>	<b>84</b>
10.1	Placa quadrada simplesmente apoiada submetida à uma carga uniforme .....	84
10.2	Placa quadrada totalmente engastada submetida à uma carga uniforme .....	86
<b>11</b>	<b>CONCLUSÃO .....</b>	<b>90</b>
	<b>REFERÊNCIAS .....</b>	<b>92</b>

## 1 INTRODUÇÃO

A utilização de placas tem grande importância no projeto e análise de estruturas, sendo aplicáveis em vários campos da engenharia. Segundo Ota (2016), as placas compõem um subconjunto das cascas caracterizadas por superfícies planas em sua configuração não deformada, e atuam, principalmente, à flexão. A casca é um elemento tridimensional delimitado por duas superfícies curvas, tendo uma pequena distância entre elas (sua espessura).

Existem muitos exemplos de sistemas estruturais que podem ser concebidos com placas: lastro de pontes, lajes planas, estruturas hidráulicas, cascos de navios, aviões, etc., como mostrado na Figura 1.1. Estes tipos de estruturas, mostram-se eficientes em suportar grandes carregamentos externos, contribuindo com a proteção dos elementos internos. Além disso, tem boa relação entre a resistência e o peso da estrutura, apresentando um bom aspecto.

Figura 1.1 – Utilização das placas.



Fonte – *Ventsel e Krauthammer*, 2001, P.2.

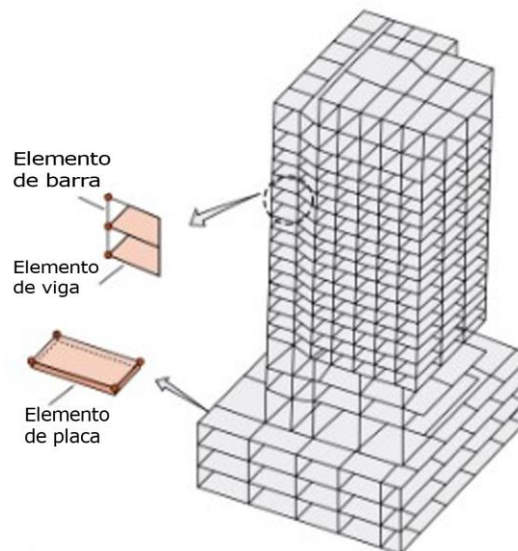
Quando se busca investigar o comportamento das placas, com relação às tensões e deformações, chega-se a equações muito complexas, sendo utilizada séries trigonométricas para se encontrar a resolução do problema. Por isso, na engenharia de estruturas são tão importantes os conceitos matemáticos que englobam desde a geometria analítica, passando pela álgebra linear, até o cálculo diferencial e integral (COSTA, 2010). Segundo Carvalho (2016), o avanço da informática, possibilitou a formulação de soluções utilizando o Método dos Elementos Finitos (MEF). O MEF oferece grande flexibilidade para resolver problemas complexos com



geometrias reais, com possibilidade de implementação numérica. Suas capacidades e limitações são amplamente conhecidas, tornando o método numérico mais utilizado na engenharia, atualmente (OTA, 2016). A correta aplicação desse conhecimento em projetos estruturais proporciona eficiência, levando em consideração as propriedades do material, bem como suas dimensões e geometria. Uma estrutura pode ser considerada segura quando se sabe a quais cargas ela está submetida e como ela responde a essas cargas. Essas definições requererem uma compreensão de como essas forças são distribuídas em uma estrutura, bem como o conhecimento da resistência do material utilizado (MATEUS, 2018).

Voltando-se para a engenharia civil, é necessário ter noção de que, para construir uma edificação, é de suma importância a utilização das lajes. Com o passar do tempo, o avanço da tecnologia, juntamente com um conhecimento mais avançado, proporcionaram uma evolução que contribuiu para análises mais sofisticadas desses elementos estruturais – Figura 1.2. As lajes combinadas com vigas, pilares e fundações são responsáveis pela estabilidade e resistência da edificação. A definição do tipo de laje varia para cada caso, dependendo do seu destino (residências, escolas, armazéns, parques de estacionamento, entre outros) e depende também do aparecimento ou não de sobrecargas adicionais, das dimensões das aberturas livres e das condições de apoios (apoiadas, livres ou engastadas) (EMIDIO SOBRINHO,2012).

Figura 1.2 – Tipos de elementos na estrutura.



Fonte - Ugural, 2018, p. 264.

Os pisos das edificações podem ser executados com diferentes tipos de lajes, como as lajes maciças, as lajes nervuradas, as lajes cogumelo as lajes treliçadas e laje alveolar, além de diversos tipos de lajes pré-moldadas (ARAÚJO, 2010). Nesse contexto, o estudo de placas vem

sendo alvo de várias pesquisas, buscando uma maior eficiência no cálculo dos esforços solicitantes em que essas estruturas estão submetidas.

### 1.1 Justificativa

A utilização de placas delgadas, possibilita grandes vantagens, devido à abrangência em várias engenharias de estruturas. O seu uso torna possível a criação de peças para aviões, por parte da engenharia mecânica, de determinações de lajes, na engenharia civil, do desenvolvimento de embarcações, na engenharia naval, além de vários outros benefícios.

O estudo de placas pode ser feito de maneira analítica e numérica, sendo necessário a compreensão da teoria para poder utilizar os métodos numéricos. Ou seja, o entendimento sólido dos conceitos das equações que governam as soluções clássicas de placas permitem um maior domínio das ferramentas numéricas. Assim, muitos trabalhos são feitos com esse intuito, porém a maioria deles não trazem o desenvolvimento completo das expressões, sendo difícil de encontrar os pormenores até nos livros clássicos.

Na graduação, mais especificadamente nas disciplinas de estruturas, muita das equações são utilizadas sem que, boa parte dos estudantes, não têm ideia de como elas surgiram. Por exemplo, na disciplina de Estrutura de Concreto I, que é vista no Instituto Federal da Paraíba, *Campus* Cajazeiras (IFPB), a rigidez é um termo bastante utilizado, porém de forma quase automática, passando despercebido à ligação com outras equações. Além disso, as hipóteses de *Kirchhoff* também são utilizadas, muitas vezes, sem entendimento. Atrelado a isso, pouco se vê a disciplina de elementos finitos ser ofertada nos cursos de engenharia.

O conhecimento da relação entre as soluções analíticas e numéricas, são de grande valia. Assim, este trabalho busca trazer todo esse desenvolvimento, facilitando a compreensão, objetivando a utilização de um algoritmo, construído com uma linguagem de programação livre.

### 1.2 Objetivo geral

O principal objetivo desse Trabalho de Conclusão de Curso é realizar o estudo analítico e numérico de placas delgadas, por meio da formulação teórica clássica e utilizando um código de elementos finitos implementado com a linguagem *Scilab* versão 6.1.0.

### 1.3 Objetivos específicos

Para atingir o objetivo geral, foram definidos os seguintes objetivos específicos:

- a) Estudar de forma aprofundada a formulação de *Navier e Levy* e entender as suas aplicações;
- b) Estudar a formulação dos elementos finitos de placas delgadas usados;

- c) Compreender como utilizar e aplicar os códigos implementados, para a análise estática de placas com duas condições de apoio diferentes;
- d) Verificar a qualidade de implementação e as potencialidades de aplicação dos códigos utilizados;
- e) Comparar os resultados calculados por meio das soluções analíticas com os obtidos mediante códigos escritos em *Scilab* versão 6.1.0.

#### 1.4 Estrutura do trabalho

Este trabalho é composto por 11 capítulos. O capítulo 1 apresenta conceitos do tema abordado, motivação do estudo e os objetivos.

O capítulo 2 traz o conceito de placas, o contexto histórico e a evolução das soluções, finalizando com a teoria da elasticidade, utilizada no processo de cálculo para a obtenção da equação para placas delgadas.

No capítulo 3 é desenvolvida a equação base para o estudo analítico, utilizando como base os estudos de *Lagrange*, aplicando várias hipóteses para a placa, chegando em uma equação diferencial de quarta ordem.

No capítulo 4 faz-se o estudo de séries duplas, que servem como a base matemática para as soluções analíticas.

No capítulo 5 encontra-se a aplicação das séries duplas, junto com a equação de quarta ordem, para a formulação de uma solução analítica, sendo, então, possível descobrir os esforços solicitantes, como por exemplo: momentos fletores, torsores e a deflexão em uma placa delgada simplesmente apoiada.

O capítulo 6 traz outra solução analítica, que agora, utiliza-se séries únicas, facilitando na convergência dos resultados.

No capítulo 7 apresenta-se o estudo do elemento finito de placa, utilizando a teoria de placa de *Midlin*.

O capítulo 8 aborda a metodologia empregada, tipo de pesquisa e descrição das atividades.

No capítulo 9 é colocada em prática o estudo das soluções analíticas, através da resolução de dois problemas, mostrando ainda, o desenvolvimento de uma equação para uma placa totalmente engastada.

O décimo capítulo traz os resultados numéricos dos problemas tratados no capítulo anterior. Discretiza-se as estruturas com várias malhas e espessuras, fazendo as análises e

comparações com os resultados obtidos nas soluções analíticas. No capítulo 11 são feitas as conclusões do trabalho e sugestões de trabalhos futuros.

## 2 TEORIA CLÁSSICA DAS PLACAS DELGADAS

### 2.1 Conceito de placas

Uma placa será considerada delgada, quando sua espessura é relativamente pequena, se comparado com as outras dimensões, porém é resistente às forças que são aplicadas. Segundo Carvalho (2020), a razão entre a espessura das placas e a menor das dimensões não é superior a 1/10.

As placas finas podem sofrer com momentos fletores, torsões e deflexão, sendo preciso analisar as condições de carregamento e de apoio que ela está submetida, para que a análise comportamental possa ser realizada.

No âmbito estrutural, as lajes, que trabalham como placas, podem ser apoiadas em pilares ou sustentadas em vigas. Segundo Araújo (2014), de acordo com as condições de contorno, podemos classificar os bordos das lajes em 3 tipos: livres, engastadas ou apoiadas. As lajes contribuem com sua rigidez transversal à flexão, na rigidez global da estrutura, devido ao seu comportamento de placa, participando na interação dos esforços e deslocamentos como os demais elementos estruturais (MARTINS, 1998).

### 2.2 Processo evolutivo da análise de placas

As civilizações antigas, assim, como os egípcios, gregos e romanos construíram alguns dos mais majestosos monumentos de lajes de pedra, exemplos incluem pirâmides, templos e túmulos, alguns dos quais ainda existirão daqui a séculos. No entanto, há uma diferença fundamental entre as placas usadas nesta época e as usadas na engenharia moderna. Na época, o conhecimento empírico era usado para dimensionar as placas e cargas, mas hoje, é determinado por métodos cientificamente testados. A história do desenvolvimento da teoria científica da placa e da tecnologia de solução relacionada é muito interessante. Embora o desenvolvimento da mecânica estrutural tenha começado com o estudo de problemas estáticos, os primeiros estudos analíticos e experimentais em placas foram principalmente dedicados a oscilações (SZILARD, 2004).

Segundo Campos (2011), os primeiros desenvolvimentos da teoria das placas são do século XVIII e foram aperfeiçoados ao longo de cerca de duzentos anos, até que o trabalho de *Timoshenko* e *Midlin* no início da década de 60 deu-lhe sua forma atual.

A primeira aproximação da teoria de membranas para placas finas foi dada por *Euler* (1707-1783) em 1766. Ele resolveu problemas de oscilação livre em membranas elásticas retangulares, triangulares e circulares por analogia com o sistema perpendicular de molas de

extensão. Seu aluno, *Jacques Bernoulli* (1759-1789), estendeu essa analogia, substituindo molas por vigas e descobrindo assim o valor de sua rigidez no comportamento de flexão. *Bernoulli* ainda encontrou semelhanças entre essas teorias e dados experimentais (CAMPOS, 2011).

O físico alemão *Ernst Chladni* (1756-1827) deu um verdadeiro impulso ao estudo das oscilações das placas. Seu livro de acústica descreve vários experimentos com diafragmas. *Chladni* descobriu vários modos de oscilação livre. Seus experimentos usavam pó uniformemente dispersos que formavam padrões regulares após a introdução de vibrações (SZILARD, 2004).

Em outubro de 1811, a matemática *Sophie Germain* (1776-1831) desenvolveu as primeiras equações diferenciais para a teoria das placas. *Poisson* (1781-1840) foi o primeiro a determinar com precisão o valor da constante  $k_2$  na equação diferencial para oscilações de placas, assumindo que as partículas se encontram no plano mediano da placa. Ele erroneamente concluiu que essa constante é proporcional ao quadrado da espessura em vez do cubo. Mais tarde, em 1828, *Poisson* estendeu seu trabalho usando as equações de *Navier*, mas seu trabalho foi válido apenas para a placas grossas (CAMPOS, 2011).

O cientista e engenheiro *L. Navier* (1785-1836) foi quem desenvolveu a primeira equação diferencial totalmente válida para placas sujeitas a cargas distribuídas, laterais  $p_x(x, y)$ . Usando as hipóteses de *Bernoulli*, que já eram aprovadas, quando se tratava de flexão de vigas, porém trazendo para elementos de superfície. *Navier* representou a deflexão por  $w(x, y)$  e a rigidez por  $D$ , além de considerar esta última sendo o cubo da espessura da placa. No entanto, *Gustav R. Kirchhoff* (1824 –1887), foi quem desenvolveu a primeira teoria completa de flexão de placas. Em seu primeiro artigo sobre o assunto, publicado em 1850, ele resume pela primeira vez o trabalho anterior de cientistas franceses na área, mas não menciona o trabalho de *Navier* (SZILARD, 2004).

### 2.3 Métodos de resoluções

No desenvolvimento das soluções da equação diferencial de placas delgadas é de suma importância enfatizar o trabalho de *Gustav R. Kirchhoff*, pois segundo Szilard (2004), foi através de suas observações que simplificações foram atribuídas à análise da teoria, resultando na conhecida equação de quarta ordem que rege o comportamento desse tipo de estrutura. No entanto, ainda assim, tende se ter uma solução complicada e muitas vezes não podem ser resolvidas devido à sua geometria, carregamento e condições de contorno (EMIDIO

SOBRINHO, 2012). Já, quando condições de contorno são predeterminadas, pode-se encontrar, de forma mais rápida, a solução da equação, usando a solução de séries duplas de *Fourier* disposta por *Navier* ou, então a solução de *Levy* que utiliza série de *Fourier* com apenas uma variável (TIMOSHENKO, 1959).

Para o sucesso dos métodos utilizados, um grande aliado foi as séries de *Fourier*, que utiliza coeficientes, funções trigonométricas e intervalos periódicos, para formular as soluções de *Navier* e *Levy*, respectivamente. Na composição das séries já citada, a seguinte simplificação foi de grande importância: para funções pares o resultado da integral era multiplicado por dois, enquanto para funções ímpares o valor obtido através da integral resulta em zero. *Fourier* ainda expandiu mais sua equação, transformando-a em séries duplas, que seguiam a mesma formulação da série de uma variável. No entanto, essa série teria função de englobar equações diferenciais parciais bidimensionais.

Na solução obtida por *Navier* foram usadas condições de contornos preestabelecidas, transformando equações diferenciais em equações algébricas. Esta solução é formada através de séries de senos, pois, graficamente, a deflexão, coincide com essa função trigonométrica. Através do carregamento, consegue-se encontrar a deflexão, juntamente com os momentos e esforços cisalhantes, tudo isso obedecendo a equação diferencial de quarta ordem.

Os valores de flexão, na solução de *Navier*, não convergiam rapidamente, então, *Levy* buscou uma alternativa, resolvendo utilizar séries de *Fourier* com apenas uma variável. Além disso, segundo Araújo (2010), utilizou-se cargas distribuídas uniformemente nas seções análogas ao eixo  $x$ , eliminando a dependência da carga no eixo  $y$ . Para este método *Levy* utilizou uma equação diferencial parcial não-homogênea, na qual a função deflexão que dependia de  $x$  e  $y$  teria duas soluções, chamadas de complementar e particular. Além disso, para fins de simplificações, *Levy* utilizou funções trigonométricas hiperbólicas.

Para se ter uma melhor compreensão e facilitar os trabalhos, surgiram vários estudos, onde priorizaram a rapidez da resolução dos cálculos. Após isso, a tecnologia pôde ser mais um aliado que trouxe, através de métodos computacionais com análise numérica, precisão e rapidez.

## 2.4 Teoria da elasticidade

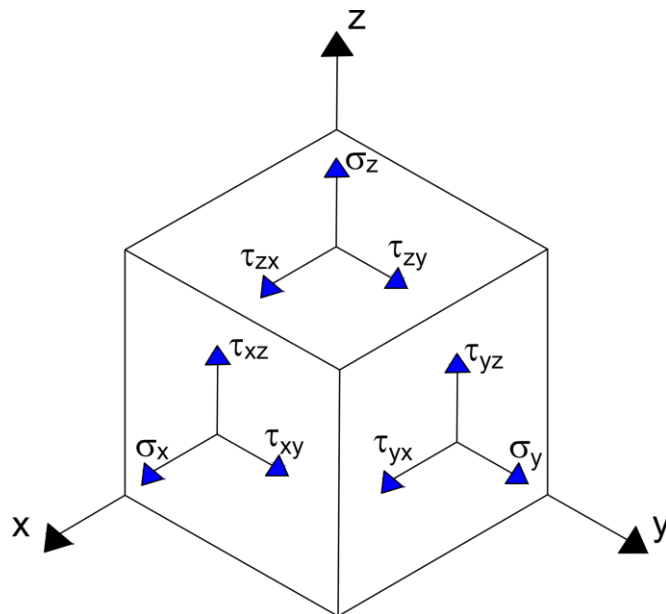
Noções básicas de equações de elasticidade linear são necessárias para desenvolver problemas de elasticidade e tensão da placa. A partir disso, a elasticidade e a tensão plana

podem ser descritas. O método elementar parte desses fundamentos matemáticos (RIBEIRO e WESTIN, [s.d]).

Para um melhor entendimento da equação diferencial das placas, é necessário ter conhecimento de algumas relações da teoria da elasticidade, sendo elas representadas através de um corpo infinitesimal de três dimensões, que estão sujeitos às ações externas. Nesse caso, considera-se apenas as deformações infinitesimais. O elemento infinitesimal é representado por um paralelepípedo ( $d_x, d_y, d_z$ ) (ARAÚJO, 2010). A elasticidade linear infinitesimal estuda as deformações e a distribuição de forças internas em sólidos submetidos a cargas externas, no qual se limita apenas à deformações elásticas e de pequena escala. (RIBEIRO e WESTIN, [s.d]).

As componentes das tensões normais nas direções  $x, y, z$ , como visto na Figura 2.1 são designadas por  $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$ , respectivamente. As tensões tangenciais,  $\tau$ , são identificadas através de dois subíndices. O primeiro índice indica a direção da normal à superfície onde atua a tensão, enquanto o segundo índice indica a direção da tensão.

Figura 2.1 – Tensões em um elemento infinitesimal.

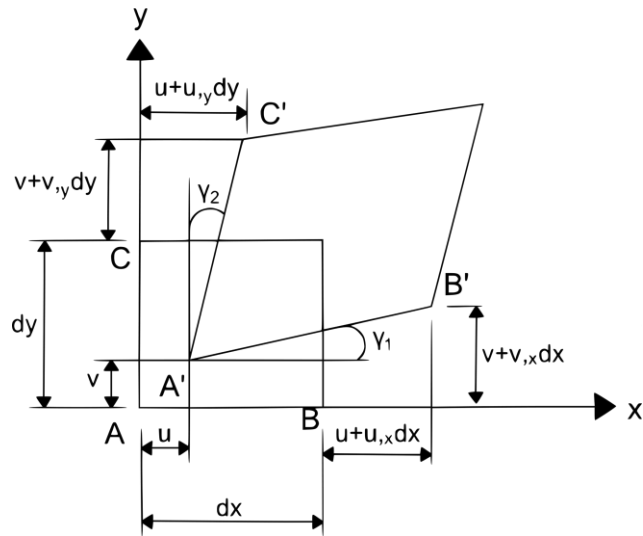


Fonte – Autor, 2023.

Os deslocamentos de um ponto genérico do corpo são designados por suas componentes  $u, v, w$  segundo as direções  $x, y, z$  respectivamente.

Para relacionar os deslocamentos com as deformações, considera-se a próxima Figura 2.2, onde se apresenta apenas a projeção do elemento tridimensional no plano  $x - y$ . Tem-se que a partir dos deslocamentos, pode-se calcular as deformações em qualquer ponto da estrutura.



Figura 2.2 – Deformações do elemento no plano  $x - y$ .

Fonte – Autor, 2023.

Em decorrência das tensões tangenciais, as faces do elemento sofrem rotação. A face  $AB$ , sofre uma rotação  $\gamma_1$ , passando para a posição  $A'B'$ . A face  $AC$  sofre uma rotação  $\gamma_2$ , passando para a posição  $A'C'$ . Além disso, as dimensões iniciais do elemento,  $d_x$  e  $d_y$ , ficam alteradas por causa das tensões normais.

Considerando uma projeção de  $A'B'$ , como sendo  $d'_x$ , o comprimento  $d'_x$  será dado da seguinte forma:

$$d'_x = d_x + u + u_{,x} d_x - u \quad (2.4.1)$$

$$d'_x = d_x + u_{,x} d_x \quad (2.4.2)$$

$$d'_x = (1 + u_{,x}) d_x \quad (2.4.3)$$

$$\frac{d'_x - d_x}{d_x} = u_{,x} \quad (2.4.4)$$

em que:

$$u_{,x} = \frac{\partial u}{\partial x} \quad (2.4.5)$$

Por definição, a deformação na direção normal é o alongamento ou a contração de um segmento de reta por unidade de comprimento (*BUFFONI*, [s, d]), a deformação normal na direção  $x$  é igual a:

$$\varepsilon_x = \frac{\Delta L}{L_0} = \frac{d'_x - d_x}{d_x} = \frac{\partial u}{\partial x} \quad (2.4.6)$$

Para a direção  $y$ , será análogo ao desenvolvimento da Equação (2.4.6), logo teremos:

$$\varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} \quad (2.4.7)$$

Por definição, a deformação por cisalhamento é a mudança de ângulo ocorrida entre dois segmentos de reta originalmente perpendiculares entre si, tendo seu ângulo denotado por  $\gamma$  e medido em radianos (*BUFFONI*, [s, d]), dessa forma a deformação por corte  $\gamma_{xy}$  é igual à distorção do elemento, dada por:

$$\gamma_{xy} = \gamma_1 + \gamma_2 = v_{,x} + u_{,y} \quad (2.4.8)$$

A Equação (2.4.8) é escrita na forma:

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \quad (2.4.9)$$

quando se emprega a notação clássica para as derivadas parciais.

Considerando as três componentes de deslocamentos, obtêm-se as seguintes relações deformações-deslocamentos:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}; \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}; \varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z} \quad (2.4.10)$$

$$\gamma_{xy} = \gamma_{yx} = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \quad (2.4.11)$$

$$\gamma_{xz} = \gamma_{zx} = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \quad (2.4.12)$$

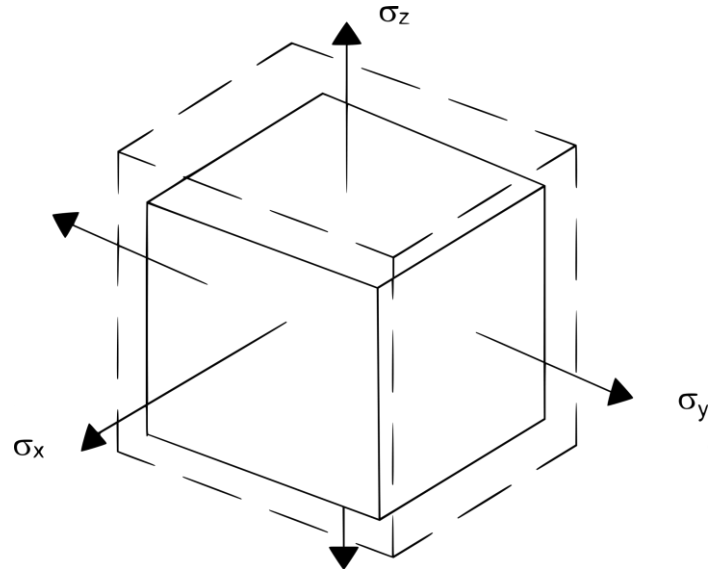
$$\gamma_{yz} = \gamma_{zy} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \quad (2.4.13)$$

Onde  $u, v$  e  $w$  são as componentes do vetor de deslocamento nas direções  $x, y, z$ , respectivamente. Essas equações representam adequadamente as deformações apenas quando são muito pequenas. As equações a seguir, são permeadas através das teorias desenvolvidas por *Hooke*. Assim, será necessário o entendimento desta seção para dar continuidade ao estudo.

Em 1678, surgiu, através de *Robert Hooke*, o estudo que relacionavam aplicações de cargas às deformações (*MATEUS*, 2018). Para que tal análise atingisse um resultado satisfatório, ele considerou o material homogêneo, isotrópico e elástico, comportando-se de um modo linear elástico. Assim, se o material em um ponto estiver sujeito a um estado de tensão

triaxial  $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$ , como mostra a Figura 2.3, deformações normais associadas  $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z$  serão desenvolvidos no material.

Figura 2.3 – Tensões em um elemento tridimensional.



Fonte – Autor, 2023.

As tensões podem ser relacionadas às deformações por meio de superposição, da relação de Poisson e da Lei de *Hooke* aplicada na direção uniaxial. Em que:

$$\varepsilon_{\text{lat}} = -\nu\varepsilon_{\text{long}} \quad (2.4.14)$$

e

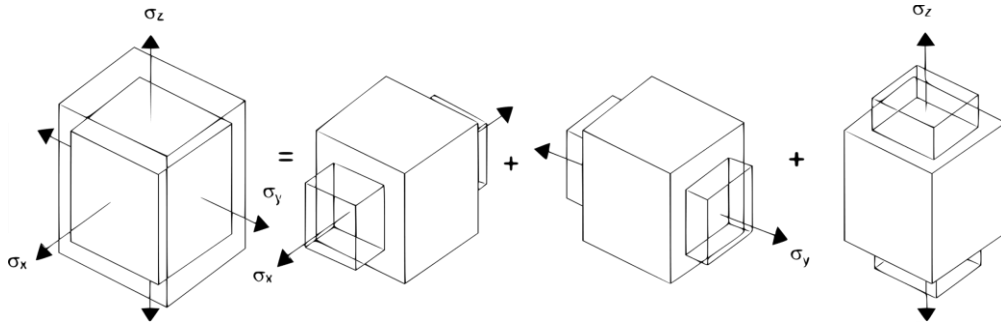
$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E} \quad (2.4.15)$$

Um material é dito linear elástico se ele se comporta elasticamente e exibe uma relação linear entre a tensão e a deformação. A relação entre tensão e deformação pode ser expressa como, (*MONIZ*, [s.d]):

$$\sigma = E\varepsilon \quad (2.4.16)$$

em que  $E$  é a constante de proporcionalidade, conhecida como módulo de elasticidade longitudinal do material (ou módulo de *Young*), no qual, expressa a rigidez do material (a resistência do material à deformação elástica) e depende das forças e conexões entre os átomos. No Sistema Internacional (SI), os valores de  $E$  são expressos em gigapascals (GPa) por serem valores muito altos. Sendo a inclinação da porção linear do diagrama tensão-deformação. Inicialmente considera-se a deformação normal do elemento na direção  $x$  – Figura 2.4.

Figura 2.4 – Superposição das tensões.



Fonte – Autor, 2023.

Aplicando as seguintes tensões para a direção  $x$ . Para  $\sigma_x$  o elemento alonga-se, e, para  $\sigma_y$  e  $\sigma_z$  contrai-se. Obtendo-se, as respectivas expressões:

$$\varepsilon'_x = \frac{\sigma_x}{E} \quad (2.4.17)$$

$$\varepsilon''_x = -\nu \frac{\sigma_y}{E} \quad (2.4.18)$$

$$\varepsilon'''_x = -\nu \frac{\sigma_z}{E} \quad (2.4.19)$$

Ao sobrepor as deformações normais, determina-se a deformação normal  $\varepsilon_x$  para o estado de tensão mostrado, procedendo de forma semelhante se determina as deformações normais para as direções  $y$  e  $z$ .

$$\varepsilon_x = \varepsilon'_x + \varepsilon''_x + \varepsilon'''_x \quad (2.4.20)$$

$$\varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} - \nu \frac{\sigma_y}{E} - \nu \frac{\sigma_z}{E} \quad (2.4.21)$$

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E} [\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)] \quad (2.4.22)$$

$$\varepsilon_y = \frac{1}{E} [\sigma_y - \nu(\sigma_x + \sigma_z)] \quad (2.4.23)$$

$$\varepsilon_z = \frac{1}{E} [\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y)] \quad (2.4.24)$$

As equações das tensões estão em função da deformação. Admitindo-se pequenos deslocamentos, tem-se um estado plano de tensão, onde despreza-se  $\sigma_z$  e  $\varepsilon_z$ . No entanto,

qualquer um dos eixos poderia ser escolhido. Dessa forma, utilizando as Equações (2.4.22) e (2.4.23), tem-se:

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E}(\sigma_x - \nu\sigma_y) \quad (2.4.25)$$

$$\varepsilon_y = \frac{1}{E}(\sigma_y - \nu\sigma_x) \quad (2.4.26)$$

Manipulando a Equação (2.4.26) para isolar  $\sigma_y$ , e substituindo na Equação (2.4.25), tem-se:

$$\varepsilon_y = \frac{\sigma_y}{E} - \nu\frac{\sigma_x}{E} \quad (2.4.27)$$

$$\frac{\sigma_y}{E} = \varepsilon_y + \nu\frac{\sigma_x}{E} \quad (2.4.28)$$

$$\sigma_y = E\varepsilon_y + \nu\sigma_x \quad (2.4.29)$$

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E}[\sigma_x - \nu(E\varepsilon_y + \nu\sigma_x)] \quad (2.4.30)$$

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E}(\sigma_x - \nu^2\sigma_x - \nu E\varepsilon_y) \quad (2.4.31)$$

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E}[\sigma_x(1 - \nu^2) - \nu E\varepsilon_y] \quad (2.4.32)$$

$$\frac{1}{\varepsilon_x} = \frac{E}{\sigma_x(1 - \nu^2) - \nu E\varepsilon_y} \quad (2.4.33)$$

$$\sigma_x(1 - \nu^2) - \nu E\varepsilon_y = E\varepsilon_x \quad (2.4.34)$$

$$\sigma_x(1 - \nu^2) = E\varepsilon_x + \nu E\varepsilon_y \quad (2.4.35)$$

$$\sigma_x(1 - \nu^2) = E(\varepsilon_x + \nu\varepsilon_y) \quad (2.4.36)$$

$$\sigma_x = \frac{E}{(1 - \nu^2)}(\varepsilon_x + \nu\varepsilon_y) \quad (2.4.37)$$

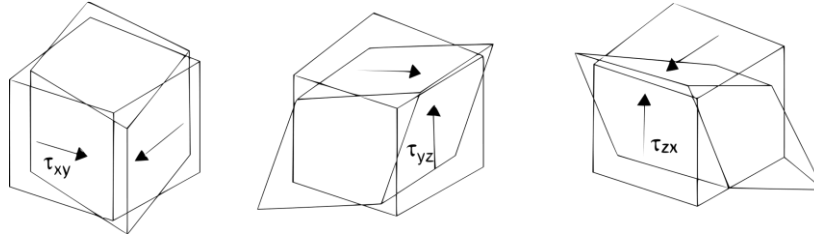
Analogamente a  $\sigma_y$ , será:

$$\sigma_y = \frac{E}{(1 - \nu^2)} (\varepsilon_y + \nu \varepsilon_x) \quad (2.4.38)$$

Além das tensões normais envolvidas, haverá presente as tensões de cisalhamento. Então, leva-se, agora, em consideração a Lei de *Hooke* Generalizada.

Aplicando uma tensão de cisalhamento  $\tau_{xy}$  ao elemento, observações experimentais indicam que o material se distorcerá somente devido a uma deformação por cisalhamento  $\gamma_{xy}$ . A mesma analogia, servirá para as outras direções, como mostrado na Figura 2.5.

Figura 2.5 – Distorção no elemento tridimensional.



Fonte – Autor, 2023.

O ângulo formado mede a deformação do elemento como resultado do cisalhamento, chamado de tensão de cisalhamento, que mede o deslocamento relativo das bordas opostas do paralelepípedo. A relação proporcional entre as tensões de cisalhamento e suas respectivas deformações surge do módulo de elasticidade transversal  $G$ .

$$\tau_{xy} = \gamma_{xy} \cdot G ; \tau_{yz} = \gamma_{yz} \cdot G ; \tau_{xz} = \gamma_{xz} \cdot G \quad (2.4.39)$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G} \quad (2.4.40)$$

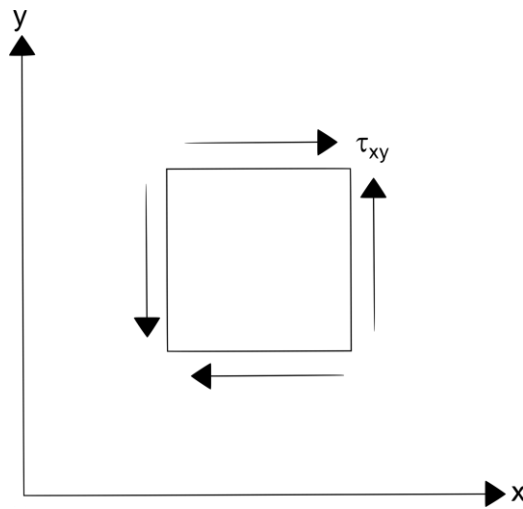
$$\gamma_{yz} = \frac{\tau_{yz}}{G} \quad (2.4.41)$$

$$\gamma_{xz} = \frac{\tau_{xz}}{G} \quad (2.4.42)$$

Existe uma relação entre  $E, \nu, G$ , e a maneira de deduzir ela, é considerar que um elemento do material está sujeito a cisalhamento puro, ou seja, as tensões normais iguais a zero, como mostra a Figura 2.6.

$$\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = 0 \quad (2.4.43)$$

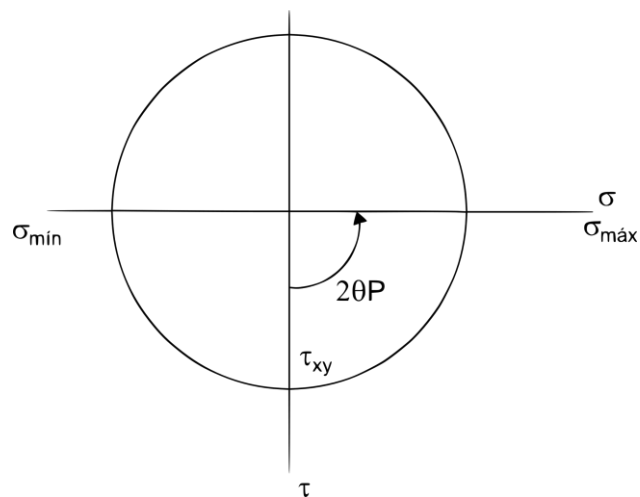
Figura 2.6 – Cisalhamento no estado plano de tensões.



Fonte – Autor, 2023.

Para obter as tensões, é necessário o entendimento do círculo de *Mohr*, mostrado na Figura 2.7.

Figura 2.7 – Círculo de *Mohr*.



Fonte – Autor, 2023.

Encontrando as tensões, representado na Figura 2.8, tem-se:

$$\sigma_x = \sigma_y = 0 \quad (2.4.44)$$

$$R = \tau_{máx} = \tau_{xy} \quad (2.4.45)$$

$$2\theta P = 90^\circ \quad (2.4.46)$$

$$\theta P = 45^\circ \quad (2.4.47)$$

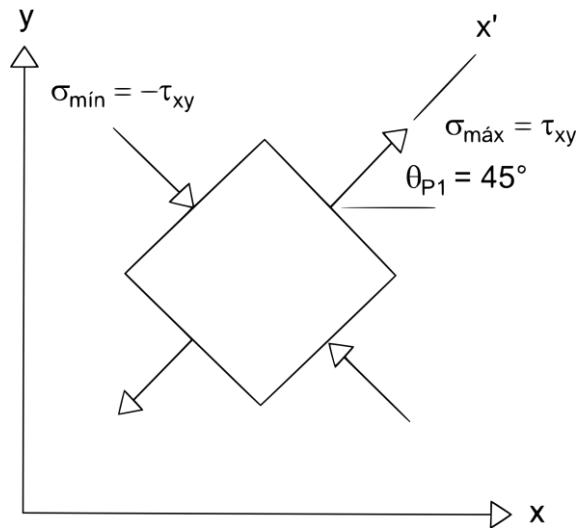
$$\sigma_{máx} = \sigma_{média} + \text{Raio} \quad (2.4.48)$$

$$\sigma_{mín} = \sigma_{média} - \text{Raio} \quad (2.4.49)$$

$$\sigma_{máx} = \tau_{xy} \quad (2.4.50)$$

$$\sigma_{mín} = -\tau_{xy} \quad (2.4.51)$$

Figura 2.8 – Tensões máxima e mínimas.



Fonte – Autor, 2023.

Sendo assim, as tensões principais são:

$$\sigma_{mín} = -\tau_{xy} \quad (2.4.52)$$

$$\sigma_{média} = 0 \quad (2.4.53)$$

$$\sigma_{máx} = \tau_{xy} \quad (2.4.54)$$

Utilizando a Equação (2.4.25) da deformação, e substituindo as tensões por máxima e mínima, tem-se:

$$\varepsilon = \frac{1}{E} (\sigma_{máx} - \nu \sigma_{mín}) \quad (2.4.55)$$

Agora, substituindo as Equações (2.4.52) e (2.4.54) na Equação (2.4.55), obtém-se a Equação (2.4.56), onde será trabalhado a deformação máxima, para obter o valor do módulo de elasticidade transversal. Utilizando a deformação mínima também poderia chegar no mesmo resultado.



$$\varepsilon_{m\acute{a}x} = \frac{1}{E}(\tau_{xy} + \nu\tau_{xy}) \quad (2.4.56)$$

$$\varepsilon_{m\acute{a}x} = \frac{1}{E}\tau_{xy}(1 + \nu) \quad (2.4.57)$$

Essa deformação, que distorce o elemento ao longo do eixo  $x'$ , também pode ser relacionada com a deformação por cisalhamento  $\gamma_{xy}$  pelo círculo de *Mohr* para deformação, chegando na seguinte equação:

$$\varepsilon_{(m\acute{a}x,m\acute{i}n)} = \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{2}\right)^2 + \left(\frac{\gamma_{xy}}{2}\right)^2} \quad (2.4.58)$$

Por cisalhamento puro em que  $\sigma_x = \sigma_y = 0$ , sabe-se que  $\varepsilon_x = \varepsilon_y = 0$ , assim:

$$\varepsilon_{m\acute{a}x} = \frac{\gamma_{xy}}{2} \quad (2.4.59)$$

Utilizando a Equação (2.4.57) e manipulando para isolar o  $\varepsilon_{m\acute{a}x}$ , e substituindo na Equação (2.4.59), obtém-se:

$$\frac{\gamma_{xy}}{2} = \frac{\tau_{xy}}{E}(1 + \nu) \quad (2.4.60)$$

Simplificando, pode-se achar a tensão de cisalhamento, ficando a equação desta maneira:

$$\tau_{xy} = \frac{E}{2(1 + \nu)} \cdot \gamma_{xy} \quad (2.4.61)$$

Assim, é possível encontrar o módulo de elasticidade transversal substituindo a Equação (2.4.40), na Equação (2.4.61), resultando em:

$$\tau_{xy} = \frac{E}{2(1 + \nu)} \cdot \frac{\tau_{xy}}{G} \quad (2.4.62)$$

Dividindo as tensões de cisalhamento, que estão em lados contrários da equação, e passando o módulo de elasticidade transversal  $G$  multiplicando pelo valor do primeiro membro da equação, encontra-se o seguinte resultado:

$$G = \frac{E}{2(1 + \nu)} \quad (2.4.63)$$

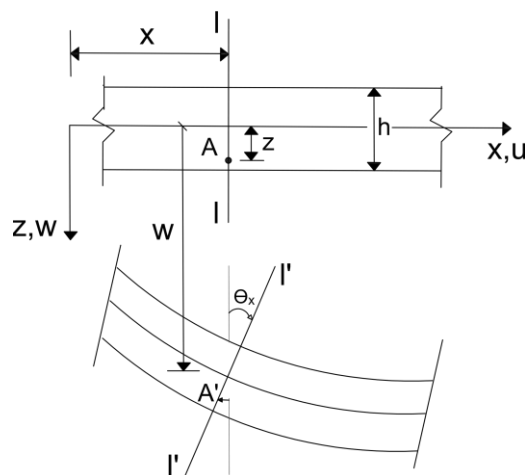
### 3 EQUAÇÃO DIFERENCIAL DE LAGRANGE

Segundo Oliveira Neto (1998), para se fazer a análise estabelecidas do comportamento de placas finas, utiliza-se as hipóteses simplificadoras, dispostas por *Kirchhoff*, considerando quatro variáveis de contorno, que levam a equação de quarta ordem de *Lagrange*. Para a dedução de sua equação, serão admitidas as seguintes hipóteses (ARAÚJO, 2010):

- Material elástico seguindo a lei de *Hooke*;
- Pequena espessura da placa;
- Pequenas deformações e deslocamentos;
- Deslocamentos horizontais desprezíveis dos pontos do plano médio;
- Retas normais ao plano médio da placa permanecem normais a esse plano após a deformação;
- Tensão  $\sigma_z$  desprezível quando comparada aos valores de  $\sigma_x$  e  $\sigma_y$ .

A carga normal ao plano médio em uma determinada placa é indicada genericamente por  $p(x, y) = p$ . Tem-se no plano  $x - y$  a superfície média da placa, assim, considerando a deformação da placa em uma seção paralela ao eixo  $x$ , obtém-se as relações entre os deslocamentos e as deformações (DIAS, 2019). A Figura 3.1 ilustra o deslocamento de um ponto situado sobre uma normal ao plano da placa e distante  $z$  desse plano:

Figura 3.1 – Deformação de uma seção transversal.

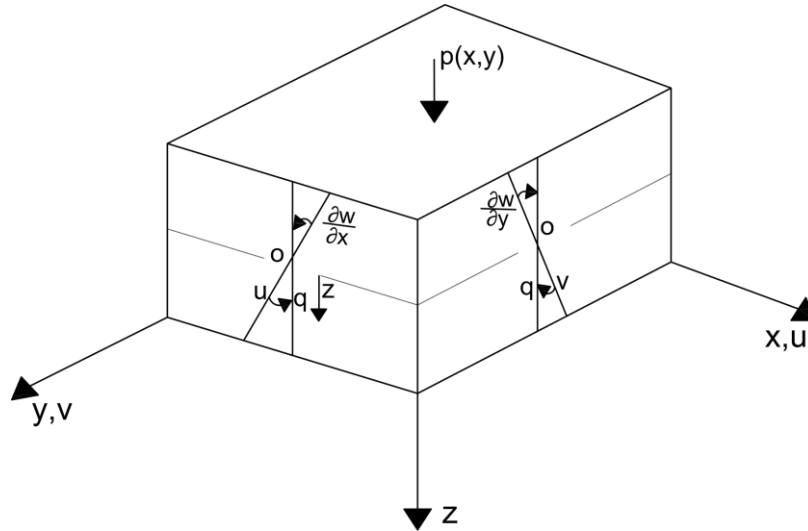


Fonte – Autor, 2023.

Uma placa ao se deformar, apresenta uma variação da posição dos pontos através da inclinação da reta, que pode ser obtida, derivando-se o deslocamento vertical  $w$ . Partindo desse entendimento, é possível perceber a formação de um ângulo quando se tem a projeção da linha da placa sem carregamento, na placa deformada.

Ao se representar um elemento de placa tridimensional, fica mais evidente a movimentação dos pontos determinados e a formação de um triângulo retângulo que será útil para determinação do ângulo – Figura 3.2.

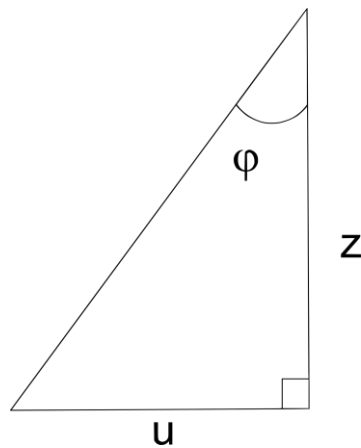
Figura 3.2 – Elemento tridimensional de placa.



Fonte – Autor, 2023.

Usando relações trigonométricas, de acordo com a Figura 3.3, para se determinar o quanto o ponto  $q$  irá se deslocar, ou seja, a rotação deste ponto, tem-se:

Figura 3.3 – Triângulo retângulo.



Fonte – Autor, 2023.

$$\frac{C_{ateto\ oposto}}{C_{ateto\ adjacente}} = \tan \theta \quad (3.1)$$

$$\tan \varphi = \frac{u}{z} \quad (3.2)$$

Para ter uma variação de inclinação da reta, é necessário derivar o deslocamento  $w$ :

$$\varphi = \frac{\partial w}{\partial x} ; \varphi = \frac{\partial w}{\partial y} \quad (3.3)$$

$$u = z \tan \varphi \quad (3.4)$$

$$u = z \tan \frac{\partial w}{\partial x} \quad (3.5)$$

Como a distância entre os pontos  $z$ , movimenta-se para a orientação contrária ao eixo  $x$ , tem-se, um sinal negativo, logo:

$$-u = z \tan \frac{\partial w}{\partial x} \quad (3.6)$$

Multiplicando ambos os lados por  $-1$ , tem-se:

$$u = -z \tan \frac{\partial w}{\partial x} \quad (3.7)$$

Como o ângulo formado é muito pequeno, a  $\tan \frac{\partial w}{\partial x}$  será, aproximadamente  $\frac{\partial w}{\partial x}$ , assim fica:

$$u = -z \frac{\partial w}{\partial x} \quad (3.8)$$

Analogamente:

$$v = -z \frac{\partial w}{\partial y} \quad (3.9)$$

Adotando-se, as hipóteses de estado plano de tensão, tem-se que:

$$\sigma_z = 0 ; \varepsilon_z = 0 \quad (3.10)$$

As rotações da superfície média deformada, são aproximadas através da derivada do deslocamento vertical, ou seja, as hipóteses cinemáticas se resumem à:

$$u(x, y, z) = -z \frac{\partial w(x, y)}{\partial x} \quad (3.11)$$

$$v(x, y, z) = -z \frac{\partial w(x, y)}{\partial y} \quad (3.12)$$

$$w(x, y, z) = w(x, y) \quad (3.13)$$

Considerando as deformações e distorções visto no capítulo anterior, e substituindo as Equações (3.8) na (2.4.6), (3.9) na (2.4.7), (3.8) e (3.9) na Equação (2.4.9), encontra-se as seguintes equações:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial \left( -z \frac{\partial w}{\partial x} \right)}{\partial x} \quad (3.14)$$

Em que  $-z$  é uma constante, tem-se:

$$\varepsilon_x = -z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \quad (3.15)$$

A deformação específica de  $y$ , será análoga à de  $x$ , ficando:

$$\varepsilon_y = -z \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \quad (3.16)$$

Para a distorção também se tem derivada de segunda ordem. No entanto, como está no plano  $x - y$ , será derivada em relação à  $x$  e depois em relação à  $y$ :

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial \left( -z \frac{\partial w}{\partial x} \right)}{\partial y} + \frac{\partial \left( -z \frac{\partial w}{\partial y} \right)}{\partial x} \quad (3.17)$$

Soma-se as constantes, assim, obtém-se:

$$\gamma_{xy} = -2z \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \quad (3.18)$$

Considerando-se a hipótese de que as tensões normais à superfície média são desprezíveis, e aplicando as Equações (3.15) e (3.16) na Equação (2.4.37) e na Equação (2.4.38), respectivamente, é possível encontrar as deformações. Já para as distorções faz-se necessário substituir a Equação (3.18) na Equação (2.4.61). Dessa maneira, pode-se encontrar as seguintes equações:

$$\sigma_x = -\frac{Ez}{(1 - \nu^2)} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \quad (3.19)$$

$$\sigma_y = -\frac{Ez}{(1 - \nu^2)} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \quad (3.20)$$

$$\tau_{xy} = -\frac{Ez}{(1+\nu)} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \quad (3.21)$$

No plano médio, tem-se que as tensões são nulas. Além disso, as três componentes das tensões variam de forma linear ao longo da espessura da placa (DIAS, 2019). Os esforços axiais  $\sigma_x$  e  $\sigma_y$  produzem momentos fletores na placa. Já os esforços cortantes  $\tau_{xy}$  e  $\tau_{yx}$ , produzem momentos torsores na placa. Integrando as tensões normais em relação ao eixo  $z$ , no qual o plano médio varia de  $\frac{t}{2}$  até  $-\frac{t}{2}$ , logo:

$$M_x = \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} \sigma_x \cdot z dz \quad (3.22)$$

Substituindo a Equação (3.19) na Equação (3.22), tem-se:

$$M_x = \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} -\frac{Ez}{(1-\nu^2)} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \cdot z dz \quad (3.23)$$

$$M_x = -\frac{E}{(1-\nu^2)} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} z^2 dz \quad (3.24)$$

$$M_x = -\frac{E}{(1-\nu^2)} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \left[ \frac{z^3}{3} \right]_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} \quad (3.25)$$

$$M_x = -\frac{E}{(1-\nu^2)} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \left[ \frac{\left(\frac{t}{2}\right)^3}{3} - \frac{\left(-\frac{t}{2}\right)^3}{3} \right] \quad (3.26)$$

$$M_x = -\frac{E}{(1-\nu^2)} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \left[ \frac{t^3}{24} + \frac{t^3}{24} \right] \quad (3.27)$$

$$M_x = -\frac{E}{(1-\nu^2)} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \cdot \frac{t^3}{12} \quad (3.28)$$

$$M_x = -\frac{Et^3}{12(1-\nu^2)} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \quad (3.29)$$

As mesmas considerações serão feitas para a direção  $y$ , tendo o seguinte resultado:

$$M_y = -\frac{Et^3}{12(1-\nu^2)} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \quad (3.30)$$

Para o momento torsor  $M_{xy}$ , usa-se a tensão cisalhante  $M_{xy} = \int_{-t/2}^{t/2} \tau_{xy} \cdot z dz$ . Além disso, utiliza-se o mesmo valor da integral  $M_x$ , ou seja, o mesmo resultado  $t^3/12$ , assim ficamos com a seguinte equação:

$$M_{xy} = -\frac{Et^3}{12(1+\nu)} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right) \quad (3.31)$$

Multiplicando ambos os lados, tanto o numerador como o denominador por  $(1-\nu)$ , e manipulando para deixar  $(1-\nu^2)$  como termo em comum.

$$M_{xy} = -\frac{Et^3(1-\nu)}{12(1-\nu)(1+\nu)} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right) \quad (3.32)$$

$$M_{xy} = -\frac{Et^3(1-\nu)}{12(1-\nu^2)} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right) \quad (3.33)$$

A fim de simplificar, adota-se a seguinte afirmação:

$$D = \frac{Et^3}{12(1-\nu^2)} \quad (3.34)$$

Em que esse  $D$  será denominado rigidez.

Com isso simplificando as Equações (3.29), (3.30) e (3.33), obtém-se:

$$M_x = -D \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \quad (3.35)$$

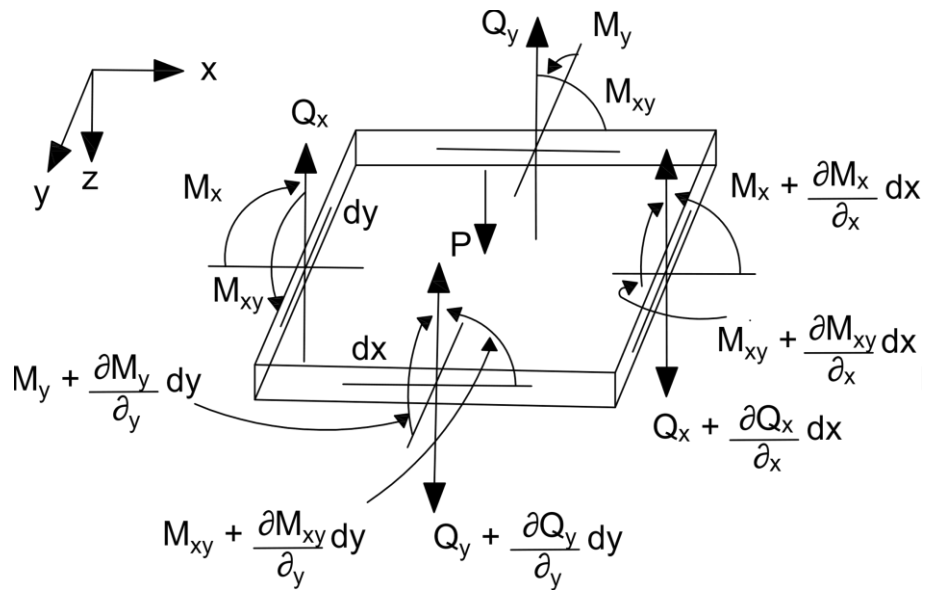
$$M_y = -D \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \quad (3.36)$$

$$M_{xy} = -(1 - \nu)D \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right) \quad (3.37)$$

Tomando-se o equilíbrio de um elemento infinitesimal de placa ( $dx dy$ ), tem-se que os esforços solicitantes nas faces serão, momentos torsores ( $M_{xy} = M_{yx}$ ), momentos fletores ( $M_x$  e  $M_y$ ) e esforços cortantes ( $Q_x$  e  $Q_y$ ), (ARAÚJO, 2010).

Na Figura 3.4, indica-se o plano médio do elemento de placa e os esforços solicitantes, os quais são representados na própria figura.

Figura 3.4 – Placa tridimensional e esforços solicitantes.



Fonte – Autor, 2023.

Com base na Figura 3.4, calcula-se o equilíbrio de forças verticais de um elemento infinitesimal.

$$p dx dy - Q_x dy - Q_y dx + \left( Q_x + \frac{\partial Q_x}{\partial x} dx \right) dy + \left( Q_y + \frac{\partial Q_y}{\partial y} dy \right) dx = 0 \quad (3.38)$$

$$p dx dy - Q_x dy - Q_y dx + Q_x dy + \frac{\partial Q_x}{\partial x} dx dy + Q_y dx + \frac{\partial Q_y}{\partial y} dy dx = 0 \quad (3.39)$$

$$p dx dy + \frac{\partial Q_x}{\partial x} dx dy + \frac{\partial Q_y}{\partial y} dy dx = 0 \quad (3.40)$$

$$\left( p + \frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} \right) dx dy = 0 \quad (3.41)$$

Passando o  $dx dy$  dividindo, tem-se que:



$$p + \frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} = 0 \quad (3.42)$$

$$\frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} = -p \quad (3.43)$$

Tomando-se o equilíbrio de momentos em torno do eixo  $x$ , obtém-se:

$$-M_{xy}dy - M_y dx + \left( M_{xy} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} dx \right) dy + \left( M_y + \frac{\partial M_y}{\partial y} dy \right) dx - Q_y dxdy = 0 \quad (3.44)$$

$$-M_{xy}dy - M_y dx + M_{xy}dy + \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} dxdy + M_y dx + \frac{\partial M_y}{\partial y} dydx - Q_y dxdy = 0 \quad (3.45)$$

$$\frac{\partial M_{xy}}{\partial x} dxdy + \frac{\partial M_y}{\partial y} dydx - Q_y dxdy = 0 \quad (3.46)$$

$$\left( \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial M_y}{\partial y} - Q_y \right) dxdy = 0 \quad (3.47)$$

Passando o  $dxdy$  dividindo, acha-se o seguinte resultado:

$$\frac{\partial M_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial M_y}{\partial y} - Q_y = 0 \quad (3.48)$$

$$\frac{\partial M_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial M_y}{\partial y} = Q_y \quad (3.49)$$

Para o eixo  $y$ , será análogo, assim, ficando:

$$\frac{\partial M_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial M_x}{\partial x} = Q_x \quad (3.50)$$

Substituindo as Equações (3.49) e (3.50), na Equação (3.43), produz-se a seguinte equação:

$$\left[ \frac{\partial \left( \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} \right)}{\partial x} + \frac{\partial \left( \frac{\partial M_x}{\partial x} \right)}{\partial x} \right] + \left[ \frac{\partial \left( \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} \right)}{\partial y} + \frac{\partial \left( \frac{\partial M_y}{\partial y} \right)}{\partial y} \right] = -p \quad (3.51)$$

$$\frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} = -p \quad (3.52)$$

$$\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} = -p \quad (3.53)$$

No qual a Equação (3.53), será a Equação diferencial de equilíbrio de esforços internos da placa. Para chegar na equação final de *Lagrange*, é necessário substituir as Equações (3.29), (3.30) e (3.33) na Equação (3.53). Assim, obtém-se a equação:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial x} \left[ -\frac{Et^3}{12(1-\nu^2)} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \right] + 2 \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \left[ -\frac{Et^3(1-\nu)}{12(1-\nu^2)} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right] \\ + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left[ -\frac{Et^3}{12(1-\nu^2)} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \right] = -p \end{aligned} \quad (3.54)$$

Como essa constante já foi representada anteriormente, substitui na próxima equação. Colocando em evidência, ficando  $D = Et^3/12(1-\nu^2)$ , assim, tem-se:

$$-D \left[ \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) + 2 * \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right) + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \right] = -p \quad (3.55)$$

Passando o  $D$  dividindo e resolve as derivadas, obtém-se uma equação de quarta ordem que foi desenvolvida por *Lagrange*.

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{p}{D} \quad (3.56)$$

#### 4 SÉRIES DUPLAS DE FOURIER

O comportamento da placa é regida pelas soluções de *Navier* e *Levy*, sendo elas formuladas, utilizando as séries de Fourier. Quando se trata de lajes, será possível encontrar a flecha máxima, momentos fletores e outros demais esforços solicitantes internos.

Se  $f: [0, a] \times [0, b] \rightarrow \mathbb{R}$  uma função de duas variáveis. Para representar  $f$  como uma sequência infinita de senos e cossenos, podendo ser feito de forma análoga para funções de uma variável. Para resolver equações diferenciais parciais bidimensionais, primeiro define-se como  $y$  para obter uma função  $f_y(x) = f(x, y)$  da variável (BIEZUNER, 2007). Suponha que cada  $y$  associado à função  $f_y: [0, a] \rightarrow \mathbb{R}$  satisfaça as suposições do teorema de Fourier. Estendendo-se  $f_y$  a uma função periódica de período  $2a$ , de acordo com Fourier (1768 – 1830), pode-se escrever:

$$F(x, y) = f_y(x) = \frac{a_{0(y)}}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left( a_{n(y)} \cos\left(\frac{n\pi x}{a}\right) + b_{n(y)} \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right) \right) \quad (4.1)$$

em que, para cada  $y \in [0, b]$ , os coeficientes de Fourier são dados por:

$$a_{n(y)} = \frac{1}{a} \int_{-a}^a f(x, y) \cos\left(\frac{n\pi x}{a}\right) dx \quad (4.2)$$

para  $n \geq 0$ :

$$b_{n(y)} = \frac{1}{a} \int_{-a}^a f(x, y) \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right) dx \quad (4.3)$$

e para  $n \geq 1$  (BIEZUNER, 2007).

Neste caso, todos os coeficientes  $a_n, b_n: [0, b] \rightarrow \mathbb{R}$ , que na verdade são funções de  $y$ , são assumidos para satisfazer as suposições do teorema de Fourier, então expande-se todos eles para o período da função  $2b$ , podemos escrever:

$$a_0(y) = \frac{a_{0(0)}}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left( a_{0n} \cos\left(\frac{m\pi y}{b}\right) + b_{0n} \sin\left(\frac{m\pi y}{b}\right) \right) \quad (4.4)$$

$$a_n(y) = \frac{a_{no}}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left( a_{nm} \cos\left(\frac{m\pi y}{b}\right) + b_{nm} \sin\left(\frac{m\pi y}{b}\right) \right) \quad (4.5)$$

$$b_n(y) = \frac{c_{no}}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left( c_{nm} \cos\left(\frac{m\pi y}{b}\right) + d_{nm} \sin\left(\frac{m\pi y}{b}\right) \right) \quad (4.6)$$

em que:

$$a_{0m}(y) = \frac{1}{b} \int_{-b}^b a_{0(y)} \cos\left(\frac{m\pi y}{b}\right) dy \quad , m \geq 0 \quad (4.7)$$

$$b_{0m}(y) = \frac{1}{b} \int_{-b}^b a_{0(y)} \sin\left(\frac{m\pi y}{b}\right) dy \quad , m \geq 1 \quad (4.8)$$

$$a_{nm}(y) = \frac{1}{b} \int_{-b}^b a_{n(y)} \cos\left(\frac{m\pi y}{b}\right) dy \quad , m \geq 0 \quad (4.9)$$

$$b_{nm}(y) = \frac{1}{b} \int_{-b}^b a_{n(y)} \sin\left(\frac{m\pi y}{b}\right) dy \quad , m \geq 1 \quad (4.10)$$

$$c_{nm}(y) = \frac{1}{b} \int_{-b}^b b_{n(y)} \cos\left(\frac{m\pi y}{b}\right) dy \quad , m \geq 0 \quad (4.11)$$

$$d_{nm}(y) = \frac{1}{b} \int_{-b}^b b_{n(y)} \sin\left(\frac{m\pi y}{b}\right) dy \quad , m \geq 1 \quad (4.12)$$

Substituindo as Equações (4.4), (4.5) e (4.6) na Equação (4.1), obtém-se:

$$\begin{aligned} F(x, y) = & \frac{1}{2} \left[ \frac{a_{00}}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} \left( a_{0m} \cos\left(\frac{m\pi y}{b}\right) + b_{0m} \sin\left(\frac{m\pi y}{b}\right) \right) \right] \\ & + \left[ \frac{a_{n0}}{2} \right. \\ & + \sum_{m=1}^{\infty} \left( a_{nm} \cos\left(\frac{m\pi y}{b}\right) + b_{nm} \sin\left(\frac{m\pi y}{b}\right) \right) \left. \right] \cos\left(\frac{n\pi x}{a}\right) \\ & + \left[ \frac{c_{n0}}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} \left( c_{nm} \cos\left(\frac{m\pi y}{b}\right) + d_{nm} \sin\left(\frac{m\pi y}{b}\right) \right) \right] \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right) \end{aligned} \quad (4.13)$$

$$\begin{aligned}
F(x, y) &= \frac{a_{00}}{4} + \frac{1}{2} \sum_{m=1}^{\infty} \left( a_{0m} \cos\left(\frac{m\pi y}{b}\right) + b_{0m} \sin\left(\frac{m\pi y}{b}\right) \right) \\
&\quad + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{n0}}{2} \cos\left(\frac{n\pi x}{a}\right) \\
&\quad + \sum_{n=1}^{\infty} a_{nm} \cos\left(\frac{m\pi y}{b}\right) \cos\left(\frac{n\pi x}{a}\right) + b_{nm} \sin\left(\frac{m\pi y}{b}\right) \cos\left(\frac{n\pi x}{a}\right) \quad (4.14) \\
&\quad + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_{n0}}{2} \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right) \\
&\quad + \sum_{m=1}^{\infty} c_{nm} \cos\left(\frac{m\pi y}{b}\right) \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right) + d_{nm} \sin\left(\frac{m\pi y}{b}\right) \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
F(x, y) &= \frac{a_{00}}{4} + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \left( a_{n0} \cos\left(\frac{n\pi x}{a}\right) + c_{n0} \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right) \right) \\
&\quad + \frac{1}{2} \sum_{m=1}^{\infty} \left( a_{0m} \cos\left(\frac{m\pi y}{b}\right) + b_{0m} \sin\left(\frac{m\pi y}{b}\right) \right) \quad (4.15) \\
&\quad + \sum_{n,m=1}^{\infty} a_{nm} \cos\left(\frac{m\pi y}{b}\right) \cos\left(\frac{n\pi x}{a}\right) \\
&\quad + b_{nm} \sin\left(\frac{m\pi y}{b}\right) \cos\left(\frac{n\pi x}{a}\right) + c_{nm} \cos\left(\frac{m\pi y}{b}\right) \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right) \\
&\quad + d_{nm} \sin\left(\frac{m\pi y}{b}\right) \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right)
\end{aligned}$$

Calculando os coeficientes da Equação (4.15), tem-se:

$$a_{nm} = \frac{1}{ab} \int_{-a}^a \int_{-b}^b f(x, y) \cos\left(\frac{n\pi x}{a}\right) \cos\left(\frac{m\pi y}{b}\right) dx dy, \quad \text{para } n, m \geq 0 \quad (4.16)$$

$$b_{nm} = \frac{1}{ab} \int_{-a}^a \int_{-b}^b f(x, y) \cos\left(\frac{n\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{m\pi y}{b}\right) dx dy, \quad \text{para } n \geq 0, m \geq 1 \quad (4.17)$$

$$c_{nm} = \frac{1}{ab} \int_{-a}^a \int_{-b}^b f(x, y) \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right) \cos\left(\frac{m\pi y}{b}\right) dx dy, \quad \text{para } n \geq 1, m \geq 0 \quad (4.18)$$

$$d_{nm} = \frac{1}{ab} \int_{-a}^a \int_{-b}^b f(x, y) \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{m\pi y}{b}\right) dx dy, \quad \text{para } n \geq 1, m \geq 0 \quad (4.19)$$

Suponha que  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  seja uma função periódica em duas variáveis, período  $2a$  e período  $2b$  em  $y$  com uma série dupla de Fourier. Tendo as funções  $\sin(x) \cos(x) = 0$ , em um

intervalo simétrico, pois se trata de uma multiplicação de uma função ímpar por uma par, respectivamente, resultando uma função ímpar. Assim, será calculado apenas os coeficientes  $a_{nm}$  e  $d_{nm}$ .

Para  $a_{nm}$ :

$$a_{nm} = \frac{1}{ab} \int_{-a}^a \left[ \int_{-b}^b f(x, y) \cos\left(\frac{m\pi y}{b}\right) dy \right] \cos\left(\frac{n\pi x}{a}\right) dx \quad (4.20)$$

$$a_{nm} = \frac{1}{ab} \int_{-a}^a \left[ 2 \int_0^b f(x, y) \cos\left(\frac{m\pi y}{b}\right) dy \right] \cos\left(\frac{n\pi x}{a}\right) dx \quad (4.21)$$

$$a_{nm} = \frac{2}{ab} \int_0^b \left[ 2 \int_0^a f(x, y) \cos\left(\frac{n\pi x}{a}\right) dx \right] \cos\left(\frac{m\pi y}{b}\right) dy \quad (4.22)$$

$$a_{nm} = \frac{4}{ab} \int_0^a \int_0^b f(x, y) \cos\left(\frac{n\pi x}{a}\right) \cos\left(\frac{m\pi y}{b}\right) dy dx \quad (4.23)$$

Agora, para o  $d_{nm}$ :

$$d_{nm} = \frac{1}{ab} \int_{-a}^a \left[ \int_{-b}^b f(x, y) \sin\left(\frac{m\pi y}{b}\right) dy \right] \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right) dx \quad (4.24)$$

$$d_{nm} = \frac{1}{ab} \int_{-a}^a \left[ 2 \int_0^b f(x, y) \sin\left(\frac{m\pi y}{b}\right) dy \right] \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right) dx \quad (4.25)$$

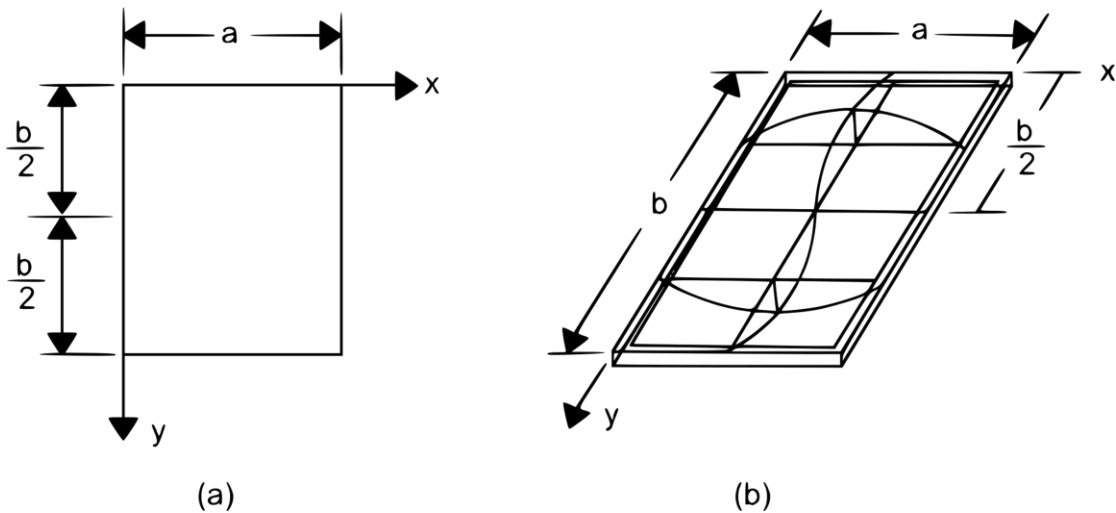
$$d_{nm} = \frac{2}{ab} \int_0^b \left[ 2 \int_0^a f(x, y) \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right) dx \right] \sin\left(\frac{m\pi y}{b}\right) dy \quad (4.26)$$

$$d_{nm} = \frac{4}{ab} \int_0^a \int_0^b f(x, y) \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{m\pi y}{b}\right) dy dx \quad (4.27)$$

## 5 SOLUÇÃO DE NAVIER

Esta solução é usada para placa simplesmente apoiada como visto na Figura 5.1, através de duplas séries trigonométricas, por representar os deslocamentos transversais nos eixos  $x$  e  $y$ . Para a formulação da determinada solução considera-se uma placa retangular de lados  $a$  e  $b$ , com apoios simples em todas as extremidades e sujeita a um carregamento  $p(x, y)$ .

Figura 5.1 – Placa retangular 2D e 3D.



Fonte – Autor, 2023.

$$p(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} p_{mn} \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \quad (5.1)$$

$$w(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} w_{mn} \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \quad (5.2)$$

Para se chegar nos resultados das Equações (5.1) e (5.2), através das séries duplas de Fourier, é importante ter conhecimento que não vão existir coeficientes com subíndices iguais a zero, ou seja, não vão existir  $m$  e  $n$  iguais a zero, devido estar considerando a existência de carga e, conseqüentemente, deflexão. Além disso, serão usadas séries duplas de senos porque corresponde à deformação da placa, tendo em vista que os coeficientes com subíndices diferentes de zero vão representar as coordenadas centrais e o número de meias curvas da função senoidal no gráfico da placa.

Para se fazer o uso desta solução, é necessário utilizar condições de contorno preestabelecidas. Nesse caso, para uma placa simplesmente apoiada, essas serão as condições de contorno.

$$w = 0 ; M_x = 0 ; (x = 0 ; x = a) \quad (5.3)$$

$$w = 0 ; M_y = 0 ; (y = 0 ; y = b) \quad (5.4)$$

A partir dos conhecimentos obtidos no capítulo anterior, é possível calcular o coeficiente  $p_{mn}$ , multiplicando cada lado da equação do carregamento por.

$$\sin\left(\frac{m'\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n'\pi y}{b}\right) dy dx \quad (5.5)$$

e integrando entre os limites  $(0, a)$  e  $(0, b)$ , tem-se:

$$\begin{aligned} & \int_0^b \int_0^a p(x, y) \sin\left(\frac{m'\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n'\pi y}{b}\right) dy dx \\ &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} p_{mn} \int_0^b \int_0^a \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \sin\left(\frac{m'\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n'\pi y}{b}\right) dy dx \end{aligned} \quad (5.6)$$

Para resolver essas integrais de forma mais rápida e eficiente, utiliza-se a seguinte relação de ortogonalidade:

$$2 \sin(\theta) \sin(\phi) = \cos(\theta - \phi) - \cos(\theta + \phi) \quad (5.7)$$

Primeiro resolve-se a integral que tem relação com  $x$ , considerando  $m \neq m'$ , tem-se:

$$\begin{aligned} & \int_0^a \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{m'\pi x}{a}\right) dx \\ &= \frac{1}{2} \int_0^a \left[ \cos\left(\frac{m\pi x}{a} - \frac{m'\pi x}{a}\right) - \cos\left(\frac{m\pi x}{a} + \frac{m'\pi x}{a}\right) \right] dx \quad (5.8) \\ &= \frac{1}{2} \int_0^a \left\{ \cos\left[(m - m')\frac{\pi x}{a}\right] - \cos\left[(m + m')\frac{\pi x}{a}\right] \right\} dx \end{aligned}$$

Separando em duas integrais e resolvendo pelo método de substituição, tem-se:

$$u = (m - m')\frac{\pi x}{a} ; v = (m + m')\frac{\pi x}{a} \quad (5.9)$$

$$dx = \frac{a}{\pi(m - m')} du ; dx = \frac{a}{\pi(m + m')} dv \quad (5.10)$$



Voltando para a Equação (5.8), obtém-se:

$$\frac{1}{2} \int_0^a \cos(u) \frac{a}{\pi(m-m')} du - \frac{1}{2} \int_0^a \cos(v) \frac{a}{\pi(m-m')} dv \quad (5.11)$$

$$\frac{1}{2} \sin(u) \frac{a}{\pi(m-m')} \Big|_0^a - \frac{1}{2} \sin(v) \frac{a}{\pi(m-m')} \Big|_0^a \quad (5.12)$$

Substituindo  $u$  e  $v$  pelos valores adotados na Equação (5.9), é possível encontrar o seguinte resultado:

$$\frac{1}{2} \left[ \frac{a}{\pi(m-m')} \sin(m-m') \frac{\pi x}{a} \right]_0^a - \frac{1}{2} \left[ \frac{a}{\pi(m+m')} \sin(m+m') \frac{\pi x}{a} \right]_0^a \quad (5.13)$$

$$\begin{aligned} & \frac{a}{2\pi(m-m')} [\sin(m-m')\pi - \sin(0)] \\ & - \frac{a}{2\pi(m+m')} [\sin(m+m')\pi - \sin(0)] = 0 \end{aligned} \quad (5.14)$$

Respeitando a seguinte condição:  $m, m' \in \mathbb{Z}_+^*$ ,  $a > 0$ , pois todos os múltiplos inteiros de  $\pi$  serão iguais a zero.

Fazendo, agora, para  $m = m'$ , tem-se:

$$\int_0^a \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{m'\pi x}{a}\right) dx = \frac{1}{2} \int_0^a \left\{ \cos\left[\frac{(m-m')\pi x}{a}\right] - \cos\left[\frac{(m+m')\pi x}{a}\right] \right\} dx \quad (5.15)$$

$$\frac{1}{2} \int_0^a \left[ 1 - \cos\left(\frac{2m\pi x}{a}\right) \right] dx \quad (5.16)$$

$$\frac{1}{2} x \Big|_0^a - \frac{1}{2} \left[ \frac{a}{2m\pi} \sin\left(\frac{2m\pi x}{a}\right) \right]_0^a \quad (5.17)$$

$$\frac{a}{2} - \frac{1}{2} \left\{ \frac{a}{2m\pi} [\sin(2m\pi) - \sin(0)] \right\} \quad (5.18)$$

$$\int_0^a \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{m'\pi x}{a}\right) dx = \frac{a}{2} \quad (5.19)$$

Para  $y$ , será usada a mesma analogia, tendo mudanças apenas no intervalo de integração. Além disso, os termos de  $y$  são chamados de  $n$ . Assim, tem-se:

$$\int_0^a \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{m'\pi x}{a}\right) dx \Rightarrow \begin{cases} 0 & (m \neq m') \\ \frac{a}{2} & (m = m') \end{cases} \quad (5.20)$$

$$\int_0^b \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \sin\left(\frac{n'\pi y}{b}\right) dy \Rightarrow \begin{cases} 0 & (m \neq m') \\ \frac{b}{2} & (m = m') \end{cases} \quad (5.21)$$

Adotando-se os resultados das Equações (5.20) e (5.21), respectivamente, e substituindo na Equação (5.6), obtém-se:

$$\int_0^b \int_0^a p(x, y) \sin\left(\frac{m'\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n'\pi y}{b}\right) dy dx = \frac{ab}{4} p_{mn} \quad (5.22)$$

Ficando com o seguinte resultado para o coeficiente  $p_{mn}$ :

$$p_{mn} = \frac{4}{ab} \int_0^b \int_0^a p(x, y) \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) dy dx \quad (5.23)$$

Assim como o  $p(x, y)$  é representado por séries trigonométricas duplas de Fourier, a flexão da placa  $W(x, y)$  também será. No entanto, o cálculo de  $W_{mn}$  requer que se substituam as Equações de (5.1) e (5.2) na Equação diferencial de deflexão da placa (3.56). Assim, obtém-se:

$$\begin{aligned} w(x, y) &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \frac{\partial^4}{\partial x^4} \left( w_{mn} \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \right) \right] \\ &+ \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left[ 2 \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} \left( w_{mn} \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \right) \right] \\ &+ \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \frac{\partial^4}{\partial y^4} \left( w_{mn} \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \right) \right] \\ &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{p_{mn}}{D} \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \end{aligned} \quad (5.24)$$

Resolvendo as derivadas de quarta ordem utilizando as relações de ortogonalidade, tem-se:

$$\begin{aligned} w_{mn} \frac{\partial^4}{\partial x^4} \left( \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \right) \\ = \frac{1}{2} w_{mn} \frac{\partial^4}{\partial x^4} \left[ \cos\left(\frac{m\pi x}{a} - \frac{n\pi y}{b}\right) - \cos\left(\frac{m\pi x}{a} + \frac{n\pi y}{b}\right) \right] \end{aligned} \quad (5.25)$$

O resultado dessas derivadas será:

$$\frac{\partial^4}{\partial x^4} \left[ \cos \left( \frac{m\pi x}{a} - \frac{n\pi y}{b} \right) \right] = \left( \frac{m\pi}{a} \right)^4 \cdot \cos \left( \frac{m\pi x}{a} - \frac{n\pi y}{b} \right) \quad (5.26)$$

$$\frac{\partial^4}{\partial x^4} \left[ \cos \left( \frac{m\pi x}{a} + \frac{n\pi y}{b} \right) \right] = \left( \frac{m\pi}{a} \right)^4 \cdot \cos \left( \frac{m\pi x}{a} + \frac{n\pi y}{b} \right) \quad (5.27)$$

Para simplificar, adota-se as seguintes relações de ortogonalidade, respectivamente:

$$\cos(\theta - \phi) = \cos(\theta) \cos(\phi) + \sin(\theta) \sin(\phi) \quad (5.28)$$

$$\cos(\theta + \phi) = \cos(\theta) \cos(\phi) - \sin(\theta) \sin(\phi) \quad (5.29)$$

Substituindo os resultados das derivadas das Equações (5.26) e (5.27), respectivamente, na segunda parcela da Equação (5.25), obtém-se:

$$\frac{1}{2} w_{mn} \left( \frac{m\pi}{a} \right)^4 \left[ \cos \left( \frac{m\pi x}{a} - \frac{n\pi y}{b} \right) - \cos \left( \frac{m\pi x}{a} + \frac{n\pi y}{b} \right) \right] \quad (5.30)$$

Aplicando as relações de ortogonalidade das Equações (5.28) e (5.29) na Equação (5.30), é possível chegar no seguinte resultado:

$$\frac{1}{2} w_{mn} \left( \frac{m\pi}{a} \right)^4 \left\{ \left[ \cos \left( \frac{m\pi x}{a} \right) \cos \left( \frac{n\pi y}{b} \right) + \sin \left( \frac{m\pi x}{a} \right) \sin \left( \frac{n\pi y}{b} \right) \right] - \left[ \cos \left( \frac{m\pi x}{a} \right) \cos \left( \frac{n\pi y}{b} \right) - \sin \left( \frac{m\pi x}{a} \right) \sin \left( \frac{n\pi y}{b} \right) \right] \right\} \quad (5.31)$$

$$\frac{1}{2} w_{mn} \left( \frac{m\pi}{a} \right)^4 \left\{ \left[ \sin \left( \frac{m\pi x}{a} \right) \sin \left( \frac{n\pi y}{b} \right) \right] - \left[ -\sin \left( \frac{m\pi x}{a} \right) \sin \left( \frac{n\pi y}{b} \right) \right] \right\} \quad (5.32)$$

$$\frac{1}{2} w_{mn} \left( \frac{m\pi}{a} \right)^4 2 \sin \left( \frac{m\pi x}{a} \right) \sin \left( \frac{n\pi y}{b} \right) \quad (5.33)$$

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} = w_{mn} \left( \frac{m\pi}{a} \right)^4 \sin \left( \frac{m\pi x}{a} \right) \sin \left( \frac{n\pi y}{b} \right) \quad (5.34)$$

Da mesma forma será para  $y$ , fixando dessa maneira:

$$\frac{\partial^4}{\partial y^4} \left( w_{mn} \sin \left( \frac{m\pi x}{a} \right) \sin \left( \frac{n\pi y}{b} \right) \right) \quad (5.35)$$

$$\frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = w_{mn} \left( \frac{n\pi}{b} \right)^4 \sin \left( \frac{m\pi x}{a} \right) \sin \left( \frac{n\pi y}{b} \right) \quad (5.36)$$

Fazendo o mesmo processo de,  $\frac{\partial^4 w}{\partial x^4}$  para  $\frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2}$ , tem-se:

$$\frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} \left( w_{mn} \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \right) \quad (5.37)$$

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} = w_{mn} \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \quad (5.38)$$

Onde obtém-se uma derivada de quarta ordem, derivando-se duas vezes em relação à  $x$  e duas vezes em relação à  $y$ .

Depois de fazer as derivadas de quarta ordem, obtém-se a seguinte série:

$$\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ w_{mn} \left[ \left(\frac{m\pi}{a}\right)^4 + 2 \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^4 \right] - \frac{p_{mn}}{D} \right\} \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) = 0 \quad (5.39)$$

Dessa forma, simplificando ainda mais, obtém-se:

$$w_{mn} \pi^4 \left[ \left(\frac{m}{a}\right)^4 + 2 \left(\frac{m}{a}\right)^2 \left(\frac{n}{b}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^4 \right] - \frac{p_{mn}}{D} = 0 \quad (5.40)$$

Pode-se simplificar e transformar em um quadrado perfeito, dessa maneira, tem-se:

$$w_{mn} \pi^4 \left[ \left(\frac{m}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2 \right]^2 = \frac{p_{mn}}{D} \quad (5.41)$$

Logo:

$$w_{mn} = \frac{p_{mn}}{\pi^4 D \left[ \left(\frac{m}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2 \right]^2} \quad (5.42)$$

Então substitui na Equação (5.2), obtém-se:

$$w(x, y) = \frac{1}{\pi^4 D} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{p_{mn}}{\left[ \left(\frac{m}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2 \right]^2} \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \quad (5.43)$$

Para a aplicação da solução de *Navier*, em que o carregamento na placa é uniformemente distribuído, faz-se uma simplificação no resultado, gerando uma nova solução a partir da função  $W(x, y)$ , em que basta calcular  $p_{mn}$ .

Considere-se  $p(x, y) = p_0$ , logo, a equação do  $p_{mn}$ , será escrita como:

$$p_{mn} = \frac{4}{ab} \int_0^b \int_0^a p_0 \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) dy dx \quad (5.44)$$

Resolvendo as integrais em  $dx$  e, em seguida, em  $dy$ , tem-se:

$$p_{mn} = \frac{4p_0}{ab} \int_0^b \frac{a}{m\pi} \left[ -\cos\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \right]_0^a \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) dy \quad (5.45)$$

Colocando a função de  $y$  como constante, obtém-se:

$$p_{mn} = \frac{4p_0}{ab} \int_0^b \frac{a}{m\pi} \{ -\cos(m\pi) - [\cos(0)] \} \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) dy \quad (5.46)$$

$$p_{mn} = \frac{4p_0 a}{m\pi ab} [1 - \cos(m\pi)] \int_0^b \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) dy \quad (5.47)$$

e agora integrando em relação à  $y$ , obtém-se:

$$p_{mn} = \frac{4p_0 ab}{mn\pi^2 ab} [1 - \cos(m\pi)][1 - \cos(n\pi)] \quad (5.48)$$

O resultado de  $y$  será análogo ao de  $x$ , logo o valor de  $p_{mn}$  será:

$$p_{mn} = \frac{4p_0}{mn\pi^2} [1 - \cos(m\pi)][1 - \cos(n\pi)] \quad (5.49)$$

Todos os valores ímpares que multiplicam o  $\pi$  na função cosseno, terá como resultado  $(-1)$ . Já se for par, o resultado será 1. Então faz-se a seguinte relação:

$$\cos(m\pi) = (-1)^m \quad (5.50)$$

e

$$\cos(n\pi) = (-1)^n \quad (5.51)$$

Logo, tem-se:

$$p_{mn} = \frac{4p_0}{mn\pi^2} [1 - (-1)^m][1 - (-1)^n] \quad (5.52)$$

Se os valores de  $m$  e  $n$  forem pares o resultado é anulado. Assim, tem-se que adotar  $m$  e  $n$  números ímpares. Logo, escreve-se a expressão  $p_{mn}$  dessa forma, obtendo-se:

$$p_{mn} = \frac{4p_0}{mn\pi^2} \cdot 2 \cdot 2 \quad (5.53)$$

$$p_{mn} = \frac{16p_0}{mn\pi^2} \quad (5.54)$$

Voltando para a equação de  $W(x, y)$  e substituindo o valor de  $p_{mn}$ , obtém-se:

$$w(x, y) = \frac{16p_0}{\pi^6 D} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right)}{mn \left[\left(\frac{m}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2\right]^2} \quad (5.55)$$

As expressões para os momentos fletores podem ser obtidas substituindo-se a Equação (5.2) nas Equações (3.35) e (3.36), respectivamente, chegando ao seguinte resultado

$$M_x = -D \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[ w_{mn} \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \right] + \nu \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left[ w_{mn} \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \right] \right\} \quad (5.56)$$

$$M_x = -D \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ w_{mn} \left[ -\sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \right] + \nu w_{mn} \left[ -\sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \right] \right\} \quad (5.57)$$

Fazendo algumas manipulações, tem-se que os sinais negativos se anularão com o sinal negativo da rigidez. Além disso, colocando-se alguns termos em evidência, obtém-se:

$$M_x = D\pi^2 \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{m^2}{a^2} + \nu \frac{n^2}{b^2} \right) w_{mn} \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \quad (5.58)$$

$M_y$  será análogo a  $M_x$ , assim, encontrando o seguinte resultado:

$$M_y = D\pi^2 \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{n^2}{b^2} + \nu \frac{m^2}{a^2} \right) w_{mn} \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \quad (5.59)$$

Para  $M_{xy}$ , tem-se:

$$M_{xy} = -D(1 - \nu) \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \left[ w_{mn} \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \right] \quad (5.60)$$

$$M_{xy} = -D(1 - \nu) \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left[ w_{mn} \cos\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \cos\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \left(\frac{m\pi}{a}\right) \left(\frac{n\pi}{b}\right) \right] \quad (5.61)$$

Fazendo algumas manipulações, fica-se com:

$$M_{xy} = -D\pi^2(1 - \nu) \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \frac{mn}{ab} \right] w_{mn} \cos\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \cos\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \quad (5.62)$$

Como o valor de  $W_{mn}$  já foi encontrado na Equação (5.42), pode-se substituir nas Equações (5.58), (5.59) e (5.62), dessa maneira:

$$M_x = \frac{16P_0}{\pi^4} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left[ \left( \frac{m^2}{a^2} \right) + \nu \left( \frac{n^2}{b^2} \right) \right]}{mn \left[ \left( \frac{m^2}{a^2} \right) + \left( \frac{n^2}{b^2} \right) \right]^2} \sin \left( \frac{m\pi x}{a} \right) \sin \left( \frac{n\pi y}{b} \right) \quad (5.63)$$

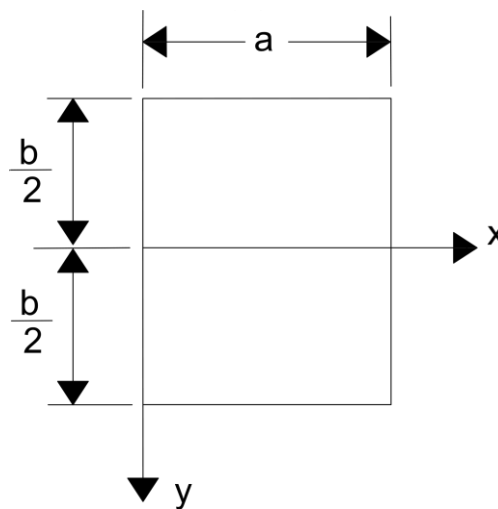
$$M_y = \frac{16P_0}{\pi^4} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left[ \left( \frac{n^2}{b^2} \right) + \nu \left( \frac{m^2}{a^2} \right) \right]}{mn \left[ \left( \frac{m^2}{a^2} \right) + \left( \frac{n^2}{b^2} \right) \right]^2} \sin \left( \frac{m\pi x}{a} \right) \sin \left( \frac{n\pi y}{b} \right) \quad (5.64)$$

$$M_{xy} = \frac{16P_0(1-\nu)}{\pi^4 ab} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\left[ \left( \frac{m^2}{a^2} \right) + \left( \frac{n^2}{b^2} \right) \right]^2} \cos \left( \frac{m\pi x}{a} \right) \cos \left( \frac{n\pi y}{b} \right) \quad (5.65)$$

## 6 SOLUÇÃO DE LÉVY

Devido a convergência lenta da solução de *Navier*, buscou-se uma solução para que os valores fossem encontrados de maneira mais rápida. Assim, *Levy* introduziu essa solução, que utiliza série única e é aplicável para descobrir os esforços internos nas placas retangulares, considerando as condições de contorno,  $y = \pm b/2$ ,  $x = 0$  e  $x = a$ , tendo no eixo  $x$  apoios simples – Figura 6.1. Além disso, é importante que a carga lateral tenha mesma distribuição nas seções paralelas ao eixo  $x$ , logo, o carregamento independe de  $y$ .

Figura 6.1 – Placa retangular.



(a)

Fonte – Autor, 2023.

No método de *Levy*, a solução  $w(x, y)$  para a equação diferencial de *Lagrange* é dada por

$$w(x, y) = w_h(x, y) + w_p(x, y) \quad (6.1)$$

A Equação de *Lagrange* é uma EDP, ou seja, Equação diferencial potencial linear não homogênea com coeficientes constantes, então, por isso, utiliza-se a expressão acima.

Na Equação (6.1), o  $w_h(x, y)$  é a função complementar de  $w_p(x, y)$ , que por sua vez, é a função particular, e quando somados formam a função  $w(x, y)$ .

A função complementar é resolvida, quando se considera a equação a seguir:

$$\frac{\partial^4 w_h}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w_h}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w_h}{\partial y^4} = 0 \quad (6.2)$$



Expandindo em série de Fourier, essa será a forma da equação, tendo em vista que tem duas variáveis.

$$w_h = \sum_{n=1}^{\infty} w_m(y) \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \quad (6.3)$$

A fim de simplificar a notação, toma-se  $w_m(y) = w_m$ . Assim, quando substituí o  $w_h$  da Equação (6.3) na Equação de *Lagrange* (6.2), obtém-se:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^4}{\partial x^4} \left[ \sum_{m=1}^{\infty} w_m \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \right] + 2 \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} \left[ \sum_{m=1}^{\infty} w_m \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \right] \\ + \frac{\partial^4}{\partial y^4} \left[ \sum_{m=1}^{\infty} w_m \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \right] = 0 \end{aligned} \quad (6.4)$$

Derivadas idênticas foram calculadas no método de *Navier*, considerando-se o  $w_m$  como uma função  $y$ , logo, tem-se que:

$$\sum_{m=1}^{\infty} \left[ \frac{d^4 w_m}{dy^4} - 2 \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 \frac{d^2 w_m}{dy^2} + \left(\frac{m\pi}{a}\right)^4 w_m \right] \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) = 0 \quad (6.5)$$

Para que esta equação seja válida em todos os valores de  $x$ , é necessário adotar uma equação característica, a partir da seguinte expressão:

$$\frac{d^4 w_m}{dy^4} - 2 \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 \frac{d^2 w_m}{dy^2} + \left(\frac{m\pi}{a}\right)^4 w_m \quad (6.6)$$

A equação característica será obtida pelo método da equação homogênea, assim, tendo:

$$r^4 - 2 \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 r^2 + \left(\frac{m\pi}{a}\right)^4 = 0 \quad (6.7)$$

ou seja:

$$\left[ r^2 - \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 \right] \left[ r^2 - \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 \right] = 0 \quad (6.8)$$

$$r^2 - \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 = 0 \quad (6.9)$$

$$r^2 - \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 = 0 \quad (6.10)$$

$$r' = \pm \frac{m\pi}{a} \quad (6.11)$$

$$r'' = \pm \frac{m\pi}{a} \quad (6.12)$$

Utilizando as regras gerais das equações diferenciais ordinária, para calcular equações não homogêneas, encontra-se o seguinte resultado:

$$w_m = A'_m e^{\frac{m\pi y}{a}} + B'_m e^{-\frac{m\pi y}{a}} + C'_m y e^{\frac{m\pi y}{a}} + D'_m y e^{-\frac{m\pi y}{a}} \quad (6.13)$$

Pode-se, ainda, escrever a solução  $w_m$  de outra maneira, utilizando-se as funções trigonométricas hiperbólicas:

$$\sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \quad (6.14)$$

$$\cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \quad (6.15)$$

Para trabalhar com as Equações (6.14) e (6.15), é necessário mudar os coeficientes da Equação (6.13). Além disso, nos coeficientes  $C'_m$  e  $D'_m$ , adiciona-se a constante  $m\pi/a$  para acompanhar o  $y$ , deixando igual aos expoentes, facilitando os cálculos. Com a mudança os coeficientes ficarão da seguinte maneira:

$$A'_m = \frac{A_m + B_m}{2} \quad (6.16)$$

$$B'_m = \frac{B_m - A_m}{2} \quad (6.17)$$

$$C'_m = \frac{m\pi}{a} \left( \frac{C_m + D_m}{2} \right) \quad (6.18)$$

$$D'_m = \frac{m\pi}{a} \left( \frac{D_m - C_m}{2} \right) \quad (6.19)$$

Substituindo as Equações (6.16), (6.17), (6.18) e (6.19) na Equação (6.13), tem-se:

$$w_m = \left( \frac{A_m + B_m}{2} \right) e^{\frac{m\pi y}{a}} + \left( \frac{B_m - A_m}{2} \right) e^{-\frac{m\pi y}{a}} + \frac{m\pi}{a} \left( \frac{C_m + D_m}{2} \right) y e^{\frac{m\pi y}{a}} + \frac{m\pi}{a} \left( \frac{D_m - C_m}{2} \right) y e^{-\frac{m\pi y}{a}} \quad (6.20)$$

$$w_m = \left( \frac{A_m}{2} e^{\frac{m\pi y}{a}} - \frac{A_m}{2} e^{-\frac{m\pi y}{a}} \right) + \left( \frac{B_m}{2} e^{\frac{m\pi y}{a}} + \frac{B_m}{2} e^{-\frac{m\pi y}{a}} \right) + \left( \frac{m\pi y}{a} \frac{C_m}{2} e^{\frac{m\pi y}{a}} - \frac{m\pi y}{a} \frac{C_m}{2} e^{-\frac{m\pi y}{a}} \right) + \left( \frac{m\pi y}{a} \frac{D_m}{2} e^{\frac{m\pi y}{a}} + \frac{m\pi y}{a} \frac{D_m}{2} e^{-\frac{m\pi y}{a}} \right) \quad (6.21)$$

$$w_m = A_m \left( \frac{e^{\frac{m\pi y}{a}} - e^{-\frac{m\pi y}{a}}}{2} \right) + B_m \left( \frac{e^{\frac{m\pi y}{a}} + e^{-\frac{m\pi y}{a}}}{2} \right) + C_m \frac{m\pi y}{a} \left( \frac{e^{\frac{m\pi y}{a}} - e^{-\frac{m\pi y}{a}}}{2} \right) + D_m \frac{m\pi y}{a} \left( \frac{e^{\frac{m\pi y}{a}} + e^{-\frac{m\pi y}{a}}}{2} \right) \quad (6.22)$$

Aplicando as definições das funções hiperbólicas, já com os novos coeficientes, tem-se:

$$w_m = A_m \sinh\left(\frac{m\pi y}{a}\right) + B_m \cosh\left(\frac{m\pi y}{a}\right) + C_m \frac{m\pi y}{a} \sinh\left(\frac{m\pi y}{a}\right) + D_m \frac{m\pi y}{a} \cosh\left(\frac{m\pi y}{a}\right) \quad (6.23)$$

Substituindo a Equação (6.23) na Equação (6.3), tem-se que a definição da solução da equação homogênea  $w_h$  é dada por:

$$w_h = \sum_{m=1}^{\infty} \left[ A_m \sinh\left(\frac{m\pi y}{a}\right) + B_m \cosh\left(\frac{m\pi y}{a}\right) + C_m \frac{m\pi y}{a} \sinh\left(\frac{m\pi y}{a}\right) + D_m \frac{m\pi y}{a} \cosh\left(\frac{m\pi y}{a}\right) \right] \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \quad (6.24)$$

De acordo com a condição, que diz, que a deflexão da placa tem que ser simétrica em relação ao eixo  $x$  e (ter os mesmos valores para  $-y$  e  $y$ ), devido ao carregamento simétrico é satisfeita pela equação  $w_h$ . Assim, dada a simetria, a função  $w_h$  deve ser par, logo cancelaremos os coeficientes que acompanham as funções ímpares. Portanto, o  $A_m$  e o  $D_m$  devem ser nulos, considerando  $m\pi y/a$ , sendo uma função ímpar, ou seja,  $A_m = D_m = 0$ . Assim, a solução da equação homogênea associada é dada por:

$$w_h = \sum_{m=1}^{\infty} \left[ B_m \cosh\left(\frac{m\pi y}{a}\right) + C_m \frac{m\pi y}{a} \sinh\left(\frac{m\pi y}{a}\right) \right] \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \quad (6.25)$$

A solução particular,  $w_p$ , é obtida resolvendo-se a equação diferencial parcial, logo tem-se:

$$\frac{\partial^4 w_p}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w_p}{\partial x^2 \partial y^4} + \frac{\partial^4 w_p}{\partial y^4} = \frac{P(x, y)}{D} \quad (6.26)$$

Para:

$$w_p = \sum_{m=1}^{\infty} w_m(y) \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \quad (6.27)$$

e  $w_m$  é uma função de  $y$ . No entanto, considera-se, a carga constante na direção  $y$ , logo a expansão da Série de Fourier será dada por:

$$p(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} p_m(y) \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \quad (6.28)$$

Calculando o coeficiente de Fourier, tem-se que:

$$p_m(y) = \frac{2}{a} \int_0^a p(x, y) \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) dx \quad (6.29)$$

Substituindo as Equações (6.27) e (6.28) na Equação diferencial (6.26), tem-se:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^4}{\partial x^4} \left[ \sum_{m=1}^{\infty} w_m \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \right] + 2 \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} \left[ \sum_{m=1}^{\infty} w_m \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \right] \\ + \frac{\partial^4}{\partial y^4} \left[ \sum_{m=1}^{\infty} w_m \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \right] = \frac{1}{D} \sum_{m=1}^{\infty} p_m \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \end{aligned} \quad (6.30)$$

Desenvolvendo as derivadas de quarta ordem em relação à variável  $x$ , obtém-se:

$$\begin{aligned} \sum_{m=1}^{\infty} \left[ \frac{d^4 w_m}{dy^4} - 2 \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 \frac{d^2 w_m}{dy^2} + \left(\frac{m\pi}{a}\right)^4 w_m \right] \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \\ = \frac{1}{D} \sum_{m=1}^{\infty} p_m \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \end{aligned} \quad (6.31)$$

Ou ainda:

$$\frac{d^4 w_m}{dy^4} - 2 \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 \frac{d^2 w_m}{dy^2} + \left(\frac{m\pi}{a}\right)^4 w_m = \frac{p_m}{D} \quad (6.32)$$

A solução geral é dada por:

$$w(x, y) = w_p + \sum_{m=1}^{\infty} \left[ B_m \cosh\left(\frac{m\pi y}{a}\right) + C_m \frac{m\pi y}{a} \sinh\left(\frac{m\pi y}{a}\right) \right] \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \quad (6.33)$$

Para a resolução da Equação (6.33) condições de contorno preestabelecidas devem ser respeitadas. Com estas os valores de  $w_m$  e  $p_m$ , poderão ser encontrados. No capítulo 9, item 9.2 em que se aborda as aplicações.

## 7 ELEMENTOS FINITOS DE PLACA

Este capítulo, foi quase, que integralmente, desenvolvido a partir de Ferreira (2008). Em que é abordado os conceitos, formulações e os aspectos para a análise estática de placas Mindlin sob flexão.

### 7.1 A Teoria da Placa de Mindlin

A teoria das placas de Mindlin inclui o efeito das deformações de cisalhamento transversal (Reddy,1997). Desse modo, pode ser considerado um extensão da teoria de *Timoshenko* para vigas em flexão. A principal diferença para teoria de placas finas (teorias do tipo *Kirchhoff*) é que na teoria de *Mindlin* as normais ao plano médio não deformado da placa permanecem retas, mas não normal à superfície média deformada.

A energia de deformação da placa de Mindlin é dada por ( Petyt,1990).

$$U = \frac{1}{2} \int_V \sigma_f^T \boldsymbol{\varepsilon}_f dV + \frac{\alpha}{2} \int_V \sigma_c^T \boldsymbol{\varepsilon}_c dV \quad (7.1.1)$$

em que:

$$\boldsymbol{\sigma}_f^T = [\sigma_x \sigma_y \tau_{xy}] \quad (7.1.2)$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}_f^T = [\varepsilon_x \varepsilon_y \gamma_{xy}] \quad (7.1.3)$$

são as tensões e deformações de flexão, e:

$$\boldsymbol{\sigma}_c^T = [\tau_{xy} \tau_{yz}] \quad (7.1.4)$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}_c^T = [\gamma_{xz} \gamma_{yz}] \quad (7.1.5)$$

são as tensões e deformações devidas ao cisalhamento transversal. De acordo com *Reddy* (1993), o parâmetro  $\alpha$ , também conhecido como fator de correção de cisalhamento pode ser tomado como 5/6.

O campo de deslocamento assumido para uma placa espessa (espessura  $h$ ) é definido como:

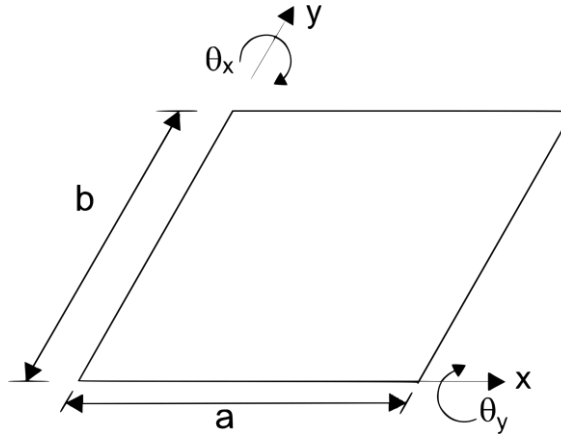
$$u = z\theta_x \quad (7.1.6)$$

$$v = z\theta_y \quad (7.1.7)$$

$$w = w_0 \quad (7.1.8)$$

em que  $\theta_x$ ,  $\theta_y$  são as rotações da normal ao plano médio em relação a eixos  $y$  e  $x$ , respectivamente, conforme ilustrado na Figura 7.1.

Figura 7.1 – Placa retangular com rotações nos eixos.



Fonte – Autor, 2023.

## 7.2 Deformação

As deformações de flexão são obtidas por meio das seguintes equações:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} = z \frac{\partial \theta_x}{\partial x} \quad (7.2.1)$$

$$\varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} = z \frac{\partial \theta_y}{\partial y} \quad (7.2.2)$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = z \left( \frac{\partial \theta_y}{\partial x} + \frac{\partial \theta_x}{\partial y} \right) \quad (7.2.3)$$

enquanto que as deformações de cisalhamento transversal são obtidas como segue:

$$\gamma_{xz} = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\partial w}{\partial x} + \theta_x \quad (7.2.4)$$

$$\gamma_{yz} = \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} = \frac{\partial w}{\partial y} + \theta_y \quad (7.2.5)$$

## 7.3 Tensão

As relações elásticas lineares entre a tensão e a deformação na flexão são definidas para um material homogêneo e isotrópico por:

$$\boldsymbol{\sigma}_f = \mathbf{D}_f \boldsymbol{\varepsilon}_f \quad (7.3.1)$$

em que  $\mathbf{D}_f$  é a matriz constitutiva definida por:

$$\mathbf{D}_f = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \quad (7.3.2)$$

enquanto que as relações elásticas lineares, tensão *versus* deformação em cisalhamento transversal são dadas por:

$$\boldsymbol{\sigma}_c = \mathbf{D}_c \boldsymbol{\varepsilon}_c \quad (7.3.3)$$

em que:

$$\mathbf{D}_c = \begin{bmatrix} G & 0 \\ 0 & G \end{bmatrix} \quad (7.3.4)$$

em que G é o módulo de cisalhamento transversal. Introduzindo esses conceitos na energia de deformação dada pela Equação (7.1.1), obtém-se:

$$\mathbf{U} = \frac{1}{2} \int_V \boldsymbol{\varepsilon}_f^T \mathbf{D}_f \boldsymbol{\varepsilon}_f dV + \frac{\alpha}{2} \int_V \boldsymbol{\varepsilon}_c^T \mathbf{D}_c \boldsymbol{\varepsilon}_c dV \quad (7.3.5)$$

#### 7.4 Discretização em elementos finitos

Os deslocamentos generalizados são interpolados independentemente usando as mesmas funções de forma:

$$w = \sum_{i=2}^n N_i(\xi, n) w_i \quad (7.4.1)$$

$$\theta_x = \sum_{i=2}^n N_i(\xi, n) \theta_{xi} \quad (7.4.2)$$

$$\theta_y = \sum_{i=2}^n N_i(\xi, n) \theta_{yi} \quad (7.4.3)$$

em que  $N_i(\xi, n)$ , são as funções de forma de um elemento Q4 bilinear de quatro nós. As deformações são definidas como:

$$\boldsymbol{\varepsilon}_f = z \mathbf{B}_f d^e \quad (7.4.4)$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}_c = \mathbf{B}_c d^e \quad (7.4.5)$$

em que:

$$\mathbf{d}^{eT} = \{w_1 \theta_{x1} \theta_{y1} \dots w_4 \theta_{x4} \theta_{y4}\} \quad (7.4.6)$$

As matrizes deformação-deslocamento para contribuições de flexão e cisalhamento são obtidas por meio da derivação das funções de forma e dadas por:

$$\mathbf{B}_f = \begin{bmatrix} 0 & \frac{\partial N_1}{\partial x} & 0 & 0 & \frac{\partial N_4}{\partial x} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial N_1}{\partial y} & \dots & 0 & \frac{\partial N_4}{\partial y} \\ 0 & \frac{\partial N_1}{\partial y} & \frac{\partial N_1}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_4}{\partial y} & \frac{\partial N_4}{\partial x} \end{bmatrix} \quad (7.4.7)$$

$$\mathbf{B}_f = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial x} & N_1 & 0 & \dots & \frac{\partial N_1}{\partial x} & N_4 & 0 \\ \frac{\partial N_1}{\partial y} & 0 & N_1 & \dots & \frac{\partial N_4}{\partial y} & 0 & N_4 \end{bmatrix} \quad (7.4.8)$$

em seguida, obtém-se a energia de deformação da placa por meio de:

$$\mathbf{U} = \frac{1}{2} \mathbf{d}^{eT} \int_{\Omega^e} \int_z \mathbf{B}_f^T \mathbf{D}_f \mathbf{B}_f dz d\Omega^e d^e + \frac{\alpha}{2} \mathbf{d}^{eT} \int_{\Omega^e} \int_z \mathbf{B}_c^T \mathbf{D}_c \mathbf{B}_c dz d\Omega^e d^e \quad (7.4.9)$$

A matriz de rigidez da placa *Mindlin* é então obtida como:

$$\mathbf{K}^e = \frac{h^3}{12} \int_{\Omega^e} \mathbf{B}_f^T \mathbf{D}_f \mathbf{B}_f d\Omega^e + \alpha h \int_{\Omega^e} \mathbf{B}_c^T \mathbf{D}_c \mathbf{B}_c d\Omega^e \quad (7.4.10)$$

ou, por meio de:

$$\mathbf{K}^e = \frac{h^3}{12} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \mathbf{B}_f^T \mathbf{D}_f \mathbf{B}_f |J| d\xi dn + \alpha h \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \mathbf{B}_c^T \mathbf{D}_c \mathbf{B}_c |J| d\xi dn \quad (7.4.11)$$

em que  $|J|$  é o determinante da matriz jacobiana. O vetor de forças nodais equivalente para as forças distribuídas  $p$  é definido como:

$$\mathbf{f}^e = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \mathbf{N} \cdot p \cdot d\xi dn \quad (7.4.12)$$

Tanto a matriz de rigidez quanto as integrais do vetor de força são calculadas por integração numérica. A integral de rigidez é resolvida considerando 2×2 pontos de Gauss para a contribuição de flexão e 1 ponto para a contribuição de cisalhamento. Essa integração seletiva provou ser um dos remédios mais simples para evitar travamento por cisalhamento de acordo com *Bathe* (1982).



## 8 METODOLOGIA

### 8.1 Classificação da pesquisa

Quanto à abordagem do problema pode ser caracterizada como pesquisa quantitativa, que, segundo *Proetti* (2018), “tenta quantificar a importância dos dados coletados durante a fiscalização”. Este fato é verificado por métodos analíticos e pelo código e software aplicados para gerar figuras como deslocamento e tensão. Trata-se também de uma enquete qualitativa, que, segundo o referido autor, visa compreender e interpretar os fatos, e isso se confirma pelo fato de este trabalho necessitar de comparação com outras fontes para verificar a eficácia das fórmulas e códigos usados.

O objetivo do trabalho é a enquete fundamental, que contribuirá tanto para o conhecimento acadêmico quanto para a possibilidade de fornecer soluções para problemas práticos onde serão apresentados dados mais complexos. De acordo com os procedimentos de coleta, é classificado como bibliográfica, que segundo *Gil* (2002), pesquisa bibliográfica significa ler, analisar e interpretar materiais impressos. Entre eles podemos citar livros, documentos escritos ou copiados, periódicos, fotografias, manuscritos, mapas, entre outros.

### 8.2 Procedimento de discretização

Para a realização deste trabalho, foi feita a discretização manual dos métodos analíticos de *Navier* e *Levy*, construídas a partir da Teoria de *Kirchhoff*, da Equação de *Lagrange* e das séries de *Fourier*. Além disso, realizou a modelagem com um programa redigido na linguagem *Scilab* versão 6.1.0. Todos os códigos usados devem notificar as propriedades da estrutura como o módulo e a área de elasticidade, o número de elementos e nós, as coordenadas dos nós, a conectividade dos elementos, as condições de contorno e as forças dos nós.

Para investigar a validade dos métodos determinados, considerou-se duas placas submetidas à um mesmo carregamento transversal uniforme, com variadas espessuras, a primeira, simplesmente apoiada, e a segunda, totalmente engastada. Para a solução analítica, utilizou-se a solução de *Navier*, na resolução do primeiro problema, encontrando, assim, um resultado para deflexão da placa. Já para o segundo problema, empregou-se a Solução de *Levy*. No entanto, a equação final da deflexão só foi encontrada utilizando o método da superposição, somando-se a deflexão encontrada por *Levy* com deflexões em placas simplesmente apoiadas submetidas à um momento distribuído no eixo  $x$  e  $y$ . Na solução numérica, as deflexões foram obtidos de códigos desenvolvidos através da linguagem de programação *Scilab* versão 6.1.0, nos modelos numéricos variou-se tanto a espessura da placa, como também, o tamanho da

malha. Além dos valores, obteve-se gráficos e tabelas que tornam melhor o entendimento do comportamento das placas.

Com o intuito de analisar os valores obtidos, foi feita uma comparação utilizando os gráficos que mostraram o erro percentual das deflexões, do resultado encontrado pela solução analítica com os encontrados pela solução numérica, quando se varia o tamanho da malha. A deformada da placa foi visualizadas através do software livre *ParaView* versão 5.6.0, em que se pode verificar dentre outras formações, a diferença da flecha para os dois tipos de apoios empregados.

## 9 APLICAÇÕES DAS SOLUÇÕES ANALÍTICAS

Neste capítulo, será apresentado aplicações, utilizando as formulações trabalhadas nos capítulos 5 e 6. Será verificado o valor da deflexão em uma placa simplesmente apoiada submetida a uma carga uniformemente distribuída e, também, em uma placa totalmente engastada sob mesmo carregamento. Para o primeiro caso adota-se a solução de *Navier* e para o segundo a solução de *Levy*.

### 9.1 Placa simplesmente apoiada submetida à carga uniforme

Seja a placa quadrada simplesmente apoiada, mostrada na Figura 9.1, que possui as seguintes propriedades materiais e geométricas:

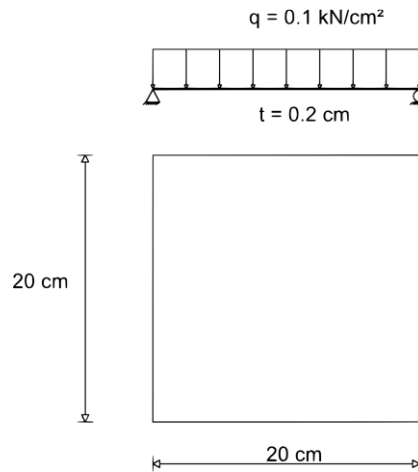
$$E = 2,1 \times 10^4 \text{ kN/cm}^2;$$

$$\nu = 0,29$$

$$a = 20 \text{ cm};$$

em que  $E$ ,  $\nu$  e  $a$  são, respectivamente, módulo de elasticidade, coeficiente de *Poisson* e dimensões laterais.

Figura 9.1 – Placa simplesmente apoiada.



Fonte – Autor, 2023.

Para a deflexão de uma placa, com dimensões  $a \times b$ , tem-se a Equação (5.55). Na utilização desta equação é importante ressaltar que a placa é quadrada, tendo, portanto, dimensões iguais, sendo  $a \times a$ . Assim, tem-se a seguinte equação:

$$w(x, y) = \frac{16p_0}{\pi^6 D} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{a}\right)}{mn \left[ \left(\frac{m}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{a}\right)^2 \right]^2} \quad (9.1.1)$$

Simplificando a Equação (9.1.1) e fazendo mínimo múltiplo comum, tem-se:

$$w(x, y) = \frac{16p_0}{\pi^6 D} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{a}\right)}{mn \left[\left(\frac{m^2 + n^2}{a^2}\right)\right]^2} \quad (9.1.2)$$

Como  $[(m^2 + n^2)/a^2]^2$  está dividindo a equação, pode-se utilizar ela multiplicando, desde que inverta o numerador e o denominador, obtendo-se:

$$w(x, y) = \frac{16p_0}{\pi^6 D} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{a}\right)}{mn} \left[\left(\frac{a^2}{m^2 + n^2}\right)\right]^2 \quad (9.1.3)$$

Assim, tem-se que:

$$w(x, y) = \frac{16p_0 a^4}{\pi^6 D} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{a}\right)}{mn(m^2 + n^2)^2} \quad (9.1.4)$$

A máxima deflexão ocorre no centro da placa onde as coordenadas são  $x$  e  $y = a/2$ . Então, substituindo, chega-se na Equação:

$$w_{m\acute{a}x} = \frac{16p_0 a^4}{\pi^6 D} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin\left(\frac{m\pi}{2}\right) \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)}{mn(m^2 + n^2)^2} \quad m, n \text{ ímpares} \quad (9.1.5)$$

Aplicando alguns valores para os termos  $m$  e  $n$ , tem-se, que:

$$w_{m\acute{a}x} = \frac{16p_0 a^4}{\pi^6 D} \left[ \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) \sin\left(\frac{\pi}{2}\right)}{1(1^2 + 1^2)^2} + \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=3}^{\infty} \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) \sin\left(\frac{3\pi}{2}\right)}{3(1^2 + 3^2)^2} + \sum_{m=3}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin\left(\frac{3\pi}{2}\right) \sin\left(\frac{\pi}{2}\right)}{3(3^2 + 1^2)^2} + \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=5}^{\infty} \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) \sin\left(\frac{5\pi}{2}\right)}{5(1^2 + 5^2)^2} \right] \quad (9.1.6)$$

$$w_{m\acute{a}x} = \frac{16p_0 a^4}{\pi^6 D} (0,25 - 0,0033 - 0,0033 + 0,000296 + 0,000296) \quad (9.1.7)$$

$$w_{m\acute{a}x} = \frac{0,00406p_0 a^4}{D} \quad (9.1.8)$$

Utilizando os dados informados anteriormente e uma espessura  $t = 0,2$  cm, é possível encontrar a rigidez através da Equação (3.34). Dessa forma:

$$D = \frac{2,1 \times 10^4 \times 0,2^3}{12(1 - 0,29^2)} \quad (9.1.9)$$

$$D = 15,28551 \text{ KN} \cdot \text{cm} \quad (9.1.10)$$

Para chegar a um valor de deflexão aplica-se um carregamento uniforme  $p_0 = 0,1$  kN/cm<sup>2</sup>. Assim, pode-se substituí-los os valores na Equação (9.1.8), obtendo o seguinte resultado:

$$w_{m\acute{a}x} = \frac{0,00406 \times 0,1 \times 20^4}{15,28551} \quad (9.1.11)$$

$$w_{m\acute{a}x} = 4,249776 \text{ cm} \quad (9.1.12)$$

Novas espessuras foram empregadas para se ter uma noção da variação de deflexão quando a dimensão do eixo  $z$  é aumentada. O teste foi feito para  $t = 0,5$  cm e  $t = 1,0$  cm, obtendo, respectivamente os seguintes resultados:

$$w_{m\acute{a}x} = 0,271985 \text{ cm} \quad (9.1.13)$$

$$w_{m\acute{a}x} = 0,033998 \text{ cm} \quad (9.1.14)$$

É possível perceber que quanto mais espessa é a placa, menor será a deflexão, tendo em vista que todas as outras propriedades e dimensões foram mantidas.

## 9.2 Placa totalmente engastada submetida à carga uniforme

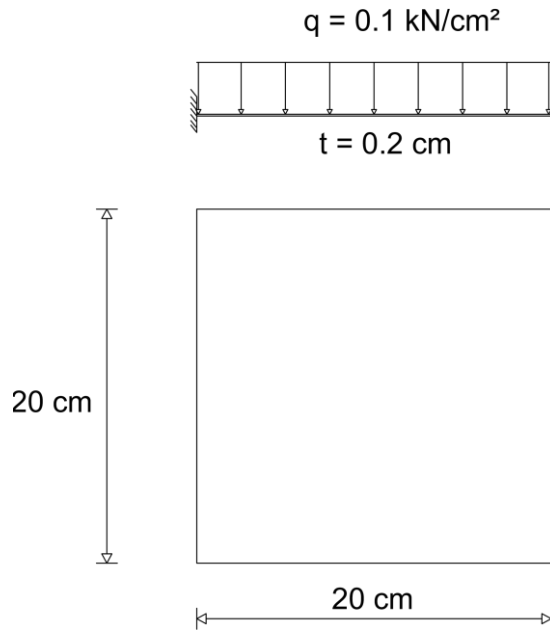
Com o intuito de explorar as soluções analíticas estudadas, adota-se engastes nas bordas, conforme a Figura 9.2, para avaliar a mudança na deflexão. Serão empregadas as mesmas propriedades e aplicado o mesmo carregamento do item 9.1.

$$E = 2,1 \times 10^4 \text{ kN/cm}^2;$$

$$\nu = 0,29$$

$$a = 20 \text{ cm};$$

Figura 9.2 – Placa totalmente engastada.



Fonte – Autor, 2023.

Para este exemplo, a equação final é obtida através do método da superposição, no qual soma-se a equação de deflexão para uma placa simplesmente apoiada submetida à uma carga uniformemente distribuída com a deflexão encontrada quando a placa tem momentos distribuído, tanto no eixo  $x$ , quanto no eixo  $y$ .

Aplicando o método de *Levy* para representar a deflexão da placa simplesmente apoiada com a carga uniforme, será necessário utilizar a Equação (6.33), juntamente com as condições de contornos específicas, para desenvolver a equação. As condições de contorno para uma placa simplesmente apoiada são  $w(x, y) = 0$  e  $\partial^2 w / \partial y^2 = 0$ . Agora é possível descobrir os coeficientes da Equação (6.33), tendo, assim o seguinte sistema:

$$\begin{cases} w_m + \sum_{m=1}^{\infty} \left[ B_m \cosh\left(\frac{m\pi y}{a}\right) + C_m \frac{m\pi y}{a} \sinh\left(\frac{m\pi y}{a}\right) \right] = 0 \\ \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left[ w_m + \sum_{m=1}^{\infty} B_m \cosh\left(\frac{m\pi y}{a}\right) + C_m \frac{m\pi y}{a} \sinh\left(\frac{m\pi y}{a}\right) \right] = 0 \end{cases} \quad (9.2.1)$$

Resolvendo a derivada primeira, obtém-se:

$$\frac{\partial w}{\partial y} = B_m \sinh\left(\frac{m\pi y}{a}\right) \frac{m\pi}{a} + C_m \left[ \frac{m\pi}{a} \sinh\left(\frac{m\pi y}{a}\right) + \frac{m^2 \pi^2 y}{a^2} \cosh\left(\frac{m\pi y}{a}\right) \right] \quad (9.2.2)$$

Derivando mais uma vez, para obter a derivada de segunda ordem, tem-se:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = B_m \cosh\left(\frac{m\pi y}{a}\right) \frac{m^2 \pi^2}{a^2} + C_m \left[ \frac{m^2 \pi^2}{a^2} \cosh\left(\frac{m\pi y}{a}\right) + \frac{m^2 \pi^2}{a^2} \cosh\left(\frac{m\pi y}{a}\right) + \frac{m^3 \pi^3 y}{a^3} \sinh\left(\frac{m\pi y}{a}\right) \right] \quad (9.2.3)$$

Simplificando, tem-se:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = (B_m + 2C_m) \cosh\left(\frac{m\pi y}{a}\right) \frac{m^2 \pi^2}{a^2} + C_m \frac{m^3 \pi^3 y}{a^3} \sinh\left(\frac{m\pi y}{a}\right) \quad (9.2.4)$$

Aplicando os intervalos de  $y$ , que são  $\pm b/2$ , na Equação (9.2.1), obtém-se:

$$\begin{cases} w_m + \sum_{m=1}^{\infty} \left[ B_m \cosh\left(\frac{m\pi b}{2a}\right) + C_m \frac{m\pi b}{2a} \sinh\left(\frac{m\pi b}{2a}\right) \right] = 0 \\ (B_m + 2C_m) \cosh\left(\frac{m\pi b}{2a}\right) \frac{m^2 \pi^2}{a^2} + C_m \frac{m^3 \pi^3 b}{2a^3} \sinh\left(\frac{m\pi b}{2a}\right) = 0 \end{cases} \quad (9.2.5)$$

Resolvendo a Equação (9.2.5), obtém-se:

$$B_m \cosh\left(\frac{m\pi b}{2a}\right) \frac{m^2 \pi^2}{a^2} = -2C_m \cosh\left(\frac{m\pi b}{2a}\right) \frac{m^2 \pi^2}{a^2} - C_m \frac{m^3 \pi^3 b}{2a^3} \sinh\left(\frac{m\pi b}{2a}\right) \quad (9.2.6)$$

Simplificando, obtemos o seguinte resultado:

$$B_m = -2C_m - \frac{C_m \frac{m\pi b}{2a} \sinh\left(\frac{m\pi b}{2a}\right)}{\cosh\left(\frac{m\pi b}{2a}\right)} \quad (9.2.7)$$

Substituindo a Equação (9.2.7) na primeira expressão da Equação (9.2.5), tem-se:

$$w_m - 2C_m \cosh\left(\frac{m\pi b}{2a}\right) - C_m \frac{m\pi b}{2a} \sinh\left(\frac{m\pi b}{2a}\right) + C_m \frac{m\pi b}{2a} \sinh\left(\frac{m\pi b}{2a}\right) = 0 \quad (9.2.8)$$

$$w_m - 2C_m \cosh\left(\frac{m\pi b}{2a}\right) = 0 \quad (9.2.9)$$

Assim, tem-se:

$$C_m = \frac{w_m}{2 \cosh\left(\frac{m\pi b}{2a}\right)} \quad (9.2.10)$$

Substituindo a Equação (9.2.10) na Equação (9.2.7), encontra-se o seguinte resultado para  $B_m$ :

$$B_m = -\frac{2w_m}{2\cosh\left(\frac{m\pi b}{2a}\right)} - \frac{w_m}{2\cosh\left(\frac{m\pi b}{2a}\right)} \frac{m\pi b}{2a} \frac{\sinh\left(\frac{m\pi b}{2a}\right)}{\cosh\left(\frac{m\pi b}{2a}\right)} \quad (9.2.11)$$

Substituindo a Equação (9.2.10) e (9.2.11) na Equação (6.33), encontra-se a equação final para placas simplesmente apoiadas com carga uniforme:

$$w_{m\acute{a}x} = w_p + \sum_{m=1}^{\infty} \left[ -\frac{2w_m \cosh\left(\frac{m\pi y}{a}\right)}{2\cosh\left(\frac{m\pi b}{2a}\right)} - \frac{w_m \cosh\left(\frac{m\pi y}{a}\right)}{2\cosh\left(\frac{m\pi b}{2a}\right)} \frac{m\pi b}{2a} \frac{\sinh\left(\frac{m\pi b}{2a}\right)}{\cosh\left(\frac{m\pi b}{2a}\right)} + \frac{w_m}{2\cosh\left(\frac{m\pi b}{2a}\right)} \frac{m\pi y}{a} \sinh\left(\frac{m\pi y}{a}\right) \right] \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \quad (9.2.12)$$

Utilizando a Equação (6.27) para melhorar a Equação (9.2.12), obtém-se:

$$w_{m\acute{a}x} = \left\{ w_m + \sum_{m=1}^{\infty} \left[ \left( -\frac{2w_m}{2\cosh\left(\frac{m\pi b}{2a}\right)} - \frac{w_m}{2\cosh\left(\frac{m\pi b}{2a}\right)} \frac{m\pi b}{2a} \frac{\sinh\left(\frac{m\pi b}{2a}\right)}{\cosh\left(\frac{m\pi b}{2a}\right)} \right) \cosh\left(\frac{m\pi y}{a}\right) + \frac{w_m}{2\cosh\left(\frac{m\pi b}{2a}\right)} \frac{m\pi y}{a} \sinh\left(\frac{m\pi y}{a}\right) \right] \right\} \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \quad (9.2.13)$$

Colocando o  $w_m$  em evidência e simplificando o que está dentro dos parênteses da Equação (9.2.13), tem-se:

$$w_{m\acute{a}x} = w_m \left( 1 - \frac{\frac{m\pi b}{2a} \tanh\left(\frac{m\pi b}{2a}\right) + 2}{2\cosh\left(\frac{m\pi b}{2a}\right)} \cosh\left(\frac{m\pi y}{a}\right) + \frac{1}{2\cosh\left(\frac{m\pi b}{2a}\right)} \frac{m\pi y}{a} \sinh\left(\frac{m\pi y}{a}\right) \right) \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \quad (9.2.14)$$

Para encontrar o valor de  $w_m$ , é necessário utilizar a Equação (6.29) e aplicar o valor achado, na Equação (6.32). Resolvendo a integral da primeira equação citada através do método da substituição, obtém-se:

$$u = \frac{m\pi x}{a}; \quad du = \frac{m\pi}{a} dx; \quad dx = \frac{a}{m\pi} du \quad (9.2.15)$$

Considerando  $p(x, y) = p_0$ , e substituindo a Equação (9.2.14) na Equação (6.29), tem-se:

$$p_m = \frac{2p_0}{a} \int_0^a \sin(u) \frac{a}{m\pi} du \quad (9.2.16)$$



$$p_m = \frac{2p_0}{m\pi} [-\cos(u)]_0^a \quad (9.2.17)$$

$$p_m = \frac{2p_0}{m\pi} [-\cos(m\pi) + \cos(0)] \quad (9.2.18)$$

$$p_m = \frac{2p_0}{m\pi} [1 - \cos(m\pi)] \quad (9.2.19)$$

$$p_m = \begin{cases} \frac{4p_0}{m\pi}, & \text{para } m = 1, 3, 5, \dots \\ 0, & \text{para } m = 0, 2, 4, \dots \end{cases} \quad (9.2.20)$$

Sabendo que o carregamento no eixo  $y$  é constante, considera-se a deflexão constante ao longo do eixo. Logo, fazendo as derivadas de quarta ordem da Equação (6.32), obtém-se:

$$w_m \frac{m^4 \pi^4}{a^4} = \frac{p_m}{D} \quad (9.2.21)$$

Substituindo o primeiro resultado da Equação (9.2.20) na Equação (9.2.21), tem-se:

$$w_m \frac{m^4 \pi^4}{a^4} = \frac{4p_0}{m\pi D} \quad (9.2.22)$$

$$w_m = \frac{4p_0 a^4}{m^5 \pi^5 D} \quad (9.2.23)$$

Substituindo a Equação (9.2.23) na Equação (9.2.24), obtém-se:

$$w_{m\acute{a}x} = \frac{4p_0 a^4}{\pi^5 D} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^5} \left( 1 - \frac{\frac{m\pi b}{2a} \tanh\left(\frac{m\pi b}{2a}\right) + 2}{2 \cosh\left(\frac{m\pi b}{2a}\right)} \cosh\left(\frac{m\pi y}{a}\right) + \frac{1}{2 \cosh\left(\frac{m\pi b}{2a}\right)} \frac{m\pi y}{a} \sinh\left(\frac{m\pi y}{a}\right) \right) \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \quad (9.2.24)$$

Transformando  $\sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right)$  em série de potência, tem-se a seguinte equação:

$$w_{m\acute{a}x} = \frac{4p_0 a^4}{\pi^5 D} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^{(m-1)/2}}{m^5} \left( 1 - \frac{\frac{m\pi b}{2a} \tanh\left(\frac{m\pi b}{2a}\right) + 2}{2 \cosh\left(\frac{m\pi b}{2a}\right)} \cosh\left(\frac{m\pi y}{a}\right) + \frac{1}{2 \cosh\left(\frac{m\pi b}{2a}\right)} \frac{m\pi y}{a} \sinh\left(\frac{m\pi y}{a}\right) \right) \quad (9.2.25)$$

Esta é a equação da deflexão oblíqua para placas simplesmente apoiadas submetidas a um carregamento uniforme, conseguida utilizando a Solução de *Levy*. O próximo passo é

encontrar a deflexão quando a placa está submetida a um momento distribuído, tanto no eixo  $y$ , quanto no eixo  $x$ . Para os momentos distribuídos ao longo do eixo  $y$ , mostrado na Figura 9.3, é necessário seguir as seguintes condições de contorno:

Para  $x = 0$  e  $x = a$ ;

$$w = 0 \quad (9.2.26)$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0 \quad (9.2.27)$$

Para  $y = \pm \frac{b}{2}$ ;

$$w = 0 \quad (9.2.28)$$

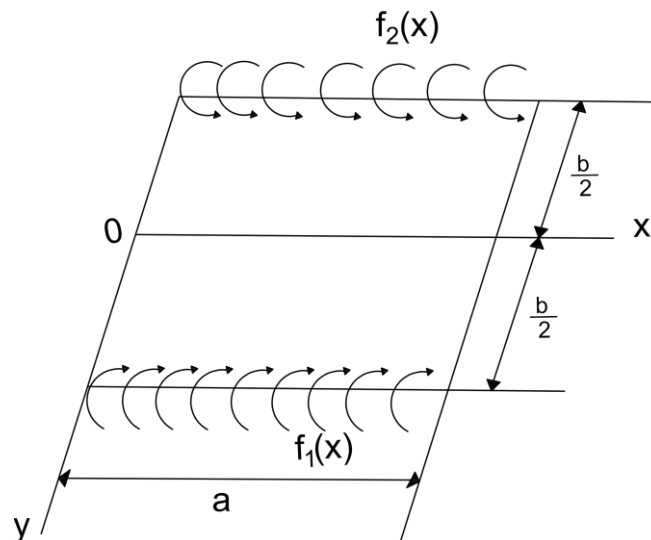
Dando continuidade, tem-se as seguintes condições de contorno:

$$-D \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)_{y=\frac{b}{2}} = f_1(x) \quad (9.2.29)$$

e

$$-D \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)_{y=-\frac{b}{2}} = f_2(x) \quad (9.2.30)$$

Figura 9.3 – Placa retangular submetida a momentos fletores distribuídos.



Fonte – Autor, 2023.

Para melhor entendimento, reescrevendo as equações do capítulo 6, descritas pelo método de *Levy* para a solução homogênea, tem-se:

$$w_h = \sum_{m=1}^{\infty} w_m \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \quad (9.2.31)$$

$$w_h = \sum_{m=1}^{\infty} \left[ B_m \cosh\left(\frac{m\pi y}{a}\right) + C_m \left(\frac{m\pi y}{a}\right) \sinh\left(\frac{m\pi y}{a}\right) \right] \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \quad (9.2.32)$$

Utilizando a segunda condição de contorno dada pela Equação (9.2.28), para deixar a Equação (9.2.32) em função de um único coeficiente, assim, chega-se:

$$B_m \cosh(\alpha_m) + C_m(\alpha_m) \sinh(\alpha_m) = 0 \quad (9.2.33)$$

em que:

$$\alpha_m = \frac{m\pi b}{2a} \quad (9.2.34)$$

e

$$\frac{\sinh(x)}{\cosh(x)} = \tanh(x) \quad (9.2.35)$$

Consequentemente:

$$B_m = -C_m(\alpha_m) \tanh(\alpha_m) \quad (9.2.36)$$

Substituindo a Equação (9.2.36) na Equação (6.25), tem-se:

$$w = \sum_{m=1}^{\infty} C_m \left[ \frac{m\pi y}{a} \sin\left(\frac{m\pi y}{a}\right) - \alpha_m \tanh(\alpha_m) \cosh\left(\frac{m\pi y}{a}\right) \right] \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \quad (9.2.37)$$

Usa-se as condições de contorno dada pelas Equações (9.2.29) e (9.2.30), para determinar  $E_m$ . Colocando os momentos distribuídos no formato de séries trigonométricas, encontra-se:

$$f_1(x) = f_2(x) = \sum_{m=1}^{\infty} w_m \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \quad (9.2.38)$$

para uma placa simétrica.

Para achar o  $f_1(x)$  e o  $f_2(x)$  é necessário fazer uma derivada de segunda ordem da deflexão. Sendo  $f_1(x) = f_2(x)$ , considera-se  $2f_1(x)$ , obtém-se:

$$-2D \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)_{y=\frac{b}{2}} = \sum_{m=1}^{\infty} E_m \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \quad (9.2.39)$$

Derivando a Equação (9.2.37):

$$\frac{\partial w}{\partial y} = C_m \left[ \frac{m\pi}{a} \sinh\left(\frac{m\pi y}{a}\right) + \frac{m\pi y}{a} \cosh\left(\frac{m\pi y}{a}\right) \frac{m\pi}{a} - \alpha_m \tanh(\alpha_m) \sinh\left(\frac{m\pi y}{a}\right) \frac{m\pi}{a} \right] \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \quad (9.2.40)$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = C_m \left[ \frac{m^2 \pi^2}{a^2} \cosh\left(\frac{m\pi y}{a}\right) + \frac{m^2 \pi^2 y}{a^2} \sinh\left(\frac{m\pi y}{a}\right) \frac{m\pi}{a} - \alpha_m \tanh(\alpha_m) \cosh\left(\frac{m\pi y}{a}\right) \frac{m^2 \pi^2}{a^2} \right] \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \quad (9.2.41)$$

Colocando  $y = b/2$  e utilizando a transformação da Equação (9.2.35), tem-se:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = C_m \left[ \frac{m^2 \pi^2}{a^2} \cosh(\alpha_m) + \frac{m^2 \pi^2}{a^2} \sinh(\alpha_m) \alpha_m - \alpha_m \frac{\sinh(\alpha_m)}{\cosh(\alpha_m)} \cosh(\alpha_m) \frac{m^2 \pi^2}{a^2} \right] \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \quad (9.2.42)$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = \frac{m^2 \pi^2}{a^2} C_m \cosh(\alpha_m) \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \quad (9.2.43)$$

Logo:

$$-2D \sum_{m=1}^{\infty} \frac{m^2 \pi^2}{a^2} C_m \cosh(\alpha_m) \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) = \sum_{m=1}^{\infty} E_m \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \quad (9.2.44)$$

Assim:

$$E_m = -\frac{a^2 E_m}{2D m^2 \pi^2 \cosh(\alpha_m)} \quad (9.2.45)$$

Obtém-se como deflexão a seguinte equação:

$$w = \frac{a^2}{2D \pi^2} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right)}{m^2 \cosh(\alpha_m)} E_m \left( \alpha_m \tanh(\alpha_m) \cosh\left(\frac{m\pi y}{a}\right) - \frac{m\pi y}{a} \sinh\left(\frac{m\pi y}{a}\right) \right) \quad (9.2.46)$$

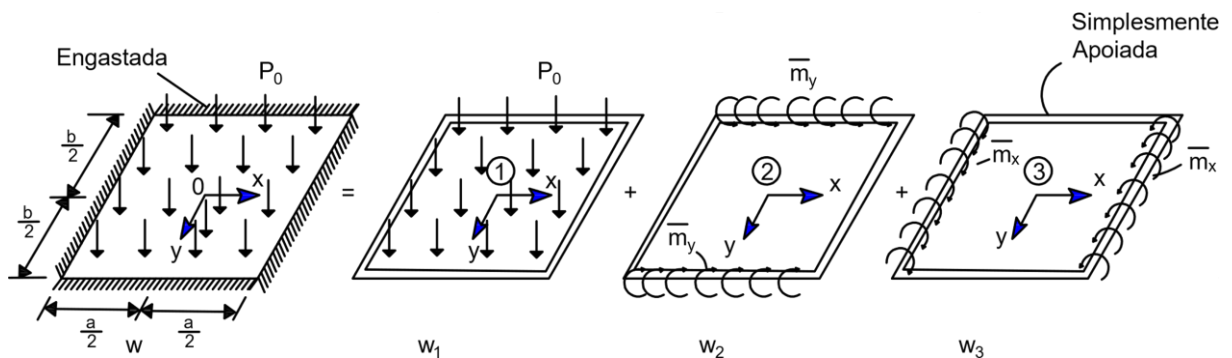
Para os momentos distribuídos ao longo do eixo  $x$ , o método de cálculo será análogo ao que é feito em  $y$ , com exceção ao intervalo, que será o que corresponde a  $x$ . Assim, a equação para deflexão é escrita da seguinte forma:

$$w = \frac{b^2}{2D \pi^2} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\sin\left(\frac{m\pi y}{a}\right)}{m^2 \cosh(\alpha_m)} F_m \left( \beta_m \tanh(\beta_m) \cosh\left(\frac{m\pi x}{a}\right) - \frac{m\pi x}{a} \sinh\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \right) \quad (9.2.47)$$

Este capítulo busca-se encontrar uma equação, voltada para uma placa quadrada totalmente engastada, que tem dimensões iguais. Além disso, como a placa tem simetria dupla em relação aos apoios, se torna mais vantajoso mover a origem de coordenadas do sistema para o centro da placa, tendo em vista que no método de *Levy* a origem não está no centro. Com isso aparecerá uma função cosseno, para que assim a deflexão possa ser representada graficamente. A explicação para a utilização dessa função, deve-se ao fato que o cosseno tem uma certa amplitude quando o valor no eixo das abscissas vale 0. A amplitude representa ou significa que vai existir uma deflexão na origem do sistema, e essa coincide com o centro da placa.

Para encontrar a equação, usa-se o método da superposição – Figura 9.4.

Figura 9.4 – Superposição de placas.



Fonte – Autor, 2023.

Todas as deflexões já foram encontradas. No entanto, será necessário encontrar as rotações, que são as derivadas de primeira ordem das deflexões. Assim, será possível encontrar os coeficientes  $E_m$  e  $F_m$ . Através das seguintes condições de contorno, tem-se que:

$$\text{Para } x = \pm \frac{a}{2}$$

$$w = 0 \quad (9.2.48)$$

$$\frac{\partial w}{\partial x} = 0 \quad (9.2.49)$$

$$\text{Para } y = \pm \frac{b}{2}$$

$$w = 0 \quad (9.2.50)$$

$$\frac{\partial w}{\partial y} = 0 \quad (9.2.51)$$

Tem-se, assim as seguintes relações:

$$\left(\frac{\partial w_1}{\partial x} + \frac{\partial w_2}{\partial x} + \frac{\partial w_3}{\partial x}\right)_{\pm \frac{a}{2}} = 0 \quad (9.2.52)$$

$$\left(\frac{\partial w_1}{\partial y} + \frac{\partial w_2}{\partial y} + \frac{\partial w_3}{\partial y}\right)_{\pm \frac{b}{2}} = 0 \quad (9.2.53)$$

A deflexão  $w_1$ , é a deflexão da placa simplesmente apoiada, com carregamento distribuído. Nessa deflexão aparecerá a função cosseno, já mencionada anteriormente. Além disso, a função já existente na equação, será fixada e transformada em uma série de potência.

$$w_1 = \frac{4qa^4}{\pi^5 D} \sum_{m=1,3,5..}^{\infty} \frac{(-1)^{(m-1)/2}}{m^5} \cos\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \left(1 - \frac{\alpha_m \tanh(\alpha_m) + 2}{2 \cosh(\alpha_m)} \cosh\left(\frac{m\pi y}{a}\right) + \frac{1}{2 \cosh(\alpha_m)} \frac{m\pi y}{a} \sinh\left(\frac{m\pi y}{a}\right)\right) \quad (9.2.54)$$

Derivando a Equação (9.2.54) em relação a  $x$ , e aplicando o valor dos intervalos, tem-se:

$$\left(\frac{\partial w_1}{\partial x}\right)_{\pm \frac{a}{2}} = -\frac{4qa^3}{\pi^4 D} \sum_{m=1,3,5..}^{\infty} \frac{(-1)^{(m-1)/2}}{m^4} \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \left(1 - \frac{\alpha_m \tanh(\alpha_m) + 2}{2 \cosh(\alpha_m)} \cosh\left(\frac{m\pi y}{a}\right) + \frac{1}{2 \cosh(\alpha_m)} \frac{m\pi y}{a} \sinh\left(\frac{m\pi y}{a}\right)\right) \quad (9.2.55)$$

Transformando o seno em uma série de potência igual a existente, pode-se considerar a multiplicação de uma pela outra igual a 1, ficando com o seguinte valor:

$$\left(\frac{\partial w_1}{\partial x}\right)_{\pm \frac{a}{2}} = -\frac{4qa^3}{\pi^4 D} \sum_{m=1,3,5..}^{\infty} \frac{1}{m^4} \left(1 - \frac{\alpha_m \tanh(\alpha_m) + 2}{2 \cosh(\alpha_m)} \cosh\left(\frac{m\pi y}{a}\right) + \frac{1}{2 \cosh(\alpha_m)} \frac{m\pi y}{a} \sinh\left(\frac{m\pi y}{a}\right)\right) \quad (9.2.56)$$

Derivando a Equação (9.2.54) em relação a  $y$ , e aplicando o valor dos intervalos:

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\partial w_1}{\partial y}\right)_{\pm \frac{b}{2}} \\ &= \frac{4qa^4}{\pi^4 D} \sum_{m=1,3,5..}^{\infty} \frac{(-1)^{(m-1)/2}}{m^5} \cos\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \left\{ \left[ -\frac{\alpha_m \tanh(\alpha_m) + 2}{2 \cosh(\alpha_m)} \right] \sinh\left(\frac{m\pi y}{a}\right) \frac{m\pi}{a} + \left[ \frac{1}{2 \cosh(\alpha_m)} \right] \left[ \frac{m\pi}{a} \sinh\left(\frac{m\pi y}{a}\right) + \frac{m\pi}{a} \cosh\left(\frac{m\pi y}{a}\right) \frac{m\pi y}{a} \right] \right\} \quad (9.2.57) \end{aligned}$$

Colocando o termo  $\frac{m\pi}{a}$  em evidência e utilizando a Equação (9.2.35), já com a substituição do intervalo, tem-se:

$$\left(\frac{\partial w_1}{\partial y}\right)_{\pm \frac{b}{2}} = \frac{4qa^4}{\pi^5 D} \sum_{m=1,3,5..}^{\infty} \frac{m\pi (-1)^{(m-1)/2}}{a m^5} \cos\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \left[ \left( -\frac{\alpha_m \tanh^2(\alpha_m)}{2} \right) - (\tanh \alpha_m) + \left( \frac{\tanh(\alpha_m)}{2} \right) + \frac{\alpha_m}{2} \right] \quad (9.2.58)$$

$$\left(\frac{\partial w_1}{\partial y}\right)_{\pm \frac{b}{2}} = \frac{4qa^3}{\pi^4 D} \sum_{m=1,3,5..}^{\infty} \frac{(-1)^{(m-1)/2}}{m^4} \cos\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \left[-\frac{\alpha_m \tanh^2(\alpha_m) - \tanh(\alpha_m) + \alpha_m}{2}\right] \quad (9.2.59)$$

$$\left(\frac{\partial w_1}{\partial y}\right)_{\pm \frac{b}{2}} = \frac{2qa^3}{\pi^4 D} \sum_{m=1,3,5..}^{\infty} \frac{(-1)^{(m-1)/2}}{m^4} \cos\left(\frac{m\pi x}{a}\right) [\alpha_m - \tanh(\alpha_m) (1 + \alpha_m \tanh(\alpha_m))] \quad (9.2.60)$$

Agora fazendo as rotações dos momentos distribuídos, deflexão  $w_2$  (momento distribuído em  $y$ ):

$$w_2 = -\frac{a^2}{2\pi^2 D} \sum_{m=1,3,5..}^{\infty} \frac{E_m (-1)^{(m-1)/2}}{m^2 \cosh(\alpha_m)} \cos\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \left[\frac{m\pi y}{a} \sinh\left(\frac{m\pi y}{a}\right) - \alpha_m \tanh(\alpha_m) \cos\left(\frac{m\pi y}{a}\right)\right] \quad (9.2.61)$$

Para o termo  $\frac{\partial w_2}{\partial x}$ , será feito o mesmo processo que foi feito no termo  $\frac{\partial w_1}{\partial x}$ . Logo, tem-se:

$$\left(\frac{\partial w_2}{\partial x}\right)_{\pm \frac{a}{2}} = \frac{a}{2\pi D} \sum_{m=1,3,5..}^{\infty} \frac{E_m}{m \cosh(\alpha_m)} \left[\frac{m\pi y}{a} \sinh\left(\frac{m\pi y}{a}\right) - \alpha_m \tanh(\alpha_m) \cos\left(\frac{m\pi y}{a}\right)\right] \quad (9.2.62)$$

Derivando em relação a  $y$ :

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial w_2}{\partial y}\right)_{\pm \frac{b}{2}} = & -\frac{a^2}{2\pi^2 D} \sum_{m=1,3,5..}^{\infty} \frac{E_m (-1)^{(m-1)/2}}{m^2 \cosh(\alpha_m)} \cos\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \left[\frac{m\pi}{a} \sinh\left(\frac{m\pi y}{a}\right)\right. \\ & \left. + \frac{m\pi y}{a} \cosh\left(\frac{m\pi y}{a}\right) \frac{m\pi}{a} - \alpha_m \tanh(\alpha_m) \sinh\left(\frac{m\pi y}{a}\right) \frac{m\pi}{a}\right] \end{aligned} \quad (9.2.63)$$

Colocando termo  $\frac{m\pi}{a}$  em evidência e substituindo o termo  $\frac{m\pi y}{a} = \alpha_m$ , tem-se:

$$\left(\frac{\partial w_2}{\partial y}\right)_{\pm \frac{b}{2}} = \frac{a}{2\pi D} \sum_{m=1,3,5..}^{\infty} \frac{E_m (-1)^{(m-1)/2}}{m} \cos\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \left[\frac{\sinh(\alpha_m) + \alpha_m \cosh(\alpha_m) - \alpha_m \tanh(\alpha_m) \sinh(\alpha_m)}{\cosh(\alpha_m)}\right] \quad (9.2.64)$$

Assim:

$$\left(\frac{\partial w_2}{\partial y}\right)_{\pm \frac{b}{2}} = -\frac{a}{2\pi D} \sum_{m=1,3,5..}^{\infty} \frac{E_m (-1)^{(m-1)/2}}{m} \cos\left(\frac{m\pi x}{a}\right) [\tanh(\alpha_m) + \alpha_m - \alpha_m \tanh^2(\alpha_m)] \quad (9.2.65)$$

Simplificando:

$$\left(\frac{\partial w_2}{\partial y}\right)_{\pm \frac{b}{2}} = -\frac{a}{2\pi D} \sum_{m=1,3,5..}^{\infty} \frac{E_m (-1)^{(m-1)/2}}{m} \cos\left(\frac{m\pi x}{a}\right) [\alpha_m - \tanh(\alpha_m) (\alpha_m \tanh(\alpha_m) - 1)] \quad (9.2.66)$$

A deflexão  $w_3$ , para os momentos distribuídos em  $x$ , será análogo. Assim:

$$w_3 = -\frac{b^2}{2\pi^2 D} \sum_{m=1,3,5..}^{\infty} \frac{F_m (-1)^{(m-1)/2}}{m^2 \cosh(\beta_m)} \cos\left(\frac{m\pi y}{b}\right) \left[\frac{m\pi x}{b} \sinh\left(\frac{m\pi x}{b}\right) - \beta_m \tanh(\beta_m) \cosh\left(\frac{m\pi x}{b}\right)\right] \quad (9.2.67)$$

$$\left(\frac{\partial w_3}{\partial x}\right)_{\pm \frac{a}{2}} = -\frac{b}{2\pi D} \sum_{m=1,3,5..}^{\infty} \frac{F_m(-1)^{(m-1)/2}}{m} \cos\left(\frac{m\pi y}{b}\right) [\beta_m - \tanh(\beta_m)(\beta_m \tanh(\beta_m) - 1)] \quad (9.2.68)$$

$$\left(\frac{\partial w_3}{\partial y}\right)_{\pm \frac{b}{2}} = \frac{b}{2\pi D} \sum_{m=1,3,5..}^{\infty} \frac{F_m}{m \cosh(\beta_m)} \left[ \frac{m\pi x}{b} \sinh\left(\frac{m\pi x}{b}\right) - \beta_m \tanh(\beta_m) \cosh\left(\frac{m\pi x}{b}\right) \right] \quad (9.2.69)$$

Para determinar os coeficientes  $E_m$  e  $F_m$ , utiliza-se um sistema linear com a seguinte forma:

$$\frac{\partial w_1}{\partial x} = -\frac{\partial w_2}{\partial x} - \frac{\partial w_3}{\partial x} \quad e \quad \frac{\partial w_1}{\partial y} = -\frac{\partial w_2}{\partial y} - \frac{\partial w_3}{\partial y} \quad (9.2.70)$$

Assim:

$$\begin{aligned} & -\frac{4qa^3}{\pi^4 D} \sum_{m=1,3,5..}^{\infty} \frac{1}{m^4} \left(1 - \frac{\alpha_m \tanh(\alpha_m) + 2}{2 \cosh(\alpha_m)} \cosh\left(\frac{m\pi y}{a}\right) + \frac{1}{2 \cosh(\alpha_m)} \frac{m\pi y}{a} \sinh\left(\frac{m\pi y}{a}\right)\right) \\ & = -\frac{a}{2\pi D} \sum_{m=1,3,5..}^{\infty} \frac{E_m}{m \cosh(\alpha_m)} \left[ \frac{m\pi y}{a} \sinh\left(\frac{m\pi y}{a}\right) - \alpha_m \tanh(\alpha_m) \cos\left(\frac{m\pi y}{a}\right) \right] \quad (9.2.71) \\ & + \frac{b}{2\pi D} \sum_{m=1,3,5..}^{\infty} \frac{F_m(-1)^{(m-1)/2}}{m} \cos\left(\frac{m\pi y}{b}\right) [\beta_m - \tanh(\beta_m)(\beta_m \tanh(\beta_m) - 1)] \end{aligned}$$

O segundo membro da equação tem  $1/2\pi m D$  como termo comum, e dessa forma ele pode ser simplificado com  $1/\pi^4 m^4 D$ , que está no primeiro membro, logo obtém-se:

$$\begin{aligned} & -\frac{8qa^3}{\pi^3 D} \sum_{m=1,3,5..}^{\infty} \frac{1}{m^3} \left(1 - \frac{\alpha_m \tanh(\alpha_m) + 2}{2 \cosh(\alpha_m)} \cosh\left(\frac{m\pi y}{a}\right) + \frac{1}{2 \cosh(\alpha_m)} \frac{m\pi y}{a} \sinh\left(\frac{m\pi y}{a}\right)\right) \\ & = -a \sum_{m=1,3,5..}^{\infty} \frac{E_m}{\cosh(\alpha_m)} \left[ \frac{m\pi y}{a} \sinh\left(\frac{m\pi y}{a}\right) - \alpha_m \tanh(\alpha_m) \cos\left(\frac{m\pi y}{a}\right) \right] \quad (9.2.72) \\ & + b \sum_{m=1,3,5..}^{\infty} F_m(-1)^{(m-1)/2} \cos\left(\frac{m\pi y}{b}\right) [\beta_m - \tanh(\beta_m)(\beta_m \tanh(\beta_m) - 1)] \end{aligned}$$

Fazendo as considerações ditas anteriormente, tem-se que  $a = b$ , assim:

$$\begin{aligned} & -\frac{8qa^3}{\pi^3} \sum_{m=1,3,5..}^{\infty} \frac{1}{m^3} \left(1 - \frac{\alpha_m \tanh(\alpha_m) + 2}{2 \cosh(\alpha_m)} \cosh\left(\frac{m\pi y}{a}\right) + \frac{1}{2 \cosh(\alpha_m)} \frac{m\pi y}{a} \sinh\left(\frac{m\pi y}{a}\right)\right) \\ & = -a \sum_{m=1,3,5..}^{\infty} \frac{E_m}{\cosh(\alpha_m)} \left[ \frac{m\pi y}{a} \sinh\left(\frac{m\pi y}{a}\right) - \alpha_m \tanh(\alpha_m) \cos\left(\frac{m\pi y}{a}\right) \right] \quad (9.2.73) \\ & + a \sum_{m=1,3,5..}^{\infty} F_m(-1)^{(m-1)/2} \cos\left(\frac{m\pi y}{a}\right) [\beta_m - \tanh(\beta_m)(\beta_m \tanh(\beta_m) - 1)] \end{aligned}$$



Consequentemente, com as simplificações feitas, tem-se:

$$\begin{aligned} \frac{E_m}{\cosh(\alpha_m)} \left( \frac{m\pi y}{a} \sinh\left(\frac{m\pi y}{a}\right) - \alpha_m \tanh(\alpha_m) \cosh\left(\frac{m\pi y}{a}\right) \right) &= \frac{8qa^2}{\pi^3 m^3} \left( 1 \right. \\ &\quad \left. - \frac{\alpha_m \tanh(\alpha_m) + 2}{2 \cosh(\alpha_m)} \cosh\left(\frac{m\pi y}{a}\right) + \frac{1}{2 \cosh(\alpha_m)} \frac{m\pi y}{a} \sinh\left(\frac{m\pi y}{a}\right) \right) \quad (9.2.74) \\ &\quad + F_m (-1)^{(m-1)/2} \cos\left(\frac{m\pi y}{a}\right) [\beta_m - \tanh(\beta_m) (\beta_m \tanh(\beta_m) - 1)] \end{aligned}$$

Isolando a  $E_m$ , tem-se:

$$\begin{aligned} E_m &= \left[ \frac{\frac{8qa^2}{\pi^3 m^3} \left( 1 - \frac{\alpha_m \tanh(\alpha_m) + 2}{2 \cosh(\alpha_m)} \cosh\left(\frac{m\pi y}{a}\right) + \frac{1}{2 \cosh(\alpha_m)} \frac{m\pi y}{a} \sinh\left(\frac{m\pi y}{a}\right) \right) \cosh(\alpha_m)}{\left( \frac{m\pi y}{a} \sinh\left(\frac{m\pi y}{a}\right) - \alpha_m \tanh(\alpha_m) \cosh\left(\frac{m\pi y}{a}\right) \right)} \right. \\ &\quad \left. + \frac{F_m (-1)^{(m-1)/2} \cos\left(\frac{m\pi y}{a}\right) [\beta_m - \tanh(\beta_m) (\beta_m \tanh(\beta_m) - 1)] \cosh(\alpha_m)}{\left( \frac{m\pi y}{a} \sinh\left(\frac{m\pi y}{a}\right) - \alpha_m \tanh(\alpha_m) \cosh\left(\frac{m\pi y}{a}\right) \right)} \right] \quad (9.2.75) \end{aligned}$$

Utilizando a Equação (9.2.70) para  $y$  e deixando  $F_m$  em função de  $E_m$ , tem-se:

$$\begin{aligned} \frac{2qa^3}{\pi^4 D} \sum_{m=1,3,5..}^{\infty} \frac{(-1)^{(m-1)/2}}{m^4} \cos\left(\frac{m\pi x}{a}\right) [\alpha_m - \tanh(\alpha_m) (1 + \alpha_m \tanh(\alpha_m))] \\ = \frac{a}{2\pi D} \sum_{m=1,3,5..}^{\infty} \frac{E_m (-1)^{(m-1)/2}}{m} \cos\left(\frac{m\pi x}{a}\right) [\alpha_m - \tanh(\alpha_m) (\alpha_m \tanh(\alpha_m) - 1)] \quad (9.2.76) \\ - \frac{b}{2\pi D} \sum_{m=1,3,5..}^{\infty} \frac{F_m}{m \cosh(\beta_m)} \left[ \frac{m\pi x}{b} \sinh\left(\frac{m\pi x}{b}\right) - \beta_m \tanh(\beta_m) \cosh\left(\frac{m\pi x}{b}\right) \right] \end{aligned}$$

Aplicando as mesmas hipóteses de simplificação da Equação (9.2.74), tem-se:

$$\begin{aligned} \frac{F_m}{\cosh(\beta_m)} \left[ \frac{m\pi x}{a} \sinh\left(\frac{m\pi x}{a}\right) - \beta_m \tanh(\beta_m) \cosh\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \right] \\ = - \frac{4qa^2}{\pi^3 m^3} (-1)^{(m-1)/2} \cos\left(\frac{m\pi x}{a}\right) [\alpha_m - \tanh(\alpha_m) (1 + \alpha_m \tanh(\alpha_m))] \quad (9.2.77) \\ + E_m (-1)^{(m-1)/2} \cos\left(\frac{m\pi x}{a}\right) [\alpha_m - \tanh(\alpha_m) (\alpha_m \tanh(\alpha_m) - 1)] \end{aligned}$$

Assim:

$$\begin{aligned} F_m &= \frac{- \frac{4qa^2}{\pi^3 m^3} (-1)^{(m-1)/2} \cos\left(\frac{m\pi x}{a}\right) [\alpha_m - \tanh(\alpha_m) (1 + \alpha_m \tanh(\alpha_m))]}{\left[ \frac{m\pi x}{a} \sinh\left(\frac{m\pi x}{a}\right) - \beta_m \tanh(\beta_m) \cosh\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \right]} \\ &\quad + \frac{E_m (-1)^{(m-1)/2} \cos\left(\frac{m\pi x}{a}\right) [\alpha_m - \tanh(\alpha_m) (\alpha_m \tanh(\alpha_m) - 1)] \cosh(\beta_m)}{\left[ \frac{m\pi x}{a} \sinh\left(\frac{m\pi x}{a}\right) - \beta_m \tanh(\beta_m) \cosh\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \right]} \quad (9.2.78) \end{aligned}$$

Com o intuito de simplificar as próximas equações, faz-se a seguinte igualdade para a Equação (9.2.78), assim, tem-se:

$$\gamma = \frac{-\frac{4qa^2}{\pi^3 m^3} (-1)^{(m-1)/2} \cos\left(\frac{m\pi x}{a}\right) [\alpha_m - \tanh(\alpha_m) (1 + \alpha_m \tanh(\alpha_m))]}{\left[\frac{m\pi x}{a} \sinh\left(\frac{m\pi x}{a}\right) - \beta_m \tanh(\beta_m) \cosh\left(\frac{m\pi x}{a}\right)\right]} \quad (9.2.79)$$

e para a Equação (9.2.75), tem-se

$$\omega = \frac{\frac{8qa^2}{\pi^3 m^3} \left(1 - \frac{\alpha_m \tanh(\alpha_m) + 2}{2 \cosh(\alpha_m)} \cosh\left(\frac{m\pi y}{a}\right) + \frac{1}{2 \cosh(\alpha_m)} \frac{m\pi y}{a} \sinh\left(\frac{m\pi y}{a}\right)\right) \cosh(\alpha_m)}{\left(\frac{m\pi y}{a} \sinh\left(\frac{m\pi y}{a}\right) - \alpha_m \tanh(\alpha_m) \cosh\left(\frac{m\pi y}{a}\right)\right)} \quad (9.2.80)$$

Com esses valores encontrados, substitui-se as Equações (9.2.79) e (9.2.80) na própria Equação (9.2.75), obtendo:

$$E_m = \omega + \left[ \gamma + \frac{E_m (-1)^{(m-1)/2} \cos\left(\frac{m\pi x}{a}\right) [\alpha_m - \tanh(\alpha_m) (\alpha_m \tanh(\alpha_m) - 1)] \cosh(\beta_m)}{\left[\frac{m\pi x}{a} \sinh\left(\frac{m\pi x}{a}\right) - \beta_m \tanh(\beta_m) \cosh\left(\frac{m\pi x}{a}\right)\right]} \right] \cdot \left[ \frac{(-1)^{(m-1)/2} \cos\left(\frac{m\pi y}{a}\right) [\beta_m - \tanh(\beta_m) (\beta_m \tanh(\beta_m) - 1)] \cosh(\alpha_m)}{\left(\frac{m\pi y}{a} \sinh\left(\frac{m\pi y}{a}\right) - \alpha_m \tanh(\alpha_m) \cosh\left(\frac{m\pi y}{a}\right)\right)} \right] \quad (9.2.81)$$

Para simplificação da equação, faz-se a seguinte manipulação, tem se:

$$\lambda = \frac{\cos\left(\frac{m\pi y}{a}\right) [\beta_m - \tanh(\beta_m) (\beta_m \tanh(\beta_m) - 1)] \cosh(\alpha_m)}{\left(\frac{m\pi y}{a} \sinh\left(\frac{m\pi y}{a}\right) - \alpha_m \tanh(\alpha_m) \cosh\left(\frac{m\pi y}{a}\right)\right)} \quad (9.2.82)$$

Substituindo a Equação (9.2.82) na Equação (9.2.81) e fazendo as devidas manipulações, obtém-se:

$$E_m - \frac{E_m \cos\left(\frac{m\pi x}{a}\right) [\alpha_m - \tanh(\alpha_m) (\alpha_m \tanh(\alpha_m) - 1)] \cosh(\beta_m) \cdot \lambda}{\left[\frac{m\pi x}{a} \sinh\left(\frac{m\pi x}{a}\right) - \beta_m \tanh(\beta_m) \cosh\left(\frac{m\pi x}{a}\right)\right]} = \omega - (\gamma \cdot \lambda) \quad (9.2.83)$$

Colocando  $E_m$  em evidência, obtém-se:

$$E_m \left[ 1 - \frac{\cos\left(\frac{m\pi x}{a}\right) [\alpha_m - \tanh(\alpha_m) (\alpha_m \tanh(\alpha_m) - 1)] \cosh(\beta_m) \cdot \lambda}{\left[\frac{m\pi x}{a} \sinh\left(\frac{m\pi x}{a}\right) - \beta_m \tanh(\beta_m) \cosh\left(\frac{m\pi x}{a}\right)\right]} \right] = \omega - (\gamma \cdot \lambda) \quad (9.2.84)$$

Isolando o  $E_m$ , tem-se:

$$E_m = \frac{\omega - (\gamma \cdot \lambda)}{\left[ 1 - \frac{\cos\left(\frac{m\pi x}{a}\right) [\alpha_m - \tanh(\alpha_m) (\alpha_m \tanh(\alpha_m) - 1)] \cosh(\beta_m) \cdot \lambda}{\left[\frac{m\pi x}{a} \sinh\left(\frac{m\pi x}{a}\right) - \beta_m \tanh(\beta_m) \cosh\left(\frac{m\pi x}{a}\right)\right]} \right]} \quad (9.2.85)$$

Considera-se  $\alpha_m = \beta_m$ , devido às dimensões serem iguais. Assim,  $m\pi b/2a$  e  $m\pi a/2b$  podem ser transformados em  $m\pi/2$ . A deflexão máxima será no centro da placa, onde as coordenadas são  $x$  e  $y$ , iguais a zero. O próximo passo já será feito aplicando o valor das coordenadas e o termo  $m$  igual a 1. Isso é necessário para fazer a equação convergir. Logo, tem-se:

$$w_{2m\acute{a}x} = \frac{a^2}{2\pi^2 D} E_m \frac{\left(\frac{\pi}{2}\right) \tanh\left(\frac{\pi}{2}\right)}{m^2 \cosh\left(\frac{\pi}{2}\right)} \quad (9.2.86)$$

em que  $E_m$  vale:

$$E_m = \left[ \frac{\left(\left(-\frac{\pi}{2}\right) \tanh\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)^2}{\left(\left(-\frac{\pi}{2}\right) \tanh\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)^2 - \left(\frac{\pi}{2} - \tanh\left(\frac{\pi}{2}\right)\right) \left(\frac{\pi}{2} \tanh\left(\frac{\pi}{2}\right) - 1\right) \cosh^2\left(\frac{\pi}{2}\right)} \right] \cdot \frac{4qa^2}{\pi^3 1^3} \left[ 2 \left( \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) - \left(\frac{\frac{\pi}{2} \tanh\left(\frac{\pi}{2}\right) + 2}{2}\right)}{\left(-\frac{\pi}{2} \tanh\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)} \right) \right] \quad (9.2.87)$$

$$- \left[ \frac{\left(\frac{\pi}{2} - \tanh\left(\frac{\pi}{2}\right)\right) \left(1 + \frac{\pi}{2} \tanh\left(\frac{\pi}{2}\right)\right) \left(\frac{\pi}{2} - \tanh\left(\frac{\pi}{2}\right)\right) \left(\frac{\pi}{2} \tanh\left(\frac{\pi}{2}\right) - 1\right) \cosh^2\left(\frac{\pi}{2}\right)}{\left(\left(-\frac{\pi}{2}\right) \tanh\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)^2} \right]$$

Logo:

$$E_m = \left[ \frac{2,075}{2,075 - 8,569} \right] \cdot \frac{4qa^2}{\pi^3 1^3} \left[ 2 \cdot \left( \frac{2,509 - 0,720 - 1}{-1,441} - \frac{(-0,667 \cdot 1 \cdot 1,66 \cdot 6,295)}{2,075} \right) \right] \quad (9.2.88)$$

Com finalidade de deixar o valor o mais aproximado possível no qual foi encontrado no livro “*Theory of Plates and Shells*” de *Timoshenko* (1959), onde se obteve o valor de  $\left[ \frac{2,075}{2,075 - 8,569} \right]$  que é  $-0,320$ , sendo  $0,3$ . Assim, obtém-se:

$$E_m = -0,3 \cdot \frac{4qa^2}{\pi^3} (-1,095 + 2,359) \quad (9.2.89)$$

$$E_m = -\frac{1,517qa^2}{\pi^3} \quad (9.2.90)$$

Substituindo em  $w_2$ , encontra-se:

$$w_2 = \frac{a^2}{2\pi^2} \cdot \left( -\frac{1,517qa^2}{\pi^3} \right) \cdot \frac{1,441}{2,509} \quad (9.2.91)$$

$$w_2máx = -0,00142 \frac{qa^4}{D} \quad (9.2.92)$$

Logo, considera-se:

$$w_2máx = -0,00140 \frac{qa^4}{D} \quad (9.2.93)$$

Para a deflexão  $w_3$  o valor será o mesmo, tendo em vista que a placa é quadrada e a fórmula é análoga. Assim, pelo método da superposição, tem-se:

$$w = w_1 + w_2 + w_3 \quad (9.2.94)$$

Utilizando a Equação (9.2.25), encontra-se um valor igual ao determinado na Equação (9.1.8), que será utilizado junto com o valor da Equação (9.2.93). Sabendo que  $w_2$  e  $w_3$  são iguais, obtém-se:

$$w = (0,00406 - 0,00140 - 0,00140) \frac{qa^4}{D} \quad (9.2.95)$$

Chega-se, então, no valor:

$$w = 0,00126 \frac{qa^4}{D} \quad (9.2.96)$$

Obtendo a rigidez através da Equação (3.34) e aplicando na Equação (9.2.96), juntamente com o carregamento e as dimensões, obtém-se, para  $t = 0,2$  cm,  $t = 0,5$  cm e  $t = 1,0$ , os respectivos resultados:

$$w_{máx} = 1,318896 \text{ cm} \quad (9.2.97)$$

$$w_{máx} = 0,084409 \text{ cm} \quad (9.2.98)$$

$$w_{máx} = 0,010551 \text{ cm} \quad (9.2.99)$$

## 10 APLICAÇÕES NUMÉRICAS

Neste capítulo, verifica-se por meios de modelos numéricos, as deflexões nos dois tipos de placas, explorado nas aplicações analítica. Para tanto utiliza-se um código computacional de elemento finitos, escritos com a linguagem *Scilab* versão 6.1.0. Além disso, é mostrado a vista parametrizada das placas, indeformadas e deformadas, feita a partir da utilização do programa *ParaView* versão 5.6.0.

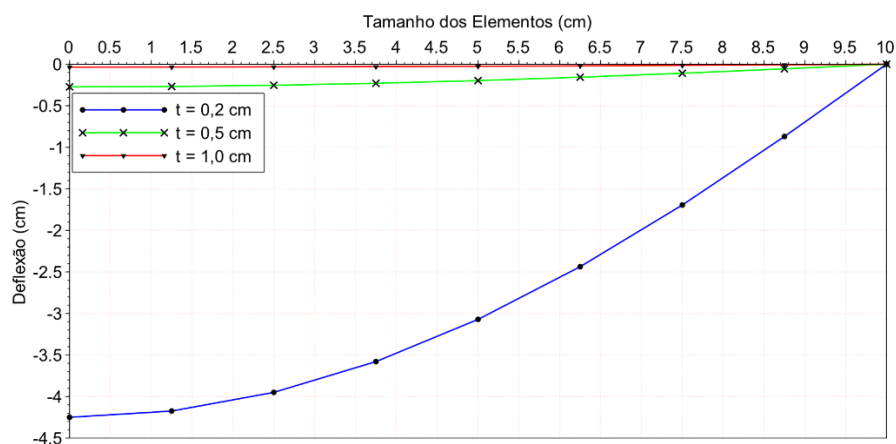
Nesses modelos, serão obtidos resultados de deflexão para variadas espessuras de placas e, para diferentes tamanhos de malha.

### 10.1 Placa quadrada simplesmente apoiada submetida à uma carga uniforme

Utilizando a mesma placa citada no item 9.1, com as mesmas propriedades e geometria, será feita uma análise numérica.

A Figura 10.1 mostra a diferença da deflexão em uma placa de três, espessuras  $t$ , quando um carregamento uniforme transversal  $p_0 = 0,1 \text{ kN/cm}^2$  é aplicado e com uma malha de  $16 \times 16$ . Assim os elementos da placa tem um tamanho de  $1,25 \text{ cm}$ , a estrutura observa-se que o início dos eixos representam o centro da placa. Analisando numericamente, a deflexão não varia apenas quando espessuras diferentes são empregadas, mas ao mudar a densidade das malhas no programa, os valores também variam, mesmo para uma mesma espessura, quando comparados com a deflexão obtida analiticamente.

Figura 10.1 – Deflexão em placas de variadas espessuras.

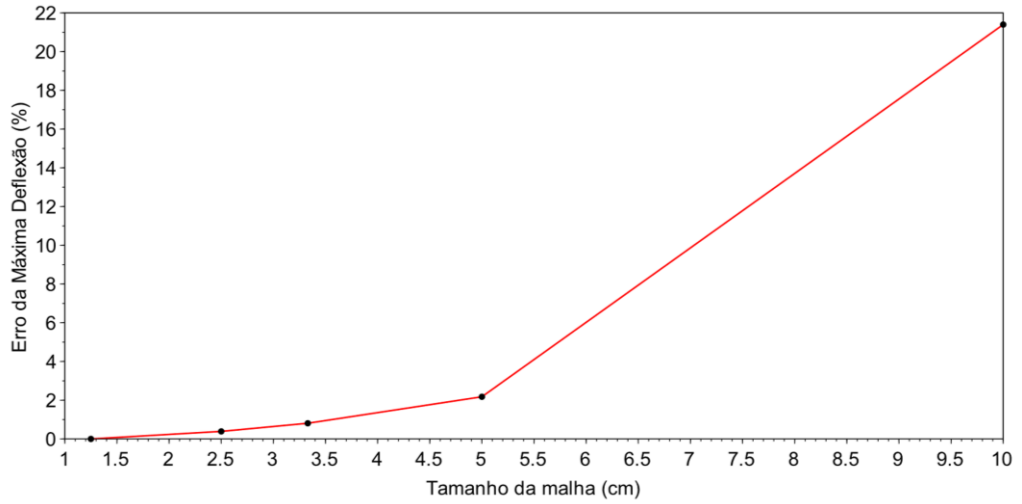


Fonte – Autor, 2023.

A Figura 10.2 mostra a diferença da deflexão em forma de erro percentual para vários tamanhos de malhas, quando se comparado com o resultado obtido analiticamente.

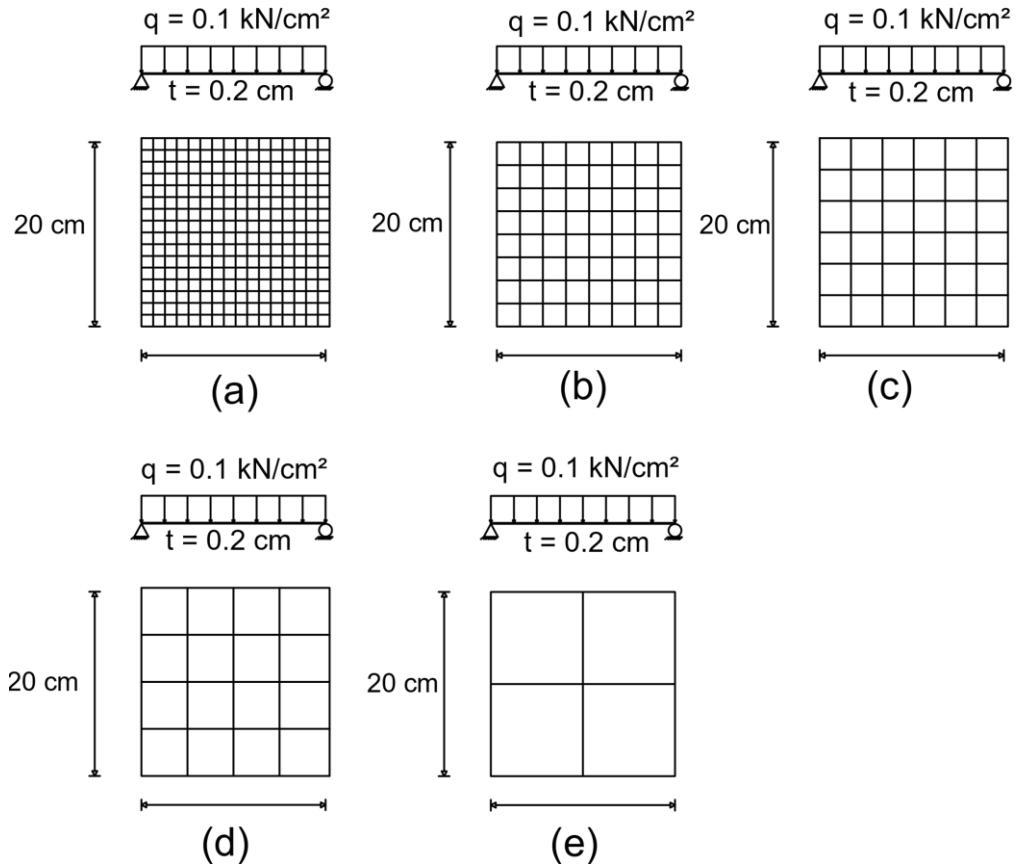
Quanto mais refinada a malha da placa, menor o erro percentual obtido. A Figura 10.3 (a), mostra a malha  $16 \times 16$ , que é a mais refinada, enquanto a Figura 10.3 (e) é uma malha mais simples, sendo ela  $2 \times 2$ .

Figura 10.2 – Deflexão em variados tamanhos de malhas.



Fonte – Autor, 2023.

Figura 10.3 – Placa quadradas com vários tamanhos de malhas.



Fonte – Autor, 2023.

A Tabela 10.1, traz os valores absolutos mostrados graficamente na Figura 10.2.

Tabela 10.1 – Erro percentual dos valores obtidos com código implementado (MEF) em relação a solução analítica.

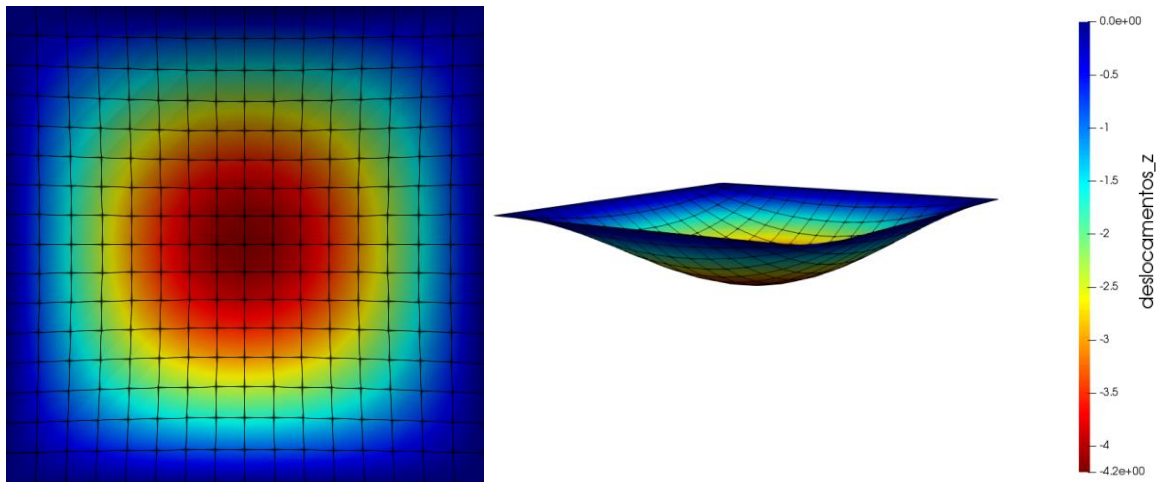
Dimensões			Deflexão		Erro
Número de elem.	Tamanho dos elem.	Malha	$w_{analítico}$	$w_{scilab}$	$erro_{scilab}$
4	10,00 cm	2 x 2	4,249776 cm	3,340473 cm	21,39649%
16	5,00 cm	4 x 4	4,249776 cm	4,157211 cm	2,17811%
36	3,33 cm	6 x 6	4,249776 cm	4,215318 cm	0,81082%
64	2,50 cm	8 x 8	4,249776 cm	4,233165 cm	0,39087%
256	1,25 cm	16 x 16	4,249776 cm	4,249739 cm	0,00087%

Fonte – Autor, 2023.

Para um menor elemento da malha, o erro, praticamente, inexistente. Enquanto, que para um tamanho maior o erro ultrapassa os 20%.

Através do software *ParaView* versão 5.6.0 é possível ver a deformada da placa com a malha mais refinada, Figura 10.4.

Figura 10.4 – Deformada da placa em cm.

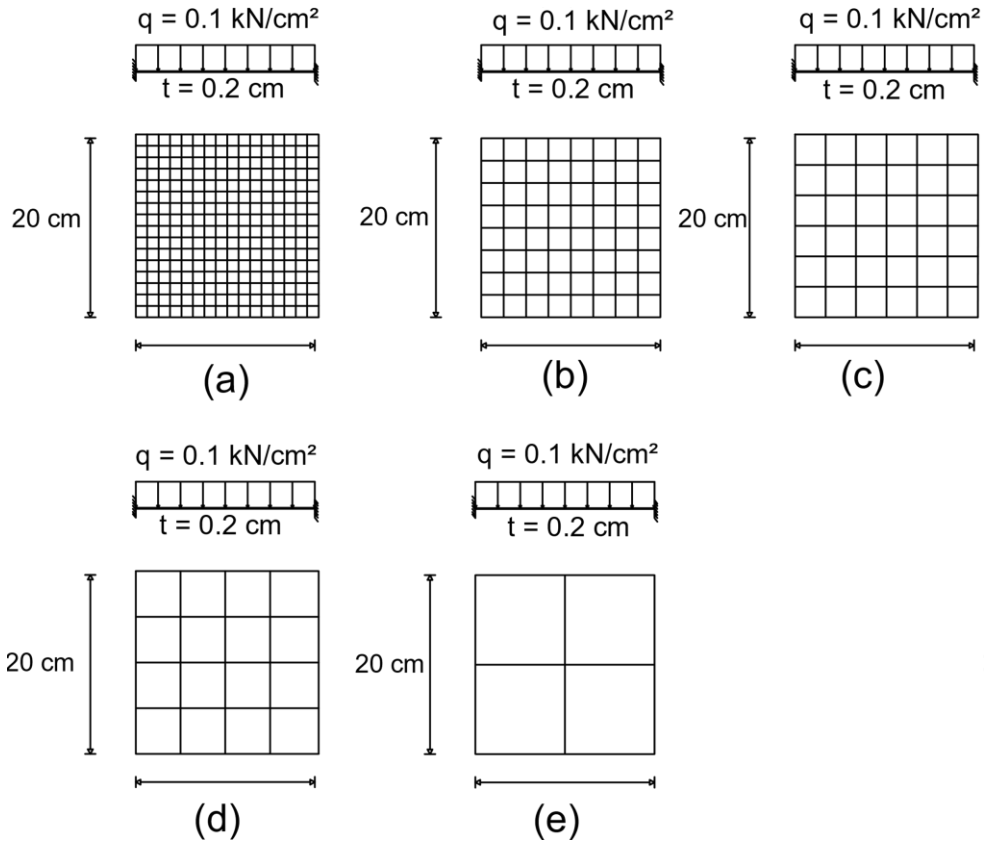


Fonte – Autor, 2023.

## 10.2 Placa quadrada totalmente engastada submetida à uma carga uniforme

Assim como feito no item 10.1, será realizado a mesma análise, porém para apoios engastados, como mostra a Figura 10.5. Com isso, compara-se os valores de deflexão encontrados pelo método analítico e numérico.

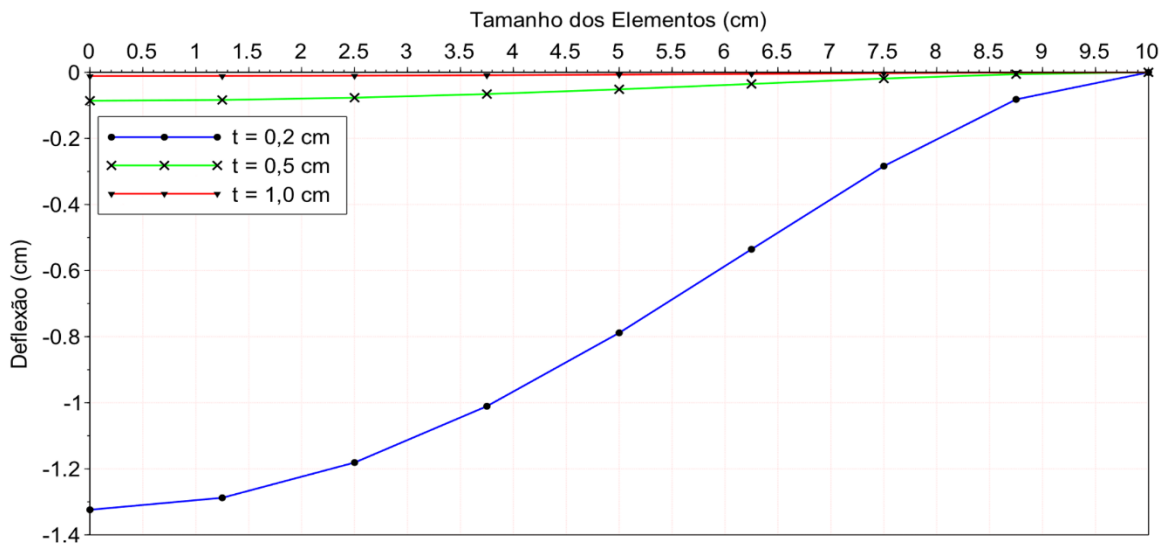
Figura 10.5 – Deflexão em variados tamanhos de malhas.



Fonte – Autor, 2023.

Pegando como referência a placa citada no item 9.2, a Figura 10.6 mostra as seguintes deflexões para as mesmas espessuras do problema anterior.

Figura 10.6 – Deflexão em placas de variadas espessuras.



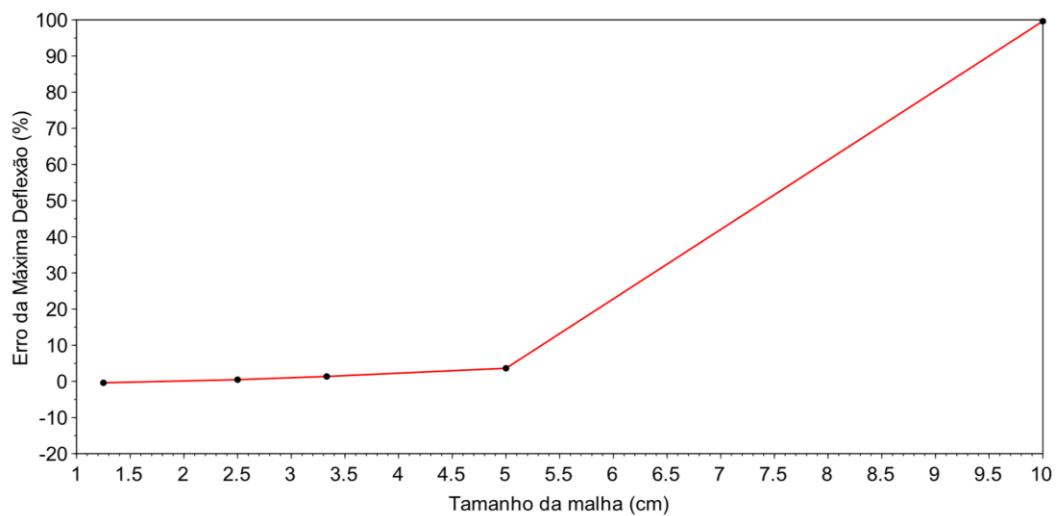
Fonte – Autor, 2023.



A deflexão da placa engastada, será menor que a da placa simplesmente apoiada, devido à restrição maior dos deslocamentos.

Quando se trata do erro percentual, a malha mais grosseira ( $4 \times 4$ ), por exemplo, apresenta um erro de quase 100%. No entanto, para a malha mais refinada ( $16 \times 16$ ) o valor encontrado no *Scilab* versão 6.1.0, ultrapassa o da solução analítica, gerando um erro negativo. Tudo isso quando se compara os resultados analíticos com os numéricos para a espessura  $t = 0,2$  cm. A Figura 10.7, traz o gráfico desse erro percentual para cada malha.

Figura 10.7 – Deflexão em variados tamanhos de malhas.



Fonte – Autor, 2023.

A Tabela 10.2 representa esse gráfico anterior em forma de valores absolutos.

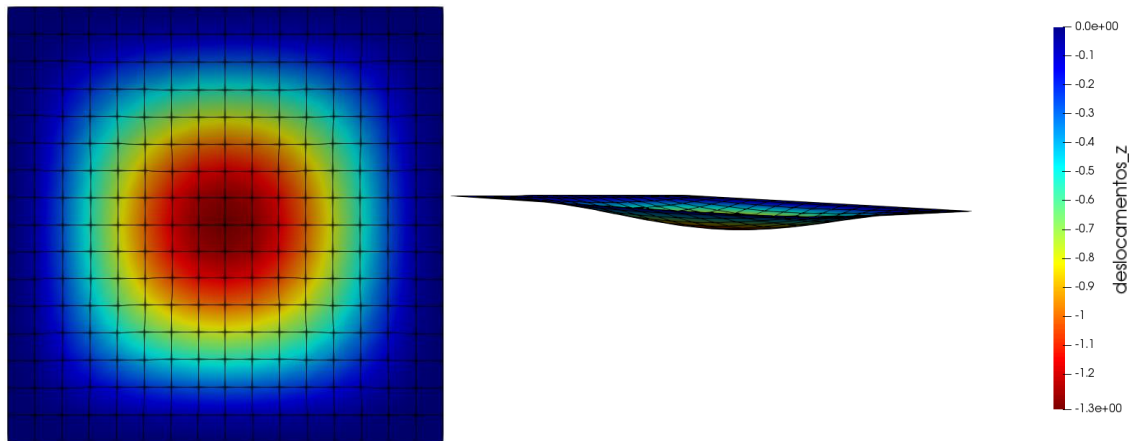
Tabela 10.2 – Erro percentual dos valores obtidos com código implementado (MEF) em relação a solução analítica.

Dimensões			Deflexão		Erro
Número de elem.	Tamanho dos elem.	malha	$w_{analítico}$	$w_{scilab}$	$erro_{scilab}$
4	10,00	$2 \times 2$	1,318896	0,004914	99,62742%
16	5,00	$4 \times 4$	1,318896	1,271097	3,62417%
36	3,33	$6 \times 6$	1,318896	1,30091	1,36372%
64	2,50	$8 \times 8$	1,318896	1,312668	0,47221%
256	1,25	$16 \times 16$	1,318896	1,324136	-0,39730%

Fonte – Autor, 2023.

A Figura 10.8, mostra como ficou a placa após o carregamento causar a flecha.

Figura 10.8 – Deformada da placa em cm.



Fonte – Autor, 2023.

Como já mencionado anteriormente, a deflexão da placa totalmente engastada é bem menor que a da placa simplesmente apoiada, ficando muito mais visível quando se vê as Figuras 10.4 e 10.8. Contudo, para os dois tipos de placas, a deflexão máxima ocorrerá no centro, e nos bordos ela não existirá.

## 11 CONCLUSÃO

Neste trabalho descreveu-se de forma detalhada os conceitos e a formulação clássica de placas delgadas, utilizando as soluções de *Navier* e de *Levy*. Já no método numérico trabalhou-se com um programa implementado na linguagem de programação *Scilab* versão 6.1.0.

Percebeu-se que a solução de *Navier*, com a utilização de séries duplas de senos, converge de forma mais lenta, pois trabalha-se com vários termos. Além disso, muitas vezes, não é nem possível se chegar a um resultado. Tendo em vista esses empecilhos, desenvolveu-se a solução de *Levy* como alternativa, usando séries únicas, tornando mais rápido e fácil a convergência dos resultados dos esforços solicitantes, muitas vezes, é necessário apenas um termo para isso acontecer.

Para a placa simplesmente apoiada, verificou-se uma deflexão bem maior do que para uma placa totalmente engastada. Isso se deve à restrição maior dos deslocamentos, diminuindo, também os graus de liberdade da estrutura. No entanto, para ambos os apoios, a flecha maior ocorre no centro da placa, quando se analisa a ação de um mesmo carregamento. Esse resultado fica ainda mais visível ao analisar as Figuras 10.4 e 10.8, obtidas com o programa *ParaView* versão 5.6.0. Além disso, verifica-se que a espessura da placa tem grande influência no seu comportamento. Assim, quanto maior este parâmetro for, menor será a deflexão. As Figuras 10.1 e 10.5, apresentam graficamente, esse resultado para os dois tipos de apoios, respectivamente.

A análise por meio dos métodos numéricos usando um código implementado, mostra uma boa convergência dos resultados de deflexão. Os erros percentuais obtidos nas análises estão mostrados na Tabela 10.1 e Tabela 10.2, respectivamente, sendo possível perceber que o tamanho da malha é importante para encontrar os resultados mais exatos. Verifica-se que, quanto mais refinada for a malha, mais próximo os valores das flechas nas placas serão daqueles obtidos analiticamente. Assim, pode-se concluir que tanto as soluções analíticas, quanto a solução numérica produzem respostas precisas dos deslocamentos para as placas analisadas.

Como proposta de continuidade, recomenda-se fazer a análise da formulação dinâmica no qual poderão ser estudadas diferentes aplicações, como por exemplo, vibrações em lajes. Também é possível trabalhar com variações de carregamentos, apoios e geometrias.

## REFERÊNCIAS

- ARAÚJO, J. M. de. **Curso de Concreto Armado V.2**. Rua Tiradentes, 105 - Cidade Nova - Rio Grande: FURG, 2010.
- BIEZUNER, R. J. **Introdução as Equações Diferenciais Parciais**. Curso de Bacharelado em Matemática e Matemática computacional. 12 de outubro de 2007. Notas de aula. Universidade Federal de Minas Gerais. Disponível em: <https://doceru.com/doc/c0xcvs>.
- BUFFONI, S. S. O. **Deformação**. - Universidade do Federal Fluminense. Disponível em: <https://www.professores.uff.br/salete/wp-content/uploads/sites/111/2017/08/aula5.pdf>.
- Carvalho, P. G. S. (2017). **Análise Estrutural de Placas: Modelagem Computacional para As Teorias de Reissner-Mindlin e Kirchhoff**. Revista Interdisciplinar De Pesquisa Em Engenharia, 2(23), 257–276. Disponível em: <https://doi.org/10.26512/ripe.v2i23.21049>.
- Carvalho, Matheus Santos de. **Uma Revisão dos Métodos Clássicos de Análise de Placas**. São Cristóvão, 2020. Monografia (Graduação em Engenharia Civil) - Departamento de Engenharia Civil, Centro de Ciências Exatas e Tecnologia, Universidade Federal de Sergipe, São Cristóvão, SE, 2020. Disponível em: <http://ri.ufs.br/jspui/handle/riufs/15845>.
- COSTA, R. de S. **Uma Estudo de Equações Diferenciais Aplicado à Deflexão de Vigas**. Dissertação (Mestrado) - Universidade Estadual de Campinas, Campinas - SP, outubro 2010. Disponível em: [http://repositorio.unicamp.br/bitstream/REPOSIP/306111/1/Costa\\_RicharddeSouza\\_M.pdf](http://repositorio.unicamp.br/bitstream/REPOSIP/306111/1/Costa_RicharddeSouza_M.pdf).
- DIAS, N. L. **A Teoria da Flexão de Placas Envolvendo a Equação Diferencial de Lagrange**, 2019. Monografia (Graduação em Matemática) - Instituto De Matemática, Estatística e Física, Universidade Federal Do Rio Grande. Rio Grande, RS, 2019. Disponível em: [https://imef.furg.br/images/stories/Monografias/Matematica\\_aplicada/2019/2019-2\\_Nickolas\\_Leitao\\_Dias.pdf](https://imef.furg.br/images/stories/Monografias/Matematica_aplicada/2019/2019-2_Nickolas_Leitao_Dias.pdf).
- EMIDIO SOBRINHO, B. **Estudo Analítico e Numérico de Placas Retangulares**. Graduação - Universidade Paulista, Brasília - DF, outubro 2012.
- FERREIRA, A.J.M. **Matlab Codes for Finite Element Analysis**. V.157. G.M.L Gladwell Department of Civil Engineering University of Waterloo, Waterloo, Ontario – Canada 2008.
- GIL, A. C. **Como Elaborar Projetos de Pesquisa**. 4. ed. São Paulo: Atlas, 2002. 175 p.
- J. N. Reddy. **An Introduction to the Finite Element Method**. McGraw-Hill, New York, 1993.
- J. N. Reddy. **Mechanics of Laminated Composite Plates**. CRC Press, New York, 1997.
- K. J. Bathe. **Finite Element Procedures in Engineering Analysis**. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1982.

MATEUS, D. D. **Análise da Associação de Placas no Espaço Usando Elementos de Contorno Quadráticos Descontínuos**. Dissertação (Mestrado) - Universidade de Brasília - DF, outubro 2018. Disponível em: [https://repositorio.unb.br/bitstream/10482/33869/1/2018\\_DaniloDiegoChavesMateus.pdf](https://repositorio.unb.br/bitstream/10482/33869/1/2018_DaniloDiegoChavesMateus.pdf) .

MARTINS, C. H. **Contribuição da Rigidez Transversal à Flexão das Lajes na Distribuição dos Esforços em Estruturas de Edifícios de Andares Múltiplos, em Teoria de Segunda Ordem**. Dissertação (Mestrado) - Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo – SP, 1998. Disponível em: [https://www.teses.usp.br/teses/disponiveis/18/18134/tde-30052006-174741/publico/1998ME\\_CarlosHMartins.pdf](https://www.teses.usp.br/teses/disponiveis/18/18134/tde-30052006-174741/publico/1998ME_CarlosHMartins.pdf).

M. Petyt. **Introduction to Finite Element Vibration Analysis**. Cambridge University Press, Cambridge, 1990.

MONIZ, L. A. **Resistência dos Materiais - Revisão Introdução à Teoria da Elasticidade**. Disponível em: [http://www.ime.eb.br/~moniz/resmat/resmat\\_lista\\_zero.pdf](http://www.ime.eb.br/~moniz/resmat/resmat_lista_zero.pdf) .

OLIVEIRA NETO, L de. **Uma Formulação do Método dos Elementos de Contorno com três Parâmetros Nodais em Deslocamentos para Placas Delgadas e Suas Aplicações a Problemas de Engenharia Estrutural**. Tese (Doutorado) - Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos - SP, 1998. Disponível em: [https://teses.usp.br/teses/disponiveis/18/18134/tde-26032018-102459/publico/Tese\\_OliveiraNeto\\_Luttgardes.pdf](https://teses.usp.br/teses/disponiveis/18/18134/tde-26032018-102459/publico/Tese_OliveiraNeto_Luttgardes.pdf) .

OTA, N, S, N. **O Elemento Finito T6-3i na Análise de Placas e Dinâmica de Cascas**. Dissertação (Mestrado) - Escola Politécnica da Universidade de São Paulo, São Paulo-SP, 2016. Disponível em: <https://www.teses.usp.br/teses/disponiveis/3/3144/tde-23062016-162053/pt-br.php>.

PROETTI, S. **As Pesquisas Qualitativa e Quantitativa como Métodos de Investigação Científica: um estudo comparativo e objetivo**. Revista Lumen - Issn: 2447-8717, [S.L.], v. 2, n. 4, p. 1-23, 1 jun. 2018. Centro Universitario Assunção - Unifai. Disponível em: <http://dx.doi.org/10.32459/revistalumen.v2i4.60>.

(RIBEIRO, WESTIN). **Método Dos Elementos Finitos Na Simulação De Tensão e Elasticidade em Placas**. Disponível em: [https://www.academia.edu/15701903/M%C3%A9todo\\_Dos\\_Elementos\\_Finitos\\_Na\\_Simula%C3%A7%C3%A3o\\_De\\_Tens%C3%A3o\\_E\\_Elasticidade\\_Em\\_Placas](https://www.academia.edu/15701903/M%C3%A9todo_Dos_Elementos_Finitos_Na_Simula%C3%A7%C3%A3o_De_Tens%C3%A3o_E_Elasticidade_Em_Placas).

SZILARD, R. **Theory and Analysis of Plates: classical and numerical methods**. New Jersey: Prentice-Hall Inc. New Jersey: John Wiley & Sons, 2004.

TIMOSHENKO, S. **Theory of Plates and Shells**. New York: McGraw-Hill Book Company, 1959. Disponível em: < [http://www.cap-recifal.com/ccs\\_files/articles/cuveaqual\\_denisio/Timoshenko\\_-\\_Theory\\_of\\_plates\\_and\\_shells.pdf](http://www.cap-recifal.com/ccs_files/articles/cuveaqual_denisio/Timoshenko_-_Theory_of_plates_and_shells.pdf) >.