INSTITUTO FEDERAL
Paraíba
Campus Campina Grande

INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA DA PARAÍBA
CURSO SUPERIOR DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

RAYNARA DOS SANTOS PEREIRA

IMPORTÂNCIA DA APLICAÇÃO DAS DERIVADAS

CAMPINA GRANDE - PB
2023

RAYNARA DOS SANTOS PEREIRA

IMPORTÂNCIA DA APLICAÇÃO DAS DERIVADAS

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado no Curso Superior de Licenciatura em Matemática do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia da Paraíba (IFPB), como requisito parcial para para obtenção do título de Licenciado em Matemática.

Orientador: Prof. Ms. Orlando Batista de Almeida

P436i Pereira, Raynara dos Santos.
Importância da aplicação das derivadas / Raynara dos Santos Pereira. - Campina Grande, 2023.
54f. : il.

Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação em Licenciatura em Matemática) - Instituto Federal da Paraíba, 2023.
Orientador: Prof. Ms. Orlando Batista de Almeida.

1. Matemática - ensino superior 2. Matemática - cálculo - derivadas I.Almeida, Orlando Batista de. II. Título.

CDU 51

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
SECRETARIA DE EDUCAÇÃO PROFISSIONAL E TECNOLÓGICA
INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA DA PARAÍBA
CAMPUS CAMPINA GRANDE

RAYNARA DOS SANTOS PEREIRA

IMPORTÂNCIA DA APLICAÇÃO DAS DERIVADAS

Trabalho de Conclusão de Curso, aprovado como requisito parcial para a obtenção de graduação em Licenciatura em Matemática pelo Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia da Paraíba – Campus Campina Grande.

Habilitação: Licenciatura

Data da aprovação

22 / 06 / 2023.

BANCA EXAMINADORA:

Orlando Batista de Almeida

ORIENTADOR: Prof. Me Orlando Batista de Almeida – IFPB

Rodrigo Moura da Silva

AVALIADOR: Prof. Dr Rodrigo Moura da Silva – IFPB

Vinicius Costa de Alencar

AVALIADOR: Prof. Me Vinícius Costa de Alencar – IFPB

AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente à Deus, que me deu graça para lhe dar com as adversidades e continuar minha caminhada e conseguir concluir meu curso.

Também gostaria de deixar um agradecimento especial ao Instituto Federal de Educação Ciência e Tecnologia da Paraíba – IFPB, Campus Campina Grande, e a todos os funcionários dessa instituição que me proporcionaram um ambiente propício para um bom desenvolvimento do curso e do meu trabalho de conclusão de curso.

A meu pai e irmã que devem estar muito orgulhosos e felizes por eu está terminando esta graduação.

Aos amigos que fiz durante o curso, em especial a Raí, Hozana, Renata, Renan, Pedro, Fernando, Carlos Daniel e outros colegas que já não fazem mais parte da minha convivência mas que me motivaram a continuar no curso.

Aos meus amigos fora do curso, que me escutaram e acreditaram em mim me dando motivação para continuar.

Ao meu querido Orientador, Olando Batista de Almeida. Agradeço imensamente pela atenção e os conselhos, sempre me incentivando a superar as barreiras que muitas me sufocaram, um profissional e ser humano maravilhoso que sempre servirá de exemplo na minha caminhada.

Aos professores da banca.

A todos os professores do IFPB, que são profissionais excelentes.

Aos programas de iniciação à docência oferecidos pelo IFPB, como o PIBID e RP no qual fui bolsista incentivando minha permanencia no curso.

Meu muito obrigado à todos.

“Há aqueles que já nascem póstumos”
(Friedrich Wilhelm Nietzsche)

RESUMO

O presente trabalho apresenta as aplicações das derivadas na perspectiva da Matemática no Ensino Superior, visando contribuir para as formações futuras. O trabalho constitui-se de forma bibliográfica, considerando a aprendizagem de Cálculo, em especial nas derivadas. A aplicação das derivadas é de fundamental importância em diversas áreas do conhecimento humano, com o passar dos anos a matemática se aprimorou e com isso, vieram as derivadas, permitindo analisar e descrever o comportamento das funções em termos de taxa de variação, velocidade, problemas de máximos e mínimos, concavidades, ponto crítico, ponto de inflexão, assíntotas e outros estudos. Elas fornecem informações valiosas sobre o comportamento local e global das funções desempenhando um papel crucial nas áreas de conhecimento no geral. Assim, ela nos dá a oportunidade de colocarmos em prática aquilo que aprendemos na teoria e em sala de aula, descobrindo maneiras mais rápidas de desempenhar uma tarefa determinada. Com isto em mente, serão feitas algumas aplicações das derivadas.
Palavras-chave: Derivadas; Aplicações; Matemática; Cálculo.

ABSTRACT

The present work presents the applications of derivatives in the perspective of Mathematics in Higher Education, aiming to contribute to future formations. The work is constituted in a bibliographical way, considering the learning of Calculus, especially in the derivatives. The application of derivatives is of fundamental importance in several areas of human knowledge, over the years mathematics has improved and with that came derivatives, allowing to analyze and describe the behavior of functions in terms of rate of change, speed, problems of maximums and minimums, concavities, critical point, inflection point, asymptotes and other studies. They provide valuable information about the local and global behavior of functions playing a crucial role in knowledge areas in general. Thus, it gives us the opportunity to put into practice what we have learned in theory and in the classroom, discovering faster ways to perform a given task. With this in mind, some applications of derivatives will be made.
Keywords: Derivatives; Applications; Mathematcs; Calculus.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

LISTA DE SÍMBOLOS

$\subset$	Está contido
$\mathbb{R}$	Conjunto dos números reais
$\in$	Pertence
$\frac{d}{dx}$	Derivada
f'_-	Derivada a esquerda
f'_+	Derivada a direita
∞	Infinito
Δ	Delta
$\overrightarrow{a}$	Vetor
$<$	Menor que
$>$	Maior que
$\leq$	Menor ou igual
$\geq$	Maior ou igual
$\cap$	Intersecção
$\forall$	Para todo
$\Leftrightarrow$	Equivalente
$\neq$	Diferença
$\lim\limits_{x \to 0}$	Limite quando x tende a zero

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

As derivadas são importantes, pois fornecem informações detalhadas sobre como as funções mudam em diferentes pontos. Suas aplicações garantem uma compreensão mais profunda das características das funções. Sabendo como as derivadas se comportam, é possível analisar e interpretar problemas em várias campos do conhecimento humano, permitindo uma maior compreensão e descrevendo o comportamento dos fenômenos estudados, auxiliando na resolução de problemas e na tomada de decisões, ajudando a encontrar pontos críticos, como máximos e mínimos, permitindo que você maximize lucros, minimize custos, otimize recursos e tome decisões eficientes. A aplicação das derivadas é essencial. Na modelagem matemática é possível construir equações diferenciais que representam o comportamento de sistemas físicos, econômicos, entre outros, permitindo a previsão de resultados e o estudo de diferentes cenários.

> “o Projeto Pedagógico da Graduação deve estar sintonizado com nova visão de mundo, expressa nesse novo paradigma de sociedade e de educação, garantindo a formação global e crítica para os envolvidos no processo, como forma de capacitá-los para o exercício da cidadania, bem como sujeitos de transformação da realidade, com respostas para os grandes problemas contemporâneos. Assim, o Projeto Pedagógico, como instrumento de ação política, deve propiciar condições para que o cidadão, ao desenvolver suas atividades acadêmicas e profissionais, paute-se na competência e na habilidade, na democracia, na cooperação, tendo a perspectiva da educação/formação em contínuo processo como estratégia essencial para o desempenho de suas atividades.” (ForGRAD, 1999:11).

Em síntese, aprender a aplicar as derivadas é importante para obter uma compreensão aprofundada das funções, analisar problemas, otimizar processos, desenvolver habilidades analíticas, modelar fenômenos, preparar-se para disciplinas avançadas e aproveitar oportunidades acadêmicas e profissionais em diversas áreas.

Esse tema foi escolhido, pois normalmente essas aplicações só são trabalhadas no final da disciplina e por esse motivo muitas vezes não são vistas por não dá tempo,como ocorreu com o autor deste trabalho quando cursei a disciplina de cálculo I. Assim, os alunos podem enfrentar várias dificuldades ao aprender o cálculo e podemos destacar algumas delas: Abstração matemática, Transição do pensamento algébrico para o pensamento analítico, falta de domínio prévio de alguns conceitos e habilidades matemáticas, complexidade dos conceitos, falta de prática e aplicação.

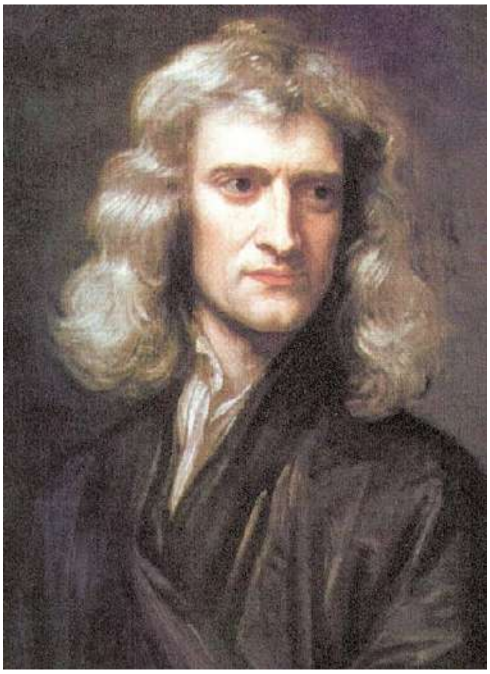
Este trabalho traz como proposta uma abordagem mais contextualizada das derivadas com aplicações práticas. No ensino superior a aplicação de derivadas muitas vezes não é o foco principal, a matéria é vista de forma mais significativa com aplicações das regras, dificultando assim a aprendizagem do assunto. A aquisição de conhecimento sólido sobre o assunto é importante pelo fato de ser aplicado em diversos cursos e uma forma de desenvolver habilidades, quando os discentes conseguem relacionar os conteúdos estudados com situações complexas mais reais pelo fato de sua origem vir a partir de situações reais, sendo as derivadas considerada por muitos um dos conceitos fundamentais do cálculo e está presente em situações de movimento, comprimento, área, volume, taxa de variação dentre outros.

2 CONTEXTUALIZAÇÃO HISTÓRICA

Assim como qualquer desenvolvimento da matemática, o Cálculo é consequência de trabalhos realizados por muitos nomes dos matemáticos ao longo de vários anos. Dentre eles os mais célebres são Isaac Newton e Gottfried Wilhelm Leibniz no século XVII. Que de acordo com Eves (2002), o século XVII foi extremamente frutífero para o desenvolvimento da matemática, em parte significativa, às novas e vastas áreas de âmbito que nela se abriram. Perto do final do século XVII o cálculo se tornou mais conhecido com os trabalhos de Sir Isaac Newton (1642-1727) e Gottfried Wilhelm Von Leibniz (1646-1716), mas o grego Arquimedes de Siracusa, já usava a ideia de processo de limites para derivar resultados sobre quantidades finitas sem a notação usada no século XVII.

Isaac Newton (1642-1727) nasceu na inglaterra em uma aldeia chamada Lincolnshire ele foi um matemático, físico, astrônomo e teólogo. Dos doze aos dezessete anos Newton foi educado na escola The King's School, em Grantham, que ensinava latim e grego. Em 1661 foi admitido no Trinity College, Cambridge o qual faz parte da Universidade de Cambridge, na cidade de Cambridge, Reino Unido. Passou quatro anos em Cambridge e recebeu seu grau de Bacharel em Artes, em 1665. Tornou-se assistente do Professor Isaac Barrow, desenvolvendo suas aptidões matemáticas. Entre 1665 e 1667, durante o tempo em que a universidade ficou fechada, em consequência de uma epidemia de peste bubônica que assolou a Inglaterra, Isaac Newton fez suas descobertas mais importantes para a ciência: a lei fundamental da gravitação, as leis básicas da Mecânica aplicando as aos corpos celestes, os métodos de cálculo diferencial e integral, e estabeleceu os alicerces de suas grandes descobertas ópticas. Com 26 anos, tornou-se professor de Matemática, sucedendo seu próprio mestre e protetor Isaac Barrow. Em 1705, a rainha Ana outorgou a Newton o título de “Sir”. Isaac Newton Passou o resto de sua vida científica expandindo suas descobertas. Sir Isaac Newton, apesar de memorável, era reservado. Falecendo aos 84 anos.

Figura 1 – Isaac Newton



Fonte: https://iconografiadahistoria.com.br/2021/01/02/conheca-a-trajetoria-de-isaac-newton-um-dos-maiores-cientistas-da-historia-da-humanidade

Já Gottfried Leibniz (1646-1716) nasceu em Leipzig da Alemanha foi um filósofo e matemático alemão, conhecido pelos cálculos de integrais e cálculo binário. Entrou na escola Nicolau com apenas sete anos. Estudou latim e grego de forma autodidata. Aos 14 anos, entrou na Universidade de Leipzig e se graduou em filosofia. Recebendo em 1663 o grau de mestre em filosofia. Em 1666, publicou sua tese "Dissertação sobre a arte combinatória". Em Londres, participou da Royal Society e foi eleito membro, depois de exibir a sua invenção, a máquina de calcular. Desenvolveu o teorema fundamental do cálculo, publicado em 1677 e devidamente aplicado na Europa, embora Newton já tivesse estudos não publicados sobre o assunto. Faleceu em Hanôver na Alemanha em 1716, vítima de uma crise de gota.

Figura 2 – Gottfried Leibniz

Fonte:https://clube.spm.pt/news/a-vida-e-obra-de-gottfried-leibniz-por-carlos-marinho

O desenvolvimento histórico do cálculo seguiu na ordem oposta a apresentada em textos e cursos básicos atuais, pois, primeiro surgiu o cálculo integral e muito depois o cálculo diferencial. Alguns matemáticos como Cavalieri, Isaac Barrow, Pierre de Fermat e Johann Kepler já utilizavam conceitos de cálculo para resolver problemas porém de forma imprecisa e não rigorosa.Segundo Eves(2011), a idéia de integração teve origem em processos somatórios ligado ao cálculo de área e de certos volumes ja a de diferenciação foi criada bem mais tarde, resultando em problemas sobre tangentes ligadas a curva nos pontos tomados e suas implicações com máximos e mínimos. Sua organização, composição e aperfeiçoamento do cálculo veio anos depois com Newton e Leibniz dando origem aos fundamentos mais valiosos do Cálculo: o Diferencial e o Integral.

3 OBJETIVOS

Objetivo geral:

- Apresentar aplicações das derivadas na reta real, em matemática e também em outras áreas do conhecimento.

Objetivos específicos:

- Utilizar as regras de derivação nas aplicações das derivadas.
- Fazer uma apresentação do objeto de estudo derivada com uma abordagem clara, sem menosprezar o rigor matemático, mas exposto de várias formas, numa sequência lógica e didática para a compreensão do assunto derivadas.

4 METODOLOGIA

O tipo de pesquisa utilizada no presente trabalho foi caráter bibliográfico, este trabalho teve como finalidade a realização de um estudo de aplicação das derivadas, trazendo de inicio os conceitos necessários e finalizando com a aplicação desses conceitos. A coleta dos dados supracitados, foi através de livros, artigos, entre outros com finalidade de pesquisa aplicada.

5 DERIVADAS

5.1 DERIVADA DE UMA FUNÇÃO EM UM PONTO

5.1.1 DEFINIÇÃO LOCAL DE DERIVADA DE UMA FUNÇÃO EM UM PONTO

Seja $f(x)$ uma função continua definida em um intervalo I e x_0 um ponto de I, com $I \subset \mathbb{R}$. Para todo $x \in I$ e $x_0 \neq x$, considere a função:

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

que é denominada de razão incremental da função $f(x)$ relativa ao ponto x_0.

A função $f(x)$ é derivável no ponto x_0, se existir e for finito o limite

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

O valor do limite, que indicaremos por $f'(x_0)$ é denominado derivada da função $f(x)$ no ponto x_0, isto é,

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0},$$

caso o limite exista.

Importante:

Se o limite definido acima não existir ou existir e for $+\infty$ ou $-\infty$, diremos que a função $f(x)$ não é derivável no ponto x_0, isto é, não existe $f'(x_0)$.

Derivadas Laterais

Definição

Se o limite da razão incremental existir apenas para $x \to x_0$ pela esquerda ou pela direita, diremos que a derivada é LATERAL.

Derivada à Esquerda de x_0

$$f'_-(x_0) \lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Derivada à Direita de x_0

$$f'_+(x_0) \lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Importante:

Se $f'_-(x_0) = f'_+(x_0)$, diremos que a função $f(x)$ é derivável no ponto x_0, e mais

$$f'(x_0) = f'_-(x_0) = f'_+(x_0).$$

Observação: Se existirem $f'_-(x_0)$ e $f'_+(x_0)$, mas

$$f'_-(x_0) \neq f'_+(x_0)$$

Então, não existe $f'(x_0)$.

Notação de Derivada

Podemos representar a derivada da função $f(x)$ no ponto x_0 por:

$$y'(x_0) \text{ ou } f'(x_0)$$

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=x_0}$$

ou

$$\left(\frac{df(x)}{dx}\right)_{x=x_0}$$

Importantes:

1. Se a função $f(x)$ é derivável no ponto x_0, então existe e é finito o limite

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0)$$

2. Sendo $x - x_0 = \Delta x \Rightarrow x = \Delta x + x_0$, temos que a derivada da função $f(x)$ no ponto x_0

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

pode ser escrita como

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

.

Continuidade

Teorema

Se uma função $f(x)$ é derivável no ponto x_0 do seu domínio, então $f(x)$ é contínua no ponto x_0.

Demonstração

Sendo $f(x)$ uma função derivável no ponto x_0, devemos mostrar que $f(x)$ é contínua em x_0, isto é, temos que provar que:

1. $f(x_0)$ Existe (Está definida);

2. $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ existe;

3. $f(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0} f(x)$.

Solução:

Temos:

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

$$f(x) - f(x_0) = \tfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}.(x - x_0)$$

Logo, passando ao limite, na equação acima, temos

$$\lim_{x \to x_0} [f(x) - f(x_0)] = \lim_{x \to x_0} \frac{[f(x) - f(x_0)]}{x - x_0}.(x - x_0)$$

Donde segue, das propriedades dos limites

$$\lim_{x \to x_0} [f(x) - f(x_0)] = \lim_{x \to x_0} \frac{[f(x) - f(x_0)]}{x - x_0}. \lim_{x \to x_0} (x - x_0)$$

ou seja,

$$\lim_{x \to x_0} [f(x) - f(x_0)] = f'(x_0).0 = 0$$

Portanto,

$$\lim_{x \to x_0} [f(x) - f(x_0)] = 0$$

Por outro, lado temos que

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} [f(x) - f(x_0) + f(x_0)]$$

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} [f(x) - f(x_0)] + \lim_{x \to x_0} f(x_0)$$

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = 0 + f(x_0)$$

Portanto,

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

.

Portanto, são válidas as condições 1, 2 e 3, com isso, concluímos que $f(x)$ é contínua no ponto $x = x_0$, se f(x) é derivável em x_0.

Importante:

A Recíproca desse Teorema não é verdadeira.

Proposição: $f|x| = |x|$ é continua, $\forall x \in \mathbb{R}$. Em particular, para $x = 0$, mas é derivável no ponto zero, pois

$$\lim_{x \to 0_+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0_+} \frac{|x| - |0|}{x - 0} = \lim_{x \to 0_+} \frac{|x|}{x} = \lim_{x \to 0_+} \frac{x}{x} = 1$$

,

e

$$\lim_{x \to 0_-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0_-} \frac{|x| - |0|}{x - 0} = \lim_{x \to 0_-} \frac{|x|}{x} = \lim_{x \to 0_-} \frac{(-x)}{x} = -1$$

fazendo com que os limites laterais no ponto zero sejam diferentes.

5.2 SIGNIFICADO DA DERIVADA

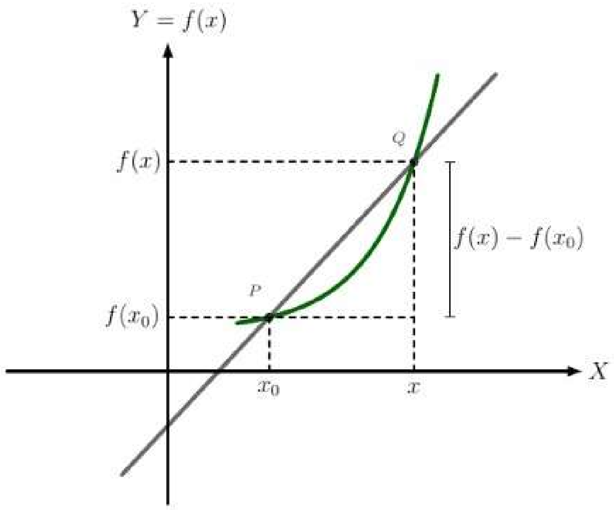
5.2.1 SIGNIFICADO GEOMÉTRICO DA DERIVADA

Seja $f(x)$ uma função definida e contínua no intervalo I, seja G o seu gráfico cartesiano. Considerando-se os pontos $x \in I$, e $x_0 \in I$, com $x \neq x_0$, a reta s determinada pelos pontos $P(x_0, f(x_0))$ e $Q(x, f(x))$ é uma secante a curva G. O coeficiente angular da reta s é dado por

$$tg\alpha = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

que é exatamente a razão incremental de $f(x)$ relativa ao ponto x_0.

Figura 3 – Representação Geométrica da Derivada



Fonte: Carlos Daniel Henrique de Sousa (Latex)

Se a função $f(x)$ é derivável no ponto x_0 , então para x tendendo a x_0, o ponto Q tende a aproximar-se de P e, consequentemente, a reta s tende a uma posição LIMITE t, que é por definição, a tangente geométrica à curva G no ponto P. Donde se conclui, que a existência de $f'(x_0)$ significa que a curva G tem tangente única em P.

O coeficiente angular da reta t é dado por

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

e a equação da reta t, tangente ao gráfico de G no ponto P é definida por

$$y - f(x_0) = f'(x_0).(x - x_0).$$

Conclusão

A derivada de uma função $f(x)$, quando existe, assume em cada ponto x_0 do seu domínio um único valor, que é o coeficiente angular da reta tangente ao gráfico cartesiano de $f(x)$ no ponto de abscissa x_0.

5.2.2 SIGNIFICADO FÍSICO OU CINEMÁTICO DA DERIVADA

Consideremos uma partícula em movimento no espaço, suponhamos que, x_0 esteja no tempo t, $\overrightarrow{d}(t)$ é o vetor posição da partícula com relação a um sistema de coordenadas.

Ao variar o tempo t, a extremidade livre do vetor $\overrightarrow{a}(t)$ descreve a trajetória C da partícula. Suponhamos que a partícula esteja em P no tempo t e em Q no tempo $t + \Delta t$. Então $\Delta \overrightarrow{a} = \overrightarrow{a}(t + \Delta t) - \overrightarrow{a}(t)$ representa o deslocamento da partícula de P para Q, ocorrida no intervalo de tempo Δt.

A taxa média de variação de $\overrightarrow{a}(t)$ no intervalo Δt é dada por

$$\overrightarrow{V}_m = \frac{\overrightarrow{a}(t + \Delta t) - \overrightarrow{a}(t)}{\Delta t}$$

Que é denominada velocidade média da partícula no intervalo de tempo Δt. A velocidade instantânea da partícula no tempo t, que denotamos por $\overrightarrow{V}(t)$ é definida pelo limite

$$\overrightarrow{V} = \lim_{\Delta t \to 0} V_m = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\overrightarrow{a}(t + \Delta t) - \overrightarrow{a}(t)}{\Delta t}$$

caso o limite exista.

Portanto, quando $\overrightarrow{a}(t)$ é derivável, a velocidade instantânea da partícula é dada por

$$\overrightarrow{V}(t) = \overrightarrow{a'}(t)$$

Da mesma forma, temos que a aceleração média da partícula é dada por

$$a_m = \frac{\overrightarrow{V}(a + \Delta t) - \overrightarrow{V}(t)}{\Delta t}$$

Portanto, se $\overrightarrow{V}(t)$ é derivável, a aceleração instantânea da partícula é dada por

$$\overrightarrow{a}(t) = \overrightarrow{V}(t)$$

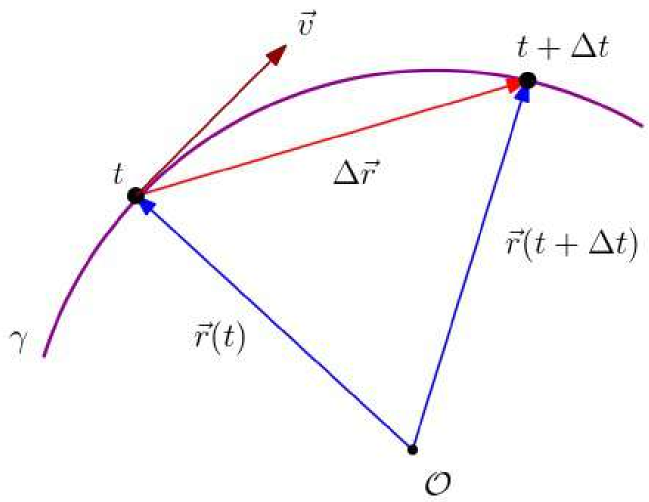
Importante

$$\overrightarrow{a}(t) = \overrightarrow{V}(t) = a''(t)$$

$$\overrightarrow{a}(t) = \frac{d\overrightarrow{V}(t)}{dt} = \frac{d^2V(t)}{dt^2}$$

.

Figura 4 – Representação Física da Derivada



Fonte:https://edisciplinas.usp.br/mod/book/view.php?id=3129821&chapterid=23983

5.3 DERIVADA GLOBAL DE UMA FUNÇÃO

Definição:

Considere a função real $y = f(x)$ definida num intervalo real aberto $]a, b[$ com a e b pertencentes aos reais e $a < b$, define-se a derivada da função $y = f(x)$, como sendo a função $f'(x)$ tal que seu valor em qualquer ponto do seu domínio é definido por

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \to \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

Caso exista, esse limite apresentado acima.

Consideração Importante:

Dizemos que uma função real $y = f(x)$ definida num intervalo real aberto $]a, b[$ com a e b pertencentes aos reais e $a < b$ é derivável, quando a função $y = f(x)$ admite derivada em todos os pontos do seu domínio.

5.4 DERIVADA DE UMA FUNÇÃO

A derivada de uma função y=f(x) é a função f'(x) tal que seu valor em qualquer ponto do seu domínio é dado por

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

Se esse limite existir.

5.4.1 TAXA DE VARIAÇÃO DE UMA FUNÇÃO

Temos na definição de derivada que, a taxa de variação da função $y = f(x)$, quando $\Delta x \to 0$ é dada por:

$$f'(x) = \frac{dy}{dx} = \frac{df(x)}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

Isso nos permite verificar, o quanto à função $y = f(x)$, varia quando $\Delta x \to 0$.

5.4.2 FUNÇÃO CRESCENTE E DECRESCENTE

Dizemos que uma função f, definida num intervalo I, é decrescente nesse intervalo se para quaisquer $x_1, x_2 \in I$ com $x_1 < x_2$, temos $f(x_1) < f(x_2)$. Uma função é monótona no intervalo de crescimento ou decrescimento.

Proposição: Seja f uma função contínua no intervalo $[a, b]$ e derivável no intervalo (a, b).

1. Se $f'(x) > 0$ para todo $x \in (a, b)$, então fé crescente em $[a, b]$;
2. Se $f'(x) < 0$ para todo $x \in (a, b)$, então f é decrescente em $[a, b]$.

Demonstração:

Sejam $x_1 \;\; e \;\; x_2 \in I$, com $x_1 < x_2$.

Pelo Teorema do Valor Médio, se f é continua em $[x_1, x_2]$ e derivável em $]x_1, x_2[$, existe $\bar{x} \in \;\;]x_1, x_2[$ tal que

$f(x_2) - f(x_1) = f'(\bar{x})(x_2 - x_1)$.

Então, $f'(\bar{x}) > 0$, pois $\bar{x}$ está no intervalo de I, e de $x_2 - x_1 > 0$ segue

$f(x_2) - f(x_1) > 0 \;\; ou \;\; f(x_1) < f(x_2)$.

Portanto,

Qualquer $x_1, x_2 \in I$ com $x_1 < x_2$ temos $f(x_1) < f(x_2)$.

De forma análoga, se demonstra o item II.

Exemplo 1. *Determinar os intervalos nos quais as funções seguintes são crescentes ou decrescentes.*

1. $f(x) = x^3 + 1$

   Solução:

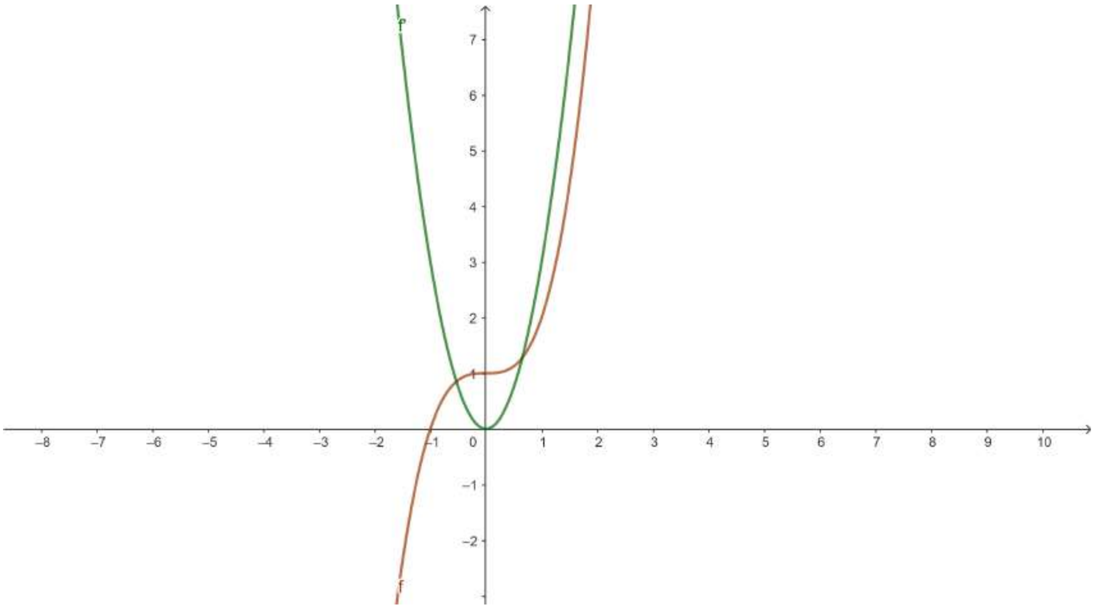
   Utilizando a proposição anterior e derivando a função, analisando para quais valores x tais que $f'(x) > 0$ e $f'(x) < 0$. Calcularemos se a função f é crescente ou decrescente.

   Temos:

$$f'(x) = 3x^2.$$

   Como $3x^2$ é maior que zero para todo $x \neq 0$, concluímos que a função é sempre crescente.

Figura 5 – Função Crescente

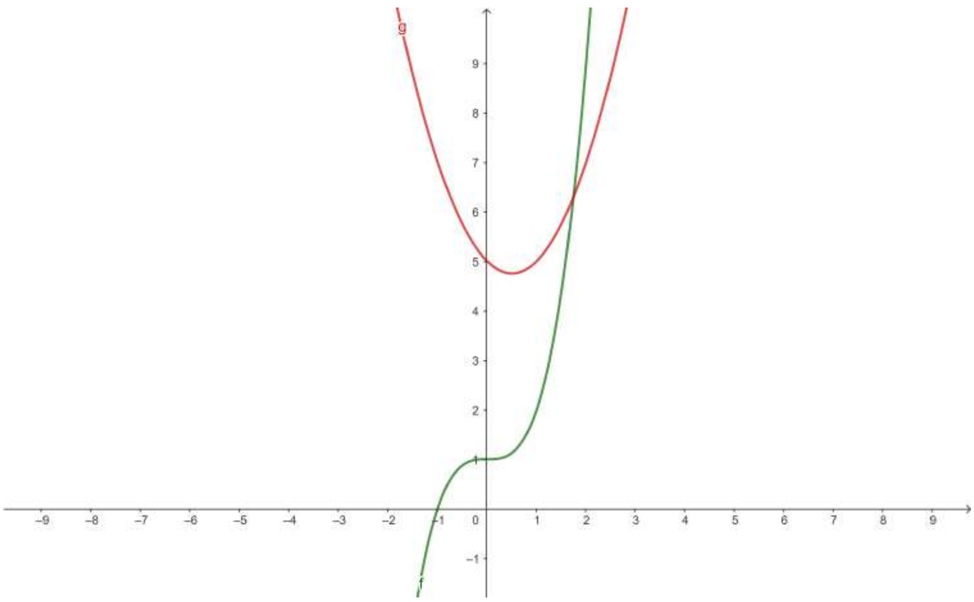


Fonte:Autoria Próprio (Geogebra)

2. $f(x) = x^2 - x + 5$.

   Temos $f'(x) = 2x - 1$. Então, para $2x - 1 > 0$ ou $x > \frac{1}{2}$ a função é crescente. Para $2x - 1 < 0$ ou $x < \frac{1}{2}$ a função é decrescente.

Figura 6 – Função Decrescente



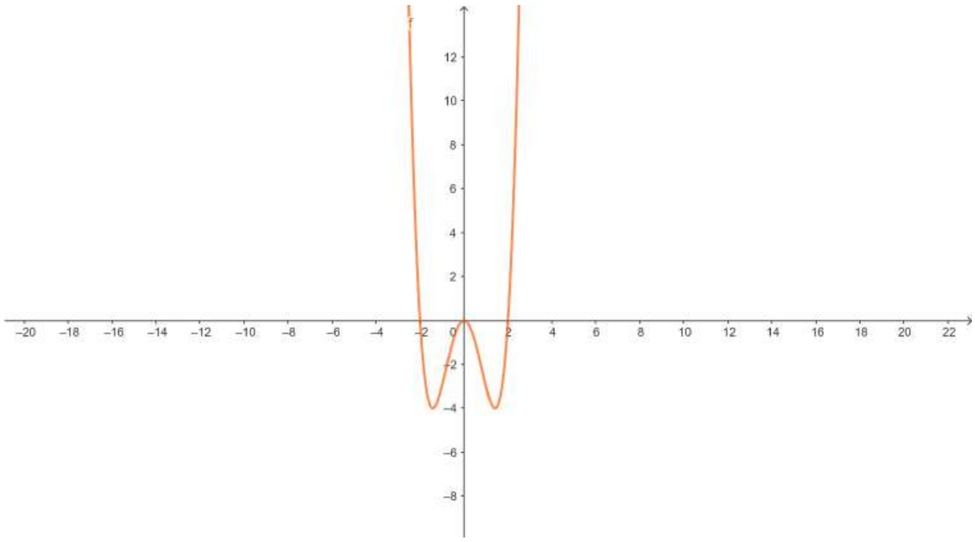
Fonte:Autoria Próprio (Geogebra)

5.4.3 MÁXIMO E MÍNIMO RELATIVO DE UMA FUNÇÃO

- Uma função f tem um máximo relativo em c, se existir um intervalo aberto I, contendo c, tal que $f(c) \geq f(x)$ para todo $x \in I \cap D(f)$;
- Uma função f tem um mínimo relativo em c, se existir um intervalo aberto I, contendo c, tal que $f(c) \leq f(x)$ para todo $x \in I \cap D(f)$.

Exemplo 2. *A função $f(x) = x^4 - 4x^2$ tem um ponto de máximo relativo em $x = 0$ e dois pontos de mínimos relativos em $x = \pm\sqrt{2}$. O valor máximo relativo é $y = 0$ e o valor mínimo relativo é $y = -4$.*

Figura 7 – Ponto de Extremo Relativo



Fonte:Autoria Própria (Geogebra)

A proposição seguinte permite encontrar os possíveis **ponto de extremos relativos** (máximos relativos ou mínimos relativos) de uma função.

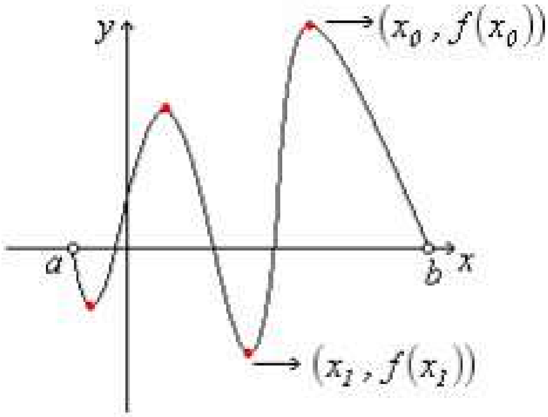
Proposição: Seja $y = f(x)$ uma função definida num intervalo aberto $I = (a, b)$. Se f tem um extremo relativo em $k \in I e f'(x)$ existe para todo $x \in I$, então $f'(k) = 0$.

5.4.4 MÁXIMO E MÍNIMO ABSOLUTO DE UMA FUNÇÃO

- Uma função f pode ter vários máximos relativos em seu domínio. O maior desses máximos relativos é denominado de máximo absoluto, isto é, dizemos que $f(c)$ é o máximo absoluto da função f, se $c \in D(f)$ e $f(c) \geq f(x)$ para todos os valores de x no domínio de f;
- Uma função f pode ter vários mínimos relativos em seu domínio. O menor desses mínimos relativos é denominado de mínimo absoluto, isto é, dizemos que $f(c)$ é o

mínimo absoluto da função f, se $c \in D(f)$ e $f(c) \leq f(x)$ para todos os valores de x no domínio de f.

Figura 8 – Máximo e Mínimo Absoluto de uma Função



Fonte:Álvaro (05/12/2022)(2006)

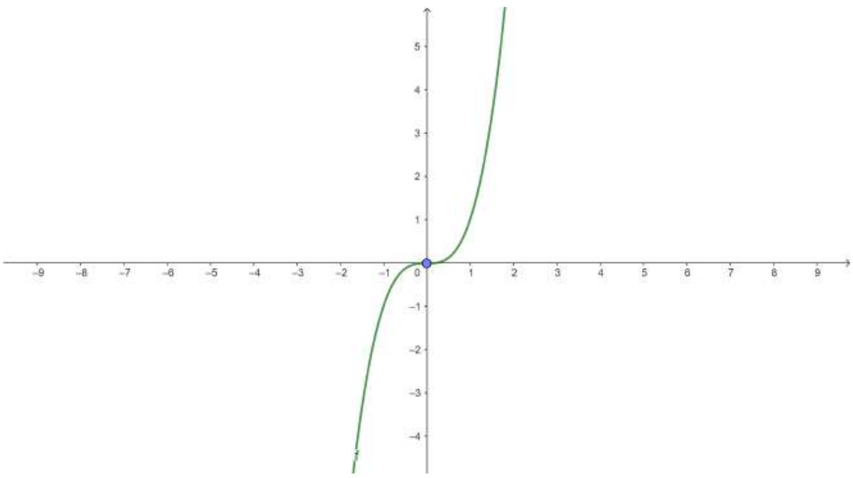
5.4.5 PONTO CRÍTICO

Um ponto $c \in D(f)$ tal que $f'(c) = 0$ ou $f'(c)$ não existe é chamado de ponto crítico de f.

Exemplo 3. *Algumas funções e seus pontos críticos.*

1. $y = x^3$

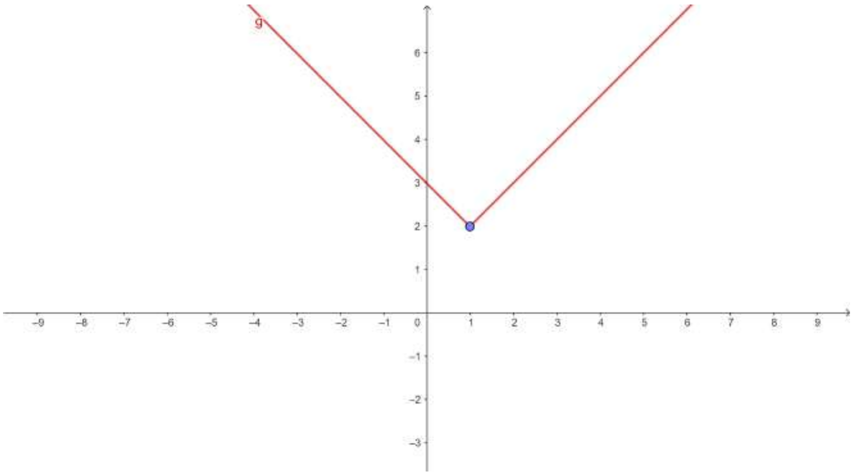
Figura 9 – Exemplo de Ponto Externo a Função



Fonte:Autoria Própria (Geogebra)

2. $y = |x - 1| + 2$

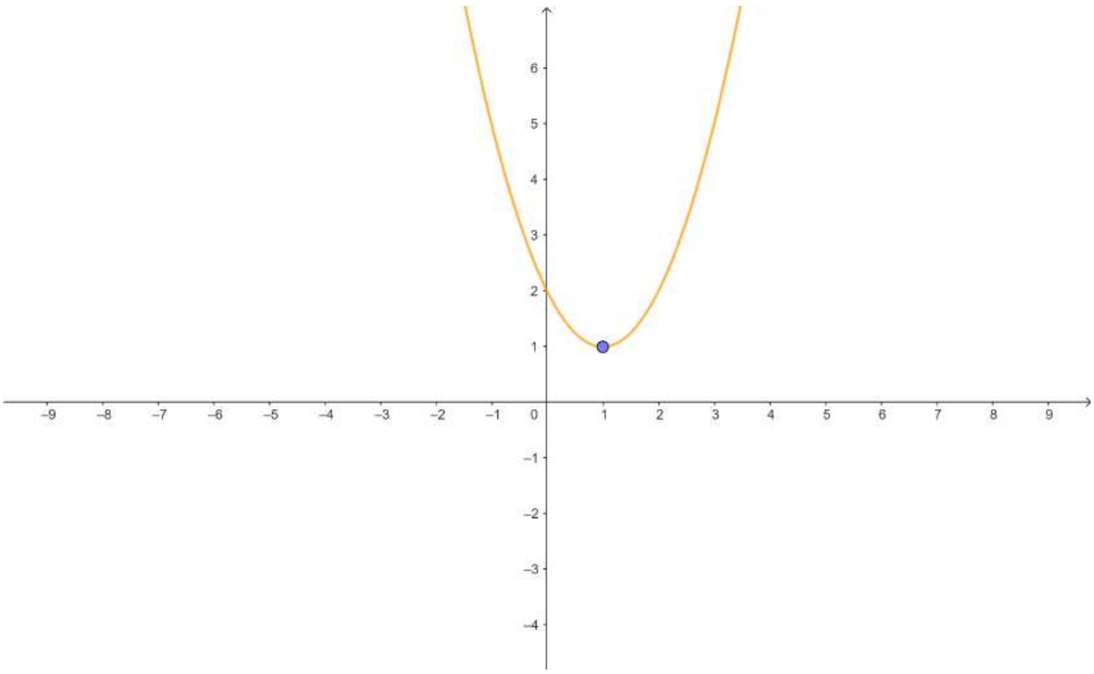
Figura 10 – Mínimo Relativo



Fonte:Autoria Própria (Geogebra)

3. $y = (x - 1)^2 + 1$

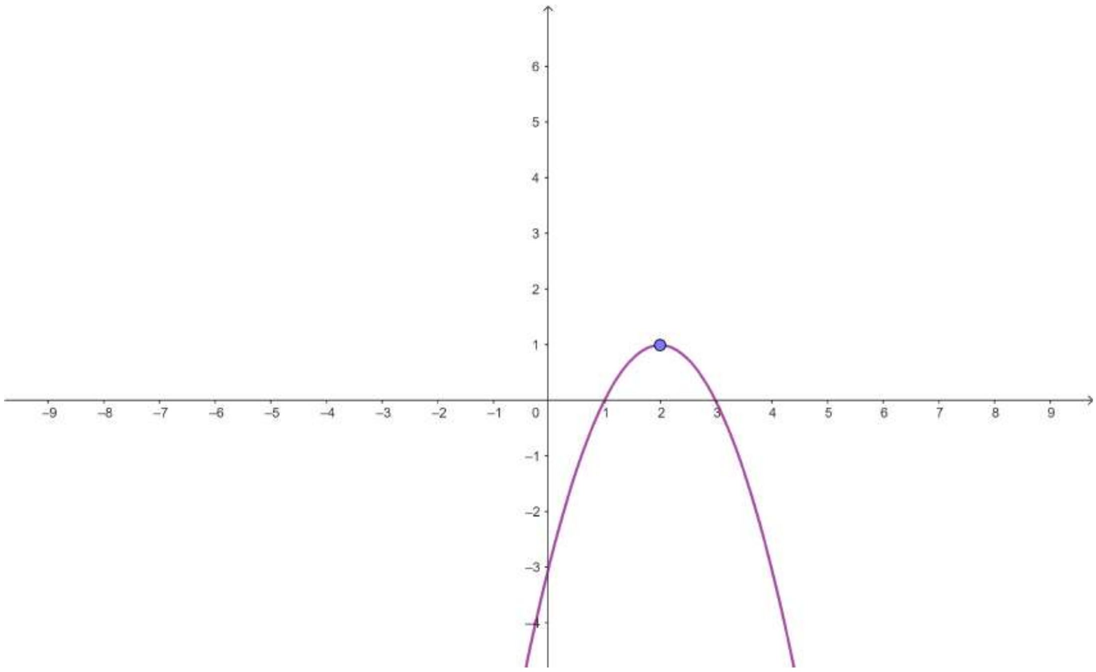
Figura 11 – Mais Exemplos de Mínimo Relativo



Fonte:Autoria Própria (Geogebra)

4. $y = -x^2 + 4x - 3$

Figura 12 – Máximo Relativo



Fonte:Autoria Própria (Geogebra)

Observações:

- *No exemplo* $1.f'(0) = 0$, *mas* $x = 0$ *não é um ponto de extremo da função;*
- *No exemplo* $2.$ *não existe* $f'(1)$, *mas* $x = 1$ *é um ponto de extremo (mínimo relativo e absoluto) da função;*
- *No exemplo* $3.f'(1) = 0$ *e* $x = 1$ *é um ponto de extremo (mínimo relativo) da função.*
- *No exemplo* $y = -x^2 + 4x - 3$ *e* $x = 2$ *é um ponto de extremo (máximo relativo) da função.*

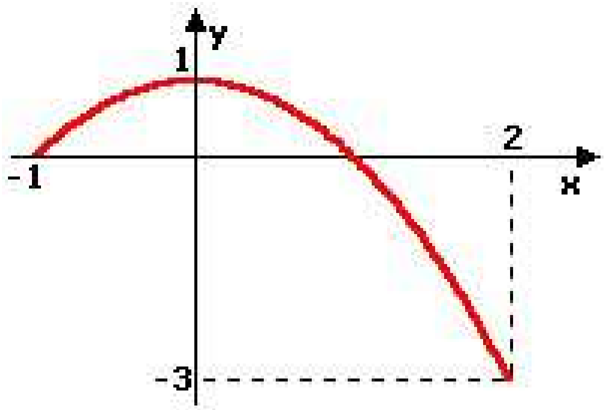
5.4.6 TESTE DA DERIVADA PRIMEIRA

Seja f uma função contínua definida em um intervalo fechado $[a, b]$ e derivável em todos os pontos do intervalo aberto $]a, b[$, exceto possivelmente em um ponto c tal que $a < c < b$.

1. Se $f'(x) > 0$ para todo $x < c$ e $f'(x) < 0$ para todo $x > c$, então f tem um máximo relativo em c;
2. Se $f'(x) < 0$ para todo $x < c$ e $f'(x) > 0$ para todo $x > c$, então f tem um mínimo relativo em c.

Exemplo 4. *Seja função $f(x) = 1 - x^2$ definida sobre $S = [-1, 2]$. $f'(x) = -2x$, assim o único ponto crítico ocorre em $x = 0.f'(x) > 0$ se $x < 0$ e $f'(x) < 0$ se $x > 0$, assim $x = 0$ é um ponto de máximo local para f.*

Figura 13 – Teste da Derivada Primeira



Fonte: Sodré (05/12/2022)

Seja a função $f(x) = 1 - x^2$ definida sobre $S = [-1, 2]$. $g'(x) = 2x$, assim o único ponto crítico ocorre em $x = 0$. $g'(x) > 0$ se $x < 0$ e $g'(x) < 0$ se $x > 0$, assim $x = 0$ é um ponto de mínimo local para f.

Observações

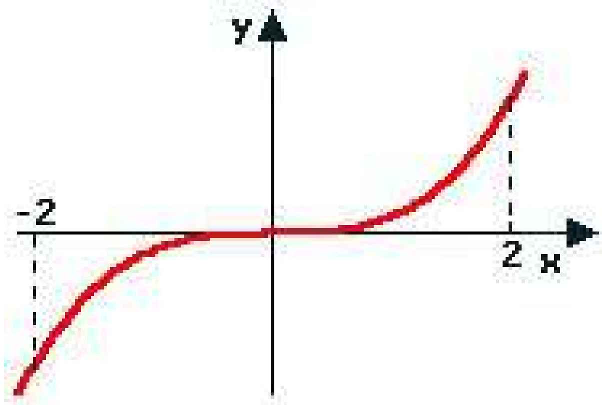
- Nem todo ponto crítico de uma função é ponto de extremo dessa função, como é o caso de $f(x) = x^3$, definida sobre $S = [-2, 2].f'(x) = 3x^2$. O ponto crítico é $x = 0$. À esquerda e também à direita de $x = 0$, a derivada é positiva, logo, $x = 0$ não pode ser ponto de máximo local nem ponto de mínimo local para f.

- O critério da 1^a derivada, pode ser escrito na forma: Se f é uma função derivável sobre um intervalo $[a, b]$ e existe um ponto $x = c$ no intervalo aberto (a, b) para o qual $f'(c)$ é diferente de 0, então este ponto $x = c$ não pode ser ponto de máximo nem de mínimo para f.

5.4.7 TESTE DA DERIVADA SEGUNDA

Seja f uma função contínua definida em um intervalo fechado $[a, b]$, derivável em todos os pontos do intervalo aberto $]a, b[$ e seja c um ponto tal que $a < c < b$, ponto crítico de f nesse intervalo, isto é, $f'(c) = 0$. Se f tem derivada segunda nesse intervalo, ou seja, $f''(x)$ existe, $\forall x \in]a, b[$, então:

Figura 14 – Teste da derivada Primeira Esquerda e Direita



Fonte: Sodré (05/12/2022)

1. Se $f''(c) > 0$, então f tem um mínimo relativo em c;
2. Se $f''(c) < 0$, então f tem um máximo relativo em c.

À derivada de f' no ponto x_0 chama-se segunda derivada ou derivada de segunda ordem de f no ponto x_0 e representa-se por $f''(x_0)$

$$f''(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f'(x_0 + h) - f'(x_0)}{h} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x) - f'(x_0)}{x - x_0}$$

desde que o limite exista e seja finito.

Seja D o conjunto dos pontos do domínio de f' em que f' é derivável. A função segunda derivada de f, ou seja, f'', pode ser caraterizada da seguinte forma:

$$f'' : D \to \mathbb{R}$$

$$x \to f''(x)$$

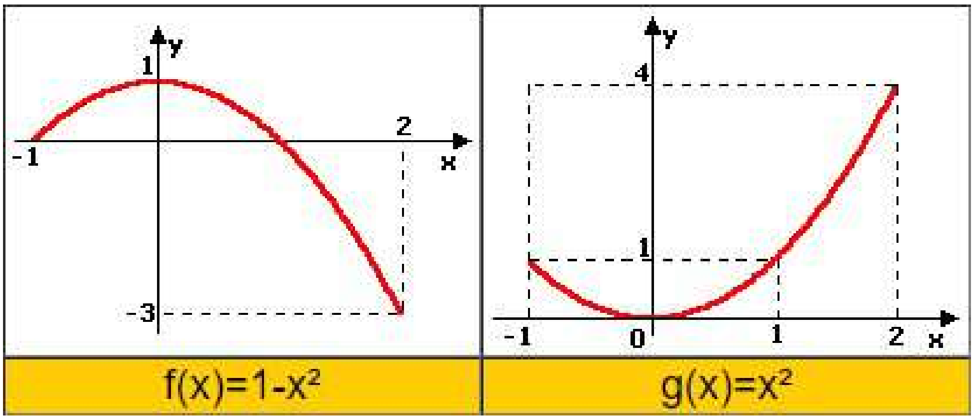
E representa-se por

$$f'',\ D^2 f(x),\ \frac{d^2 f}{dx^2} \text{ ou } \frac{d^2 y}{dx^2}$$

Exemplo 5. *As funções $f(x) = 1 - x^2$ e $g(x) = x^2$, definidas sobre $S = [-1, 2]$ possuem pontos críticos em $x = 0$. $f"(0) = -2 < 0$ e $g"(0) = 2 > 0$. Pelo critério da segunda derivada, $x = 0$ é ponto de máximo local para f e ponto de mínimo local para g.*

Às vezes, várias derivadas sucessivas da função se anulam no ponto crítico, assim o critério acima, necessita ser ampliado.

Figura 15 – Teste da Derivada Segunda



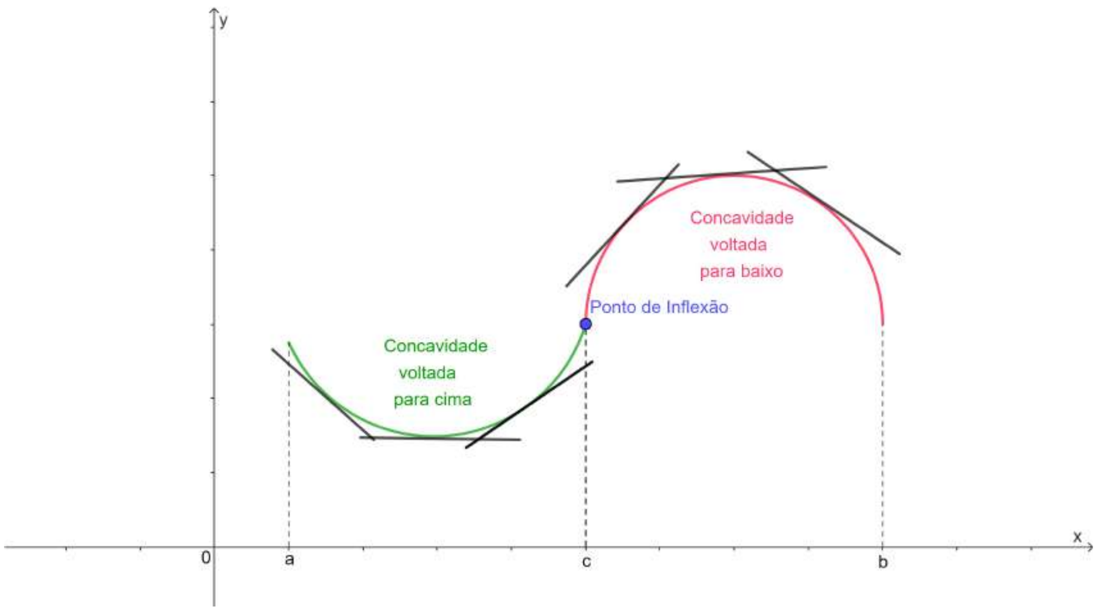
Fonte: Sodré (05/12/2022)

5.4.8 CONCAVIDADE

Seja f uma função contínua no intervalo fechado $[a, b]$ e derivável até segunda ordem em todos os pontos do intervalo aberto $]a, b[$.

1. Se $f''(x) > 0, \forall x \in]a, b[$, então f é côncava para cima em $]a, b[$;
2. Se $f''(x) < 0, \forall x \in]a, b[$, então f é côncava para baixo em $]a, b[$.

Figura 16 – Concavidade



Fonte:Autoria Própria (Geogebra)

Seja f uma função derivável em $]a, b[$, tal que $c \in]a, b[$, como ilustra a figura a cima.

Podemos observar que no intervalo $]a, c[$ a curva está acima de qualquer das retas tangentes, ou seja, diz-se que a concavidade se encontra voltada para cima e a segunda derivada é positiva. Podemos também observar que no intervalo $]c,b[$ a curva está abaixo de qualquer das retas tangentes, ou seja, diz-se que a concavidade se encontra voltada para baixo e a segunda derivada é negativa.

5.4.9 PONTO DE INFLEXÃO

Um ponto $P(c, f(c))$ do gráfico de uma função contínua f é denominado ponto de inflexão, quando existe um intervalo $]a,b[$ contendo c tal que:

1. f é côncava para cima em $]a,c[$ e côncava para baixo em $]c,b[$;
2. f é côncava para baixo em $]a,c[$ e côncava para cima em $]c,b[$.

Após a definição de concavidade voltada para cima e concavidade voltada para baixo,vamos definir ponto de inflexão. Dada uma função f, duas vezes diferenciável no seu domínio, diz-se que o ponto $P = (a, f(a))$ é um ponto de inflexão do gráfico de f se o sentido da concavidade do gráfico muda em P.

Se $P = (a, f(a))$ é um ponto de inflexão do gráfico de f e existe segunda derivada em a, então $f''(a) = 0$.

No entanto, se $f''(a) = 0$, não se pode concluir que o ponto $(a, f(a))$ seja um ponto de inflexão do gráfico de f.

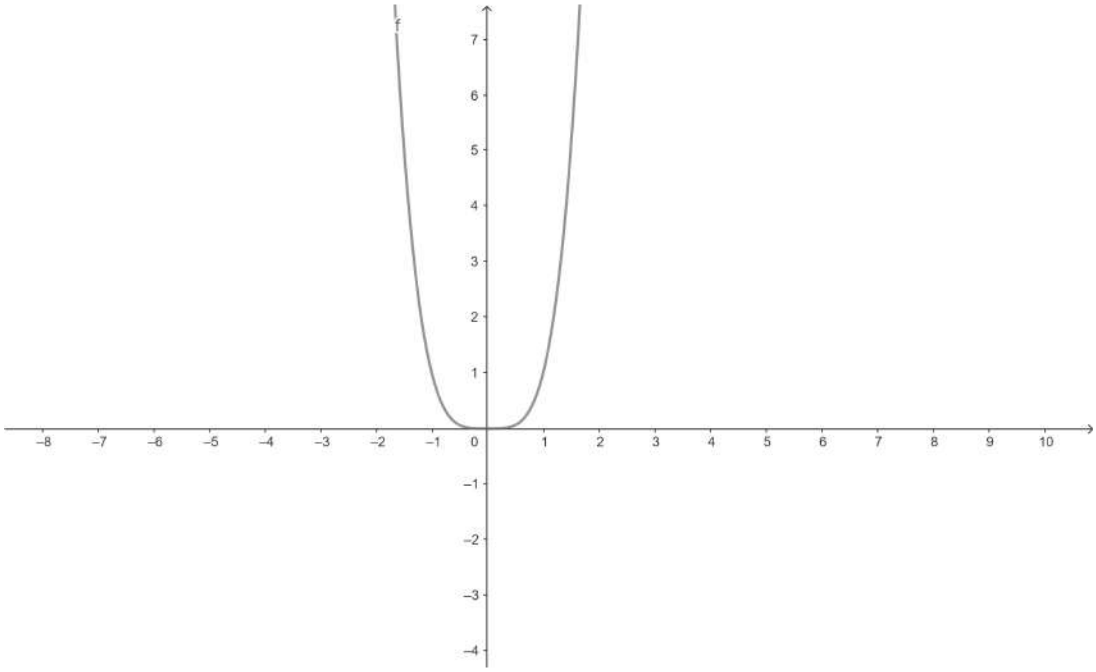
Exemplo 6. *função* $f(x) = x^4$

Ora $f'(x) = 4x^3$ e $f''(x) = 12x^2$

$f''(x) = 0 \Leftrightarrow 12x^2 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0$

Porém, por observação abaixo, $(0, f(0))$ não é um ponto de inflexão do gráfico de f.

Figura 17 – Ponto de Inflexão



Fonte:Autoria Própria (Geogebra)

- Se $P = (c, f(c))$ é um ponto de inflexão, então $f''(c) = 0$, com $c \in]a, b[$.

Figura 18 – Pontos de Inflexão

Fonte:Autoria Própria (Geogebra)

5.4.10 TEOREMA DE ROLLE

Seja f uma função contínua definida em um intervalo fechado $[a, b]$ e derivável em todos os pontos do intervalo aberto $]a, b[$. Se $f(a) = f(b)$, então existe pelo menos um ponto c com $a < c < b$ tal que $f'(c) = 0$.

Demonstração:

- A função f constante no intervalo $[a, b]$; Como $f'(x) = 0$ em (a, b), ou seja, para todo $c \in (a, b)$ temos $f'(c) = 0$, com $f(a) = 0$ e $f(b) = 0$;

Nesse caso existe $x \in [a, b]$ tal que $f(x) \neq f(a) = f(b)$. Como f é contínua em $[a, b]$, f tem um mínimo e um máximo em $[a, b]$. Se existir $x \in (a, b)$ tal que $f(x) > f(a) = f(b)$, então o valor de $f(a) = f(b)$, não é o máximo de f em $[a, b]$, portanto, f assume valor máximo em algum ponto $c \in (a, b)$ e, sendo f derivável em (a, b), temos $f'(c) = 0$. Se existir $x \in (a, b)$ tal que $f(x) < f(a) = f(b)$, a prova é análoga.

Uma equação da reta que passa por A e B é

$$y - f(a) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) \Leftrightarrow y - f(a) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) + f(a)$$

Seja, agora, $F(x)$ a medida da distância vertical entre o ponto $(x, f(x))$ do gráfico da função f e o ponto correspondente sobre a reta secante por A e B; então,

$$F(x) = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) - f(a)$$

É possível mostrar que a função F satisfaz as três condições da hipótese do teorema de Rolle. A função F é contínua no intervalo fechado $[a, b]$, pois é a diferença de f com uma função polinomial linear, ambas as quais são contínuas no intervalo. Logo, a condições acima estão satisfeitas por F, pois f é derivável em (a, b).

Da conclusão do teorema de Rolle, tem-se a existência de um c no intervalo aberto (a, b), tal que $F'(c) = 0$.

Mas

$$F'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Dessa forma,

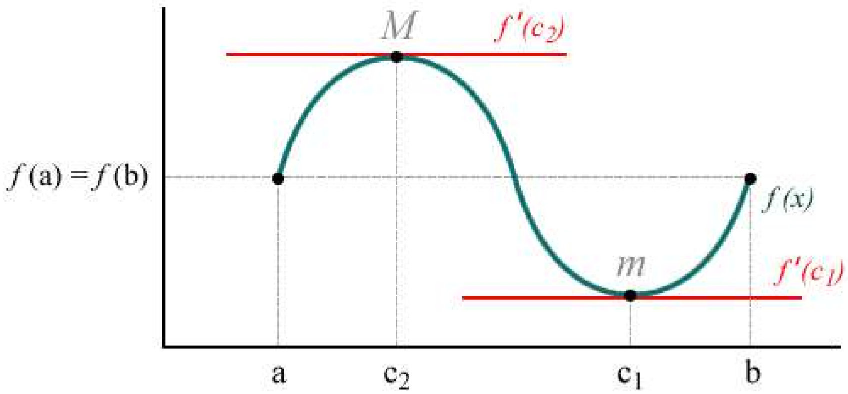
$$F'(c) = f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Logo, existe um número c em (a, b), tal que

$$0 = f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \Leftrightarrow f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Como se queria demonstrar.

Figura 19 – Teorema de Rolle



Fonte:https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Teorema_de_Rolle_%28caso_3%29.jpg

5.4.11 TEOREMA DO VALOR MÉDIO

Seja f uma função contínua definida em um intervalo fechado $[a, b]$ e derivável em todos os ponto do intervalo aberto $]a, b[$. Existe um ponto c com $a < c < b$ tal que

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Demonstração:

- Se $f(a) = f(b)$.

  Para,

  $$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = 0,$$

  existe $c \in (a, b)$ tal que

  $$f'(c) = 0 = \frac{f(b) - f(a)}{b - a};$$

- Caso $f(a) \neq f(b)$.

  Seja a função

  $$g(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a).$$

Temos:

1. g é continuo em $[a, b]$ pois é a diferença entre

$$[f(x) - f(a)] \text{ e } [\frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)],$$

que são contínuas em $[a, b]$;

2. g é derivável no intervalo (a, b) e sua derivada é

$$g'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a};$$

3. Nos extremos do intervalo fechado $[a, b]$, tem-se:

$$g(a) = f(a) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(a - a) = 0$$

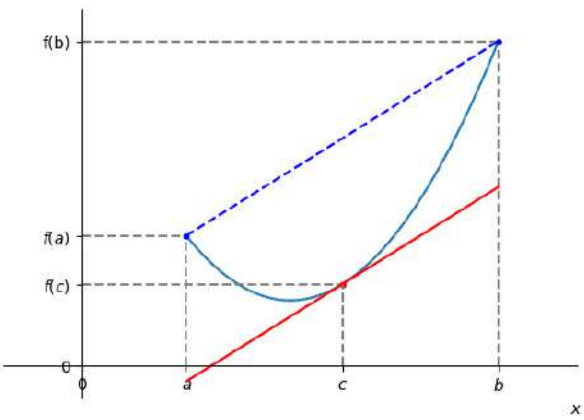
e

$$g(b) = f(b) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(b - a) = 0.$$

Então, $g(a) = g(b) = 0$. Assim, existe $c \in (a, b)$ tal que $g'(c) = 0$, portanto:

$$g'(c) = f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = 0 \text{ ou } f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Figura 20 – Teorema do Valor Médio



Fonte:https://notaspedrok.com.br/notas/CalculoI/cap_apderiv_sec_valormedio.html

Exemplo 7. *Dada $f(x) = x^3 - 5x^2 - 3x$ comprove que as hipóteses do teorema do valor médio estão satisfeitas para $a = 1$ e $b = 3$. Então, encontre todos os números c no intervalo aberto $(1, 3)$, tais que*

$$f'(c) = \frac{f(3) - f(1)}{3 - 1}$$

Solução:

Como f é uma função polinomial, ela será contínua e derivável para todos os valores de x. Logo, as hipóteses do teorema do valor médio estão satisfeitas para todo a e b.

$$f'(x) = 3x^2 - 10x - 3$$

$$f(1) = -7 \text{ e } f(3) = -27$$

Logo,

$$\frac{f(3) - f(1)}{3 - 1} = \frac{-27 - (-7)}{2} = -10$$

Equacionando $f'(c) = -10$, obtém

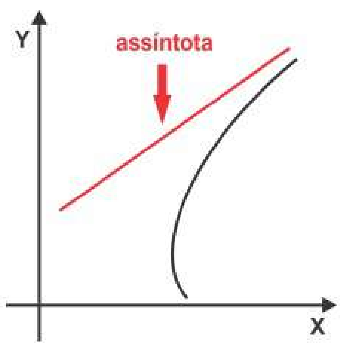
$$3c^2 - 10c - 3 = -10 \Leftrightarrow 3c^2 - 10c + 7 = 0 \Leftrightarrow (3c - 7)(c - 1) = 0 \Leftrightarrow c = \frac{7}{3} \quad c = 1$$

Como 1 não está no intervalo aberto $(1, 3)$, o único valor possível para c é $c = \frac{7}{3}$.

5.4.12 ASSÍNTOTAS

Quando a distância entre uma curva e uma reta tende a zero para pontos infinitamente distantes (pontos impróprios) a reta é uma assíntota da curva.

Figura 21 – Assíntotas



Fonte:https://www.alfaconnection.pro.br/matematica/limites-derivadas-e-integrais/limites/assintotas/

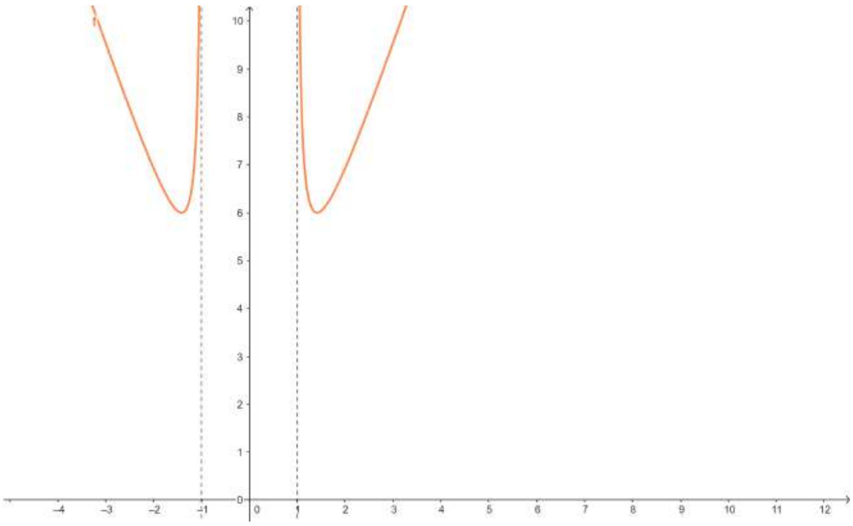
Exemplo 8. *Seja a função:* $f(x) = \dfrac{3x^2}{\sqrt{x^2-1}}$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{3x^2}{x^2-1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{6x}{2x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{6}{2} = \lim_{x\to+\infty} 3 = 3$$

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{3x^2}{x^2-1} = \lim_{x\to-\infty} \frac{6x}{2x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{6}{2} = \lim_{x\to-\infty} 3 = 3$$

A assíntota quando x tende ao para infinito é $y = 3$.

Figura 22 – Assíntotas Verticais



Fonte: Autoria Própria (Geogebra)

Exemplo 9. *Cálculo das assíntotas horizontais da função:* $f(x) = \dfrac{5x}{\sqrt{x^2+9}}$

Solução:

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{5x}{\sqrt{x^2+9}} = \frac{\infty}{\infty}$$

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{5x}{\sqrt{x^2(1+\frac{9}{x^2})}} =$$

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{5x}{\sqrt{x^2}.\sqrt{1+\frac{9}{x^2}}} =$$

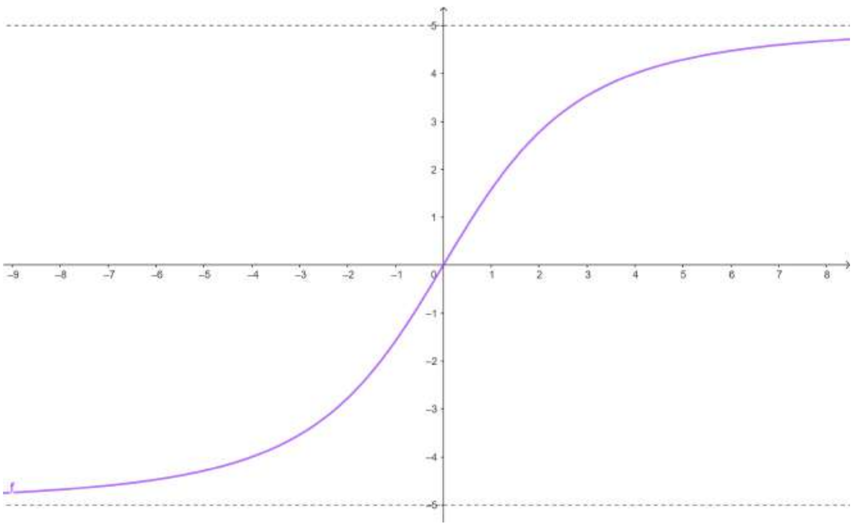
$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{5x}{\pm x.\sqrt{1+\frac{9}{x^2}}} =$$

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{5}{\pm\sqrt{1+\frac{9}{x^2}}} =$$

$$= \frac{5}{\pm\sqrt{1+0}} = \pm 5$$

Existem duas assíntotas horizontais $y = 5$ e $y = -5$.

Figura 23 – Assíntotas Horizontal



Fonte: Autoria Própria (Geogebra)

Exemplo 10. *Cálculo das assíntotas horizontais da função:* $f(x) = \dfrac{3x}{\sqrt{x^4+2x^2}}$

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{3x}{\sqrt{x^4+2x^2}} = \frac{\infty}{\infty}$$

$$()$$

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{3x}{\sqrt{x^4(1+\frac{2}{x^2})}} =$$

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{3x}{\sqrt{x^4}.\sqrt{1+\frac{2}{x^2}}} =$$

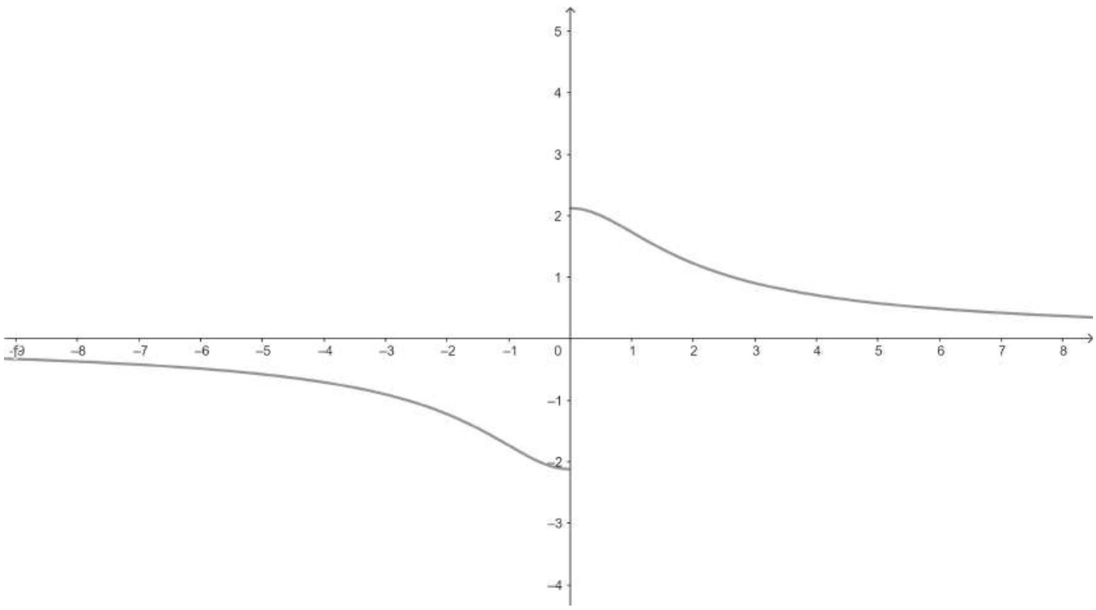
$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{3x}{\pm x^2.\sqrt{1 + \frac{2}{x^2}}} =$$

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{3}{\pm x.\sqrt{1 + \frac{2}{x^2}}} =$$

$$= \frac{3}{\pm\infty} = 0$$

Existe uma assíntotas horizontal $y = 0$.

Figura 24 – Assíntotas Horizontais



Fonte: Autoria Própria (Geogebra)

6 APLICAÇÕES DAS DERIVADAS

Este capítulo destina-se a mostrar a importância da derivada na forma de aplicações em várias áreas do conhecimento.

6.1 PROBLEMA ENVOLVENDO COMÉRCIO

Exemplo 11. *Suponha que em um certo mercado, p seja o preço de uma caixa de uvas, x o número de milhares de caixas ofertadas diariamente e t os dias, sendo a equação de oferta $px - 20p - 3x + 105 = 0$. Se a oferta diária que está decrescendo a uma taxa diária é de 5.000 caixas, qual a taxa de decrescimento do preço da caixa de uvas?*

Figura 25 – Caixas de Uvas

Fonte:https://pt.dreamstime.com/foto-de-stock-grupo-da-uva-vermelha-fresca-em-umas-caixas-no-supermercado-image25879840

Solução

Seja t os dias o tempo decorrido desde que a oferta diária de uvas começou a decrescer. Então p e x são ambas funções de t. Já que a oferta diária está decrescendo a uma taxa de 250 caixas por dia.

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{250}{1000} = -\frac{1}{4}$$

.

Queremos encontrar $\frac{dp}{dt}$, quando $x = 5$.

$px - 20p - 3x + 105 = 0$, diferenciando implicitamente em relação a t, obtemos:

$$p\frac{dx}{dt} + \frac{xdp}{dt} - \frac{20dp}{dt} - \frac{3dx}{dt} = 0$$

$$(p-3)\frac{dx}{dt} + (x-20)\frac{dp}{dt} = 0$$

$$\frac{dp}{dt}(x-20) = -(p-3)\frac{dx}{dt} \quad ou \quad \frac{dp}{dt} = \frac{3-p}{x-20}\frac{dx}{dt}$$

Quando $x = 5$ na equação de Oferta, $p = 6$ e como $\frac{dx}{dt} = -\frac{1}{4}$, então $\frac{dp}{dt} = -\frac{1}{20}$, ou seja, $-0,05$. Logo o preço de uma caixa de uvas está decrescendo a uma taxa de $R\$0,05$ por dia, quando a oferta diária é de 5.000 caixas de uvas.

6.2 PROBLEMA ENVOLVENDO OTIMIZAÇÃO DE PRODUÇÃO

Exemplo 12. *Uma mineradora determina que sua função de custo total para a extração de certo tipo de ferro é dada por $C(x) = 2,5x^2 + 4,32x + 1.200$ em $US\$$, onde x é dada em toneladas de ferro.Determine o custo adicional quando a produção aumenta de 10 para 11 toneladas de ferro. Ache o custo marginal para 10 toneladas.*

Figura 26 – Extração

Fonte:https://osucateiro.com/blog/extracao-de-minerios

Solução

Primeiramente calculamos $C(11) = 1.550,02$ e $C(10) = 1.493,20$, logo:

$$C(11) - C(10) = US\$ \ 56,82,$$

Derivando a função de custo, temos: $CMg(x) = C'(x) = 5x + 4,32 \Rightarrow CMg(10) = US\$54,32$.Isto significa que se a extração de ferro é incrementada em 1 tonelada, de 10 para 11 toneladas e mudança do custo é, aproximadamente, de $US\$ \ 54,32$. Em outras palavras, extrair uma tonelada adicional de ferro custa $US\$ \ 54,32$.

6.3 PROBLEMA ENVOLVENDO VOLUME

Exemplo 13. *O raio r de uma esfera está variando, com o tempo, a uma taxa constante de $5(m/s)$. Com que taxa estará variando o volume da esfera no instante em que $r = 2(m)$?*

Solução

Seja t_0 o instante em que $r = 2$. Queremos calcular $\frac{dV}{dt}|_{(t=t_0)}$. Sabemos que $V = \frac{4}{3}\pi r^3$. Pela regra da cadeia

$$\frac{dV}{dt} = \frac{dV}{dr}\frac{dr}{dt}.$$

Como

$$\frac{dV}{dr} = 4\pi r^2 \text{ e } \tfrac{dr}{dt} = 5$$

resulta

$$\frac{dV}{dt} = 20\pi r^2.$$

Para $t = t_0$, $r = 2$; logo, $\frac{dV}{dt}|_{t=t_0} = 80\pi(m^3/s)$. No instante em que $r = 2$, o volume estará variando a uma taxa de $80\pi(m^3/s)$.

6.4 PROBLEMA ENVOLVENDO LUCRO

Exemplo 14. *No cinema, o preço de um pacote de pipoca é de* $R\$\ 4,50$. *O pipoqueiro pode vender* 500 *pacotes de pipocas com o custo de* $R\$\ 1,40$ *por pacote. Para cada centavo que o pipoqueiro baixar no preço do pacote, a quantidade vendida pode aumentar de* 50 *unidades (pacotes). Que preço de venda maximizará o lucro?*

Figura 27 – Cinema

Fonte: https://pt.dreamstime.com/imagens-de-stock-royalty-free-pipoca-de-compra-na-cidade-do-cinema-image31231489

Solução

Inicialmente, observe que o lucro é de $R\$\ 3,10$ por pacote. Se x denotar o número de centavos que o pipoqueiro baixa no preço de cada pacote; o lucro na venda de cada pacote de pipoca será então de $310 - x$ centavos, e a quantidade vendida será $500 + 50x$. O lucro total é, portanto, o lucro por unidade (pacote) vezes a quantidade vendida, ou seja,

$$L = L(x) = (310 - x).(500 + 50x) = 155000 + 15500x - 500x - 50x^2$$
$$L(x) = 155000 + 15000x - 50x^2$$

Agora, deve-se maximizar a função $L(x)$. Como L é uma função polinomial, acontece quando iguala sua derivada à zero (uma vez que a derivada sempre existe) e resolvendo a equação resultante. Sendo:

$$L'(x) = 15000 - 100x$$

$$15000 - 100x = 0$$

$$x = \frac{15000}{100}$$

$$x = 150$$

Como a derivada segunda de L é igual a L"(x)= -100, portanto negativa para qualquer valor de x, segue que $x = 150$ é um ponto de máximo. Assim, o preço de venda que dará o maior lucro é de $R\$3,00$.

6.5 PROBLEMA ENVOLVENDO LANÇAMENTO VERTICAL

Exemplo 15. *Uma bola de basquete é lançada verticalmente para cima, por um jogador , e tem posições s no decorrer do tempo t dadas pela função horária* $s(t) = 30.t - 5.t^2$ *(s em metros e t em segundos).*

a) Calcule o tempo gasto para atingir a altura máxima.

b) Determine a altura máxima em relação ao solo

Solução

Como a função horária é a função que determina o espaço em função do tempo, ao derivar a expressão $s(t) = 30.t - 5.t^2$, tem-se a velocidade instantânea em função do tempo, assim, $s'(t) = v(t) = 30 - 10.t$, igualando a zero a velocidade implica que:

$$v(t) = 0$$
$$30 - 10.t = 0$$
$$t = 3 \ \text{ segundos}$$

Para determinar a altura é preciso substituir o tempo na expressão do espaço, tem-se:

$$s(3) = 30.3 - 5.3^2$$
$$s(3) = 45 \ metros$$

Assim, conclui-se que o tempo gasto para atingir a altura máxima é 3 segundos e a altura máxima em relação ao solo é de 45 metros.

6.6 PROBLEMA ENVOLVENDO POPULAÇÃO

Exemplo 16. *Centenas de animais pertencendo a uma espécie em perigo estão colocadas numa reserva de proteção. Depois de t anos a população p desses animais na reserva* *é dada hipoteticamente por* $p = 100 \ . \ \dfrac{t^2 + 5t + 25}{t^2 + 25}$*. Após quantos anos a população é máxima?*

Solução

$$p = 100.\frac{t^2 + 5t + 25}{t^2 + 25}$$

$$p' = 100.\frac{(2\ .t + 5).(t^2 + 25) - (t^2 + 5.t + 25).2.t}{[t^2 + 25]^2}$$

$$p' = 100.\frac{-5t^2 + 125}{[t^2 + 25]^2}$$

$$p' = 500.\frac{25 - t^2}{[t^2 + 25]^2}$$

$$p' = 0$$

$$500.\frac{25 - t^2}{[t^2 + 25]^2} = 0$$

$$[25 - t^2] = 0$$

$$t^2 = 25$$

$$t = 5 \ anos.$$

Logo, no período de 5 anos a população dessa espécie em perigo será máxima.

6.7 PROBLEMA ENVOLVENDO SAÚDE

Exemplo 17. *Suponha que a diminuição na pressão sangüínea de uma pessoa dependa de uma determinada droga que ela deverá tomar. Assim, se x mg da droga forem tomados, a queda da pressão sangüínea será uma função de x. Seja $f(x)$ esta função e $f(x) = \frac{1}{2}x^2(k-x)$ onde x está em $[0,k]$ e k é uma constante positiva. Determine o valor de x que cause o maior decréscimo na pressão sangüínea.*

Solução

$$f(x) = \frac{1}{2}k.x^2 - \frac{1}{2}x^3$$

$$f'(x) = k.x - \frac{3}{2}x^2$$

$$k.x - \frac{3}{2}x^2 = 0$$

$$x = 0 \text{ ou } x = \tfrac{2}{3}k$$

Logo, o valor de x para que se tenha o maior decréscimo da pressão é $\frac{2}{3}k$.

6.8 SISTEMA MASSA MOLA

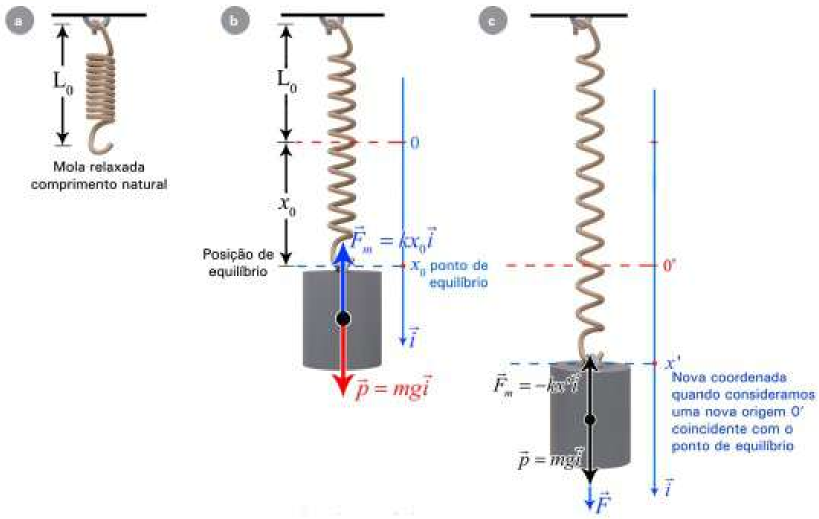
Exemplo 18. *No sistema massa mola, quando a segunda Lei de Newton sobre o movimento é combinada com a Lei de Hooke, podemos obter uma equação diferencial que governa o movimento de uma massa atada a uma mola.*

Importante

- Segunda Lei de Newton sobre o Movimento $F = m.a$, onde m é a Massa e a é a aceleração;
- A Lei de Hooke $F = -k.x$, onde F é a força resultante atuando na massa, k é uma constate e x representa o deslocamento da massa em relação à posição de equilíbrio;
- $P = m.g \rightarrow$ Força Peso;
- $F = ks \rightarrow$ Força Restauradora;

- $F = -kx \rightarrow$ O sinal de subtração Indica que a força restauradora da mola age em direção oposta ao movimento (deslocamento abaixo da posição de equilíbrio são positivos).

Figura 28 – Sistema Massa Mola



Fonte:https://midia.atp.usp.br/plc/plc0002/impressos/plc0002_11.pdf

Supondo que não haja forças de retardamento agindo sobre o sistema e supondo que a massa vibre sem influência de outras forças externas (movimento livre), podemos igualar F à força resultante do peso e da força restauradora.

Assim,

$$F_{resul.} = F_{rest.}$$
$$m.a = -(k.[s+x] + m.g)$$

Como $a = \dfrac{d^2x}{dt^2}$, g é a aceleração de gravidade e $mg - ks = 0$

Temos que:

$$m.\frac{d^2x}{dt^2} = -ks + mg - kx$$

Logo,

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{k}{m}.x$$

Fazendo

$$+\tfrac{k}{m} = w^2$$

Obtemos:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + w^2x = 0$$

Que descreve o movimento harmônico simples ou movimento simples sem amortecimento.

Há duas condições iniciais associadas a essa equação diferencial

$$x(0) = \alpha$$
$$x'(0) = \beta$$

Que representam o deslocamento inicial e a velocidade inicial.

7 CONSIDERAÇÕES FINAIS

No decorrer deste trabalho de conclusão de curso foram apresentados exemplos concretos de como as derivadas são aplicadas em diversas situações, mostrando sua relevância e utilidade explorando as aplicações das derivadas em diversas áreas da matemática e de outras disciplinas apresentando assim um pouco da importância da abordagem de suas aplicações.

Este trabalho apresentou exemplos de utilização das derivadas por ser de uma compreensão abstrata e rejeitada pela grande parte dos discentes, é importante ter meios que auxiliem no processo de ensino e aprendizagem.

Durante a pesquisa foi possível observar elos das derivadas com assuntos vistos no ensino médio como: diferentes tipos de funções e seus gráficos que as derivadas permitem determinar a taxa de variação dessas funções em diferentes pontos, como encontrar a área máxima ou o valor mínimo de uma função, retas tangentes a uma curva em um ponto específico nas derivadas são usadas para determinar a inclinação dessas retas.

A derivada da reta é um conceito fundamental que descreve a taxa de variação de uma função em relação a uma variável. No estudo das aplicações das derivadas, foi possível observar sua importância na resolução de problemas de otimização, no estudo de comportamento de funções, na determinação de taxas de crescimento e decrescimento, e na análise de concavidade e pontos de inflexão. Tendo suas aplicações práticas em diversas áreas, como engenharia, economia, biologia, ciência da computação e finanças.

No entanto, vale ressaltar que o estudo das derivadas é apenas o primeiro passo para uma compreensão mais profunda e abrangente do cálculo diferencial, sendo um campo vasto e de grande importância para a matemática e outras disciplinas.

REFERÊNCIAS

ÁLVARO, F. S. *Cálculo Diferencial e Integral I*. 05/12/2022. Disponível em: <https://www.academia.edu/39317981/%C3%81REA1_Faculdade_de_Ci%C3%AAncia_e_Tecnologia_Cursos_de_Engenharia_C%C3%A1lculo_Diferencial_e_Integral_I_Professor_%C3%81lvaro_Fernandes_Serafim>.

COITO, C. V. S. *A noção de segunda derivada e suas aplicações: um estudo no 12º ano*. Tese (Doutorado), 2016.

EVES, H. W. *Introdução à história da matemática*. [S.l.]: Unicamp, 1995.

FLEMMING, D. M. *Cálculo A*: funções limite, derivação, integração. São Paulo: Pearson Prentce Hall, 2006.

FORGRAD. *Plano Nacional de Graduação*. Ilhéus: [s.n.], 1999.

IEZZI, G. *Fundamentos de matemática elementar*: limites, derivadas, noções de integral. São Paulo: Ed. Atual, 2013. v. 7. (coleção 8, v. 7).

MORAIS, K. T. d. Aplicações do teorema do valor médio e do teorema de rolle. Universidade Tecnológica Federal do Paraná, 2011.

NETO, J. C. D. *Derivadas e aplicações*. Dissertação (B.S. thesis), 2022.

SANTANA, A. M. d. *Aplicações das derivadas*. Dissertação (B.S. thesis), 2010.

SODRÉ, U. *Cálculo Diferencial e Integral I*. 05/12/2022. Disponível em: <http://www.uel.br/projetos/matessencial/superior/calculo/maxmin/mm03.htm#mxm02>.

STEWART, J. *cálculo*. [S.l.]: Pioneira Thomson Learning, 2006.

INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA DA PARAÍBA
Campus Campina Grande
R. Tranqüilino Coelho Lemos, 671, Dinamérica, CEP 58432-300, Campina Grande (PB)
CNPJ: 10.783.898/0003-37 - Telefone: (83) 2102.6200

Documento Digitalizado Ostensivo (Público)

Entrega de TCC

Assunto:	Entrega de TCC
Assinado por:	Raynara Pereira
Tipo do Documento:	Livro
Situação:	Finalizado
Nível de Acesso:	Ostensivo (Público)
Tipo do Conferência:	Cópia Simples

Documento assinado eletronicamente por:

- **Raynara dos Santos Pereira**, **ALUNO (201821230015) DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA - CAMPINA GRANDE**, em 26/06/2023 17:01:30.

Este documento foi armazenado no SUAP em 26/06/2023. Para comprovar sua integridade, faça a leitura do QRCode ao lado ou acesse https://suap.ifpb.edu.br/verificar-documento-externo/ e forneça os dados abaixo:

Código Verificador: 863081
Código de Autenticação: 1a928af2ce