



INSTITUTO FEDERAL
Paraíba
Campus Campina Grande

INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA DA PARAÍBA
CURSO SUPERIOR DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

CÍCERO TALLYSSON COSTA SANTOS

**INTEGRAL DE LINHA: UMA APLICAÇÃO METODOLÓGICA COM BASE
NO CÁLCULO VETORIAL**

CAMPINA GRANDE - PB
2023

CÍCERO TALLYSSON COSTA SANTOS

**INTEGRAL DE LINHA: UMA APLICAÇÃO METODOLÓGICA COM BASE
NO CÁLCULO VETORIAL**

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado no Curso Superior de Licenciatura em Matemática do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia da Paraíba (IFPB), como requisito parcial para para obtenção do título de Licenciado em Matemática.

Orientador: Prof. Me. Orlando Batista de Almeida



MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
SECRETARIA DE EDUCAÇÃO PROFISSIONAL E TECNOLÓGICA
INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA DA PARAÍBA
CAMPUS CAMPINA GRANDE

CÍCERO TALLYSSON COSTA SANTOS

**INTEGRAL DE LINHA: UMA APLICAÇÃO METODOLÓGICA COM BASE
NO CÁLCULO VETORIAL**

Trabalho de Conclusão de Curso, aprovado como requisito parcial
para a obtenção de graduação em Licenciatura em Matemática pelo Instituto
Federal de Educação, Ciência e Tecnologia da Paraíba – Campus Campina
Grande.

Habilitação: Licenciatura

Data da aprovação

19/06/2023.

BANCA EXAMINADORA:

Orlando Batista de Almeida

ORIENTADOR: Prof. Me. Orlando Batista de Almeida – IFPB

Maxwell Aires da Silva

AVALIADOR: Prof. Me. Maxwell Aires da Silva – IFPB

Salomão Pereira de Almeida

AVALIADOR: Prof. Dr. Salomão Pereira de Almeida – IFPB

S237i Santos, Cícero Tallysson Costa.
Integral de linha: uma aplicação metodológica com base
no cálculo vetorial / Cícero Tallysson Costa dos Santos. -
Campina Grande, 2023.
71 f.: il.

Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação em
Licenciatura em Matemática) - Instituto Federal da
Paraíba, 2023.

Orientador: Prof. Me. Orlando Batista de Almeida.

1. Cálculo 2. Integral de linha 3. Vetorial. I. Almeida,
Orlando da Silva.

CDU 517.2

Este trabalho é dedicado à minha mãe *Ana Cristina Costa Santos*, ao meu pai *George Possidônio da Silva*, minha esposa *Martha Santana da Silva*, e a minha irmã *Cicera Thays Costa Possidônio*.

AGRADECIMENTOS

Meus agradecimentos estão voltados, em primeiro lugar, a Deus todo poderoso que me concedeu as bênçãos necessárias para que eu pudesse alcançar meus objetivos, com saúde e sempre com muita oração voltadas para aqueles que ele colocou em meu caminho para auxiliar no processo de graduação.

Aos meus pais, Ana Cristina Costa Santos e George Possidônio da Silva, que sempre me apoiaram a continuar os meus estudos, buscando o aperfeiçoamento profissional e a buscar os meus sonhos de acordo com a vontade de meu coração, a todo esse amor e cumplicidade quero agradecer do fundo de meu coração e dizer que tenho orgulho imenso por eles.

À minha esposa Martha Santana da Silva que, com seu amor e incentivo, me proporcionou forças para continuar esta jornada. À minha irmã Cicera Thays Costa Possidônio, na qual sempre pude ter como um porto seguro, conselheira e amiga em tudo que almejava.

Aos meus colegas de curso, em especial Julia Sione, Hidaline Chris e Allisson José, amigos que o Instituto me proporcionou e que desejo do fundo do coração todo o sucesso do mundo em suas vidas profissionais e pessoais.

Ao meu Orientador, Orlando Batista de Almeida, excelente profissional e um exemplo como professor que sempre está buscando o melhor para seus alunos e amigos. Quero agradecer pela oportunidade do desenvolvimento desta pesquisa, pelo seu suporte e pelas contribuições que foram de extrema importância

Aos professores da banca, pela disposição e contribuição para a continuação da pesquisa. Aos professores do IFPB que, em sua grande maioria, são muito atenciosos e prestativos com todos os alunos, buscando auxiliar na capacitação profissional de seus discentes e por serem, em minha opinião, referência como exemplo de docentes em cursos de Licenciatura.

Ao IFPB, pela oferta de inúmeros projetos que possibilitam a capacitação de seus discentes na prática pedagógicas contribuem para o desenvolvimento profissional desses futuros professores. Quero agradecer por fim, aos inúmeros funcionários que compõe a instituição do IFPB campus Campina Grande que, individualmente e de forma coletiva, auxiliam os alunos em pequenas ações que se tornam grandes na construção do caráter socioeducativo.

*“Tenho a impressão de ter sido uma
criança brincando à beira-mar,
divertindo-me em descobrir uma
pedrinha mais lisa ou uma concha mais
bonita que as outras, enquanto o
imenso oceano da verdade continua
misterioso diante de meus olhos”.*
(Isaac Newton)

RESUMO

O presente trabalho mostra algumas aplicações da Integral de Linha de Campos Escalares e Campos Vetoriais, onde, foi realizado uma revisão bibliográfica acerca de assuntos essenciais para o Cálculo Vetorial e sua contribuição em diversas áreas de atuação. Nesta pesquisa é possível compreender um pouco dos aspectos históricos, salientando importantes tópicos que servem como base para o desenvolvimento intelectual do assunto em questão, voltando-se para o escopo principal, mediante definições, exemplos, desenvolvimento de inúmeras concepções apresentadas e por fim, a abordagem de algumas aplicações, a fim de compreender como o estudo deste tipo de integral, usando como instrumento o processo de parametrização de curvas no campo do estudo da análise vetorial, é capaz de produzir frutos, facilitando o processo de resoluções de situações-problema e emergindo como novos materiais de estudo para futuras gerações.

Palavras-chave: Integral de Linha; Escalar; Vetorial; Cálculo; Aplicações; Curvas.

ABSTRACT

The present study shows some applications about Line Integral of Scalar Fields and Vector Fields, where a bibliographic review has been carried out on essential subjects for Vector Calculus and its contribution in several areas of activity. In this research, it is possible to understand a little of the historical aspects, basic emphasized definitions that serve as beginning for the intellectual development of the subject in question, returning to the main scope, through definitions, examples, development of innumerable developed conceptions and finally, the approach of some applications, in order to understand how the study of this type of integral, using as an instrument the process of parameterization of curves in the field of the study of vector analysis, is able to produce fruits, facilitating the process of coexistence of problem situations and emerging as new study materials for future generations.

Keywords: Line Integral; Scalar; Vector; Calculus; Applications; Curves.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1: William Rowan Hamillton	15
Figura 2: Quaternions de Hamilton	15
Figura 3: Hermann Gurther Grassmann.....	16
Figura 4: Tradução de Heaviside das fórmulas de Gibbs para integrais de superfície para volume.....	17
Figura 5: Divergência e rotacional do tensor de tensão	18
Figura 6: Representação de uma Curva C no Espaço \mathbb{R}^3	20
Figura 7: Interpretação de curva parametrizada	21
Figura 8: Curva representada pelas equações paramétricas	22
Figura 9: Representação da reta parametrizada no espaço	24
Figura 10: Representação da circunferência parametrizada no espaço	26
Figura 11: Representação da elipse parametrizada no plano	28
Figura 12: Representação da interpretação geométrica da parametrização da hélice circular	29
Figura 13: Representação da hélice circular parametrizada no espaço	30
Figura 14: Representação da cicloide parametrizada no plano.....	31
Figura 15: Construção da hipocicloide	32
Figura 16: Representação da hipocicloide parametrizada no plano	34
Figura 17: Extremos Relativos de um Campo Escalar.....	35
Figura 18: Campo Escalar representado no Geogebra	36
Figura 19: Campo Vetorial no plano - Geogebra	38
Figura 20: Campo vetorial definido no \mathbb{R}^3	38
Figura 21: Representação Geométrica de um Campo Vetorial	40
Figura 22: Campo Gradiente de um campo escalar.....	41
Figura 23: Curva particionada em pequenos arcos	47

Figura 24: Representação da Intersecção das Superfícies	49
Figura 25: Curva suave por partes.....	52
Figura 26: Divisão da Curva em Subarcos, Interpretação Vetorial.....	54
Figura 27: Curvas orientadas em Campos Vetoriais.....	57
Figura 28: Curva traçada em um Campo Vetorial	57
Figura 29: Representação de um fio no plano cartesiano.....	60
Figura 31: Representação do fio homogêneo de raio unitário	62
Figura 30: Representação de um fio no plano yz e seu centro de massa.....	65

LISTA DE TABELAS

Tabela 1: Construção do Campo Escalar	36
Tabela 2: Construção do Campo Vetorial.....	39

LISTA DE SÍMBOLOS

\in	Pertence.
\subset	Está contido.
σ	Sigma.
ε	Epsilon.
∇	Napla.
\lim	Limite.
\oint	Integral de Linha.
\oint	Integral de Linha Orientada.
\int_b^a	Integral Definida em um Intervalo.
Σ	Somatório.
θ	Teta.
β	Beta.
Γ	Gama.
\mathbb{R}^2	Plano xy .
\mathbb{R}^3	Espaço xyz .
\Rightarrow	Implica.
\Leftrightarrow	Se, e somente se.
∇f	Gradiente da função f .
W	Dáblio. Representando o trabalho.
M	Massa total de um fio.
M_{xy}	Momento de Inércia atuantes.
\bar{x}	Centro de massa relativo ao eixo x .
I_L	Momento em relação a um eixo dado.
E	Escoamento de um fluído.
$\delta'(t)$	Derivada da função δ (delta) com relação a t .
\vec{r}	Vetor r .
$\frac{dy}{dx}$	Derivadas Parciais de y em relação a x .
\vec{T}	Vetor unitário tangente à trajetória.
dr, ds	Diferenciais.
S_n	Soma de n arcos.
ΔS_k	Composição de variação de subarcos

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO	13
2 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA	20
2.1 Curvas	20
2.1.1 <i>Parametrização de Curvas</i>	20
2.1.2 <i>Parametrização de Lugares Geométricos Importantes</i>	22
2.1.2.1 Parametrização de uma reta	23
2.1.2.2 Parametrização de uma circunferência	24
2.1.2.3 Parametrização de uma elipse	26
2.1.2.4 Parametrização de uma hélice circular	28
2.1.2.5 Parametrização de uma cicloide	30
2.1.2.6 Parametrização de uma hipocicloide	31
2.2 Campos escalares	34
2.3 Campos Vetoriais	37
2.4 Campos Significativos	40
2.4.1 Campo Gradiente	40
2.4.2 Campo Vetorial Conservativo	42
2.4.3 Campo Divergente	43
2.4.4 Campo Rotacional	44
3 INTEGRAL DE LINHA	46
3.1 Integral de Linha de Campos Escalares	46
3.1.1 Uma abordagem sobre integrais de linha	51
3.1.2 Integral de Linha de curvas por partes	51
3.2 Integral de Linha de Campos Vetoriais	54
4 ALGUMAS APLICAÇÕES DA INTEGRAL DE LINHA.	60
4.1 O cálculo da massa total de um fio	60
4.2 O cálculo das coordenadas do centro de massa	62

4.3 O cálculo do momento de Inércia em relação aos eixos _____	62
4.4 O cálculo do trabalho realizado por uma força variável _____	65
4.5 O cálculo do escoamento e circulação para campos de velocidade _____	66
5 CONSIDERAÇÕES FINAIS _____	68
REFERÊNCIAS _____	69

1 INTRODUÇÃO

Este trabalho apresenta uma abordagem acerca da aplicação das Integrais de Linha de Campos Escalares e para Campos Vetoriais, tendo em vista a escassez de trabalhos produzidos na instituição nesta área de atuação e a necessidade de uma abordagem que pudesse trazer conhecimentos do Cálculo Vetorial no desenvolvimento da conceitualização de inúmeros tópicos que abrangem tais vertentes e aplicações no cotidiano acadêmico em áreas vistas anteriormente.

Uma vez que sua estruturação é realizada de modo a contribuir com a compreensão, apresentando exemplos que auxiliam o processo de desenvolvimento cognitivo, relacionando o conceito apresentado com uma situação prática e, sempre que possível, a visualização por meio de figuras e/ou desenvolvimento com utilização de Softwares Computacionais, como o GeoGebra.

A base teórica é muito presente em livros de Cálculo dos quais foram possíveis ter acesso na instituição, mostrando que, mesmo sendo um assunto, a priori, complexo, mostra ser esclarecedor, uma vez que pode ser complementado por diferentes autores que trazem perspectivas e abordagens diferentes, mas que convergem para um conteúdo sólido que vai se mostrando cada vez mais recompensador.

A importância de explorar este conteúdo, reside no fato de que a abordagem vetorial apresenta uma perspectiva que, ao conciliar na metodologia da Integral de Linha, é capaz de facilitar os processos de interpretação e resolução de situações-problema, comparando-se com situações que poderiam sem dúvida nenhuma dificultar o processo como o caso do tratamento com coordenadas polares.

Ao mostrar as propriedades do processo de parametrização de diversos lugares geométricos significativos (reta, circunferência, elipse, cicloide, hipocicloide), definir campo escalar e campo vetorial, salientando concepções de operadores e campos significativos, a pesquisa desenvolve uma fundamentação teórica capaz de desenvolver, juntamente com a abordagem da definição do escopo principal (integral de linha de campos escalares e de campos vetoriais), uma capacidade intelectual de compreender aplicações que ressaltam a veemência destes tópicos dentro da Matemática. Nessa perspectiva, a pesquisa, em sua estruturação, apresenta conceitos no segmento do cálculo vetorial, desenvolvendo-os, quando necessário, utilizando-se de exemplos e, por fim, aplicações.

1.1 ASPECTOS HISTÓRICOS – UMA BREVE HISTÓRIA SOBRE O CÁLCULO VETORIAL

Segundo as ideologias de Bonfim e Calabria (2021, p.11), “a história do Cálculo Vetorial vem basicamente de duas amplas tradições na história da ciência, a Matemática e a Física”. Nesta vertente no que tange à Matemática, pode-se relacionar o desenvolvimento da expansão dos conjuntos numéricos até aqueles mais abrangentes, envolvendo assim o estudo de vetores.

Salientando a perspectiva da Física, fundamentada nos desenvolvimentos teóricos da realidade desta ciência, especificamente no século XVII, tais problemas físicos são advindos uma parte da criação da geometria grega e sua carga teórica que, ao longo do tempo sofreram modificações voltadas para grandezas escalares e vetoriais, podendo-se afirmar que o espaço físico matemático estava em sua grande parte presente com a utilização de vetores.

No século XVIII a Matemática e a Física convergiram, o que possibilitou o surgimento de métodos vetoriais que, mediante conceitos e ideias, como o exemplo do conceito de paralelogramo de entidades físicas, ou a regra do paralelogramo, que pode ser encontrado desde textos de autores gregos antigos, passando pelos séculos XVI até o século XIX, chegando no moderno sistema vetorial; de estudiosos brilhantes, tais como Hamilton e Grassmann, geraram condições de estabelecer o maior sistema tridimensional vetorial criado em 1840.

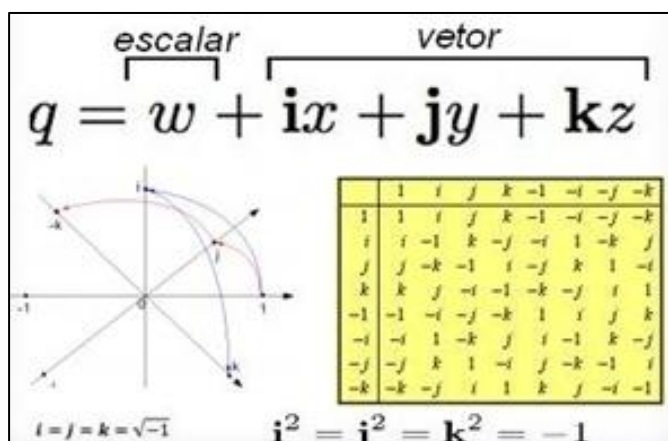
A respeito de William Rowan Hamilton, nascido em 1805, não teve educação universitária, onde sua introdução à Matemática ocorreu aos 13 anos de idade. Anos depois começou a estudar as obras de Newton e Laplace, chamando a atenção de estudiosos, ganhando fama na qual publicou títulos e fez contribuições, das quais se destaca a descoberta dos *quaternion*s em 1843. Tais descobertas, voltam-se em sua grande parte, para os números complexos e operações básicas realizadas entre eles, lembrando-se as características modernas atuais.

A importância das concepções de Hamilton reside no fato da necessidade de operar com tais números em situações que divergem do tratamento no plano, tal como no espaço tridimensional, onde muitos fenômenos físicos eram estudados. Após a apresentação da ideia dos *quaternion*s de Hamilton, que datam de 1843 a 1847, que salientou as operações de adição e multiplicação para esses quádruplos ordenados, de modo que mostrou que o sistema de números reais e dos números complexos estavam inseridos no dos *quaternion*s.

Figura 1: William Rowan Hamillton

Fonte: Biografias e vidas, 2023.

Neste caso, a chave para o desenvolvimento de seus trabalhos estava no fato de um quaternions ou quaterniões da forma $Q = w + x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ proporcionavam aos seus estudos as propriedades que necessitava, com exceção da comutatividade da multiplicação, tal concepção revolucionou o campo da física-matemática, ocasionando o surgimento de outros campos, como a *Teoria da Extensão* de Grassmann.

Figura 2: Quaternions de Hamilton

Fonte: Matheusmathica, 2023

As contribuições de Hermann Gurtner Grassmann (1809-1877) caracterizam, para o Cálculo Vetorial, uma grande significância pois, em sua obra ele aborda inúmeros conceitos que podem ser comparados com a primeira grande obra na nova álgebra que surgia na época, comparando-se com a geometria não euclidiana. Um destes conceitos é o cálculo de extensão

apresentado pelo estudioso em seu livro, publicado em 1840, traz como enfoque principal a abordagem do produto escalar e vetorial, muito homólogo à moderna análise vetorial, segue:

Hermann Grassmann foi um matemático brilhante, onde suas contribuições para a análise vetorial podem ser comparadas apenas com aquelas de Hamilton. Neste será mostrado que esse sistema pode conduzir a análise vetorial moderna, todavia não é o que houve. (CROWE, 1985, p.54)

Figura 3: Hermann Gurther Grassmann



Fonte : Wikipedia, 2023.

Desenvolvendo os estudos no que se refere às tradições deixadas por Grassmann e Hamilton no período de 1841 a 1900, notou-se um grande nível de interesse em diversos estudiosos pela denominada tradição Hamiltoniana, que remete aos avanços da tradição na análise vetorial. Devido ao foco desta pesquisa vamos abordar as contribuições de Paul Guthrie Tait (1831-1901) que foi líder da análise de quaternions de 1865 a 1901, de modo que desenvolveu a análise quaternária como uma ferramenta para pesquisar em ciência física, criando assim inúmeros novos teoremas que foram capazes de traduzir em análise vetorial moderna, sendo seu maior oponente.

Ao longo do desenvolvimento dos seus estudos Tait desenvolveu pelo menos oito obras baseadas nas contribuições de Hamilton, porém, suas pesquisas não são apenas como expositor de métodos conhecidos, criando novos métodos dos quais foram posteriormente incorporados na análise vetorial. Podemos citar, por exemplo, o desenvolvimento do operador ∇ , denominado “nabla”, “del” e “atled”, caracterizando-o para deslocamento de vetores, referenciado nos estudos de Hamilton como notação para representar os estudos de Laplace, atualmente denominado de *gradiente*, nota-se que neste caso o operador aplicado a um vetor também é um *quaternion*.

O sistema moderno de análise vetorial foi desenvolvido, principalmente, por meio das contribuições de Josiah Willard Gibbs, por meio de suas publicações entre 1882 e 1889 relacionando seus conhecimentos com estudiosos supracitados, de modo que as notações atuais dos produtos escalares e vetoriais vêm de sua autoria.

Assim como Gibbs, baseando-se nas contribuições de Hamilton e Grassmann, em sua grande parte, podemos afirmar que Oliver Heaviside tornou-se um grande nome no Cálculo Vetorial moderno, voltando-se para a visualização matemática onde, primeiramente, publicou artigos em 1883 sobre eletricidade introduzindo um surpreendente método de vetores que, por sua vez, vinculando-se aos quaternions, pôde representar um método vetorial para representar numerosas quantidades vetoriais na física, introduzindo em 1885 publicações referentes ao produto de vetores. Neste mesmo ano, Heaviside apresenta pela primeira vez seu sistema de vetores de forma unificada, onde os métodos apresentados são aqueles utilizados atualmente.

Figura 4: Tradução de Heaviside das fórmulas de Gibbs para integrais de superfície para volume

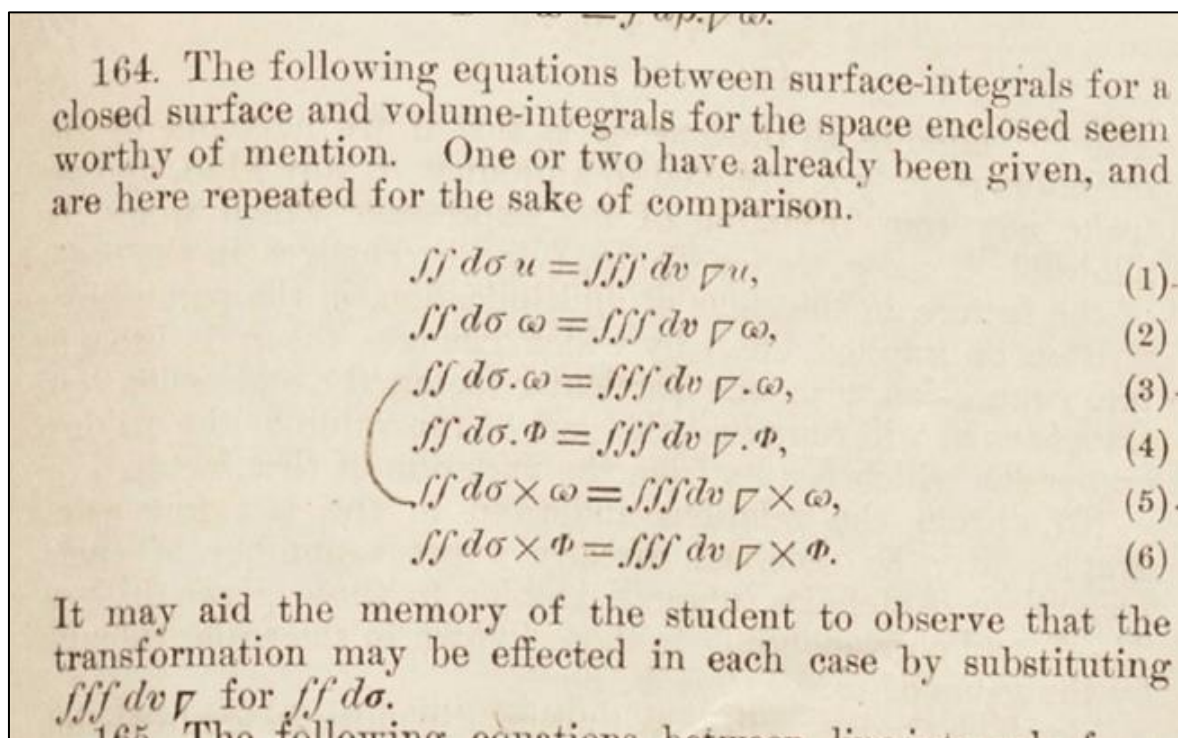
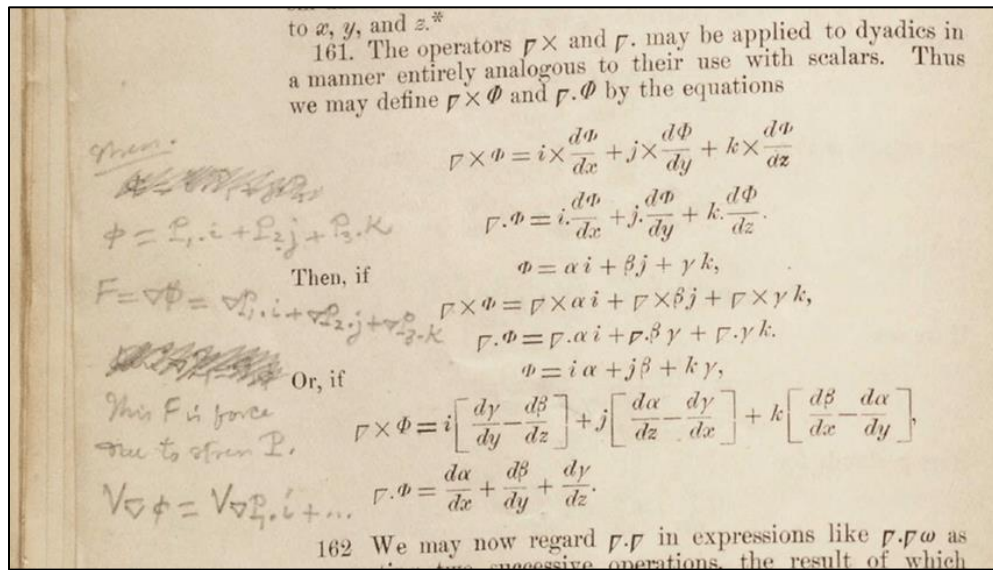


Figura 5: Divergência e rotacional do tensor de tensão



Fonte: Artigo História das Ciências Exatas, 2020

1.2 OBJETIVOS

Objetivo geral: Estudar algumas aplicações de Integrais de linhas em Campos Escalares e Campos Vetoriais.

Objetivos específicos:

- Diferenciar campos escalares e campos vetoriais;
- Produzir material de apoio para futuras utilizações no âmbito acadêmico;
- Compreender a necessidade da utilização da Integral de Linha em campos escalares e campo vetoriais e sua diferenciação;
- Aplicar, de maneira prática, a Integral de Linha na resolução de situações-problema.

1.3 METODOLOGIA

A Pesquisa é classificada, quanto a natureza, de acordo com Silva e Menezes (2005, p. 20) como sendo aplicada, pois visa a gerar conhecimentos para a aplicação prática e dirigida à solução de problemas específicos. Quanto aos objetivos, a pesquisa é de cunho exploratório, pois, de acordo com Andrade (2001), ela assume um caráter de pesquisa bibliográfica e/ou estudo de caso, proporcionando maior conhecimento sobre o assunto, onde ela facilita na

delimitação do tema, ajuda a formular o problema de pesquisa, bem como seus objetivos. Este tipo de pesquisa trabalha análises de exemplos que estimulem a compreensão.

Mediante as concepções de abordagem desta pesquisa, quanto à abordagem do problema, pode ser classificada como uma pesquisa qualitativa, pois visa a compreender a significância da abordagem dos conteúdos de forma exploratória e indutiva assumindo uma realidade dinâmica.

Quanto às fontes de informação e aos procedimentos técnicos, a pesquisa é classificada, segundo Gil (2009), como sendo bibliográfica, visto que a coleta de informações consiste em materiais impressos ou publicados na mídia. Ou seja, é a pesquisa realizada a partir de material já publicado, como livros, revistas, artigos, etc. Esse tipo de pesquisa está presente em vários trabalhos acadêmicos, uma vez que traz a base teórica que garante o cientificismo dos mesmos.

Deste modo, a pesquisa é capaz de mostrar as aplicações e porventura, os resultados desenvolvidos de forma a ressaltar a importância da utilização dos conceitos nela abordados.

1.4 ESTRUTURA DO TRABALHO

O trabalho está estruturado de forma que o leitor pudesse compreender da melhor forma possível, admitindo-se que o público-alvo possui noções básicas de Cálculo Diferencial e Vetorial. Nesta perspectiva, a Fundamentação Teórica aborda a noção de curvas, o conceito de parametrização de curvas, assim como o desenvolvimento do processo de parametrização de lugares geométricos essenciais, tais como: reta, circunferência, elipse, hélice circular, cicloide e hipocicloide. Dentro desse tópico ainda é possível estudar sobre campo escalar e campo vetorial, assim como ver campos significativos obtidos por meio de operadores de campos, relacionando-os com a noção de campo conservativo.

Dentro deste viés, o foco principal da pesquisa é desenvolvido onde concepções acerca da construção das Integrais de Linha de Campos Escalares e Campos Vetoriais são abordadas, salientando suas importâncias e ligações ao trazer representações e desenvolver suas características. No tópico Aplicações da Integral de Linha é possível verificar como os conceitos trazidos podem ser aplicados, muitas vezes de forma mais prática devido a funcionalidade e importância da contextualização da pesquisa. Por fim, tem-se as considerações Finais e as Referências utilizadas em sua construção que, possibilitaram a construção deste documento.

2 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

2.1 CURVAS

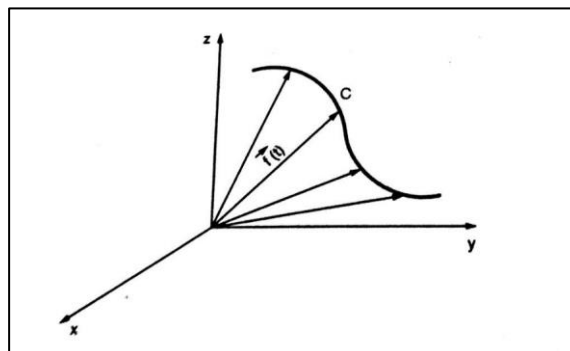
A ideia de Curva é muitas vezes difundida de maneira análoga por alguns autores, estando diretamente ligada com o estudo de Funções de Várias Variáveis. Segundo Gonçalves e Flemming (2007) a curva é uma ferramenta essencial que pode ser utilizada de maneira prática para o desenvolvimento de conceitos no Cálculo Vetorial, a curva é, portanto, um lugar geométrico dos pontos P do espaço que têm um comportamento que pode ser analisado.

Intuitivamente, na visão de Thomas (2012, p. 77), devemos considerar de uma forma mais geral de pensar a curva como a trajetória de uma partícula em movimento, de modo que sua posição está sofrendo mudanças ao longo do tempo.

É válido ressaltar que quando queremos caracterizar o conceito de curva, é possível afirmar na construção de sua contextualização, que:

[...] A curva C representará o local geométrico formado pelas extremidades de todos os vetores posição. Uma parametrização para a curva C será uma das formas de se representar a mesma, isto é, existem infinitas parametrizações que coincidem com a mesma curva C . Além do conceito físico de trajetória, associado a ideia de vetor posição, faz sentido relembrar outros conceitos físicos. (FERREIRA, 2013, p. 69).

Figura 6: Representação de uma Curva C no Espaço \mathbb{R}^3



Fonte: Gonçalves e Flemmig (2007)

2.1.1 Parametrização de Curvas

O processo de Parametrização de Curvas consiste diretamente em sua relação com a sua equação vetorial. Deste modo, diferentemente dos conceitos anteriormente adquiridos no Cálculo Diferencial, é possível descrever uma curva expressando suas coordenadas como função de uma variável t .

Deste modo, Thomas (2012, p. 77), define:

Sejam x , y e z dados como funções,

$$x = f(t), \quad y = g(t), \quad z = h(t)$$

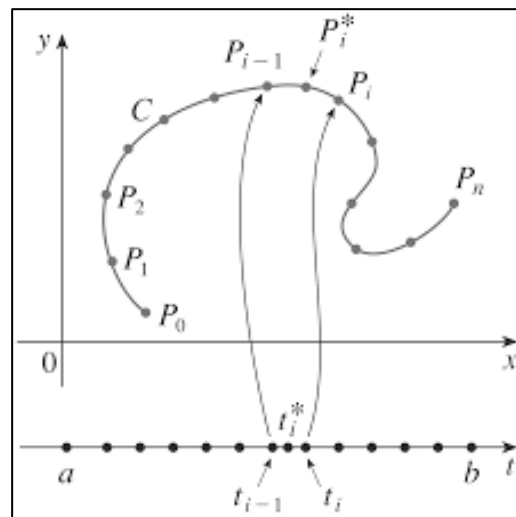
Sobre um intervalo I de valores de t , então o conjunto de pontos,

$$(x, y, z) = (f(t), g(t), h(t));$$

definidos por essas equações forma uma curva parametrizada. Tais expressões são equações paramétricas para esta curva. Sabe-se ainda que a variável t é um parâmetro para a curva, e seu domínio I é o intervalo do parâmetro, aberto de a até b .

Stewart (2016, p. 576) afirma que “cada valor de t determina um ponto (x, y) , que podemos marcar em um plano coordenado [...] O parâmetro t não representa o tempo necessariamente e, de fato, poderíamos usar outra letra ao invés de t para o parâmetro”. Todavia, o autor complementa que a maioria das vezes, o parâmetro representa o tempo e, neste caso, a interpretação está ligada a posição de uma partícula $r(t)$ ao longo do tempo t .

Figura 7: Interpretação de curva parametrizada



Fonte: Stewart, 2016.

Exemplo 1:

Identifique a curva definida pelas equações paramétricas:

$$x = t^2 - 2t \text{ e } y = t + 1$$

Solução:

Note que:

$$\begin{cases} x = t^2 - 2t & (1) \\ y = t + 1 & (2) \end{cases}$$

Portanto, de (2) temos que,

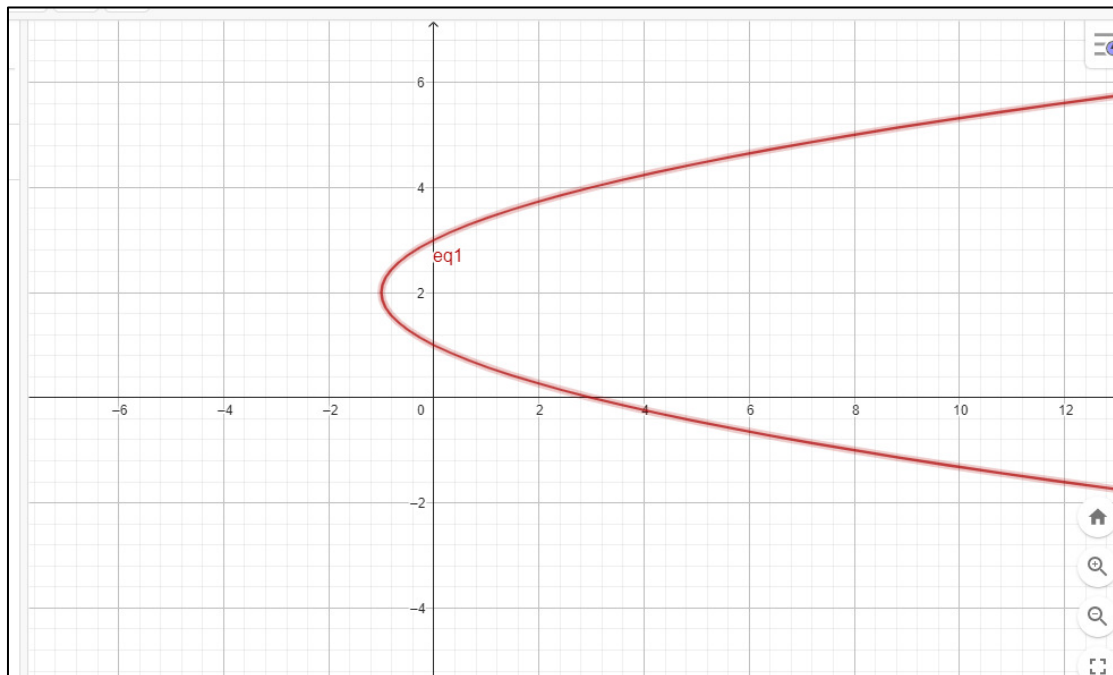
$$t = (y - 1)$$

Ao substituir t em (1),

$$\begin{aligned} x &= (y - 1)^2 - 2(y - 1) \\ x &= (y^2 - 2y + 1) - 2y + 2 = y^2 - 4y + 3 \end{aligned}$$

Logo, a curva representada pelas equações paramétricas dadas é uma parábola.

Figura 8: Curva Representada pelas equações paramétricas



Fonte: Autoria Própria, Produzido no Geogebra.

2.1.2 Parametrização de Lugares Geométricos Importantes

Nesta seção da revisão bibliográfica seremos bastante objetivos, visto que há uma necessidade da abordagem de tais conceitos de forma prática e sucinta. As informações estão embasadas de acordo com Gonçalves e Flemming (2007, p. 30-45), Thomas (2012, p. 81) e Stewart (2016, p. 577).

2.1.2.1 Parametrização de uma reta

Considerando as coordenadas de um vetor $\vec{a} (x_a, y_a, z_a)$ que é um vetor posição de um ponto pertencente a uma dada reta. Sabe-se que dado um vetor $\vec{b} (x_b, y_b, z_b)$ que indica a direção da reta r a qual desejamos a equação parametrizada, sendo t um parâmetro real, é válido que:

$$\vec{r}(t) = \vec{a} + t\vec{b} = (x_a, y_a, z_a) + (x_b, y_b, z_b)t$$

Todavia,

$$\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}$$

Conclui-se que a parametrização, será então dada por:

$$\begin{cases} x(t) = x_a + tx_b \\ y(t) = y_a + ty_b \\ z(t) = z_a + tz_b \end{cases}$$

Exemplo 2:

Dada a reta de equação $r: y - x - 1 = 0$, obter a parametrização de tal curva.

Solução:

Para realizar tal parametrização, basta obter dois pontos A e C pertencentes à reta r . Se $y = 1$, então $x = 0$, se $y = 2$, então $x = 1$. Portanto:

$$A(0,1) \quad e \quad C(1,2)$$

Neste caso:

$$\vec{r}(t) = \vec{a} + t\vec{b} = (0,1) + (1 - 0, 2 - 1)t$$

Pois, $\vec{b} = \overrightarrow{AC} = (1 - 0, 2 - 1)$. Logo,

$$\vec{r}(t) = (t, 1 + t)$$

Exemplo 3:

Determinar uma representação paramétrica da reta que passa por $A(2, 0, 1)$ e $B(-1, 1/2, 0)$.

Solução:

Para realizar tal parametrização, uma vez que temos dois pontos conhecidos basta obter o vetor direção da reta. Logo,

$$\vec{b} = \overrightarrow{AB}$$

$$\vec{b} = \overrightarrow{AB} = (-1, 1/2, 0) - (2, 0, 1) = (-3, 1/2, -1)$$

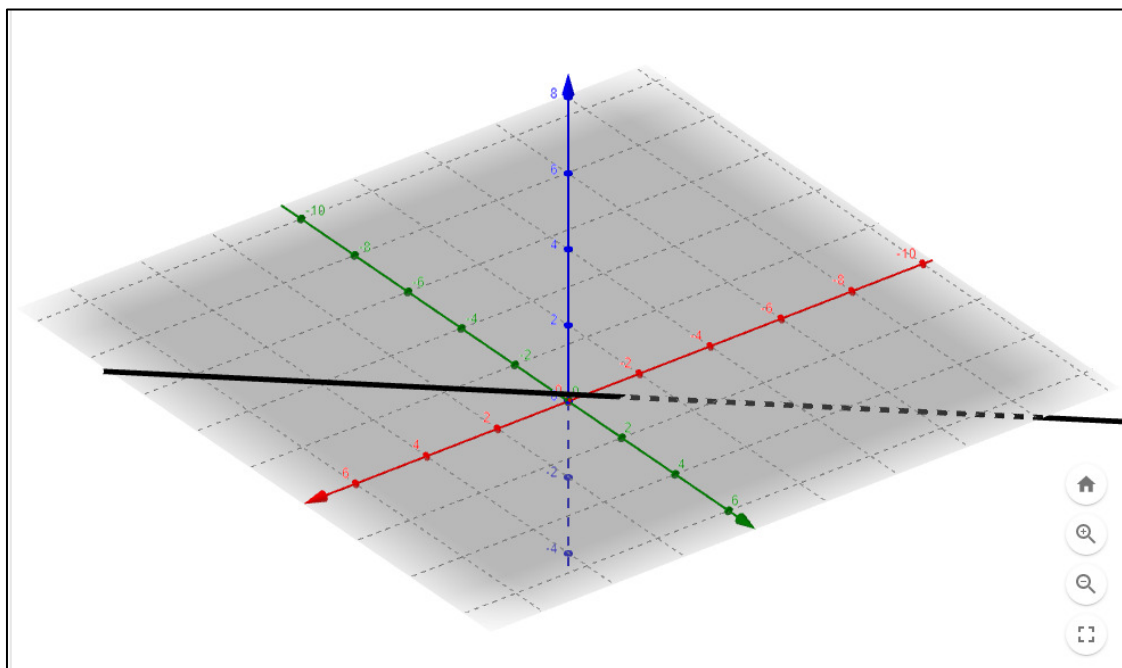
Portanto, ao adotar $\vec{a} = A$,

$$\vec{r}(t) = \vec{a} + t\vec{b} = (2, 0, 1) + (-3, 1/2, -1)t$$

$$\vec{r}(t) = (2 - 3t, 1/2t, 1 - t)$$

A Figura 4 ilustra esse exemplo.

Figura 9: Representação da reta parametrizada no espaço



Fonte: Autoria Própria, Produzido no Geogebra.

2.1.2.2 Parametrização de uma circunferência

Admitindo-se uma circunferência de equação cartesiana reduzida:

$$\Gamma: (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2$$

com centro $C(x_0, y_0)$ e raio R . É possível obter sua parametrização ao relacionar seus elementos e a Equação Fundamental da Trigonometria, considerando-se a igualdade seguinte como um dos processos de parametrização mais usual para este lugar geométrico.

Dado que,

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2$$

Note que,

$$\frac{(x - x_0)^2}{R^2} + \frac{(y - y_0)^2}{R^2} = 1 \quad (1)$$

Uma vez que, na Trigonometria,

$$\text{sen}^2 \theta + \text{cos}^2 \theta = 1 \quad (2)$$

Ao igualarmos (1) e (2), temos que:

$$\frac{(x - x_0)^2}{R^2} + \frac{(y - y_0)^2}{R^2} = \text{sen}^2 \theta + \text{cos}^2 \theta = 1$$

É válido, portanto, que:

$$\begin{cases} \frac{(x - x_0)^2}{R^2} = \text{sen}^2 \theta \\ \frac{(y - y_0)^2}{R^2} = \text{cos}^2 \theta \end{cases}$$

Onde,

$$\begin{cases} \frac{(x - x_0)}{R} = \text{sen} \theta \Rightarrow x = x_0 + R \text{sen} \theta \\ \frac{(y - y_0)}{R} = \text{cos} \theta \Rightarrow y = y_0 + R \text{cos} \theta \end{cases}$$

Logo, sua parametrização é dada por:

$$\vec{r}(\theta) = (x_0 + R \text{sen} \theta, y_0 + R \text{cos} \theta), 0 \leq \theta \leq 2\pi$$

De forma análoga, ao utilizarmos membros diferentes, da seguinte forma:

$$\begin{cases} \frac{(x - x_0)^2}{R^2} = \text{cos}^2 \theta \\ \frac{(y - y_0)^2}{R^2} = \text{sen}^2 \theta \end{cases}$$

Será válido que,

$$\vec{r}(\theta) = (x_0 + R \text{cos} \theta, y_0 + R \text{sen} \theta), 0 \leq \theta \leq 2\pi$$

A parametrização adotada definirá a orientação da curva.

Exemplo 4:

Obter equações paramétricas da circunferência $\Gamma: x^2 + y^2 - 6x - 4y + 4 = 0$ no plano $z = 3$.

Solução:

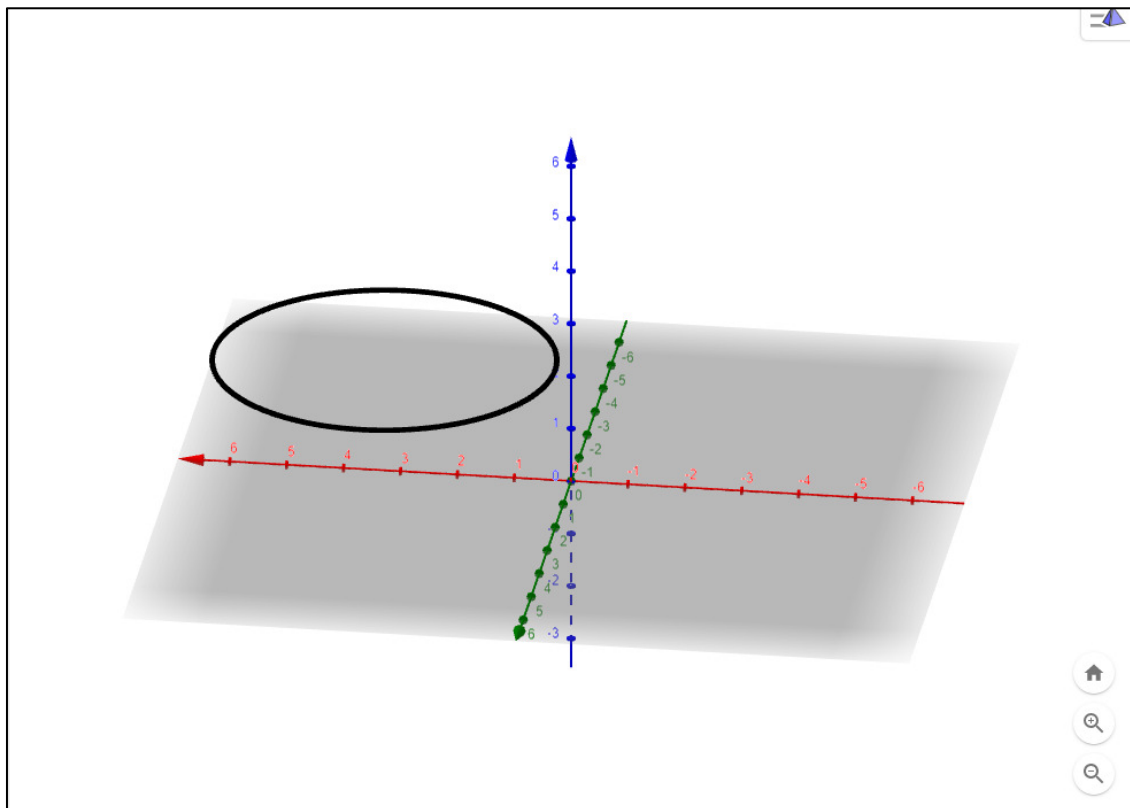
Devemos manusear a equação geral a fim de obter a equação reduzida, logo:

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 - 6x - 4y + 4 &= 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow x^2 - 6x + y^2 - 4y + 4 &= 0 \Rightarrow (x - 3)^2 - 9 + (y - 2)^2 - 4 + 4 = 0 \\ \Rightarrow (x - 3)^2 + (y - 2)^2 &= 9 + 4 - 4 = 9 \end{aligned}$$

Neste caso temos que $x_0 = 3, y_0 = 2, R = \sqrt{9} = 3$. Logo, a parametrização, onde $z = 3$, no sentido anti-horário é dada por:

$$\vec{r}(\theta) = (3 + 3 \cos \theta, 2 + 3 \sin \theta, 3), 0 \leq \theta \leq 2\pi$$

Figura 10: Representação da circunferência parametrizada no espaço



Fonte: Autoria Própria, Produzido no Geogebra.

2.1.2.3 Parametrização de uma elipse

Admitindo-se uma elipse de equação cartesiana reduzida $\Gamma: \frac{(x-x_0)^2}{a^2} + \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1$, com centro $C(x_0, y_0)$, de modo que $a > b$. É possível obter sua parametrização ao relacionar seus elementos e a Equação Fundamental da Trigonometria.

Analogamente ao que foi feito anteriormente para a parametrização da circunferência, tem-se que:

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2} + \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = \text{sen}^2 \theta + \text{cos}^2 \theta = 1$$

Portanto,

$$\begin{cases} \frac{(x-x_0)^2}{a^2} = \text{sen}^2 \theta \\ \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = \text{cos}^2 \theta \end{cases}$$

Onde,

$$\begin{cases} \frac{(x-x_0)}{a} = \text{sen} \theta \Rightarrow x = x_0 + a \text{sen} \theta \\ \frac{(y-y_0)}{b} = \text{cos} \theta \Rightarrow y = y_0 + b \text{cos} \theta \end{cases}$$

Será válido que,

$$\vec{r}(\theta) = (x_0 + a \text{sen} \theta, y_0 + b \text{cos} \theta), 0 \leq \theta \leq 2\pi$$

De forma análoga, ao utilizarmos membros diferentes, da seguinte forma:

$$\begin{cases} \frac{(x-x_0)^2}{a^2} = \text{cos}^2 \theta \\ \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = \text{sen}^2 \theta \end{cases}$$

Será válido que,

$$\vec{r}(\theta) = (x_0 + a \text{cos} \theta, y_0 + b \text{sen} \theta), 0 \leq \theta \leq 2\pi$$

A parametrização adotada definirá a orientação da curva.

Exemplo 5:

Escrever uma equação vetorial da elipse $4x^2 + 9y^2 - 8x - 36y + 4 = 0$, no plano xy .

Solução:

Devemos manusear a equação geral a fim de obter a equação reduzida, logo:

$$4x^2 + 9y^2 - 8x - 36y + 4 = 0 \Rightarrow 4x^2 - 8x + 9y^2 - 36y + 4 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4(x^2 - 2x) + 9(y^2 - 4y) + 4 = 0$$

$$\Rightarrow 4(x - 1)^2 - 4 + 9(y - 2)^2 - 36 + 4 = 0$$

$$\Rightarrow 4(x - 1)^2 + 9(y - 2)^2 = 36 - 4 + 4 = 36$$

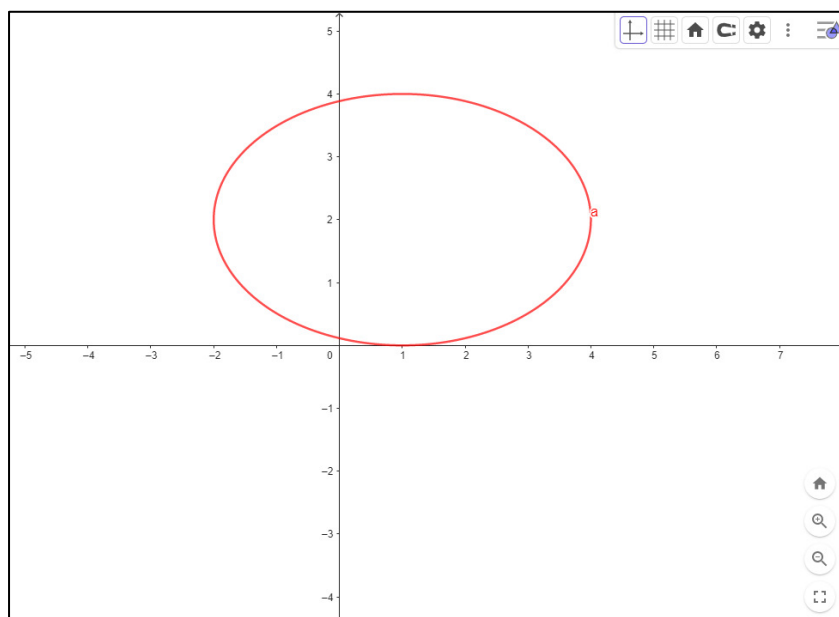
Ao dividir todos os membros por 36, temos:

$$\frac{(x - 1)^2}{9} + \frac{(y - 2)^2}{4} = 1$$

Neste caso temos que $x_0 = 1, y_0 = 2, a = \sqrt{9} = 3, b = \sqrt{4} = 2$, pois $a > b$. Logo, a parametrização, no sentido anti-horário é dada por:

$$\vec{r}(\theta) = (1 + 3 \cos \theta, 2 + 2 \sin \theta), 0 \leq \theta \leq 2\pi$$

Figura 11: Representação da elipse parametrizada no plano



Fonte: Autoria Própria, Produzido no Geogebra.

2.1.2.4 Parametrização de uma hélice circular

A parametrização da hélice circular é dada por meio do conceito de que ela é uma curva reversa que se desenvolve sobre uma superfície cilíndrica $x^2 + y^2 = a^2$. O processo descreve a observação a partir de um ponto P da curva projetada no plano xy , de forma que a interpretação geométrica condiz que:

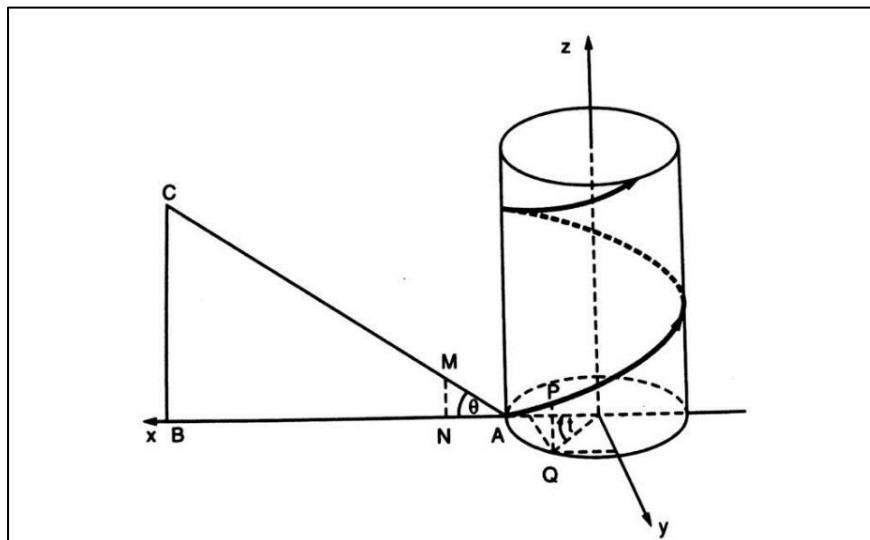
$$\overline{PQ} = \overline{MN}$$

$$\overline{AN} = \overline{AQ} = at$$

$$\begin{cases} x(t) = a \cdot \cos t \\ y(t) = a \cdot \sin t \\ z(t) = \overline{PQ} = \overline{AN} \cdot \tan \theta = a \cdot t \cdot \tan \theta \end{cases}$$

De modo que, a é o raio da curva da superfície cilíndrica, e $m = \tan \theta$ é o ângulo de inclinação a curva se enrola sobre a seção do cilindro no plano xy .

Figura 12: Representação geométrica da parametrização da hélice circular



Fonte: Gonçalves e Flemming (2007)

Logo, a parametrização é dada por:

$$\vec{r}(t) = (a \cos t, a \sin t, amt), \quad 0 \leq t \leq 2\pi$$

Exemplo 6:

Representar graficamente a hélice circular $\vec{r}(t) = \cos t \vec{i} + \sin t \vec{j} + t \vec{k}$, para $0 \leq t \leq 2\pi$.

Solução:

Sabe-se que observando as coordenadas x e y da função vetorial, temos o cilindro no qual a hélice se desenvolverá, de modo que $x^2 + y^2 = 1$. O ângulo de inclinação da curva será dado por $m = \operatorname{tg}\theta$. Portanto:

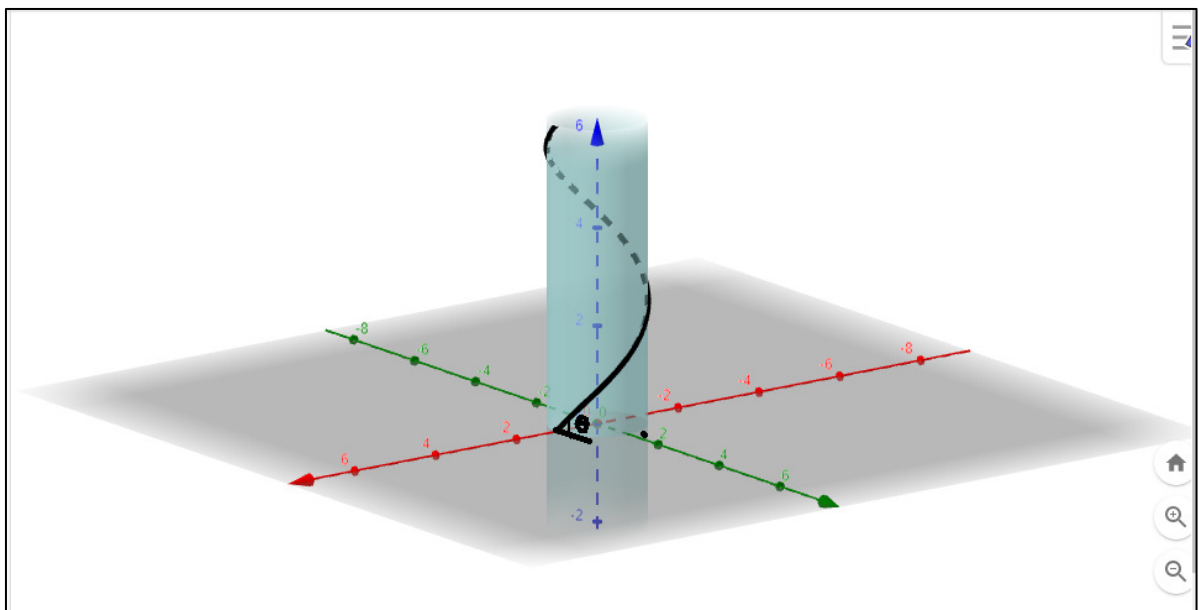
$$z(t) = amt = t \Rightarrow am = 1, \text{ onde } a = 1 \Rightarrow m = 1$$

Logo,

$$m = \operatorname{tg}\theta \Rightarrow \operatorname{tg}\theta = 1 \Rightarrow \theta = \tan^{-1}(1) = 45^\circ$$

A fim de obter a representação gráfica da curva, basta apenas atribuir valores ao parâmetro t . De modo que $0 \leq t \leq 2\pi$. Com auxílio do Software Geogebra a figura a seguir representa a curva.

Figura 13: Representação da hélice circular parametrizada no espaço



Fonte: Autoria Própria, Produzido no Geogebra.

2.1.2.5 Parametrização de uma cicloide

A cicloide pode ser descrita pelo movimento de um ponto $P_0(0,0)$ de um círculo de raio a , centrado em $(0, a)$, quando o círculo gira sobre o eixo dos x . De modo que o círculo gira um ângulo t , seu centro se move um comprimento \overline{OT} . Sendo que:

$$\overline{OT} = \overline{TP} = at$$

Assim como,

$$\overline{CA} = a, \overline{CT} = a \cos t \text{ e } \overline{AP} = a \sin t$$

Portanto, as coordenadas de P são:

$$x = \overline{OT} - \overline{AP} = at - a \sin t = a(t - \sin t)$$

$$y = \overline{AT} = \overline{CT} - \overline{AC} = a - a \cos t = a(1 - \cos t)$$

Logo, a parametrização será dada por:

$$\vec{r}(t) = (a(t - \sin t), a(1 - \cos t))$$

Exemplo 7:

Desenvolver a função vetorial de um cicloide construído pelo movimento de uma circunferência centrada no ponto $C(0,4)$, no intervalo $0 \leq t \leq 6\pi$.

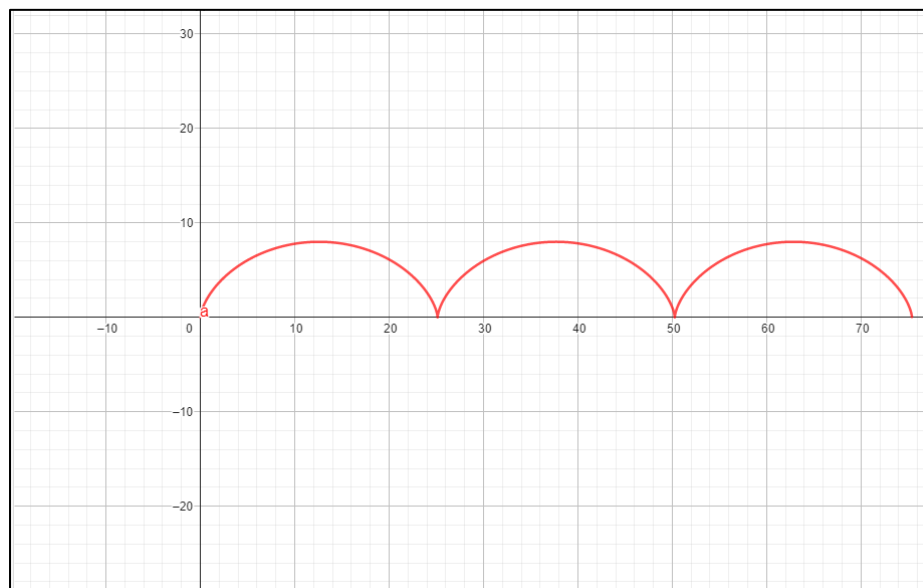
Solução:

Pela definição temos que $R = a = 4$.

Portanto a equação vetorial do cicloide é dada por:

$$\vec{r}(t) = (4(t - \sin t), 4(1 - \cos t)), 0 \leq t \leq 6\pi$$

Figura 14: Representação da cicloide parametrizada no plano



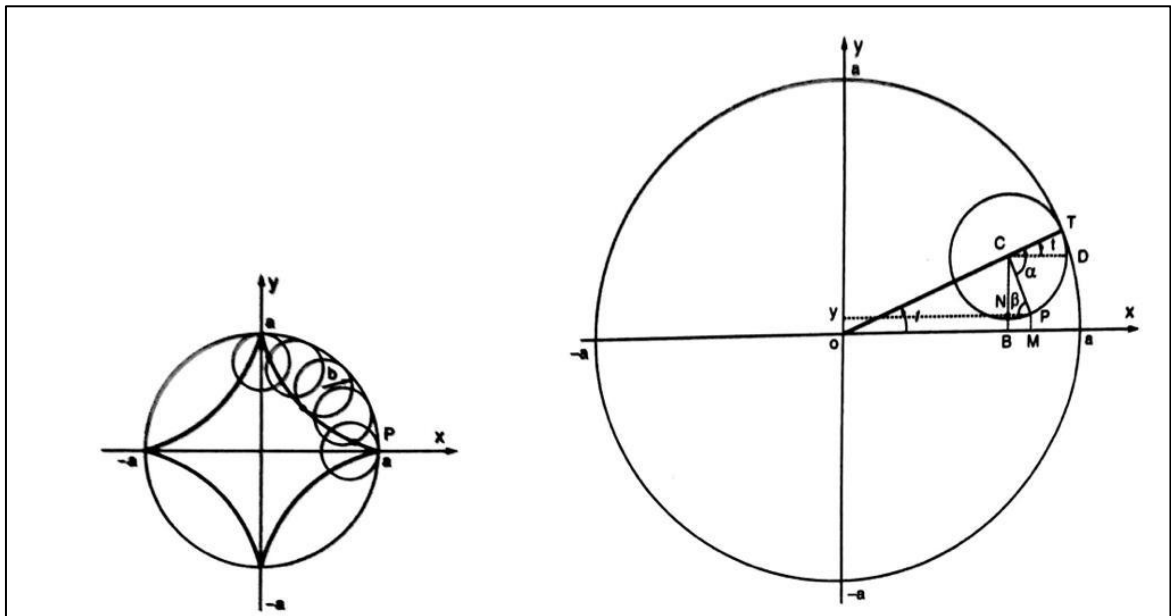
Fonte: Autoria Própria, Produzido no Geogebra.

2.1.2.6 Parametrização de uma hipociclóide

Pode-se afirmar que uma hipociclóide é uma curva descrita pelo movimento de um ponto fixo P , de um círculo de raio b , que gira, sem deslizar, dentro de um círculo fixo de raio a de centro na origem, de modo que $a > b$. Uma vez que, o ponto inicial $P(0, a)$ é o ponto de tangência dos dois círculos T que varia em relação ao ângulo t , ou seja, no instante $t = 0$, temos $P = T$.

Note, então, o movimento realizado pelo círculo de raio b e alguns pontos importantes:

Figura 15: Construção da hipociclóide



Fonte: Gonçalves e Flemming (2007)

É possível relacionar os arcos AT e PT de modo que:

$$at = b\alpha$$

o ângulo de apoio será dado por:

$$\beta = \alpha - t = \frac{a}{b}t - t = \left(\frac{a-b}{b}\right)t$$

Nesta construção então, podemos identificar o $x(t)$ e $y(t)$ da parametrização de modo que:

$$x(t) = \overline{OB} + \overline{BM} = (a-b)\cos t + b \cos \frac{(a-b)}{b}t$$

$$y(t) = \overline{PM} = \overline{BN} = \overline{BC} - \overline{CN} = (a-b)\text{sent} - b \text{sen} \frac{(a-b)}{b} t$$

Portanto,

$$\vec{r}(t) = \left((a-b)\text{cost} + b \cos \frac{(a-b)}{b} t, (a-b)\text{sent} - b \text{sen} \frac{(a-b)}{b} t \right)$$

Remetendo-se a um caso em particular, quando $b = \frac{1}{4}a$:

$$\vec{r}(t) = \left(\left(a - \frac{1}{4}a \right) \text{cost} + \frac{1}{4}a \cos \frac{\left(a - \frac{1}{4}a \right)}{\frac{1}{4}a} t, \left(a - \frac{1}{4}a \right) \text{sent} - \frac{1}{4}a \text{sen} \frac{\left(a - \frac{1}{4}a \right)}{\frac{1}{4}a} t \right) \Rightarrow$$

$$\vec{r}(t) = \left(\left(\frac{3}{4}a \text{cost} \right) + \frac{1}{4}a \cos(3t), \left(\frac{3}{4}a \text{sent} \right) - \frac{1}{4}a \text{sen}(3t) \right) \Rightarrow$$

$$\vec{r}(t) = \frac{1}{4} \left((3a \text{cost}) + a \cos(3t), (3a \text{sent}) - a \text{sen}(3t) \right)$$

De modo que:

$$\cos(3t) = 4\cos^3 t - 3\text{cost} \quad \text{e} \quad \text{sen}(3t) = 3\text{sent} - 4\text{sen}^3 t$$

Logo,

$$\vec{r}(t) = \frac{1}{4} \left((3a \text{cost}) + a \cos(3t), (3a \text{sent}) - a \text{sen}(3t) \right) \Rightarrow$$

$$\vec{r}(t) = \frac{1}{4} \left((3a \text{cost}) + a (4\cos^3 t - 3\text{cost}), (3a \text{sent}) - a (3\text{sent} - 4\text{sen}^3 t) \right) \Rightarrow$$

$$\vec{r}(t) = \frac{1}{4} (3a \text{cost} + 4a\cos^3 t - 3a\text{cost}, 3a \text{sent} - 3a\text{sent} + 4a\text{sen}^3 t) \Rightarrow$$

$$\vec{r}(t) = \frac{1}{4} (4a\cos^3 t, 4a\text{sen}^3 t) = (a\cos^3 t, a\text{sen}^3 t)$$

Denomina-se tal hipociclóide de *quatro cúspides*.

Exemplo 8:

Desenvolver a função vetorial de uma hipociclóide construído pelo movimento de um círculo que representa $\frac{1}{4}$ do raio do círculo maior que mede 4 u.c.

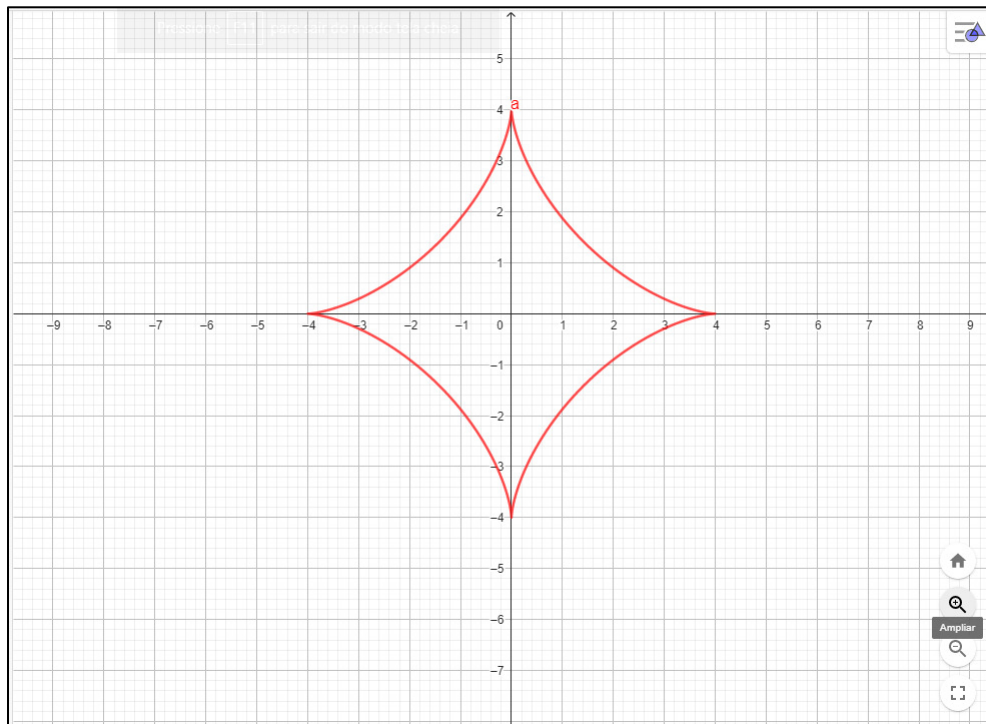
Solução:

Utilizando a descrição da questão sabemos que trata-se de uma hipociclóide de quatro cúspides realizada em um círculo de raio 4.

Logo, sua parametrização é dada por:

$$\vec{r}(t) = (a \cos^3 t, a \sin^3 t) = (4 \cos^3 t, 4 \sin^3 t)$$

Figura 16: Representação da hipociclóide parametrizada no plano



Fonte: Autoria Própria, Produzido no Geogebra.

2.2 CAMPOS ESCALARES

Segundo Sauter, Azevedo e Zonger (2022), campos escalares são funções cuja imagem é composta de números reais, isto é, escalares. De acordo com Fabbri (2011, p. 01) “campo é uma grandeza física distribuída no espaço, quando esta grandeza pode ser descrita em um único número, dizemos que se trata de um campo escalar”.

Definição 1:

Um campo escalar no plano é uma função,

$$f : D \subset \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$$

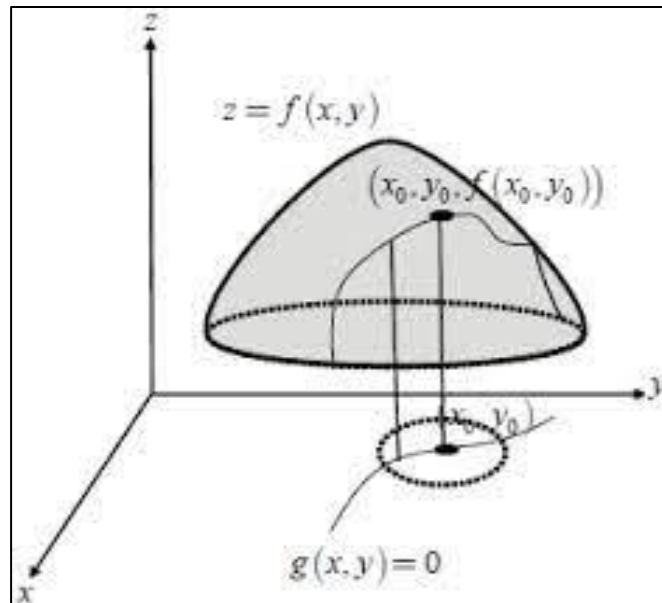
$$(x, y) \mapsto f(x, y)$$

Analogamente, um campo escalar no espaço é uma função,

$$f : G \subset \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}$$

$$(x, y, z) \mapsto f(x, y, z)$$

Figura 17: Extremos Relativos de um Campo Escalar



Fonte: Rodas5 Matemática, 2023.

Os campos escalares são capazes de descrever fenômenos tais como: temperatura, pressão, energia potencial, potencial elétrico, potencial magnético, elevação em um mapa, precipitação anual em um mapa e precipitação em uma estação.

São exemplos de campos escalares, de acordo com Sauter, Azevedo e Zonger (2022, p.37):

$$f(x, y, z) = 100 + 20e^{-\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$

$$f(x, y, z) = \vec{r} \cdot \vec{r} = x^2 + y^2 + z^2, \text{ em que } \vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$

$$f(x, y) = \sinh(x^2 + y^2).$$

As funções que descrevem os campos escalares acima tratam-se de conteúdos que envolvem: produto escalar ou interno, norma de um vetor e funções hiperbólicas.

Exemplo 9:

Vamos construir o campo escalar dado pela função $f(x, y) = (x^2 + y^2)$.

Solução:

A Tabela a seguir mostra os valores obtidos, mediante os seguintes vetores:

Tabela 1: Construção do Campo Escalar

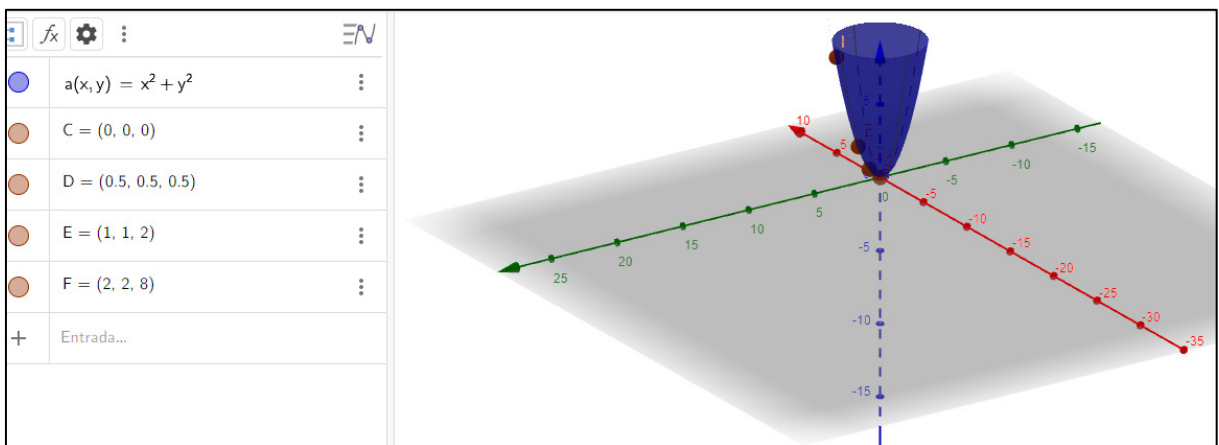
(x,y)	x	y	$f(x,y)$
C(0,0)	0	0	0
(0,25;0,25)	0,25	0,25	0,125
D(0,5;0,5)	0,5	0,5	0,5
(0,75;0,75)	0,75	0,75	1,125
E(1,1)	1	1	2
(1,5;1,5)	1,5	1,5	4,5
F(2,2)	2	2	8

Fonte: Autoria Própria

Utilizando-se dos dados obtidos, sempre adotando pontos importantes, é possível, principalmente com o auxílio da utilização de um software computacional construir o campo escalar estudado, como é o caso do exemplo anterior.

Na Figura a seguir é possível visualizar parte do campo escalar $f(x, y)$ e sua faixa de domínio, assim como pontos significativos que são descritos nas linhas em marrom da Tabela 1, pontos C,D, E e F.

Figura 18: Campo Escalar representado no Geogebra



Fonte: Autoria Própria, Produzido no Geogebra.

2.3 CAMPOS VETORIAIS

Campos Vetoriais são descritos como sendo, de acordo com Bianchini (2022, p. 57),

Definição 2:

Um campo vetorial em $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^2$ é uma função $F : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}^2$ que associa a cada ponto $(x, y) \in \mathcal{D}$ um único vetor $\vec{F}(x, y)$ de \mathbb{R}^2 . Como $\vec{F}(x, y)$ é um vetor de \mathbb{R}^2 , se costuma escrevê-lo em termos de suas componentes,

$$\vec{F}(x, y) = P(x, y)\vec{i} + Q(x, y)\vec{j} = (P(x, y), Q(x, y))$$

ou, ainda, de forma reduzida,

$$\vec{F} = (P, Q)$$

Similarmente, se $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^3$, um campo vetorial em \mathcal{D} é uma função F que associa a cada ponto (x, y, z) de \mathcal{D} um vetor $\vec{F}(x, y, z)$ de \mathbb{R}^3 . Ele pode ser descrito em termos de suas componentes P, Q e R como,

$$\vec{F}(x, y, z) = P(x, y, z)\vec{i} + Q(x, y, z)\vec{j} + R(x, y, z)\vec{k} = (P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z))$$

ou simplesmente,

$$\vec{F} = (P, Q, R)$$

São exemplos de campos vetoriais, segundo Sauter, Azevedo e Zonger (2022):

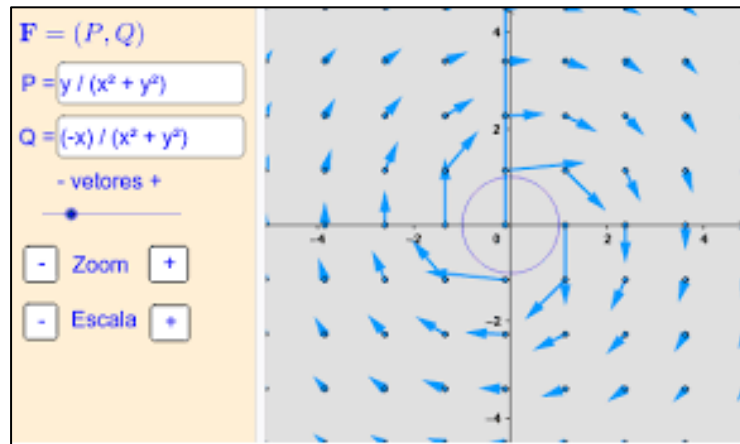
$$\vec{F}(x, y, z) = x\vec{i} + y\vec{j} - z\vec{k}$$

$$\vec{F}(x, y, z) = \vec{r} \times \vec{r}$$

De modo que as funções acima trata-se de *normas de um vetor* e de um *produto vetorial*.

Fabri (2011, p.01) afirma que “um campo vetorial descreve como uma grandeza física de grandeza vetorial se distribui pelo espaço.”, citando alguns exemplos como “a distribuição da velocidade da água em um rio descrita por uma função $\vec{V}(P)$. O Campo Elétrico em cada ponto P de um espaço pode ser descrito por uma função $\vec{E}(P)$ ”.

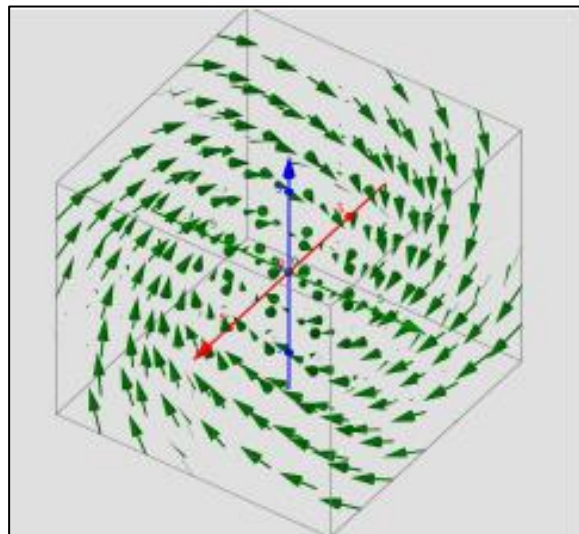
Segundo Pinto (2005), “dizemos que um campo vetorial $\vec{F} : D \rightarrow \mathbb{R}^m$, $D \subseteq \mathbb{R}^n$, é **contínuo** se suas componentes forem contínuas”.

Figura 19: Campo Vetorial no plano - Geogebra

Fonte: Geogebra, 2023

Observe o seguinte campo vetorial e sua representação,

$$\vec{F}(x, y, z) = y\vec{i} + z\vec{j} + x\vec{k}$$

Figura 20: Campo vetorial definido no \mathbb{R}^3 

Fonte : James Stewart, Calculus, 2016.

O processo de representação de campos vetoriais segue um padrão não homogêneo, uma vez que:

São tarefas um tanto quanto cansativa para fazê-las manualmente, pois teríamos que desenhar dezenas ou centenas de vetores pontualmente, dependendo do campo vetorial, para se ter ideia do seu comportamento. Assim, usualmente se utiliza programas de computador para gerar rapidamente uma representação gráfica e

modificá-la de modo a se ter uma boa ideia do comportamento de tal campo (BIANCHINI, 2022, p. 57).

Deste modo, sabe-se que, a representação de um dado campo vetorial, segue a partir de um conjunto de setas de pontos $P(x, y, z)$, em que seu comprimento, direção e sentido dependem de $\vec{F}(x, y, z)$. Para tal, os pontos adotados são atribuídos de forma arbitrária, porém estratégica a fim de possibilitar a visualização do campo vetorial. (SAUTER; AZEVEDO; ZONGER, 2022).

Exemplo 10:

Admita o seguinte campo vetorial $\vec{F}(x, y) = \frac{-y}{\sqrt{x^2+y^2}}\vec{i} + \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\vec{j}$. Esboçar sua representação geométrica.

Solução:

Utilizando a metodologia da adoção de pontos estratégicos, monta-se a seguinte Tabela:

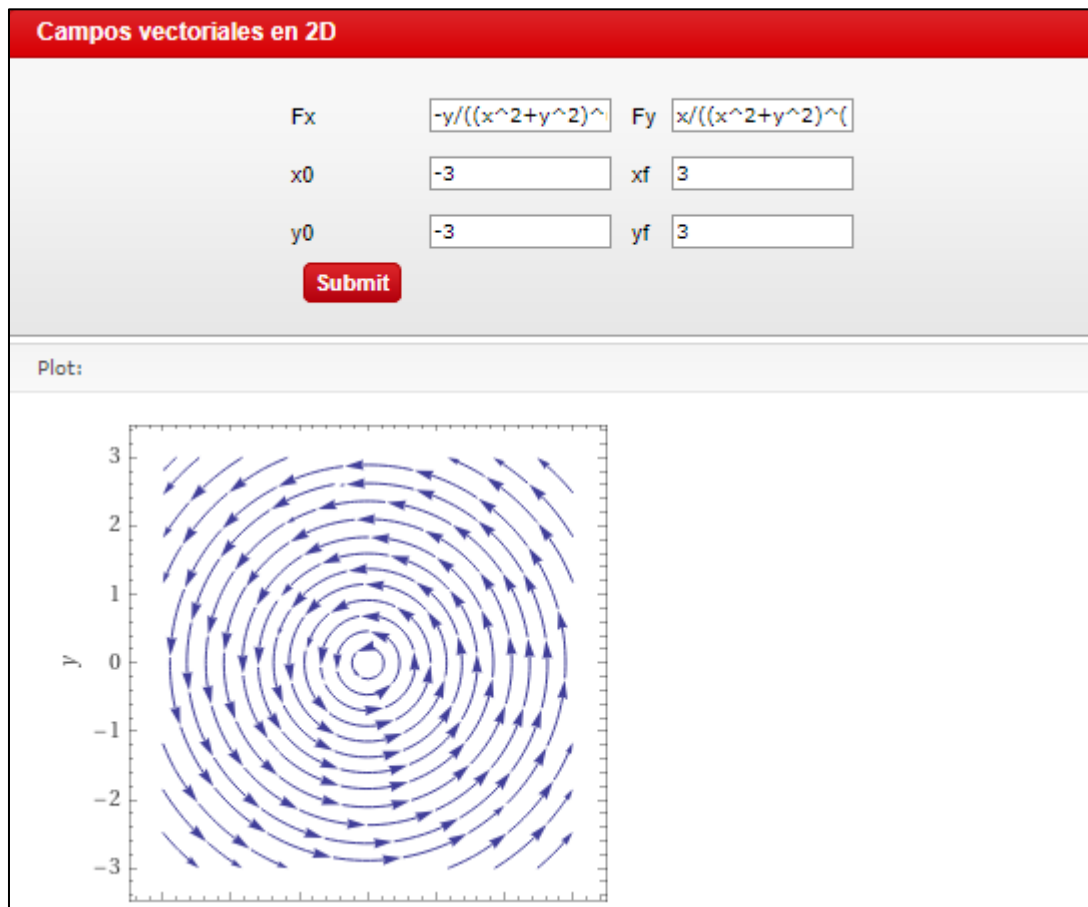
Tabela 2: Construção do Campo Vetorial

x	y	P(x,y)	Q(x,y)
0,5	0,5	-0,71	0,71
1	1	-0,71	0,71
1,5	1,5	-0,71	0,71
2	0	0	1
3	0	0	1
0	3	-1	0
0	2	-1	0
-1	1	-0,71	-0,71
-2	-2	0,71	-0,71
-2	0	0	-1
-3	0	0	-1

Fonte: Autoria Própria

O comportamento desse campo vetorial é de extrema importância, pois explica, de forma sucinta, propriedades de inúmeros campos vetoriais, seus componentes, estendendo-se para campos similares. Ao analisar os dados obtidos e com auxílio do software WolframAlpha, é possível obter o seguinte Campo Vetorial, mencionado no material de Gonçalves e Flemming (2007):

Figura 21: Representação Geométrica de um Campo Vetorial



Fonte: Aplicativo Online WolframAlpha, 2023.

2.4 CAMPOS SIGNIFICATIVOS

Existem alguns campos que são significativos em relação ao seu processo de construção, uma vez que são obtidos por operações realizadas por outros campos, e sua concepção pode caracterizar inúmeros comportamentos pontuais e genéricos de seus constituintes, que são essenciais para diversas áreas do conhecimento, como o cálculo vetorial em mecânica dos fluidos e em eletricidade e magnetismo. Tais operações podem gerar tanto um *Campo Escalar* quanto um *Campo Vetorial* (Stewart, 2016, p. 977).

2.4.1 Campo Gradiente

Um *Campo Gradiente* é um campo obtido pela operação realizada em um campo escalar que gera um campo vetorial ao relacionarmos este com um operador, tal conceito é diretamente descrito, por Pinto (2005):

Definição 3:

Seja $f: \mathcal{D} \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ um campo escalar definido neste conjunto $(x, y, z) \rightarrow f(x, y, z)$ e de classe C^1 (de modo que as derivadas de primeira ordem existem e são contínuas), o gradiente de f é designador por ∇f , e é o campo definido por, abreviadamente:

$$\nabla f(x, y, z) = \frac{\partial f}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial f}{\partial z} \vec{k}$$

Portanto, a partir do campo escalar f é possível produzir o campo vetorial gradiente ∇f .

Exemplo 11:

Dado que,

$$f(x, y, z) = x^3 y^2 + \frac{1}{z^2 + 1}$$

Calcular o Campo Gradiente de tal campo.

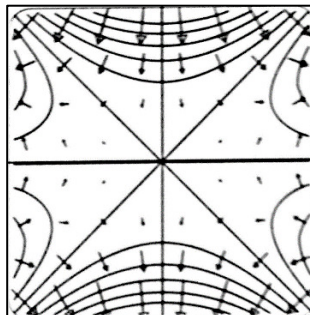
Solução:

$$\nabla f(x, y, z) = \frac{\partial f}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial f}{\partial z} \vec{k} = (3x^2 y^2) \vec{i} + (2x^3 y) \vec{j} - \frac{2z}{(z^2 + 1)^2} \vec{k}$$

O estudo do gradiente de uma função é capaz de caracterizar o comportamento da curva em diversos pontos desta, visto que, mediante concepções de Stewart (2016), o Campo Vetorial Gradiente é capaz de mostrar pontos da curva onde suas curvas de nível estão mais próximas ou mais distantes entre si, por meio da magnitude de seus vetores gradientes. No Campo Gradiente de um campo escalar também é possível perceber que estes são perpendiculares as curvas de nível.

Observe na Figura a seguir que possui o campo vetorial gradiente de $f(x, y) = x^2 y - y^3$

Figura 22: Campo Gradiente de um campo escalar.



Fonte: Stewart, 2016.

$$\nabla f(x, y) = \frac{\partial f}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y} \vec{j} = (2xy) \vec{i} + (x^2 - 3y^2) \vec{j}$$

2.4.2 Campo Vetorial Conservativo

Em relação ao Campo Gradiente, Stewart (2016) ainda afirma que “Um campo vetorial \vec{F} é chamado *campo vetorial conservativo* se ele for o gradiente de alguma função escalar, ou seja, se existir f tal que $\vec{F} = \nabla f$. Neste caso, f é denominada função potencial de \vec{F} ”.

A importância da concepção do *campo vetorial conservativo* reside no fato que, se uma função f é uma função potencial de um campo vetorial, então é possível calcular todas as integrais de linha do domínio de \vec{F} sobre qualquer caminho entre dois pontos de seu domínio. (Thomas, 2012, p. 382), recurso que abordaremos mais à frente.

Exemplo 12:

Calcular uma função potencial f do seguinte campo vetorial \vec{F} :

$$\vec{F} = (4x + 5yz) \vec{i} + 5xz \vec{j} + 5xy \vec{k}$$

Solução:

Note que

$$\vec{F} = (4x + 5yz) \vec{i} + 5xz \vec{j} + 5xy \vec{k} = \nabla f(x, y, z) = \frac{\partial f}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial f}{\partial z} \vec{k}$$

Logo:

$$(4x + 5yz) \vec{i} = \frac{\partial f}{\partial x} \vec{i}$$

Portanto,

$$(4x + 5yz) = \frac{\partial f}{\partial x} \Rightarrow \partial f = (4x + 5yz) \partial x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int \partial f = \int (4x + 5yz) \partial x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f = 2x^2 + 5xyz + C_{(y,z)}$$

Temos então, que obter o valor de $C_{(y,z)}$ para definirmos f .

Se,

$$f = 2x^2 + 5xyz + C_{(y,z)}$$

Então:

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 0 + 5xz + \frac{\partial C_{(y,z)}}{\partial y} \quad (1)$$

Como dito acima, vale que:

$$5xz \vec{j} = \frac{\partial f}{\partial y} \vec{j} \Rightarrow 5xz = \frac{\partial f}{\partial y} \quad (2)$$

Igualando (1) e (2),

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 5xz + \frac{\partial C_{(y,z)}}{\partial y} = 5xz \Rightarrow \frac{\partial C_{(y,z)}}{\partial y} = 0$$

Logo, uma das funções potenciais para o campo vetorial \vec{F} é:

$$f = 2x^2 + 5xyz$$

E isso mostra que o campo vetorial \vec{F} é um *Campo Vetorial Conservativo*.

2.4.3 Campo Divergente

A concepção de *Campo Divergente* remete, segundo as concepções de Fabbri (2011), a ideia de um campo escalar E definido a partir de um Campo Vetorial \vec{F} . Ou ainda, de acordo com o material de Pinto (2005):

Definição 4:

Seja $f: \mathcal{D} \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ um campo vetorial dado por:

$$\vec{F}(x, y, z) = P(x, y, z)\vec{i} + Q(x, y, z)\vec{j} + R(x, y, z)\vec{k}.$$

O divergente de \vec{F} é um Campo Escalar definido a partir de $\nabla \cdot \vec{F}$ designado por $div \vec{F}$ e definido por, abreviadamente:

$$div \vec{F} = \nabla \cdot \vec{F} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}$$

Exemplo 13:

Dado que,

$$\vec{F}(x, y, z) = (x^2 + y)\vec{i} + (y^2 + z)\vec{j} + (z^2 + x)\vec{k}$$

Calcular o Campo Divergente de tal campo.

Solução:

$$\operatorname{div}\vec{F} = \frac{\partial P}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial Q}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial R}{\partial z}\vec{k} = 2x + 2y + 2z = 2(x + y + z)$$

A fim de fixar ainda mais tal conceito, pode-se ressaltar que há uma relação formal entre a ideia de campo divergente e campo rotacional, uma vez que tais conceitos operam de forma a apresentar certas características, tais como a incompressibilidade de determinados fluidos, medindo sua divergência em determinados pontos de seu volume. Pois se $\operatorname{div}\vec{F} = 0$, então F é dito incompressível.

2.4.4 Campo Rotacional

A noção de **Campo Rotacional** exprime uma operação com um dado campo vetorial, resultando em um Campo Vetorial. Tal procedimento é descrito por Stewart (2016), afirmando o seguinte:

Definição 5:

Se $\vec{F} = P\vec{i} + Q\vec{j} + R\vec{k}$ é um campo vetorial em \mathbb{R}^3 e as derivadas parciais de P , Q e R existem, então o rotacional de \vec{F} é o campo vetorial em \mathbb{R}^3 definido por:

$$\operatorname{rot}\vec{F} = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)\vec{i} + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)\vec{j} + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\vec{k}$$

É válido que,

$$\operatorname{rot}\vec{F} = \nabla \times \vec{F} = \det \begin{pmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{pmatrix}$$

Algumas relações devem ser observadas a respeito do conceito do rotacional de um campo vetorial, deste modo, consideramos o exemplo a seguir do cálculo do rotacional de um dado campo vetorial e algumas considerações deste relacionado com conceitos anteriores.

Exemplo 14:

Dado que,

$$\vec{F}(x, y, z) = xz \vec{i} + xyz \vec{j} - y^2 \vec{k}$$

Calcular o Campo Rotacional de tal campo.

Solução:

$$\begin{aligned} \text{rot} \vec{F} &= \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) \vec{i} + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) \vec{j} + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \vec{k} \\ &= (-2y - xy) \vec{i} + (x - 0) \vec{j} + (yz - 0) \vec{k} \\ &= -y(2 + x) \vec{i} + x \vec{j} + yz \vec{k} \end{aligned}$$

Dentre as considerações supracitadas, consiste uma outra forma de determinarmos se um campo vetorial é conservativo, no que está relacionado pelo rotacional deste campo, pois, se \vec{F} é conservativo, então $\text{rot} \vec{F} = 0$.

Exemplo 15:

Determinar se o campo vetorial \vec{F} é conservativo ou não. Se for conservativo, determine uma função f tal que $\vec{F} = \nabla f$.

$$\vec{F}(x, y, z) = y^2 z^3 \vec{i} + 2xyz^3 \vec{j} + 3xy^2 z^2 \vec{k}$$

Solução

O campo vetorial será conservativo se:

$$\text{rot} \vec{F} = 0$$

Temos então que:

$$\text{rot} \vec{F} = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) \vec{i} + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) \vec{j} + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \vec{k}$$

Deste modo,

$$\begin{aligned} \text{rot} \vec{F} &= (6xyz^2 - 6xyz^2) \vec{i} + (3y^2 z^2 - 3y^2 z^2) \vec{j} + (2yz^3 - 2yz^3) \vec{k} \\ \text{rot} \vec{F} &= 0 \vec{i} + 0 \vec{j} + 0 \vec{k} = \mathbf{0} \end{aligned}$$

3 INTEGRAL DE LINHA

O estudo de Integrais de Linha vislumbra diversas vertentes que, por sua vez, podem descrever inúmeros comportamentos de cunho matemático, nota-se ainda que:

“A teoria resultante das integrais de linha e de superfície fornecem ferramentas matemáticas poderosas para a ciência e a engenharia. As integrais de linha são utilizadas para encontrar o trabalho realizado por uma força ao movimentar um objeto ao longo de uma trajetória e para encontrar uma massa de um fio curvado com densidade variável”. (THOMAS, 2012, p. 362).

Para tanto, aborda-se as duas vertentes de Integrais de Linha necessárias para este objeto de estudo: Integrais de Linhas de Campos Escalares e Integrais de Linha de Campos Vetoriais e suas respectivas aplicações.

3.1 INTEGRAL DE LINHA DE CAMPOS ESCALARES

A concepção de Integral de Linha de Campos Escalares é mencionada na pesquisa de Gonçalves e Flemming (2007), onde afirmam que o tal conceito constitui uma generalização simples e natural do conceito da Integral Definida, a fim de facilitar sua resolução.

Neste viés, pode-se complementar as concepções acerca do assunto, ressaltando que “para o cálculo da Integral de Linha, a mesma será reduzida a uma Integral normal, deste modo, será utilizada a noção do comprimento de arco”. (ARAÚJO, 2015, p.17).

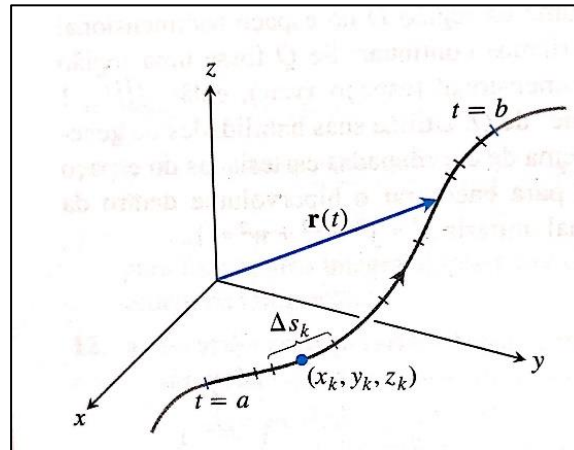
A fim de desenvolver esta ideia, inicialmente, notou-se que a Integral de Linha descrevia, segundo Thomas (2012), a caracterização de determinados comportamentos em um intervalo específico sobre uma Curva suave C fornecida, precisando utilizar a noção mais geral de Integral, ao supor que uma dada curva C parametrizada, dentro de um domínio f , dada por:

$$\vec{r}(t) = g(t)\vec{i} + h(t)\vec{j} + k(t)\vec{k}$$

Que fornecerá a seguinte relação, mediante uma função composta $f(g(t), h(t), k(t))$:

$$S_n = \sum_{k=1}^n f(x_k, y_k, z_k) \Delta s_k$$

De modo que Δs_k é o comprimento do subarco típico e que a curva C foi particionada em número finito n de subarcos, na notação acima realizou-se a soma em um ponto (x_k, y_k, z_k) dado.

Figura 23: Curva particionada em pequenos arcos

Fonte : Thomas, 2018.

Segue, portanto, a seguinte definição, mediante Thomas (2012):

Definição 6:

Se f é definida em uma curva C fornecida parametricamente por $\vec{r}(t) = f(t)\vec{i} + g(t)\vec{j} + h(t)\vec{k}$, $a \leq t \leq b$, então a integral de linha de f sobre C é:

$$\int_C f(x, y, z) ds = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n f(x_k, y_k, z_k) \Delta s_k$$

Contanto que esse limite exista.

Todavia, é possível desenvolver tal concepção, a fim de obter uma forma mais aplicada da seguinte maneira:

Desenvolvimento 1

Dado que,

$$\int_C f(x, y, z) ds = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n f(x_k, y_k, z_k) \Delta s_k$$

Então, é válido que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n f(x_k, y_k, z_k) \Delta s_k = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n f(x_k, y_k, z_k) \cdot \| r'(t_k) \| \Delta t_k$$

E uma vez que $f(P_k) = f(x(t), y(t), z(t))$, com t definido em $[a, b]$:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n f(x_k, y_k, z_k) \cdot \|r'(t_k)\| \Delta t_k = \int_a^b f(x(t), y(t), z(t)) \cdot \|r'(t)\| dt$$

Ou ainda escrevemos simplesmente por, se f é contínua e r é de classe C^1 :

$$\begin{aligned} \int_C f(x, y, z) ds &= \int_a^b f(x(t), y(t), z(t)) \cdot \|r'(t)\| dt \\ &= \int_a^b f(r(t)) \cdot \|r'(t)\| dt \end{aligned}$$

Portanto, é possível afirmar que

“As integrais de linha são as infinitas somas, e por isso integral, de pequenas variações da função multiplicadas pelo comprimento de arco “andando” com essas variações. Com isso, podemos introduzir o conceito de comprimento de arco na integral de Linha, e assim, reduzi-la a uma integral simples, que irá variar de acordo com a parametrização da curva C ”. (ARAÚJO, 2015, p.18).

A forma expandida da Integral de Linha de um Campo Escalar é ainda mais aplicável, uma vez que, pode ser desenvolvida da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} &\int_a^b f(x(t), y(t), z(t)) \cdot \|r'(t)\| dt \\ &= \int_a^b f(x(t), y(t), z(t)) \cdot \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2} dt \\ &= \int_a^b f(x(t), y(t), z(t)) \cdot \sqrt{\left(\left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial t}\right)^2\right)} dt \end{aligned}$$

Observações:

- Se a curva C for fechada, isto é, $\vec{r}(a) = \vec{r}(b)$, então a integral de linha de \vec{F} ao longo da curva C é denotada por:

$$\oint_C \vec{F} ds$$

Exemplo 16:

Seja C a intersecção das superfícies $x + y = 2$ e $x^2 + y^2 + z^2 = 2(x + y)$, determine $\int_C (x + y) ds$.

Solução:

A intersecção das superfícies será dada pelo sistema a seguir:

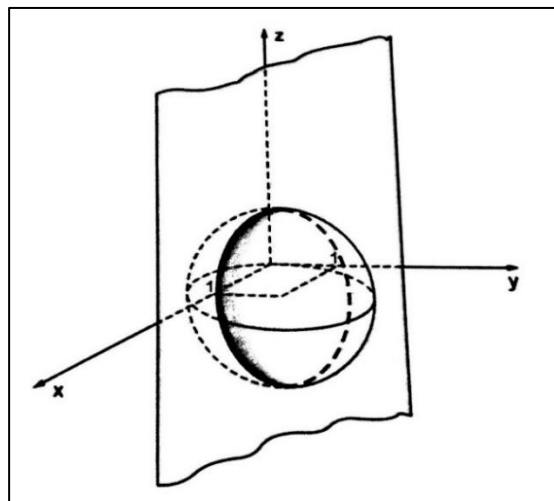
$$\begin{cases} x + y = 2 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 2(x + y) \end{cases}$$

Portanto, temos que:

$$x = (2 - y)$$

$$x^2 + y^2 + z^2 = 2(x + y) = 2 \cdot 2 = 4 \Rightarrow x^2 + y^2 + z^2 = 4$$

Figura 24: Representação da Intersecção das Superfícies



Gonçalves e Flemming (2007)

Note ainda que:

$$x^2 + y^2 + z^2 = 4$$

$$\Rightarrow (2 - y)^2 + y^2 + z^2 = 4$$

$$\Rightarrow (4 - 4y + y^2) + y^2 + z^2 = 4$$

$$\Rightarrow 2y^2 - 4y + z^2 = 0$$

Nota-se que é uma elipse, procuramos sua equação reduzida:

$$\begin{aligned} 2y^2 - 4y + z^2 = 0 &\Rightarrow 2(y^2 - 2y) + z^2 = 0 \\ &\Rightarrow 2(y - 1)^2 - 2 + z^2 = 0 \\ &\Rightarrow 2(y - 1)^2 + z^2 = 2 \\ &\Rightarrow (y - 1)^2 + \frac{z^2}{2} = 1 \end{aligned}$$

Sobre a parametrização da elipse, temos que:

$$y = 1 + \cos t \text{ e } z = \sqrt{2} \operatorname{sen} t, \quad t \in [0, 2\pi).$$

Sabe-se que $x + y = 2$, portanto:

$$x = (2 - y) = 2 - (1 + \cos t) = 1 - \cos t$$

Neste caso,

$$\mathbf{r}(t) = (1 - \cos t, 1 + \cos t, \sqrt{2} \operatorname{sen} t)$$

É válido ainda que:

$$\begin{aligned} \mathbf{r}'(t) &= (\operatorname{sen} t, -\operatorname{sen} t, \sqrt{2} \cos t) \text{ e} \\ \|\mathbf{r}'(t)\| &= \sqrt{((\operatorname{sen} t)^2 + (-\operatorname{sen} t)^2 + (\sqrt{2} \cos t)^2)} \\ &\Rightarrow \|\mathbf{r}'(t)\| = \sqrt{(2 \operatorname{sen}^2 t + 2 \cos^2 t)} = \sqrt{2} \end{aligned}$$

Finalmente, a Integral de Linha da Curva é dada por:

$$\begin{aligned} &\int_a^b \mathbf{f}(\mathbf{r}(t)) \cdot \|\mathbf{r}'(t)\| dt \\ \int_C (x + y) ds &= \int_0^{2\pi} ((1 - \cos t) + (1 + \cos t)) \cdot \sqrt{2} dt \\ &\Rightarrow \int_0^{2\pi} 2 \cdot \sqrt{2} dt = \int_0^{2\pi} 2 \cdot \sqrt{2} dt = 4\sqrt{2} \pi \end{aligned}$$

3.1.1 Uma abordagem sobre integrais de linha

As integrais de linha podem ser manuseadas de forma a obter integrais de linha de f ao longo de C em relação as coordenadas x, y e z , de modo que:

$$\int_C P(x, y, z) dx = \int_a^b f(x(t), y(t), z(t)) \cdot x'(t) dt$$

$$\int_C Q(x, y, z) dy = \int_a^b f(x(t), y(t), z(t)) \cdot y'(t) dt$$

$$\int_C R(x, y, z) dz = \int_a^b f(x(t), y(t), z(t)) \cdot z'(t) dt$$

Deste modo, é costume abreviar escrevendo:

$$\int_C f(x, y, z) ds = \int_C P(x, y, z) dx + \int_C Q(x, y, z) dy + \int_C R(x, y, z) dz$$

Ou ainda,

$$\int_C \mathbf{f}(x, y, z) \mathbf{ds} = \int_C P(x, y, z) dx + Q(x, y, z) dy + R(x, y, z) dz$$

3.1.2 Integral de Linha de curvas por partes

Suponha que C seja uma curva suave por partes, ou seja, C é definida através da união de um número finito de curvas suaves C_1, C_2, \dots, C_n , de modo que:

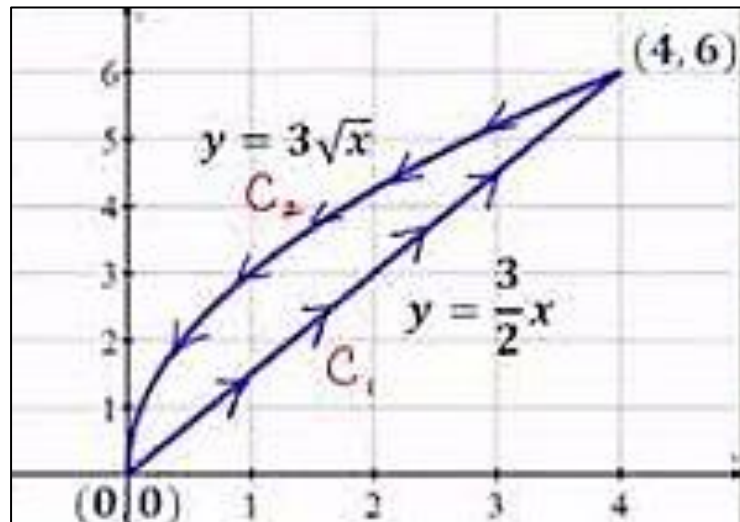
$$C = C_1 \cup C_2 \cup \dots \cup C_n$$

Neste caso, a integral de linha de f ao longo de C como a soma das integrais de f ao longo de cada parte suave de C :

$$\int_C f(x, y, z) ds = \int_{C_1} f(x, y, z) ds + \int_{C_2} f(x, y, z) ds + \dots + \int_{C_n} f(x, y, z) ds$$

Exemplo 17: Calcule a Integral de Linha $\int_C (y^2 + x) ds$ para a Curva da Figura 25.

Figura 25: Curva suave por partes



Fonte: Youtube, 2020.

Solução:

A fim de resolver esta Integral de Linha, considerando o que foi discutido no tópico 3.1.2, temos que:

$$\int_C (y^2 + x) ds = \int_{C_1} (y^2 + x) ds + \int_{C_2} (y^2 + x) ds$$

De modo que, utilizando as considerações do tópico 3.1.1, temos:

$$\int_C (y^2 + x) ds = \int_C y^2 dx + \int_C x dy$$

Portanto, relacionando essas duas informações

$$\int_C (y^2 + x) ds = \int_{C_1} y^2 dx + \int_{C_1} x dy + \int_{C_2} y^2 dx + \int_{C_2} x dy$$

É necessário obtermos as parametrizações das curvas por partes que compõe C . Logo, sobre C_1 é válido que se trata de uma **reta** que possui uma das parametrizações:

$$\mathbf{r}(t) = \left(t, \frac{3}{2}t \right) \text{ com } t \in [0,4]$$

Sendo,

$$r'(t) = (x'(t), y'(t)) = \left(1, \frac{3}{2}\right)$$

Logo, sobre C_2 é válido que se trata de uma *parábola* que possui uma das parametrizações:

$$r(t) = (t, 3\sqrt{t}) \text{ com } t \in [4, 0]$$

Neste caso,

$$r'(t) = (x'(t), y'(t)) = \left(1, \frac{3}{2\sqrt{t}}\right)$$

Portanto,

$$\int_C (y^2 + x) ds = \int_0^4 \left(\frac{3}{2}t\right)^2 \cdot 1 dt + \int_0^4 t \cdot \frac{3}{2} dt + \int_4^0 (3\sqrt{t})^2 \cdot 1 dt + \int_4^0 t \cdot \frac{3}{2\sqrt{t}} dt$$

Resolvendo,

$$\int_C (y^2 + x) ds = \frac{9}{4} \int_0^4 t^2 dt + \frac{3}{2} \cdot \int_0^4 t dt + 9 \cdot \int_4^0 t dt + \frac{3}{2} \cdot \int_4^0 \sqrt{t} dt$$

Ou seja,

$$\int_C (y^2 + x) ds = \frac{3}{4}(4^3 - 0^3) + \frac{3}{4}(4^2 - 0^2) + \frac{9}{2}(0^2 - 4^2) + (0 \cdot \sqrt{0} - 4\sqrt{4})$$

Logo,

$$\int_C (y^2 + x) ds = 48 + 12 - 72 - 8$$

Conclui-se que,

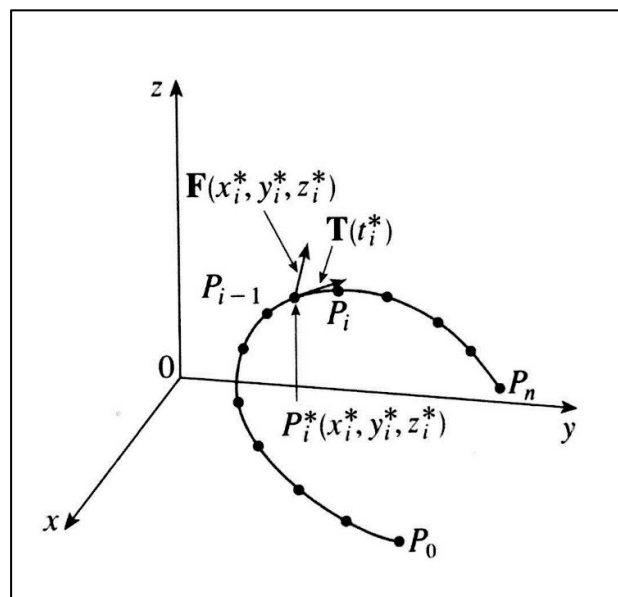
$$\int_C (y^2 + x) ds = 60 - 80 = -20$$

O valor apresentado indica o comportamento da curva e a influência que as curvas que a compõe possuem na quantificação, de modo geral este dado pode ser utilizado em aplicações.

3.2 INTEGRAL DE LINHA DE CAMPOS VETORIAIS

Em relação às Integrais de Linha para Campos Vetoriais, sabe-se que o desenvolvimento de sua concepção reside no fato de que “um campo vetorial é uma função que designa um vetor a cada ponto de seu domínio” (THOMAS, 2012, p. 369). O estudo de seu comportamento é analisado, no cálculo diferencial, por meio de interpretações acerca de inúmeros fenômenos, tal como o estudo de seu deslocamento.

Figura 26: Divisão da Curva em Subarcos, Interpretação Vetorial.



Fonte: Stewart, 2016.

Uma vez que, dizemos que a curva C é suave, ou lisa, se as componentes $x_1(t)$, $x_2(t), \dots, x_n(t)$ são funções com derivada contínua em um dado intervalo. Deste modo, mediante concepções de Anton, Bivens e Davis (2007), temos que:

Definição 7:

Se \vec{F} for um Campo Vetorial contínuo e C uma curva Lisa orientada, então a Integral de Linha de \vec{F} ao longo de C é dada por:

$$\int_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{T} \, ds = \int_C \left(\mathbf{F} \cdot \frac{d\mathbf{r}}{ds} \right) ds = \int_C \mathbf{F} \, d\mathbf{r}$$

Onde $\mathbf{T} = \frac{d\mathbf{r}}{ds} = \frac{\mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|}$ é o vetor unitário tangente à trajetória e $d\mathbf{r}$ é dado por:

$$d\mathbf{r} = dx\vec{i} + dy\vec{j} + dz\vec{k}$$

No que se refere as abordagens de Bianchini (2022), é válido ainda que:

$$\int_C \mathbf{F} d\mathbf{r} = \int_C P(x, y, z) dx + Q(x, y, z) dy + R(x, y, z) dz$$

Ou simplesmente,

$$\int_C \mathbf{F} d\mathbf{r} = \int_C P dx + Q dy + R dz$$

É nítido ainda que, ao realizarmos a parametrização da Curva C , pode-se obter a seguinte relação para a Integral de Linha de um Campo Vetorial:

Desenvolvimento 2:

Dado que,

$$\int_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{T} ds = \int_C \left(\mathbf{F} \cdot \frac{d\mathbf{r}}{ds} \right) ds = \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$

Portanto:

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_a^b \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \frac{d\mathbf{r}}{dt} dt$$

Todavia,

$$\int_a^b \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \frac{d\mathbf{r}}{dt} dt = \int_a^b \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t) dt$$

Ou ainda,

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_a^b \mathbf{F}(x(t), y(t), z(t)) \cdot (x'(t), y'(t), z'(t)) dt$$

Nessa perspectiva, é possível visualizar essa interpretação da Integral de Linha de Campos Vetoriais de modo que seja interpretada por um efeito prático, tal como “o trabalho total executado para mover uma partícula ao longo de uma trajetória espacial” (STEWART,2016, p. 959).

Exemplo 18:

Calcule $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$, e, que $\vec{F}(x, y, z) = z\vec{i} + xy\vec{j} - y^2\vec{k}$ ao longo da curva C dada por:

$$\vec{r}(t) = t^2\vec{i} + t\vec{j} + \sqrt{t}\vec{k}, 0 \leq t \leq 1.$$

Solução:

Temos que:

$$\vec{r}(t) = t^2\vec{i} + t\vec{j} + \sqrt{t}\vec{k}$$

Logo,

$$\vec{F}(r(t)) = \sqrt{t}\vec{i} + t \cdot t^2\vec{j} - (t)^2\vec{k} = \sqrt{t}\vec{i} + t^3\vec{j} - t^2\vec{k}$$

Onde,

$$\vec{r}'(t) = 2t\vec{i} + \vec{j} + \frac{1}{2\sqrt{t}}\vec{k}$$

Neste caso,

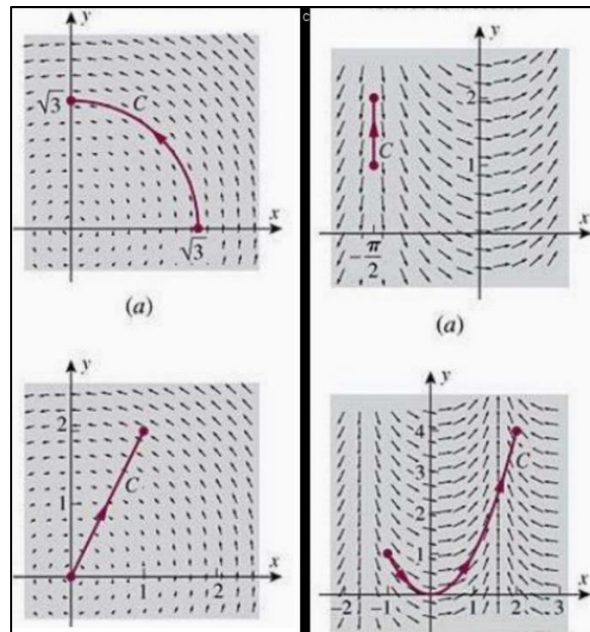
$$\begin{aligned} \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} &= \int_0^1 F(r(t)) \cdot r'(t) dt = \int_0^1 \left(2t \cdot \sqrt{t} + 1 \cdot t^3 + \frac{1}{2\sqrt{t}} \cdot (-t^2) \right) dt = \\ &= \int_0^1 \left(2t^{\frac{3}{2}} + t^3 - \frac{t^{\frac{3}{2}}}{2} \right) dt = \int_0^1 \left(\frac{3}{2}t^{\frac{3}{2}} + t^3 \right) dt = \\ &= \left[\frac{3}{2} \cdot \frac{2}{5} (1)^{\frac{5}{2}} + \frac{(1)^4}{4} \right] = \frac{3}{5} + \frac{1}{4} = \frac{12 + 5}{20} = \frac{17}{20} \end{aligned}$$

A análise do cálculo da Integral de Linha de um campo vetorial está direcionada ainda mais para o estudo da influência das curvas estudadas atuando em um campo vetorial, de modo que a orientação adotada para a curva caracteriza a quantificação do valor numérico para a Integral de Linha fornecida em um dado intervalo neste campo.

Conclui-se, portanto, que, dada uma curva orientada dentro de um campo vetorial, o valor da integral de linha nesta curva será positivo, se e somente se, ela não é uma curva por partes e segue a orientação deste campo vetorial.

Vamos verificar, portanto, o comportamento de uma curva C dentro de um campo vetorial \vec{F} definido, a fim de verificar se a Integral de Linha será positiva, negativa ou nula. É possível visualizar alguns comportamentos em alguns casos no Plano na Figura a seguir:

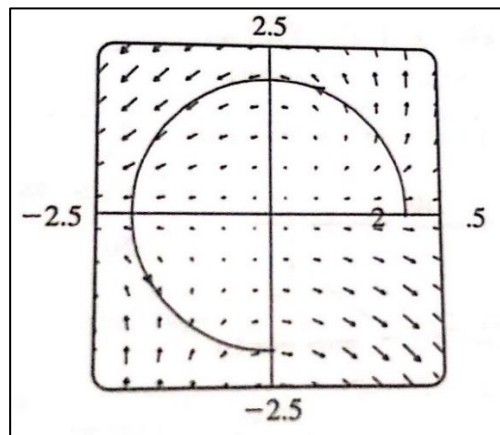
Figura 27: Curvas orientadas em Campos Vetoriais



Fonte: Anton, Bivens, Davis (2007), material editado.

Exemplo 19: Calcular a Integral de Linha $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$, onde $\vec{F}(x, y) = (x - y)\vec{i} + xy\vec{j}$, em que C é o arco de círculo $x^2 + y^2 = 4$ percorrido no sentido positivo de $(2, 0)$ a $(0, -2)$.

Figura 28: Curva traçada em um Campo Vetorial



Fonte: Stewart, 2016.

Solução:

Podemos fazer a parametrização da curva, que é descrita pela circunferência, da seguinte forma:

$$r(t) = (2 \cos \theta, 2 \sin \theta) \text{ com } \theta \in \left[0, \frac{3}{2}\pi\right]$$

Note ainda que,

$$r'(t) = (-2 \sin \theta, 2 \cos \theta)$$

Deste modo, sabemos que:

$$\int_C \mathbf{F} dr = \int_C P dx + Q dy + R dz$$

Neste caso,

$$\int_C \mathbf{F} dr = \int_C (x - y) dx + xy dy$$

Note que,

$$\int_C \mathbf{F} dr = \int_0^{\frac{3}{2}\pi} (2 \cos \theta - 2 \sin \theta) (-2 \sin \theta) dt + 2 \cos \theta \cdot 2 \sin \theta \cdot 2 \cos \theta d\theta$$

Desenvolvendo,

$$\begin{aligned} \int_C \mathbf{F} dr &= \int_0^{\frac{3}{2}\pi} -4 \sin \theta \cdot \cos \theta d\theta + 4 \sin^2 \theta d\theta + 8 \cdot \sin \theta \cdot \cos^2 \theta d\theta = \\ &= -2 \cdot \int_0^{\frac{3}{2}\pi} \sin(2\theta) d\theta + 4 \cdot \int_0^{\frac{3}{2}\pi} \frac{1 - \cos(2\theta)}{2} d\theta + 8 \cdot \int_0^{\frac{3}{2}\pi} \sin \theta \cdot \cos^2 \theta d\theta = \\ &= -2 \cdot \int_0^{\frac{3}{2}\pi} \sin(2\theta) d\theta + 2 \cdot \int_0^{\frac{3}{2}\pi} 1 d\theta - 2 \cdot \int_0^{\frac{3}{2}\pi} \cos(2\theta) d\theta + 8 \cdot \int_0^{\frac{3}{2}\pi} \sin \theta \cdot \cos^2 \theta d\theta \end{aligned}$$

Aplicando métodos de integração e os respectivos intervalos dentro das integrais definidas, temos:

$$\int_c \mathbf{F} \, dr = \left(\left(\cos\left(2 \cdot \frac{3}{2}\pi\right) - \cos(2 \cdot 0) \right) + 2 \cdot \left(\frac{3}{2}\pi - 0 \right) - \left(\sin\left(2 \cdot \frac{3}{2}\pi\right) - \sin(2 \cdot 0) \right) \right) - \frac{8}{3} \left(\cos^3\left(\frac{3}{2}\pi\right) - \cos^3(0) \right) =$$

$$= \int_c \mathbf{F} \, d\mathbf{r} = (-1 - 1) + 3\pi - 0 + \frac{8}{3} = 3\pi + \frac{2}{3}$$

Portanto, como $\int_c \mathbf{F} \, d\mathbf{r} > \mathbf{0}$, conclui-se que a curva está orientada positivamente em relação ao campo \vec{F} .

4 ALGUMAS APLICAÇÕES DA INTEGRAL DE LINHA.

Existem algumas aplicações práticas que constituem o desenvolvimento da concepção da Integral de Linha tanto para Campos Escalares, quanto Campos Vetoriais. Tais aplicações consistem no estudo de fenômenos que servem de parâmetro para o desenvolvimento de inúmeras áreas, baseando-se no Cálculo Vetorial.

4.1 O CÁLCULO DA MASSA TOTAL DE UM FIO

De acordo com estudos realizados, pode-se afirmar que “o cálculo da massa total de um molas e fios podem ser distribuídas ao longo de curvas lisas no espaço. A distribuição é descrita por uma função densidade $\delta(x, y, z)$ representando a massa por unidade de comprimento” (THOMAS, 2012, p. 364).

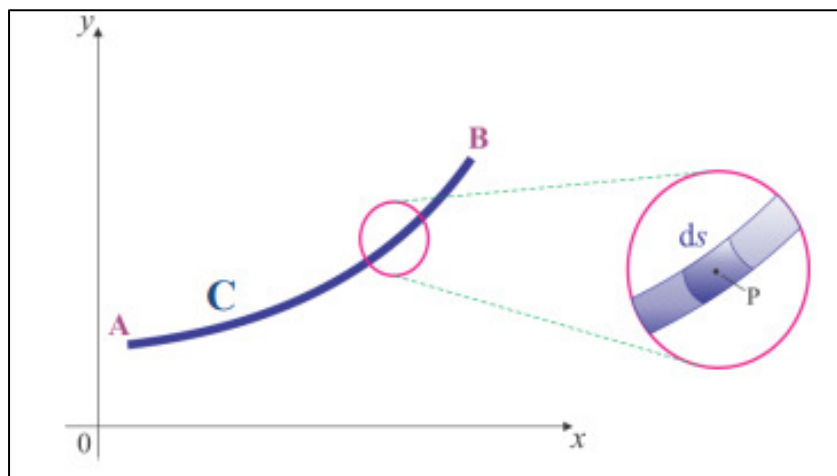
$$M = \int_C \delta(x, y, z) ds$$

Ao realizarmos a parametrização de tais curvas, a densidade é a função $\delta(x(t), y(t), z(t))$, sobre um intervalo $[a, b]$, e mediante a concepção do diferencial de comprimento de massa ds , a fórmula para a massa torna-se:

$$M = \int_a^b \delta(x(t), y(t), z(t)) \cdot \sqrt{\left(\left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial t}\right)^2\right)} dt$$

Podendo ser aplicadas também para hastes finas.

Figura 29: Representação de um fio no plano cartesiano



Fonte: USP, 2019

Aplicação 1:

Calcule a massa total de um arame no formato de uma parábola $y = x^2$ ao longo de $1 \leq x \leq 4$. Considere a densidade da massa dada por $\delta(x, y) = \frac{y}{x}$ em unidades de grama por centímetro.

Solução

Dado que,

$$M = \int_a^b \delta(x(t), y(t)) \cdot \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)^2} dt$$

Temos, neste caso

$$\text{Se } x = t, \text{ então } y = x^2 = t^2$$

Logo,

$$(x(t), y(t)) = (t, t^2)$$

$$(x'(t), y'(t)) = (1, 2t)$$

Note que,

$$\delta(x(t), y(t)) = \frac{y}{x} = \frac{t^2}{t} = t$$

Portanto, se $x = t$, então $1 \leq t \leq 4$. Daí:

$$M = \int_1^4 t \cdot \sqrt{((1)^2 + (2t)^2)} dt = \int_1^4 t \cdot \sqrt{4t^2 + 1} dt$$

Fazendo $4t^2 + 1 = u$, então $du = 8t dt$, se $t = 1$ logo $u = 5$, se $t = 4$ logo $u = 65$.

Neste caso:

$$\begin{aligned} \int_1^4 t \cdot \sqrt{4t^2 + 1} dt &= \frac{1}{8} \int_5^{65} \sqrt{u} du \\ &= \frac{1}{12} ((65)^{\frac{3}{2}} - 5^{\frac{3}{2}}) \approx 42,7 g \end{aligned}$$

Portanto a massa total do arame é de aproximadamente 42,7 gramas.

4.2 O CÁLCULO DO MOMENTO DE INÉRCIA EM RELAÇÃO AOS EIXOS

As Integrais de Linha com respeito ao comprimento de arco podem ser usadas para calcular o momento de inércia. Uma vez que $\delta(x, y, z)$ é a distância perpendicular de um ponto $(x, y, z) \in C$ a um dado eixo L . O momento de inércia I_L é dado por:

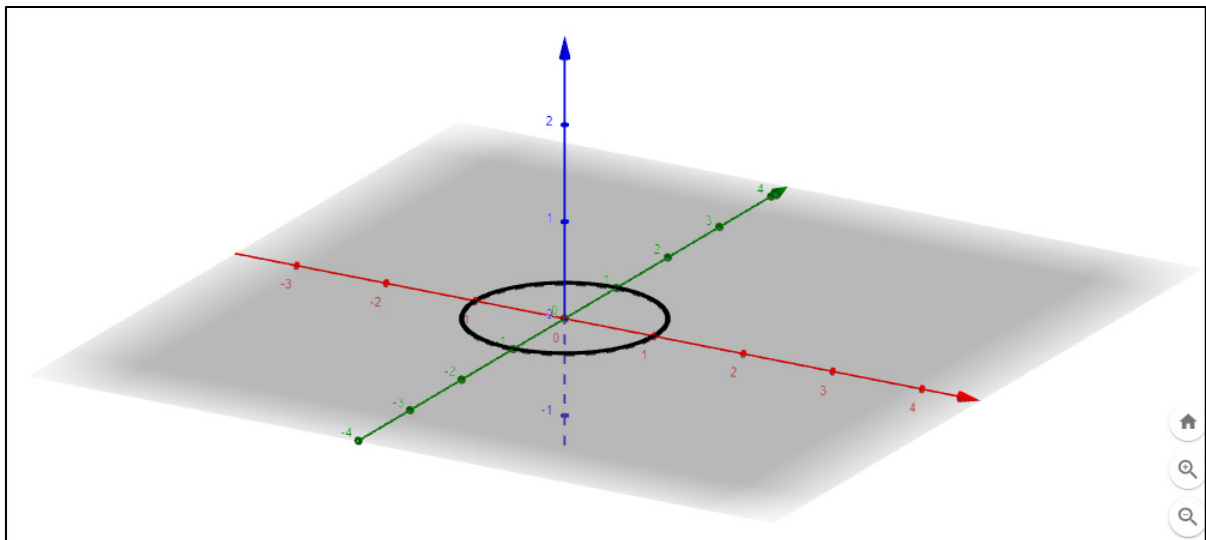
$$I_L = \int_C \delta^2(x, y, z) \rho(x, y, z) ds$$

Em que $\rho(x, y, z)$ denota a densidade em (x, y, z) .

Aplicação 3:

Calcule o momento de inércia de um fio homogêneo de massa M com forma de uma circunferência $x^2 + y^2 = R^2$ em relação ao eixo Oz .

Figura 30: Representação do fio homogêneo de raio unitário



Fonte: Autoria Própria, Produzida no Geogebra.

Solução

O momento de inércia é dado por:

$$I_L = \int_C \delta^2(x, y, z) \rho(x, y, z) ds$$

Neste caso, temos que $\delta^2(x, y, z) = x^2 + y^2$, pois queremos I_z . Sabe-se também que $\rho(x, y, z) = K$, uma vez que o enunciado afirma que é um fio homogêneo. A integral de linha que expressa o momento de inércia é, portanto:

$$I_z = K \cdot \int_C (x^2 + y^2) ds$$

Ao realizarmos a parametrização da curva, que é uma circunferência, teremos que:

$$\vec{r}(t) = (R \cos \theta, R \sin \theta, 0), 0 \leq t \leq 2\pi$$

Logo,

$$\vec{r}'(t) = (-R \sin, R \cos \theta, 0), 0 \leq t \leq 2\pi$$

Em que,

$$\|\vec{r}'(t)\| = \sqrt{(-R \sin)^2 + (R \cos \theta)^2 + 0^2} = R, 0 \leq t \leq 2\pi$$

Ao realizar as respectivas mudanças de variáveis dentro da Integral de Linha de um Campo Escalar a integral de linha será dada por

$$\begin{aligned} I_z &= K \cdot \int_C (x^2 + y^2) ds = K \cdot \int_0^{2\pi} R^2 \cdot (R dt) \Rightarrow \\ &\Rightarrow KR^3 \cdot \int_0^{2\pi} dt = 2\pi KR^3 \quad (1) \end{aligned}$$

Como o enunciado deseja o momento de Inércia em função da Massa e do Raio do objeto, devemos realizar o cálculo de sua massa. Portanto, sabe-se que:

$$\mathbf{M} = \int_C \rho(x, y, z) ds = KR \int_0^{2\pi} dt = \mathbf{2\pi KR} \quad (2)$$

Neste caso, Substituindo (2) em (1) temos:

$$I_z = 2\pi KR^3 = (\mathbf{2\pi KR})R^2 = \mathbf{MR^2}$$

4.3 O CÁLCULO DAS COORDENADAS DO CENTRO DE MASSA

O centro de massa e os momentos atuantes em um fio ou mola podem ser obtidos por meio da utilização da Integral de Linha. Uma vez que, os primeiros momentos em relação aos eixos coordenados são descritos por meio das seguintes integrais:

$$M_{yz} = \int_C x \delta ds \quad M_{xz} = \int_C y \delta ds \quad M_{xy} = \int_C z \delta ds$$

Os respectivos centros de massa, serão dados por:

$$\bar{x} = \frac{M_{yz}}{M} \quad \bar{y} = \frac{M_{xz}}{M} \quad \bar{z} = \frac{M_{xy}}{M}$$

Aplicação 2:

Um arco metálico fino, mais denso na base do que no topo, encontra-se ao longo do semicírculo $y^2 + z^2 = 1, z \geq 0$, no plano yz . Encontre o centro de massa do arco se a densidade no ponto (x, y, z) no arco for $\delta(x, y, z) = 2 - z$.

Solução

Dado que o arco se encontra no plano yz com sua massa distribuída simetricamente em relação ao eixo z , temos que $\bar{x} = \bar{y} = 0$. A fim de determinar \bar{z} , faremos a parametrização da circunferência da seguinte forma:

$$\mathbf{r}(t) = (\mathbf{0}, \cos t, \sin t), \quad 0 \leq t \leq \pi$$

Desta forma, é válido que:

$$M = \int_a^b \delta(x(t), y(t), z(t)) \cdot \sqrt{\left(\left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial t}\right)^2\right)} dt \Rightarrow$$

$$M = \int_0^\pi (2 - \sin t) \cdot \sqrt{(0^2 + (\cos t)^2 + (\sin t)^2)} dt \Rightarrow$$

$$M = \int_0^\pi (2 - \sin t) \cdot 1 dt = \int_0^\pi (2 - \sin t) dt \Rightarrow$$

$$\mathbf{M} = [2\pi + \cos\pi] - [2 \cdot 0 + \cos 0] = 2\pi - 1 - 1 = \mathbf{2\pi - 2}.$$

Portanto, é possível obter que:

$$M_{xy} = \int_C z \delta ds = \int_0^\pi \sin t (2 - \sin t) 1 dt \Rightarrow$$

$$M_{xy} = \int_0^\pi (2 \sin t - \sin^2 t) dt \Rightarrow$$

$$M_{xy} = -2(\cos\pi - \cos 0) - \left(-\frac{1}{4}\sin(2\pi) + \frac{\pi}{2}\right) - \left(-\frac{1}{4}\sin(2 \cdot 0) + \frac{0}{2}\right)$$

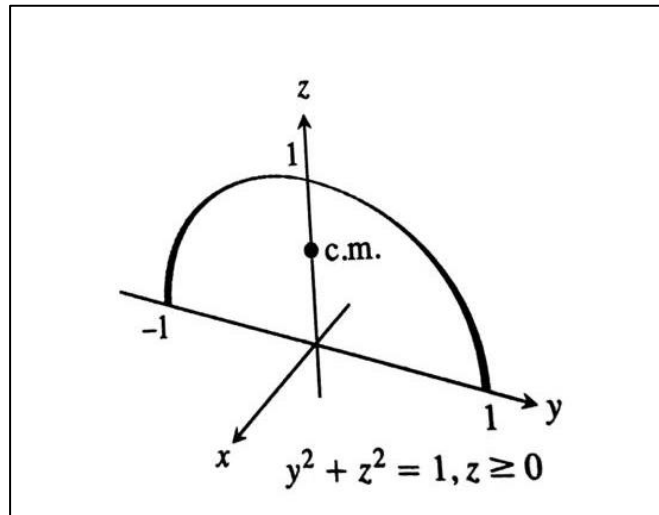
$$\mathbf{M_{xy} = -2(-1 - 1) - \left(-\frac{1}{4} \cdot 0 + \frac{\pi}{2}\right) = 4 - \frac{\pi}{2} = \frac{\mathbf{8 - \pi}}{\mathbf{2}}}$$

Conclui-se que:

$$\bar{z} = \frac{M_{xy}}{M} = \frac{\frac{8 - \pi}{2}}{2\pi - 2} = \frac{8 - \pi}{2} \cdot \frac{1}{2\pi - 2} = \frac{8 - \pi}{4\pi - 4} \approx 0,57$$

Portanto, o centro de massa possui coordenadas **(0; 0; 0,57)**.

Figura 31: Representação de um fio no plano yz e seu centro de massa



Fonte: Thomas (2012)

4.4 O CÁLCULO DO TRABALHO REALIZADO POR UMA FORÇA VARIÁVEL

O trabalho total realizado na movimentação de um objeto de um ponto A ao ponto B é dado pela seguinte Integral de Linha de Campo Vetoriais, mediante considerações de Thomas (2012):

$$W = \int_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{T} \, ds$$

De modo que \mathbf{F} é uma força em uma região no espaço dada por este campo vetorial e \mathbf{T} é o respectivo vetor tangente unitário em cada um dos pontos de seu domínio. Daí segue,

$$W = \int_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{T} \, ds = \int_a^b \mathbf{F}(r(t)) \cdot \frac{dr}{dt} \, dt = \int_a^b \mathbf{F}(r(t)) \cdot r'(t) \, dt$$

Aplicação 4:

Determine o trabalho realizado pelo campo de força $\vec{F}(x, y, z) = (x - y^2, y - z^2, z - x^2)$ sobre uma partícula que se move ao longo do segmento de reta de $(0,0,1)$ a $(2,1,0)$.

Solução

A parametrização do vetor descolamento da partícula será dada por:

$$\begin{cases} x(t) = x_a + tx_b \\ y(t) = y_a + ty_b \\ z(t) = z_a + tz_b \end{cases} = \begin{cases} x(t) = 0 + (2 - 0)t \\ y(t) = 0 + (1 - 0)t \\ z(t) = 1 + (0 - 1)t \end{cases}$$

Portanto,

$$\vec{r}(t) = (2t, t, (1 - t))$$

$$\vec{r}'(t) = (2, 1, -1)$$

Podemos então afirmar que:

$$\begin{aligned} \mathbf{F}(\vec{r}(t)) &= (2t - t^2, t - (1 - t)^2, (1 - t) - (2t)^2) \Rightarrow \\ \Rightarrow \mathbf{F}(\vec{r}(t)) &= ((2t - t^2), (-t^2 + 3t - 1), (1 - 4t^2 - t)) \end{aligned}$$

Note que,

$$\text{Se } r(a) = (0,0,1), \text{então } t = 0$$

$$\text{Se } r(b) = (2,1,0), \text{então } t = 1$$

Logo, a Integral de Linha do trabalho realizado é:

$$W = \int_0^1 ((2t - t^2), (-t^2 + 3t - 1), (1 - 4t^2 - t)) \cdot (2, 1, -1) dt \Rightarrow$$

$$\Rightarrow W = \int_0^1 ((4t - 2t^2) + (-t^2 + 3t - 1) + (4t^2 + t - 1)) dt \Rightarrow$$

$$\Rightarrow W = \int_0^1 (t^2 + 8t - 2) dt$$

$$W = \frac{1}{3} + 4 - 2 = \frac{7}{3}$$

4.5 O CÁLCULO DO ESCOAMENTO E CIRCULAÇÃO PARA CAMPOS DE VELOCIDADE.

De acordo com Thomas (2012), as aplicações da Integral de Linha para Campos Vetoriais podem representar o escoamento e circulação de um fluido em uma região no espaço. Desse

modo, se $r(t)$ parametriza uma curva lisa C no domínio de um campo de velocidade contínuo \vec{F} , o *escoamento* ao longo da curva é dado por:

$$E = \int_C \vec{F} \cdot \vec{T} \, ds$$

Deste modo, caso o ponto inicial (A) e final (B) da curva coincidam ($A = B$), o escoamento é denominado de *circulação* ao redor da curva. É importante analisar a direção ao longo da curva, pois ele interfere no sinal do vetor \vec{T} .

Aplicação 5:

Encontre a circulação do campo $\vec{F} = (x - y)\mathbf{i} + x\mathbf{j}$ ao redor da circunferência $\vec{r}(t) = (\cos t)\mathbf{i} + (\sin t)\mathbf{j}$, $0 \leq t \leq 2\pi$.

Solução

Uma vez que a curva encontra-se parametrizada, é válido que:

$$\vec{r}'(t) = (-\sin t)\mathbf{i} + (\cos t)\mathbf{j}$$

Em que,

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) = (\cos t - \sin t)\mathbf{i} + \cos t\mathbf{j}$$

Neste caso,

$$\begin{aligned} E &= \int_0^{2\pi} ((\cos t - \sin t)\mathbf{i} + \cos t\mathbf{j}) \cdot ((-\sin t)\mathbf{i} + (\cos t)\mathbf{j}) \, dt \Rightarrow \\ &\Rightarrow E = \int_0^{2\pi} (-\sin t \cdot \cos t + \sin^2 t + \cos^2 t) \, dt \Rightarrow \\ &\Rightarrow E = \int_0^{2\pi} (-\sin t \cdot \cos t + 1) \, dt \Rightarrow \\ &\Rightarrow E = \left(\left(2\pi - \frac{\sin^2(2\pi)}{2} \right) - (0 - \sin^2 0) \right) = 2\pi. \end{aligned}$$

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

A pesquisa desenvolvida apresentou alguns pontos cruciais para a construção da base teórica necessária para o desenvolvimento da compreensão técnica da qual o Cálculo Vetorial é construído. Desta forma, com o auxílio deste material, junto com a abordagem histórica realizada, tornou-se possível estabelecer ferramentas para desenvolver o escopo principal deste documento, que é a compreensão da resolução, visualização e diferenciação da Integral de Linha para Campos Escalares e para Campos Vetoriais.

Seguindo esta perspectiva, mediante as caracterizações das variáveis necessárias, o manuseamento teórico e por fim, estabelecendo relações entre interpretações existentes por diversos autores, com o auxílio da resolução de exemplos com o intuito de fixar e moldar as concepções trazidas em cada tópico, é válido afirmar que é possível visualizar a influência que as diversas outras áreas possuem no campo da Matemática e vice-versa, assim como a relevância que a utilização de vetores possui na caracterização de inúmeros fenômenos físicos.

Para tal, assim como a utilização de diversas fontes no desenvolvimento da pesquisa, tornou-se necessário o desenvolvimento da capacidade cognitiva de estabelecer relações entre a utilizações das Integrais de Linhas e suas aplicações, tópico de extrema relevância que, necessariamente, exigiu um manuseamento o mais simples possível com o objetivo de facilitar a compreensão do leitor ao mesmo tempo que fosse possível manter as características conceituais e suas contribuições na utilização dessas Integrais voltadas para estes conceitos.

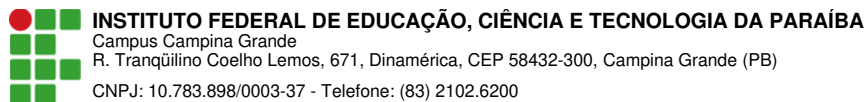
Deste modo, uma vez que na instituição do IFPB campus Campina Grande disponibilizou a disciplina optativa de Cálculo IV, juntamente com a orientação do Professor Orlando, tornou-se possível correlacionar os conceitos e o desenvolvimento teórico aqui apresentado com as aulas que foram ministradas, fato que possibilitou otimizar o processo de estabelecer a estruturação da pesquisa, sua abordagem, e ressignificar aspectos que apresentavam-se ser de difíceis adaptação.

Pode-se inferir que a pesquisa mostra desde as concepções iniciais até a utilização de sua base teórica no desenvolvimento e aplicações, esta demonstra fugir da linha contínua que é exposta na Graduação de Licenciatura em Matemática, mostrando que, alguns tópicos optativos da Matemática Pura e aplicada são capazes de ressignificar o processo de construção conceitual, demonstrando sua importância na comunidade acadêmica.

REFERÊNCIAS

- ANDRADE, Maria Margarida. Introdução à metodologia do trabalho científico. 5. ed. São Paulo: Atlas, 2001.
- ANTON, Howard; BIVENS, Irl; DAVIS, Stephen. Cálculo. Vol II. 8 ed. Porto Alegre, Bookman, 2007.
- ARAÚJO, Iury de. Apostila de Cálculo Vetorial. UFSC, 2015.
- BIANCHINI, Waldecir. Apreendendo Calculo de Várias Variáveis. Vol II. Instituto de Matemática, UFRJ, 2022.
- BONFIM, S. H; CALABRIA, A. R. Aspectos Históricos da origem e desenvolvimento do Cálculo Vetorial. 1 ed. Livraria da Física. São Paulo, 2021.
- FABBRI, Maurício. O Teorema do Divergente.: Cálculo Aplicado à Engenharia Elétrica. 2011.
- FERREIRA, Juliano Cezar. Integral de Linhas de Campos Vetoriais - Trabalho Realizado: Programa de Pós Graduação em Educação Matemática. UFJF, 2013.
- GIL, Antonio Carlos. Métodos e técnicas de pesquisa social. 6. ed. São Paulo: Atlas, 2009.
- GONÇALVES, Mirian Buss. *Cálculo B: Funções de Várias Variáveis, Integrais Múltiplas, Integrais Curvilíneas e de Superfície* / 2 ed. Mirian Buss Gonçalves, Diva MaríliaFlemming.– São Paulo: Pearson Prentice Hall, 2007.
- GUIDORIZZI, Hamilton Luiz. *Um curso de cálculo*. Volume 3 / 5 ed. Rio de Janeiro: LTC, 2013.
- PINTO, Diomara. *Cálculo diferencial e integral de funções de várias variáveis.*/ Diomara Pinto e Maria Cândida Ferreira Morgado. 3. Ed. 3ª. Reimpr. Rio de Janeiro. Editora UFRJ, 2005.
- SAUTER, Esequia; AZEVEDO, F. S; KONZEN, P. H de A. Cálculo Vetorial: Um livro colaborativo, 2022.
- SILVA, Edna Lúcia de; MENEZES, Estera M. Metodologia da pesquisa e elaboração de dissertação. Florianópolis: UFSC, 2005.
- STEWART, James. *Cálculo: volume 2*/ James Stewart; tradução Helena Maria Ávila de Castro; revisão técnica Ricardo Miranda Martins. – São Paulo, SP: Cengage Learning, 2016.
- THOMAS, George B. *Cálculo*, volume 2 / tradução Carlos Scalici; revisão técnica Claudio

HirofumeAsano. – 12. Ed. – São Paulo: Pearson Education do Brasil, 2012.



Documento Digitalizado Ostensivo (Público)

ENTREGA TCC

Assunto: ENTREGA TCC
Assinado por: Cícero Santos
Tipo do Documento: Anexo
Situação: Finalizado
Nível de Acesso: Ostensivo (Público)
Tipo do Conferência: Cópia Simples

Documento assinado eletronicamente por:

- **Cícero Tallysson Costa Santos, ALUNO (201921230026) DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA - CAMPINA GRANDE**, em 27/06/2023 15:27:27.

Este documento foi armazenado no SUAP em 27/06/2023. Para comprovar sua integridade, faça a leitura do QRCode ao lado ou acesse <https://suap.ifpb.edu.br/verificar-documento-externo/> e forneça os dados abaixo:

Código Verificador: 864026
Código de Autenticação: 949e9ef88b

