



**INSTITUTO FEDERAL**  
**Paraíba**  
**Campus Campina Grande**

**INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA DA PARAÍBA**  
**CURSO DE ESPECIALIZAÇÃO EM ENSINO DE MATEMÁTICA**

**SAMARA MARIA SOUSA MELO**

**SALA DE AULA INVERTIDA NO ENSINO DE ÁLGEBRA LINEAR 1: UM**  
**ESTUDO DE CASO**

**CAMPINA GRANDE - PB**

**2021**

**SAMARA MARIA SOUSA MELO**

**SALA DE AULA INVERTIDA NO ENSINO DE ÁLGEBRA LINEAR 1: UM  
ESTUDO DE CASO**

Monografia apresentada no Curso de Especialização em Ensino de Matemática do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia da Paraíba (IFPB), como requisito parcial para para obtenção do título de Especialista em Ensino de Matemática.

Orientador: Prof. Me. Joab dos Santos Silva.

M528s Melo, Samara Maria Sousa

Sala de aula invertida no ensino de álgebra linear 1: um estudo de caso / Samara Maria Sousa Melo. - Campina Grande, 2021.

67.p. : il.

Monografia(Curso de Especialização em Matemática)  
- Instituto Federal da Paraíba, 2021.

Orientador: Prof. Me. Joab dos Santos Silva

1. Matemática - Formação de professores. 2. Álgebra linear. 3. Educação matemática. I. Título.

CDU 51:37

SAMARA MARIA SOUSA MELO

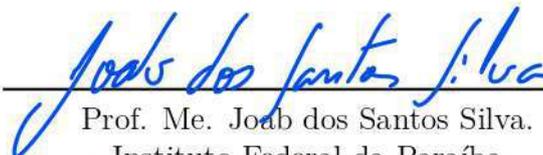
SALA DE AULA INVERTIDA NO ENSINO DE ÁLGEBRA LINEAR 1: UM ESTUDO DE CASO

Monografia apresentada no Curso de Especialização em Ensino de Matemática do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia da Paraíba (IFPB), como requisito parcial para para obtenção do título de Especialista em Ensino de Matemática.

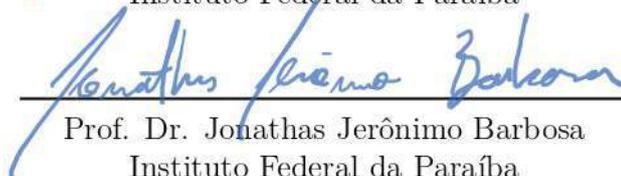
Orientador: Prof. Me. Joab dos Santos Silva.

Aprovado em: 26 / 11 / 2021.

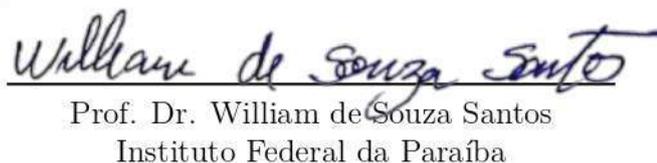
BANCA EXAMINADORA

  
Prof. Me. Joab dos Santos Silva.

Instituto Federal da Paraíba

  
Prof. Dr. Jonathas Jerônimo Barbosa

Instituto Federal da Paraíba

  
Prof. Dr. William de Souza Santos

Instituto Federal da Paraíba

Este trabalho é dedicado à Maria de Lourdes de Sousa Melo, a Raimundo de Sousa Melo Filho, a José Augusto de Sousa Melo e a Almir Rogério de Araújo Oliveira.

## AGRADECIMENTOS

Primeiramente, agradeço a *Deus* e a *Nossa Senhora da Conceição*, por ter permitido que tudo isso acontecesse, a realização de mais um sonho na carreira acadêmica, e em todos os estantes, sendo Ele o maior mestre que alguém pode conhecer.

A minha mãe *Maria de Lourdes de Sousa Melo* e ao meu pai *Raimundo de Sousa Melo Filho*, por confiar em mim e mais uma vez, deram a oportunidade de concretizar e encerrar mais uma trajetória na minha carreira acadêmica. Sei o quanto foi árduo essa etapa, mas não mediram esforços para que este sonho realizasse, devo tudo que sou a vocês e sinto orgulho de mim e do lugar onde estou chegando a cada dia, é porque sei que vocês vieram e vem segurando a minha mão à todo estante. Além desta conquista, dedico a minha vida. Amo vocês!

Ao meu irmão *José Augusto de Sousa Melo*, por a cada dia me amostrar a melhor direção da vida, por ser luz no meu caminho, e por ser, minha inspiração a todo momento. Algum dia possa ter orgulho de mim. Te amo, meu menino!

Ao meu companheiro *Almir Rogério de Araújo Oliveira*, pela confiança, compreensão, carinho e amor, e por me ajudar a concretizar mais um sonho, além de, desdobrar do seu tempo para buscar soluções quando elas pareciam não aparecer. É você, que compartilha comigo os momentos de tristezas e alegrias. É você, sou grata a Deus por ter colocado a melhor pessoa na minha vida, e por está comigo em todos os momentos. E é para você, dedico todo meu amor. Te amo!

A *Geralda Roberto de Araújo Oliveira*, *José Rogério de Oliveira Sobrinho* e *Monalisa Vitória de Araújo Oliveira*, por permitir a minha entrada nas suas vidas, por confiar em mim como companheira para seu filho, e por estender as mãos nos momentos mais difíceis da minha vida. Sou muito grata a Deus por ter me proporcionado uma família maravilhosa, além de seus ensinamentos e apoio que me dão a todo momento. Vocês sabem o quanto são importante nesse sonho que está concretizando. Gratidão!

A minha vó *Maria Aurina de Sousa Melo*, por repassar os seus ensinamentos durante a sua trajetória de vida e todo carinho que tem dado. Obrigada por tudo!

A minha madrinha *Francisca de Assis de Souza Lins* e a meu padrinho *Sebastião Duque Filho*, por todo carinho e contribuição na minha vida pessoal e profissional. Obrigada por tudo!

A minha prima *Maria Sthefane de Sousa Santos* (*in memoriam*), embora fisicamente ausente, não poderia deixar de agradecer, por todo amor que pudesse doar, por ter sido forte durante toda trajetória e me proteger de todos os males nessa vida. Te amarei sempre, meu anjo da guarda! Saudades eternas!

Ao meu orientador *Joab dos Santos Silva*, que me guiou durante esta árduo caminho, e foram através de suas críticas, elogios, ensinamentos tive a oportunidade de crescer

na carreira acadêmica. Tenho como espelho todo seu conhecimento e sua dedicação por tudo que fez, e principalmente, por mais uma vez, pela sua confiança, paciência que teve comigo durante este trabalho acadêmico, e obrigada por ter aceitado como sua orientada.

Ao **IFPB**, à **CAPEF**, à **FAPERJ** e a todos os **PROFESSORES** do curso de Especialização em Ensino de Matemática, que tive privilégio de conhecer e por todos os conhecimentos que me foram dados ao longo destes um ano e quatro meses, e pela dedicação que vocês têm com os alunos, e mais uma vez, foram momentos enriquecedores na minha caminhada. Em especial a **Cicero da Silva Pereira** e **Luís Havelange Soares** que me ajudou nos momentos que precisei desde do Curso de Licenciatura em Matemática, sou muito grata e por todo carinho que vocês tens comigo.

Aos **alunos** da disciplina de Álgebra Linear 1 dos Cursos Superiores de Licenciatura em Matemática e Física por ter contribuído para este trabalho acadêmico.

Aos membros da banca examinadora, Prof<sup>o</sup> **Jonathas Jerônimo Barbosa** e ao Prof<sup>o</sup> **William de Souza Santos** por se disponibilizarem em contribuir para o crescimento do presente trabalho e para minha formação acadêmica. Tenho uma enorme admiração pelas suas competências e pelo compromisso com sua profissão. Muito Obrigada!

A todos os meus queridos **amigos (as)** da Especialização em Ensino de Matemática pela amizade que foi construída ao longo desse tempo e pelos momentos gratificantes que foram compartilhados durante esta caminhada.

E por fim, aos meus **familiares** e **amigos (as)** do Pernambuco que de forma direta ou indireta foram amorosos e mostrando toda admiração pelas minhas conquistas. Em especial a **Bruna Siqueira** por todo seu carinho que tens comigo e por ser tão especial em minha vida. Agradeço!

*“A educação é um ato de amor. Por isso um ato de coragem.”  
(Paulo Freire)*

## RESUMO

O presente trabalho colaborar com a formação dos professores de matemática no ensino superior, em relação as suas práticas pedagógicas. Percebendo que as Metodologias Ativas (MA) possibilitam ao aluno um protagonismo no processo de ensino e aprendizagem, desenvolvendo a capacidade crítica, reflexiva e investigativa a partir da interação com outros alunos e professor, surgiu um interesse em analisar a aplicação da metodologia ativa sala de aula invertida no ensino de Álgebra Linear 1. Deste modo, elaboramos a questão norteadora: quais os possíveis impactos no processo de ensino e aprendizagem dos alunos podem ser verificados com a aplicação da sala de aula invertida na disciplina de Álgebra Linear 1? O objetivo geral do trabalho é realizar o estudo de caso da aplicação da metodologia ativa sala de aula invertida no ensino de Álgebra Linear 1 para analisar os impactos do processo de ensino e aprendizagem dos alunos. Para isto, é apresentado um recorte histórico sobre as MA, é exibido resumidamente algumas estratégias de ensino das MA, é conceituado a sala de aula invertida e suas etapas, é realizado uma revisão de literatura sobre a utilização de MA no ensino de matemática e é executada uma observação participante da aplicação da sala de aula invertida, a partir da qual foi realizada a coleta de dados. A sala de aula invertida foi aplicada na turma de Álgebra Linear 1, período 2020.2, do Curso de Licenciatura em Matemática do IFPB, Campus Campina Grande, na modalidade remota, sendo esta disciplina ofertada conjuntamente com o Curso de Licenciatura em Física do mesmo Campus. Como ambiente virtual foi utilizado a plataforma digital Google Sala de Aula (GSA), na qual foram disponibilizados os vídeos no formato de Slides Narrados (SN). Os slides em formato PDF e listas de exercícios foram ofertados através do site *Joab Silva Professor* (<https://www.joabssilva.com.br/>), além de sugestões de vídeos complementares para os alunos. A aplicação da sala de aula invertida ocorreu em 5 (cinco) encontros nos quais foram trabalhados os conteúdos de produto interno, norma e propriedades, ângulo entre dois vetores e ortogonalidade, processo de ortogonalização de Gram-Schmidt e complemento ortogonal. Nos encontros síncronos, realizados com o auxílio da plataforma digital *Google Meet*, foram realizadas as discussões sobre o conteúdo e questionamentos/provocações propostos nos SN, além da resolução de problemas, alguns propostos também nos SN e outros propostos nas listas de exercícios. A coleta e análise de dados se deu por meio da observação participante dos 5 (cinco) encontros síncronos, das falas dos alunos e do professor a partir das interações nas discussões realizadas durante os encontros síncronos. A partir da análise dos dados, podemos constatar a existência da interação entre aluno-aluno e aluno-professor no que diz respeito aos conteúdos abordados, e a dificuldade de alguns alunos em acessar o material com antecedência o fez com que a discussão no momento síncrono não envolvesse todos os alunos.

**Palavras-chave:** Metodologias ativas. Sala de aula invertida. Álgebra Linear 1. Ensino e aprendizagem. Formação de professores.

## ABSTRACT

The present work collaborates with the formation of mathematics teachers in higher education, in relation to their pedagogical practices. Realizing that Active Methodologies (AM) enable the student to play a leading role in the teaching and learning process, developing critical, reflective and investigative skills based on interaction with other students and the teacher, an interest in analyzing the application of the active classroom methodology emerged inverted class in the teaching of Linear Algebra 1 arose. Thus, we elaborated the guiding question: what are the possible impacts on the teaching and learning process of students can be verified with the application of the inverted classroom in Linear Algebra 1? The general objective of the work is to carry out the case study of the application of the active inverted classroom methodology in the teaching of Linear Algebra 1 to analyze the impacts of the students' teaching and learning process. For this, a historical overview of AM is presented, some AM teaching strategies are briefly displayed, the inverted classroom and its stages are conceptualized, a literature review is carried out on the use of AM in the teaching of Mathematics and it is Participant observation of the inverted classroom application was performed, from which data collection was performed. The inverted classroom was applied in the Linear Algebra 1 class, 2020.2 period, of the Licentiate Degree in Mathematics at IFPB, Campus Campina Grande, in the remote mode, this subject being offered together with the Licentiate Degree in Physics at the same Campus. The digital platform Google Classroom (GSA) was used as a virtual environment, in which videos were made available in the form of Narrated Slides (SN). The slides in PDF format and exercise lists were offered through the website *Joab Silva Professor* (<https://www.joabssilva.com.br/>), as well as suggestions for complementary videos for students. The application of the inverted classroom took place in 5 (five) meetings in which the contents of internal product, standard and properties, angle between two vectors and orthogonality, Gram-Schmidt orthogonalization process and orthogonal complement were worked on. In synchronous meetings, carried out with the aid of the digital platform *Google Meet*, discussions were held on the content and questions/provocations proposed in the NS, in addition to solving problems, some also proposed in the NS and others proposed in the lists of Exercises. Data collection and analysis took place through participant observation of the 5 (five) synchronous meetings, the speeches of the students and the teacher from the interactions in the discussions held during the synchronous meetings. From the data analysis, we can see the existence of interaction between student-student and student-teacher with regard to the contents covered, and the difficulty of some students in accessing the material in advance made the discussion in the synchronous moment did not involve all students.

**Keywords:** Active methodologies. Flipped classroom. Linear Algebra 1. Teaching and learning. Teacher training.

## LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1 – Jean-Jacques Rousseau (1712-1778).	16
Figura 2 – John Dewey (1859-1952).	17
Figura 3 – As principais características das metodologias ativas.	18
Figura 4 – As principais estratégias de ensino das metodologias ativas.	19
Figura 5 – Eric Mazur (1954).	21
Figura 6 – Larry Michaelsen.	24
Figura 7 – Aaron Sams e Jonathan Bergmann.	25
Figura 8 – As quatro etapas da rotina em sala de aula.	27
Figura 9 – A sala de aula invertida é composta por um ciclo de três etapas.	29
Figura 10 – O quantitativo de trabalhos por estratégia.	32
Figura 11 – Plataforma digital GSA - Álgebra Linear 1.	37
Figura 12 – Plataforma digital GSA - materiais e encontros disponibilizados.	38
Figura 13 – Página inicial do site <i>Joab Silva Professor</i> .	38
Figura 14 – Site Joab Silva Professor.	39
Figura 15 – Página de Disciplinas e Cursos.	39
Figura 16 – Página da Disciplina Álgebra Linear 1.	39
Figura 17 – Materiais divulgados no GSA - Encontro 1.	41
Figura 18 – Materiais divulgados no GSA - Encontro 2.	45
Figura 19 – Materiais divulgados no GSA - Encontro 3.	48
Figura 20 – Materiais divulgados no GSA - Encontro 4.	52
Figura 21 – Materiais divulgados no GSA - Encontro 5.	55

# SUMÁRIO

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO</b>	<b>11</b>
<b>2</b>	<b>FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA</b>	<b>15</b>
2.1	Um recorte histórico sobre as metodologias ativas	15
2.2	Algumas estratégias de ensino das metodologias ativas	19
2.2.1	Aprendizagem personalizada entre pares e por tutoria/mentoria	19
2.2.2	Aprendizagem personalizada	20
2.2.3	Aprendizagem entre pares	20
2.2.4	Aprendizagem baseada em projeto	21
2.2.5	Aprendizagem baseada em problema	23
2.2.6	Aprendizagem baseada em grupos	24
2.2.7	Sala de aula invertida	25
2.3	Metodologias ativas no ensino de matemática	29
<b>3</b>	<b>METODOLOGIA</b>	<b>34</b>
<b>4</b>	<b>ANÁLISE E DISCUSSÃO DOS RESULTADOS</b>	<b>37</b>
4.1	Estruturação da sala de aula invertida	37
4.2	Descrição dos encontros síncronos	40
4.2.1	Encontro 1	40
4.2.2	Encontro 2	45
4.2.3	Encontro 3	48
4.2.4	Encontro 4	52
4.2.5	Encontro 5	54
<b>5</b>	<b>CONSIDERAÇÕES FINAIS</b>	<b>59</b>
	<b>REFERÊNCIAS</b>	<b>62</b>
	<b>ANEXO A EMENTA DA DISCIPLINA ÁLGEBRA LINEAR 1</b>	<b>64</b>

# 1 INTRODUÇÃO

A Educação no Brasil vem sofrendo muitas modificações que são impostas pelas transformações sociais no que se refere ao uso das tecnologias e ao mundo do trabalho no qual o indivíduo está inserido. Tais transformações envolvem os modos de ensinar e aprender, as quais necessitam de uma ressignificação contínua com base numa postura reflexiva, crítica e investigativa, influenciando no processo de aprendizagem dos alunos.

Nessa perspectiva, o professor deve ser um mediador, estimulador, orientador no processo de aprendizagem dos alunos, propondo situações-problemas que os façam questionar, refletir, investigar, cooperar e aprender a compartilhar conhecimentos com o outro. O professor é essencial na vida acadêmica dos alunos e por isso deve reconhecer esse papel tão fundamental. O professor não se limita apenas em transmitir os conteúdos, mas, somos amigos, vizinhos, inspiram, encorajam, etc.

Existem ainda muita influência do ensino tradicional que é centrado no professor e na transmissão de conteúdos em que os alunos permanecem numa postura passiva, isto é, receptores e memorizados de informações por meio de repetições que é adquirido por meio de atividades, em outras palavras Diesel, Santos e Martins (2017) afirmam aquele que primeiro apresenta a teoria e dela parte para a prática.

Por isso que é necessário repensar neste método de ensino que utilizamos nas práticas pedagógicas, pois do modo que é ensinado para os alunos não oportuniza a serem questionadores, críticos e investigativos. Onde, se coloca problemas que não os fazem pensar e totalmente distanciado da sua realidade, com pouquíssima participação, assim, não permite instrumentá-los (KUMMER, 2016).

Pode ser evidenciado durante as aulas em que os alunos reclamam das aulas rotineiras, entediantes, pouca dinâmica, conseqüentemente, se tem pouca participação, desinteresse e desvalorização dos alunos em relação às aulas, e as vezes mesmo utilizando algum tipo de recurso não muda o cenário, pois ela por se só não garante a aprendizagem.

Nesse sentido, Moran, Masetto e Behrens (2000, p. 12) afirmam que é preciso “um planejamento para várias atividades integrem-se em busca de objetivos determinados e que as técnicas sejam escolhidas, planejadas para que a aprendizagem aconteça”, ou seja, se faz necessário conhecer, ter um olhar criterioso e estratégias de ensino traçadas que podem ser exploradas em diferentes situações educacionais, possibilitando assim ter mais interação com os alunos através do recurso escolhido.

No entanto, os recursos devem ser utilizados nas práticas pedagógicas de modo cuidadoso, não se pode o fazer uso pelo uso, mas ter consciência dos benefícios que o recurso oportuniza para o aluno. Ou seja, entender que a utilização de algum recurso atrelado ao conteúdo matemático tem como propósito o alcance do objetivo que se propôs no plano de aula. Ainda se percebe resistência dos professores para utilizar no ensino de conteúdos,

e muitos alegam que não estão capacitados para este fim. Daí, a importância de buscarem adquirir conhecimento, isto quer dizer, estar sempre em uma formação continuada, e principalmente, ter o apoio das escolas para que se sintam mais seguros ao utilizá-los.

Pinto (2002, p. 14) afirma que a escola “deve estar preparada e disposta para modificar seu âmbito de aprendizagem”, ou seja, é necessário incluir modificações que são pertinentes no processo de ensino e aprendizagem. Comumente encontramos professores que não buscam experimentar algo novo para a sua prática, e independentemente de qual for o motivo devemos procurar metodologias diferenciadas de ensino que integre o aluno no processo de aprendizagem.

É importante que o professor desenvolva metodologias de ensino nas quais refletem da prática e ela busca a teoria, afim de prepará-los para a realidade que nos permeiam, possibilitando a pensar, conceituar o que fazem e construir conhecimentos sobre o conteúdo. E para isso acontecer necessita de responsabilidade, criatividade, criticidade, investigação e concentração. Pois, Freire (1989, p. 67) afirma que “a teoria sem a prática vira “verbalismo”, assim como a prática sem teoria, vira ativismo. No entanto, quando se une a prática com a teoria tem-se a práxis, a ação criadora e modificadora da realidade”.

Podemos dizer que enquanto o método tradicional está centrado no professor e na transmissão de informação, o conjunto de estratégias de ensino diferenciadas que colocam o aluno como protagonista no processo de aprendizagem caracterizamos como Metodologias Ativas (MA).

Embora Zamboni (2019) comenta que já existiam estudos voltados na área da matemática na perspectiva de ensino contextualizado que coloca o aluno como protagonista no processo de aprendizagem, em que autores da Educação Matemática como Ubiratan D’ Ambrósio, Lourdes Onuchit, Dário Fiorentino, entre outros, que vem discutindo cerca de 40 anos, no qual propõem metodologias com essa concepção mais que não tem como nome MA, apesar de terem peculiaridades semelhantes.

Deste modo, surgiu a inquietação de desenvolver uma pesquisa que pudesse colaborar com a formação de professores de matemática do ensino superior, no que diz respeito as suas práticas pedagógicas, e com essa inquietação formular a seguinte questão norteadora: quais os possíveis impactos no processo de ensino e aprendizagem dos alunos que podem ser verificados com a aplicação da sala de aula invertida na disciplina de Álgebra Linear 1? A partir dessa questão determinamos o objetivo geral.

O objetivo geral do trabalho é realizar o estudo de caso da aplicação da metodologia ativa sala de aula invertida no ensino de Álgebra Linear 1 para analisar os impactos do processo de ensino e aprendizagem dos alunos. Para isso, traçamos como objetivos específicos apresentar um recorte histórico sobre as MA, apresentar resumidamente algumas estratégias de ensino das MA, conceituar a sala de aula invertida e suas etapas, realizar uma revisão de literatura sobre a utilização de MA no ensino de matemática, fazer a observação participante da aplicação da sala de aula invertida para a coleta e análise

de dados por meio da observação participante dos encontros síncronos da disciplina de Álgebra Linear 1.

A escolha, por parte do professor, da sala de aula invertida como estratégia de ensino se deu por esta se organizar a partir da disponibilização de materiais referentes ao conteúdo de determinada aula com antecedência para que os alunos possam acessar e estudar, ficando o momento da aula dedicado ao aprofundamento do conteúdo por meio de questionamentos por parte dos alunos e coordenação do professor. Tal característica da sala de aula invertida se encaixa perfeitamente com a demanda de aulas remotas nas quais são disponibilizado um tempo curto para momentos síncronos.

A partir da revisão de literatura adotamos o conceito de sala de aula invertida composta por um ciclo de 3 (três) etapas que se repete a cada encontro, momento no qual estão reunidos o professor e os alunos, no modo presencial ou remoto síncrono, podendo cada encontro ter uma ou mais aulas consecutivas de 50 (cinquenta) minutos.

A primeira etapa ocorre antes do encontro e consiste na confecção e disponibilização de materiais didáticos (digitais ou analógicos) para estudo prévio dos alunos. A segunda etapa é o encontro propriamente dito, ou seja, ocorre na sala de aula (presencial ou remota síncrona), sendo destinada a verificar se os alunos tiveram acesso ao material didático, se o material proposto é adequado e atende aos objetivos do encontro, e ao aprofundamento dos conceitos estudados na primeira etapa e a resolução de problemas. Nessa etapa, o ponto mais importante é fomentar a discussão, a partir de questionamentos, promovendo uma maior interação aluno-aluno e aluno-professor, possibilitando ao aluno protagonismo no processo de ensino e aprendizagem. A terceira etapa consiste da análise, por parte do professor, da qualidade e efetividade da execução das duas primeiras etapas. Esta etapa fundamenta a tomada de decisão do professor para início de um novo ciclo, seja com um novo conteúdo se os objetivos para àquele encontro foram alcançados, seja com a retomada do conteúdo trabalhado utilizando outra abordagem caso entenda que seja necessário para uma melhor assimilação do tema.

A proposta de sala de aula invertida foi aplicada na turma de Álgebra Linear 1, período letivo 2020.2, do Curso de Superior de Licenciatura em Matemática (curso noturno) do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia da Paraíba (IFPB), Campus Campina Grande. Esta disciplina é ofertada no 4º período da Licenciatura em Matemática, mas por questões organizacionais da instituição a sua oferta ocorre em conjunto com o Curso de Licenciatura em Física (curso noturno) do mesmo campus, 2º período. Assim, a turma contava com 39 (trinta e nove) alunos matriculados, sendo 25 (vinte e cinco) da Licenciatura em Matemática e 14 (quatorze) da Licenciatura em Física.

Foi utilizada a plataforma Google Sala de Aula (GSA) como ambiente virtual de aprendizagem, na qual foram disponibilizados materiais didáticos, tópicos com os conteúdos trabalhados em cada encontro e atividades avaliativas. Para os materiais utilizados na primeira etapa da sala de aula invertida se optou pela confecção de slides, gravação de

vídeos no formato de slides narrados (SN), confecção de listas de exercícios e sugestão de vídeos disponíveis no YouTube. Os slides, listas de exercícios e sugestões de vídeos foram disponibilizados no Site *Joab Silva Professor*<sup>1</sup>, e seu link postado no GSA.

O presente trabalho contribui para a prática pedagógica de professores, mostrando como a metodologia ativa sala de aula invertida se apresenta como uma possibilidade viável para o processo de ensino e aprendizagem de matemática do Ensino Superior.

---

<sup>1</sup> Disponível em: [<https://www.joabssilva.com.br/>](https://www.joabssilva.com.br/).

## 2 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

### 2.1 UM RECORTE HISTÓRICO SOBRE AS METODOLOGIAS ATIVAS

As Metodologias Ativas (MA) têm início, do ponto de vista teórico, nos trabalhos de autores como [Bergmann e Sams \(2018\)](#), [Camargo e Daros \(2018\)](#), [Diesel, Santos e Martins \(2017\)](#), [Moran \(2019\)](#), [Prince \(2004\)](#), entre outros. Estes autores afirmam que necessitamos compreender as estratégias de ensino centrada no aluno como protagonista no processo de aprendizagem e o professor mediador dos conteúdos a ser estudado em determinada aula, além de estimular a terem um pensamento crítico, a motivar e interagir para que possam aprender juntos, isto é, uma divisão de responsabilidade.

Ao colocar o aluno como protagonista proporcionamos a ele uma participação ativa no processo de ensino e aprendizagem, possibilitando sua inclusão na aprendizagem colaborativa e cooperativa. Segundo [Paiva \(2016\)](#), a aprendizagem colaborativa consiste na participação de todos os alunos das equipes de estudo na busca de aprender algo juntos de modo que são os responsáveis pelo êxito ou não da equipe, permitindo ao aluno ser mais ativo no processo de aprendizagem, e cabendo ao professor uma postura de mediador. Por outro lado, na aprendizagem cooperativa, o professor detém um maior controle sobre as etapas desenvolvidas no processo de ensino e aprendizagem. Desse modo, o professor oportuniza ao aluno construir conhecimento a partir dos conteúdos discutidos em sala de aula, além de trabalhar situações-problemas que permitam refletir, questionar, investigar e criticar.

Com a atenção voltada para a educação de uma sociedade que vêm sofrendo mudanças significativas a partir da inserção das tecnologias da informação e comunicação, se faz necessária a adequação da postura do professor de modo que esse seja capaz de fundir e aplicar as diversas metodologias de ensino. Para isso, os cursos de formação de professores precisam investir na discussão de metodologias de ensino contemporâneas e os professores na sua formação continuada para melhor exercer a profissão.

As estratégias de ensino que possibilitam reposicionar o aluno como ativo no processo de aprendizagem chegou ao Brasil no início do século XX, pelo movimento Escolanovista com a Didática Ativa de cunho progressista e a Didática Moderna de cunha culturalista. Assim, o termo ativo remete as MA que foram relacionadas a Escola Nova ([ZAMBONI, 2019](#)). Este movimento foi importante para que os professores tivessem uma visão diferente no que diz respeito ao processo de aprendizagem dos alunos.

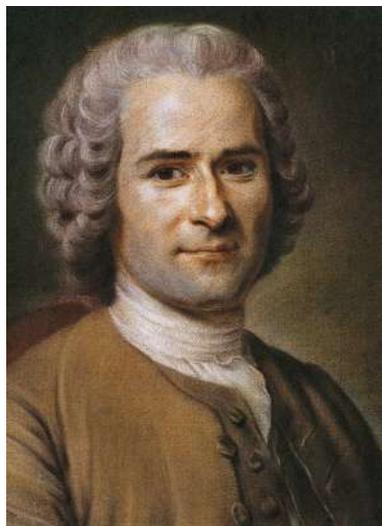
Para [Saviani \(2012\)](#) a Escola Nova se iniciou a partir de críticas ao método tradicional e estava preocupada em contemplar uma educação para todos, principalmente, para aqueles que são chamados de marginalizados, ou seja, que não se enquadravam por algum motivo no sistema, e entende que a educação do modo que é vista, tendo o método tradicional

de ensino não inseria o aluno a ter uma postura de protagonista no processo de aprendizagem. Desse modo, a Escola Nova se preocupava em o aluno a aprender fazendo, assim, tem “ [...] deslocado o eixo da questão pedagógica do intelecto para o sentimento; do aspecto lógico para o psicológico; dos conteúdos cognitivos para os métodos ou processos pedagógicos; do professor para o aluno; [...]” (SAVIANI, 2012, p. 8-9).

Em outras palavras, a Escola Nova propunha trabalhar com ferramentas metodológicas e possibilitassem ao aluno desenvolver uma postura ativa no processo de ensino e aprendizagem tendo o professor como mediador. Zamboni (2019) afirma que a Escola Nova realizava discussões sobre estas premissas e, atualmente, podemos analisar estudos que mostram como tais estratégias de ensino das MA estão sendo aplicadas e discutidas por pesquisadores de várias áreas do conhecimento como Administração, Ciências Contábeis, Engenharia, Matemática, etc.

Diesel, Santos e Martins (2017) destacam que podem ser encontradas as primeiras evidências sobre o método ativo na obra *Emilio*, de Jean Jacques-Rousseau (1712-1778)(Figura 1)<sup>1</sup>, sendo considerado como o primeiro tratado sobre a filosofia e educação no mundo ocidente. Este valoriza a experiência em detrimento da teoria, e desestimula a pressa em respostas as perguntas, mantendo assim a curiosidade dos alunos.

Figura 1 – Jean-Jacques Rousseau (1712-1778).



Fonte: Site E-biografia.

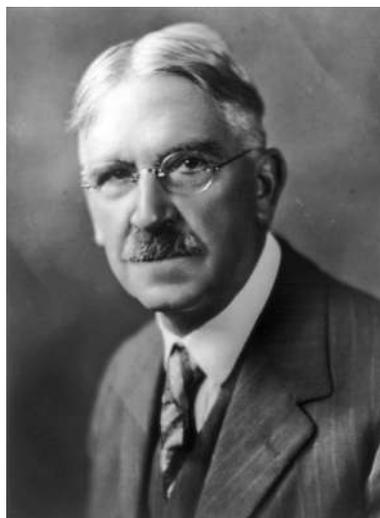
Zamboni (2019) afirma que as MA “são uma tentativa de retomada, reformulada, do ideário da Escola Nova, pois [...] a primeira aparição do termo metodologias ou métodos ativos(as) no movimento da Escola Nova do séc XX”[p. 33]. Rech (2016) corrobora com essa afirmação, apontando que as MA se encontram nos trabalhos de John Dewey (1859-1952) (Figura 2)<sup>2</sup>, considerado o idealizador da Escola Nova, que “segundo o qual a

<sup>1</sup> Disponível em: <[https://www.ebiografia.com/jean\\_jacques\\_rousseau/](https://www.ebiografia.com/jean_jacques_rousseau/)>. Acesso em: 01 fev.2021.

<sup>2</sup> Disponível em: <[https://www.pedagogia.com.br/biografia/john\\_dewey.php](https://www.pedagogia.com.br/biografia/john_dewey.php)>. Acesso em: 01 fev.2021.

aprendizagem ocorre pela ação: *o learning by doing*, ou o “aprender fazendo” [p. 4], partindo da concepção de que a educação necessitava de uma transformação de cenário para acompanhar os avanços impostos pela sociedade.

Figura 2 – John Dewey (1859-1952).



Fonte: Site Pedagogia.

Zamboni (2019) redefine os papéis desenvolvidos pelo professor e aluno no processo de ensino e aprendizagem na perspectiva das MA, afirmando que:

[...] o processo de ensino e aprendizagem exige uma divisão de responsabilidade. Eleva o papel do professor enquanto planejador e orientador, sem deixar de lado a importância do conteúdo científico a ser estudado nas escolas, e ainda considerando o aluno como ser apto a também se responsabilizar por sua aprendizagem no processo (ZAMBONI, 2019, p. 34-35).

Por outro lado, Moran (2019, p. 7) destaca os objetivos das MA:

[...] as metodologias ativas procuram criar situações de aprendizagem nas quais os aprendizes possam fazer coisas, pensar e conceituar o que fazem, construir conhecimentos sobre os conteúdos envolvidos nas atividades que realizam, bem como desenvolver a capacidade crítica, refletir sobre as práticas que realizam, fornecer e receber *feedback*, aprender a interagir com colegas, professores, pais e explorar atitudes e valores pessoais na escola e no mundo (MORAN, 2019, p. 7).

Assim, com base na revisão de literatura, entendemos as MA como um conjunto de métodos que objetivam conferir ao aluno um protagonismo no processo de ensino e aprendizagem, desenvolvendo a capacidade crítica, reflexiva e investigativa a partir da interação com outros alunos e com o professor. Nesses métodos, o papel do professor é redefinido passando este a atuar como organizador, planejador, orientador, mediador, sendo assim responsável por proporcionar e coordenar situações de aprendizagens que privilegiem o diálogo e a discussão. Esta nova forma de atuar do professor busca romper com o paradigma do professor que transmite conteúdo, onde ele é o portador do conhecimento.

É necessário elaborar MA de forma conjunta e sistemática, evidenciando seu verdadeiro potencial, favorecendo nos modos de ensinar e aprender, na organização da escola, nos ambientes, na avaliação, no currículo e na certificação. Além de ser fundamental que as escolas saibam como coordenar a aprendizagem colaborativa e a cooperativa, realizando questionamentos, apoiando e incentivando os alunos a pesquisar e aprender em todos os espaços, dentro e fora da escola, abraçando alunos, famílias e comunidades para uma aprendizagem com mais significado. Transformar os espaços físicos para que sejam mais atraentes, flexíveis e conectados (MORAN, 2019).

Para isso, o professor deve elaborar um planejamento detalhado, podendo fazer uso das tecnologias digitais como auxiliares para o processo de ensino e aprendizagem, de forma que os objetivos propostos sejam alcançados. Entretanto, não podemos confundir as MA com os anseios da modernidade, as tecnologias digitais são ferramentas auxiliares do professor para o processo de ensino e aprendizagem. Assim, o uso isolado das tecnologias digitais não caracteriza a aplicação das MA (ZAMBONI, 2019).

A partir da revisão de literatura, realizada por meio de consulta da palavra-chave MA em sites acadêmicos e leitura de livros especializados, e destacamos na Figura 3 as principais características das MA que são necessárias para que os professores promovam em suas práticas pedagógicas estratégias de ensino que oportunizem aos alunos terem uma postura ativa no processo de aprendizagem.

Figura 3 – As principais características das metodologias ativas.



Fonte: Elaborada pela autora.

Portanto, para tornar o aluno ativo no processo de aprendizagem deve ocorrer as etapas apresentadas na Figura 3. Isto é, o professor assume uma postura de organizador, mediador e planejador, oportunizando o trabalho colaborativo e cooperativo, desenvolvendo assim um trabalho investigativo objetivando estimular a autonomia do aluno para que possam fazer as suas reflexões e críticas sobre determinado conteúdo quando aplicadas as estratégias de ensino das MA.

## 2.2 ALGUMAS ESTRATÉGIAS DE ENSINO DAS METODOLOGIAS ATIVAS

Nessa seção iremos apresentar algumas estratégias de ensino utilizadas como MA, resultado da nossa revisão de literatura, que tem finalidade de os professores compreender e aplicar nas suas práticas pedagógicas, em que dão condições aos alunos quando for necessário para que possam evoluir por conta própria no processo de ensino e aprendizagem.

Apresentamos na Figura 4 as estratégias de ensino das MA por nós destacadas:

Figura 4 – As principais estratégias de ensino das metodologias ativas.



Fonte: Elaborada pela autora.

Passaremos a apresentar detalhadamente as estratégias de ensino das MA destacadas na Figura 4 para que os professores possam mudar ou aprimorar suas práticas pedagógicas a partir da leitura e assim, aprofundar quando for preciso para uma aplicação com mais significado.

### 2.2.1 Aprendizagem personalizada entre pares e por tutoria/mentoria

Na Aprendizagem Personalizada entre Pares e por Tutoria/Mentoria, os tutores e mentores utilizam nos seus planejamentos estratégias de ensino que oportunizem aos alunos progredir na aprendizagem individualizada e na aprendizagem entre pares, auxiliando a traçar planos pertinentes, problematizar, orientar, desenvolver situações-problema e caminhos a serem percorridos, sem necessariamente estar reunidos o tempo todo de modo presencial com os alunos para explicar o conteúdo. Esse planejamento possibilita a cada aluno evoluir na aprendizagem personalizada, grupal, colaborativa e compartilhada com tutores/mentores. Desse modo, é destacada a importância da tutoria/mentoria na forma-

ção dos alunos, possibilitando um maior rendimento nos estudos e um olhar diferenciado para os conteúdos.

Assim, os alunos devem escolher e percorrer seus caminhos no próprio ritmo, buscando uma maior autonomia em suas escolhas, e aprendizagem entre pares deve ocorrer por meios de desafios, projetos, jogos, debates em modo presencial ou *on-line*, cabendo a tutor/mentor orientar e avaliar. Nessa direção, as tecnologias digitais podem contribuir para o planejamento das aulas e o melhor desenvolvimento da tutoria/mentoria (MORAN, 2019).

### 2.2.2 Aprendizagem personalizada

Na Aprendizagem Personalizada o aluno deve trabalhar na construção de caminhos que estimulem a aprendizagem, ampliem suas perspectivas e conduzam a conquista da liberdade e autonomia no processo de ensino e aprendizagem. Com isso, cada aluno pode apresentar suas inquietações de forma direta por meio de questionamentos e intervenções, ou indireta por meio de expressões faciais ou gestuais, gerando discussões e reflexões associadas ao seu projeto de vida.

Para o professor e a escola, a aprendizagem personalizada consiste em auxiliar nas necessidades e interesses dos alunos, colaborando para o desenvolvimento de habilidades e construção de conhecimentos. No ambiente escolar, os professores elaboram estratégias de ensino e aprendizagem diferenciadas para cada aluno, individualizando assim o processo, podendo combinar tecnologias digitais adequadas à propostas de intervenção a serem trabalhadas de modo presencial ou *on-line*, individual ou grupal.

É possível encontrar na literatura variados modelos de personalização da aprendizagem, destacamos aqui os seguintes modelos: individualização, plataforma digital e esboço de roteiro. O primeiro permite ao professor organizar e planejar atividades diferenciadas para cada aluno aprender de vários formatos. O segundo insere o aluno numa plataforma digital, planejando outras atividades como suporte e acompanhá-las de acordo com a necessidade, analisando o grau de domínio em relação ao tema proposto. O terceiro consiste na confecção do esboço de um roteiro básico para todos os alunos e que estes possam executá-los no seu próprio ritmo, fazendo a avaliação quando os alunos apresentarem certo grau de desenvolvimento, podendo retificar o percurso quantas vezes achar necessário (MORAN, 2019).

### 2.2.3 Aprendizagem entre pares

Na Aprendizagem entre Pares ou na Instrução de Pares (*peer instruction*) idealizado pelo físico Eric Mazur (Figura 5)<sup>3</sup>, professor da universidade Harvard, Estados Unidos, é proposta a interação dos alunos em relação aos conceitos e aplicações, influenciando no

<sup>3</sup> Disponível em: <[https://pt.wikipedia.org/wiki/Eric\\_Mazur](https://pt.wikipedia.org/wiki/Eric_Mazur)>. Acesso em: 05 fev. 2021.

processo de aprendizagem. Camargo e Daros (2018) retrata que esta estratégia proporciona debates em grupos, aplicação de conceitos, pesquisa, exploração de ideias com relação ao conteúdo trabalhado em sala de aula.

Figura 5 – Eric Mazur (1954).



Fonte: Site Wikipédia.

Para Zamboni (2019), esta estratégia tende a minimizar a interferência do professor quando o aluno sentir dificuldades em relação ao progresso da atividade e tem como objetivo a discussão entre os pares, permitindo a troca de ideias e o desenvolvimento do conhecimento coletivo.

É destacado o quanto é fundamental o aluno interagir com o outro, compartilhando seus pensamentos, realizando questionamentos entre eles, discutindo atividade proposta. Assim, o erro pode ser corrigido com mais frequência, proporcionando aos alunos aprender juntos e determinar os caminhos que devem prosseguir.

Com isso, os professores desempenham o papel de mediador no processo de ensino e aprendizagem, ou seja, os alunos não ficam dependendo exclusivamente dos professores, e o desenvolvimento do trabalho em grupos pequenos permite a discutir atividades entre os pares, defendendo pontos de vistas e refutando argumentos, colocando em debate os objetivos a serem alcançados (KRIVICKAS, 2005).

Portanto, a aprendizagem entre pares, que guarda semelhança com a aprendizagem baseada em grupos/times (trabalhada na Subseção 2.2.6), permite a interação entre alunos, compartilhando ideias e concepções, promovendo discussões enriquecedoras e a autonomia no processo de ensino e aprendizagem.

#### 2.2.4 Aprendizagem baseada em projeto

A Aprendizagem Baseada em Projeto ou Aprendizagem por Projeto é uma estratégia de ensino que tem a capacidade de envolver os alunos em resolver determinado problema, desenvolver projetos individuais ou em grupos, e encorajá-los a serem críticos, criativos,

além de poder despertar a percepção que existem várias formas para realizar determinada atividade.

Conforme [Barbosa e Moura \(2013\)](#), projetos são empreendimentos que se originam a partir de um interesse específico e tem finalidades bem definidas, podendo ser utilizados como recursos didáticos se for constituído pelas quatro fases essenciais: intenção, planejamento, execução e julgamento, além da mediação do professor que é fundamental para a aprendizagem do aluno. Destacam ainda os autores que o objetivo principal do projeto deve está associados com situações reais relativas ao contexto e à vida do aluno.

[Moran \(2019\)](#) destaca que a aprendizagem baseada em projeto adota o princípio da aprendizagem colaborativa, na qual os alunos buscam desenvolver projetos de modo coletivo por meio de problemas tirado de observações dentro da própria localidade. Assim, eles reconhecem os problemas e procuram resolvê-los em curta duração (uma ou duas semanas) ou com duração mais longa (semestral ou anual). Essa estratégia proporciona também a interdisciplinaridade, visto que estão estabelecendo relações entre dois ou mais ramos do conhecimento, contribuindo no processo de ensino e aprendizagem.

Apesar de muitas vezes a aprendizagem baseada em projeto começar por uma situação-problema, esta se diferencia da aprendizagem baseada em problemas (tema abordado na Subseção [2.2.5](#)) visto que o foco não é o problema, mas o projeto gerado em volta dele. No entanto, ambos estão centrados no aluno e em atividades colaborativas e participativas, e ao final resultam em um produto como resultado ([RECH, 2016](#)). Mais uma vez, notamos que o professor é fundamental para mediar o trabalho do aluno no projeto, pois exige um planejamento bem organizado para que obtenha resultados satisfatórios.

[Barbosa e Moura \(2013\)](#) classificam os projetos em três categoriais: projeto construtivo cujo foco é construir, inovar ou propor uma solução para determinada situação problema; projeto investigativo, cuja finalidade é elaborar uma pesquisa sobre um problema ou situação usando o método científico; e projeto didático, que visa a reflexão dos princípios científicos de funcionamento de objetos e sistemas.

Desse modo, os alunos podem apresentar diferentes escolhas no momento de desenvolver o projeto já que existem várias maneiras, com isso, o professor deve ter um planejamento para que os objetivos que se propôs sejam alcançados. São considerados algumas diretrizes primordiais para o desenvolvimento de projetos como: o trabalho em grupo, o tempo necessário, a escolha do tema, finalidade útil, uso de múltiplos recursos e socialização dos resultados ([BARBOSA; MOURA, 2013](#)).

A utilização de projetos pode diminuir o risco de não cumprimento do conteúdo programático, pois mesmo sendo o tema escolhido pelo aluno o planejamento é realizado pelo professor, estabelecendo os questionamentos, o nível de complexidades nas atividades, o prazo e a forma de entrega, podendo existir uma negociação entre professor e aluno. Embora não consiga expor todos os conteúdos, a experiência com o projeto promove aprendizagem significativa na vida dos alunos e “se sentirem falta de algum tópico, saberão onde

encontrá-lo e o que fazer para aprendê-lo” (BARBOSA; MOURA, 2013, p. 65).

Logo, teremos alunos mais autônomos, críticos e investigativos no processo de aprendizagem, por isso ressaltamos mais o quanto é necessário o planejamento bem detalhado para que não se perca o foco durante o processo; e assim os alunos estarão prontos para enfrentar os desafios postos pela sociedade e construir projetos, promovendo o compartilhamento de concepções e trabalhando de modo colaborativo.

### 2.2.5 Aprendizagem baseada em problema

A Aprendizagem Baseada em Problema (ABP ou ABProb), do inglês *Problem Based Learning*, tem influência da escola ativa na qual os alunos se preparam para resolver problemas em relação as suas profissões futuras. Inicialmente esta estratégia foi introduzida na universidade de medicina, na década de 1960, na Universidade McMaster, em Hamilton, Canadá, e posteriormente utilizadas em diversas áreas do conhecimento como odontologia, psicologia, arquitetura, engenharia, administração, entre outros.

Na década de 1970, na Holanda, esta estratégia de ensino foi utilizada em escolas de Medicina na Universidade Maastricht com ementas baseadas na resolução de problemas desde o início do curso. A utilização de problemas tem objetivo de ajudar os alunos a identificar as suas próprias necessidade na aprendizagem, com isso os alunos se sentiam mais motivados e entusiasmados a desenvolver habilidades fundamentais para futuro exercício profissional (MORAN, 2019; MATOS, 2018).

Moran (2019) apresenta o exemplo da aplicação da estratégia de aprendizagem baseada em problema desenvolvida em três fases na Havard Medical School. A primeira fase consistia em identificar problema e tema, formular hipóteses e elaborar o cronograma. Na segunda fase os alunos deveriam retornar ao problema, serem críticos, utilizar novas informações, reformular hipóteses, reconhecer novos temas e anotar as referências. Por fim, na terceira fase, retornar ao processo, fazer um resumo da aprendizagem e avaliar.

Estas fases são importantes para que o aluno não se perca no meio do processo. O professor é necessário ter consciência mais uma vez de que vai ser mediador na aprendizagem, de tal forma que os problemas a serem elaborados é com foco no aluno para que busque solucioná-los. E de fato, Barbosa e Moura (2013, p. 59) afirmam que “as oportunidades de aprendizagem devem ser relevantes para eles”. Prince (2004) afirma que para trabalhar em grupo é necessário a cooperação e não a competição com outros integrantes, pois assim podem trazer resultados mais positivos. Por isso, o autor chama atenção dos professores para que promovam colaboração e cooperação entre os alunos.

Os problemas podem ser juntamente apresentados na forma de projeto, pois “na sua essência, as duas metodologias são recursos pedagógicos para o aprender fazendo. E [...] é necessário *pensar no que se vai fazer, fazer o que se pensou e pensar no que se fez*” (BARBOSA; MOURA, 2013, p. 64-65) grifo do autor, ou seja, ter uma prática

consciente do que quer se fazer, dos objetivos que se quer atingir e dos conhecimentos que se quer adquirir.

### 2.2.6 Aprendizagem baseada em grupos

A Aprendizagem Baseada em Grupos (*team based learning*) idealizada pelo educador Larry Michaelsen (Figura 6)<sup>4</sup> em 1970, na Universidade Oklahoma, Estados Unidos. Inicialmente utilizada na graduação, e posteriormente na especialização e no ambiente de trabalho. Essa estratégia de ensino baseia-se no construtivismo, onde o aluno pode construir conhecimentos por si mesmo de forma atuante a partir das experiências e da interação com os outros alunos e professores. Exigindo do aluno responsabilidade e comprometimento com as atividades, e especial atenção no *feedback* frequente do professor e avaliação ente pares (CAMARGO; DAROS, 2018).

Figura 6 – Larry Michaelsen.



Fonte: Site Team-Based Learning Collaborative.

Desse modo, o professor deve promover um ambiente motivador no qual todos os envolvidos tenham oportunidade de praticar o conteúdo. É destacado que para se obter resultados positivos com esta estratégia de aprendizagem, os alunos precisam buscar se dedicar ao máximo na resolução do problema, mantendo a vigilância quanto à consciência de que não se trata de uma competição entre os grupos, mas sim do compartilhamento de ideias em que todos ganham com as discussões.

Camargo e Daros (2018) propõem trabalhar a estratégia de aprendizagem baseada em grupos em três fases: preparação, aplicação e avaliação. Na primeira fase, a preparação, o professor esclarece quais são os objetivos para realizar a atividade, os alunos se preparam por meio da leitura de texto, de filme, estudo de caso, artigo, reportagem e entre

<sup>4</sup> Disponível em: <http://www.teambasedlearning.org/talk-to-the-experts/larry-michaelsen/>. Acesso em: 22. mar. 2021.

outros. A escolha do material ou objeto de estudo fica a critério do professor, julgando sua pertinência para o conteúdo, uma vez que tudo isso funciona fora da sala de aula.

Na segunda fase, a aplicação, o professor aplica uma atividade com os conceitos que foram estudados e faz o compartilhamento de concepções com toda a turma, discutindo acertos e erros obtidos, e, caso necessário, aprimora algum conceito que não ficou compreendido durante as discussões. Na terceira fase, a avaliação, o aluno realiza as reflexões relativas ao seu desenvolvimento e evolução no processo de aprendizagem, e também a avaliação entre pares, o que demanda responsabilidade e envolvimento por parte do aluno.

Portanto, a realização de discussões em grupos promovem uma interação maior entre os alunos, cabendo ao professor fazer intervenções necessárias para que haja um envolvimento maior dos alunos com a atividade.

### 2.2.7 Sala de aula invertida

A Sala de Aula Invertida (ou *Flipped Classroom*) tem como principais autores Jonathan Bergmann e Aaron Sams (Figura 7)<sup>5</sup>. Em 2006, começaram a trabalhar na *Woodland Park High School* em Colorado, Estados Unidos, e foram os responsáveis pelo departamento de Química, onde passaram a elaborar as aulas de Química em conjunto por perceberem semelhanças em suas filosofias de educação.

Figura 7 – Aaron Sams e Jonathan Bergmann.



Fonte: Site Brock prize in education innovation.

Dentre as dificuldades encontradas ao ministrarem as aulas em uma escola de zona rural destacava-se o alto número de alunos faltosos nas aulas, devido a prática de esportes e outras atividades.

Um problema que logo enfrentamos, ao lecionarmos em uma escola de ambiente relativamente rural, era que um grande número de alunos faltavam a muitas aulas por causa dos esportes e de outras atividades que praticavam. As escolas “próximas” não ficavam assim tão perto. Os alunos passavam muito tempo nos ônibus, locomovendo-se entre eventos

<sup>5</sup> Disponível em: <https://brockprize.org/nominee/jonathan-bergmann-aaron-sams/> Acesso em: 07 fev. 2021.

em lugares diferentes. Nessas condições, os alunos mal assistiam a muitas das nossas aulas, além da dificuldade que tinham em acompanhar as disciplinas (BERGMANN; SAMS, 2018, p. 21).

Após a leitura e discussão de um artigo sobre um *software* no qual era possível produzir vídeos, concluíram que esta prática poderia ser uma alternativa para os alunos faltosos. Em 2007, iniciaram a gravação das aulas utilizando este *software* de captura de tela, surgindo assim a sala de aula invertida como estratégia de ensino, aprovada não apenas pelos alunos faltosos mas também pelos demais alunos. Inicialmente esta estratégia de ensino se expandiu pelo Estados Unidos e vem se popularizando em diversos países (BERGMANN; SAMS, 2018).

A partir disso, observaram que esta estratégia de ensino possibilita romper com o modelo de professor como detentor/transmissor de conteúdo e aluno como receptor de informações, passar a promover modelo em que o aluno tenha primeiro contato com os conteúdos a partir de vídeos e outros materiais, destinando o horário da sala de aula para discussão e aproveitamento dos conceitos, bem como para resolução de problemas.

Nesta estratégia de ensino, o professor oportunizar aos alunos trabalharem em grupos ou individual para encontrar a solução ao problema, e sendo ele o orientador dessa aprendizagem para que os alunos participem sem obrigação e consiga compreender as aulas.

Bergmann e Sams (2018, p. 33) conceituam sala de aula invertida como “o que tradicionalmente é feito em sala de aula, agora é executado em casa, e o que tradicionalmente é feito como trabalho de casa, agora é realizado em sala de aula”, em outras palavras, na maioria das vezes o que se fazia em sala de aula era a transmissão do conteúdo por parte do professor e em casa o aluno buscava resolver os problemas ou aplicação referentes a esse conteúdo. Então, dá-se uma inversão, o professor disponibiliza preferencialmente em plataformas digitais a gravação em vídeo ou outros materiais do conteúdo para ser estudado em casa, e na sala de aula acontece o debate sobre este conteúdo ou algum conceito que não ficou compreendido pelo aluno.

Para Suhr (2015, p. 32717) a “sala de aula invertida possibilita a organização das sequências de atividades de maneira mais adequada às necessidades do aluno, conciliando momentos de auto estudo – autônomo, respeitando o ritmo individual – com momentos de interação presencial”. Ou seja, esta estratégia de ensino possibilita o professor conhecer seu aluno devido as discussões que se tem em sala de aula, e por esse motivo o professor pode vir a realizar atividades de acordo com as necessidades do aluno, visando a autonomia e fortalecer a ideia de aprender fazendo, além de que estas discussões em sala de aula, promove uma interação maior entre professo e aluno e aluno e aluno.

Bergmann e Sams (2018, p. 59) acreditam que esta inversão possibilita aos professores utilizarem as tecnologias digitais para a implementação de propostas de aprendizagem para os alunos, e não defendemos a substituição dos professores até porque “[. . .] o objetivo

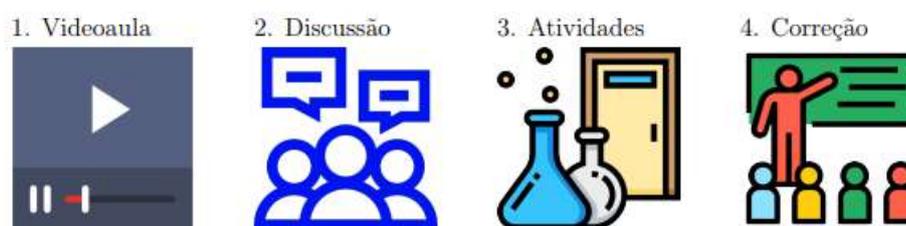
de ir à escola é aprender, e não ser ensinado”. Pois, na sala de aula os alunos se dedicam a fazer intervenções para, com o auxílio do professor, preencher as lacunas na assimilação do conteúdo oriundas das primeiras leituras que fizeram sozinhos, bem como realizar procedimentos mais avançados tendo assimilado conceitos mais básicos.

Moreira (2018) afirma que a sala de aula invertida só tem sucesso quando alunos e professores se organizam em três momentos distintos que é antes da aula, durante a aula e depois da aula. No primeiro momento o professor prepara o conteúdo proposto e disponibiliza para os alunos por meio de plataforma digital selecionada (podendo ser de forma analógica, caso não haja acesso as tecnologias digitais) para que possam fazer suas leituras, atividades ou experimentos de acordo com o objetivo proposto. Durante a aula o professor esclarece os questionamentos sobre o conteúdo e os alunos passam a resolver situações problemas, de modo grupal ou individual, com a orientação do professor. E, depois da aula, o professor faz uma análise de como foi sua aula, e decide qual próximo conteúdo, seja um novo ou repetido, mas com abordagem de modo diferente, criando assim um ciclo de aprendizagem.

Embora, quando pensamos em tecnologias e o seu uso procuramos refletir sobre os fatores positivos desses artefatos para as nossas vidas, também é relevante analisar o que estamos a considerar quando falamos de tecnologia. Tendo em vista que, numa definição geral, a tecnologia é o “conjunto de conhecimentos e princípios que se aplicam ao planejamento, à construção e à utilização de um equipamento em um determinado tipo de atividade” (KENSKI, 2012, p. 24), devemos ter o ato de refletir sobre o seu uso quando falamos a respeito do processo de ensino e aprendizagem dos alunos para que não se manifeste negativamente, isto é, o uso pelo uso, sem ter resultados positivos.

Para Matos (2018) a rotina da sala de aula invertida acontece em quatro etapas, são elas: videoaula, discussão, atividade e correção. — Na Figura 8, foi realizada uma consulta através do repositório de (MATOS, 2018).<sup>6</sup>

Figura 8 – As quatro etapas da rotina em sala de aula.



Fonte: Print screen do repositório de Matos.

Na primeira etapa o professor disponibiliza o material proposto da aula para os alunos e, para isso, decide qual a melhor opção a seguir, dentre produzir material próprio ou materiais prontos disponíveis na internet, contanto que apresente de modo diferenciado e

<sup>6</sup> Disponível em: <<https://repositorio.unb.br/handle/10482/34987>> Acesso em: 10. mar. 2021.

estímulo o aluno. Na segunda etapa o professor confere se os alunos assistiram o material proposto, analisa o quanto eles assimilaram do conteúdo, e avalia se o material apresentado foi satisfatório para alcançar os objetivos propostos para aquela aula. Esse momento é próprio para uma discussão envolvendo professor e alunos, com questionamentos sobre a teoria trabalhada no material, possíveis provocações propostas pelo professor e atividades ou pesquisas complementares.

Na terceira etapa os alunos executam as atividades, projetos ou experimentos do conteúdo proposto e o professor necessita orientá-los, administrar o tempo, já que a maior parte da aula está nessa etapa. Na quarta etapa o professor faz uso do *feedback* das atividades que foram propostas, do início ao fim da aula, de modo contínuo, analisa as dificuldades dos alunos e orienta para que façam os ajustes necessários que os levem a compreender o conteúdo. Para os alunos que mostrarem mais dificuldades, o professor disponibiliza um tempo a mais para discutirem. Observamos que as etapas 2, 3 e 4 propostas por Matos (2018) correspondem ao segundo momento proposto por Moreira (2018).

Nesse sentido, a sala de aula invertida propõe ao professor diversas formas de inserir materiais para que os alunos tenham acesso, seja por meio de plataformas digitais, aplicativos, materiais impressos, etc. Inicialmente, os professores podem ter uma concepção de que aumentará sua carga de trabalho fazendo esta inversão, e realmente se pode acontecer, mas apenas no momento inicial. Dificuldades podem surgir durante o processo já que talvez o professor não possua experiência com o uso de tecnologias, mas essas dificuldades tendem a diminuir com a prática.

Diante do exposto, a relevância é evidente no sentido de ao invés de termos de repetir inúmeras vezes o conteúdo, atividades, etc, em diversas turmas, passamos a fazer isso através de gravação de vídeos, apostilas impressas e outros meios para que possam acessar antes da aula presencial. No momento presencial os alunos têm liberdade de realizar os questionamentos e discutir o conteúdo que estou previamente.

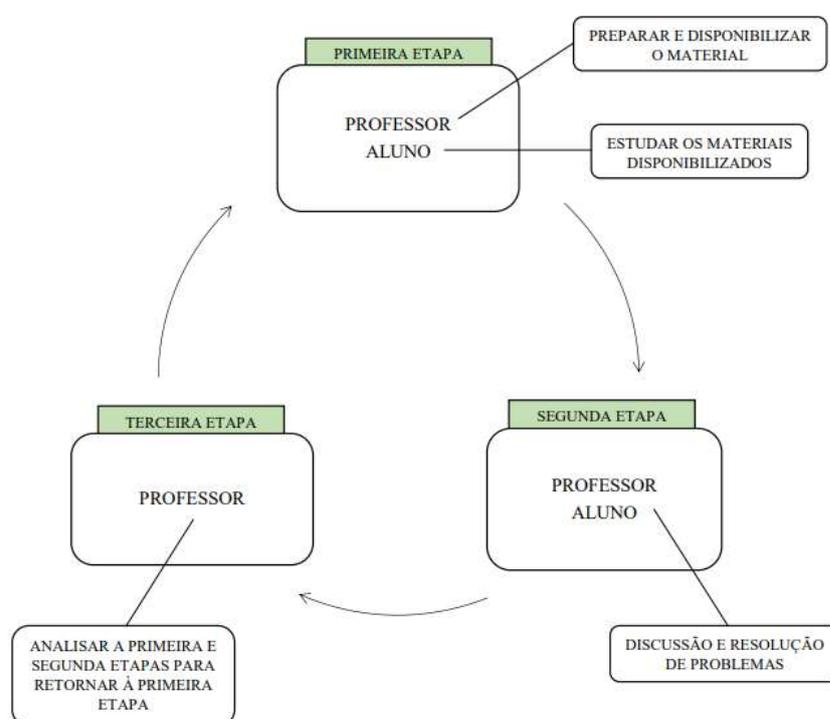
Moran (2019) destaca algumas características associadas a sala de aula invertida que podem justificar o uso dessa metodologia, sendo elas: permite a personalização e individualização, o que é importante para o diagnóstico da aprendizagem do aluno; falar a linguagem contemporânea dos alunos de hoje; ajudar os alunos que faltam às aulas, moram longe ou estão sobrecarregados; ajudar os alunos que têm dificuldade de aprendizado; e, aumentar a interação do professor com os alunos, pois o professor passa a circular na sala de aula durante as atividades.

Portanto, a sala de aula invertida pressupõe o planejamento para confecção e disponibilização dos materiais didáticos, em formato digital ou analógico, para estudo prévio por parte do aluno, configurando uma primeira etapa que deve ocorrer antes da aula. Uma segunda etapa, esta ocorrendo na sala de aula na qual é trabalhada o aprofundamento dos conceitos estudados na primeira etapa e resolução de problemas, objetivando a

discussão a partir de questionamentos, proporcionando assim que os alunos desenvolvam um papel ativo no processo de ensino e aprendizagem. E por fim, uma terceira etapa que é caracterizada pela análise, por parte do professor, do desenvolvimento da primeira etapa em relação à qualidade e efetividade dos materiais disponibilizados, bem como a forma de acesso a estes, e da segunda etapa em relação à discussão em sala de aula sobre a teoria e a resolução de problemas. Essa análise dará subsídios ao professor para decidir se inicia um novo conteúdo ou retoma ao tema com outra abordagem, e ao término dessa análise o professor retorna a primeira etapa.

Assim, a sala de aula invertida é composta por um ciclo de três etapas, representados na Figura 9, que se repete a cada aula/encontro (cada encontro pode ter duas ou mais aulas consecutivas).

Figura 9 – A sala de aula invertida é composta por um ciclo de três etapas.



Fonte: Elaborada pela autora.

Por fim, destacamos que o aluno pode ter sua atuação estendida até à terceira etapa por meio da resolução de listas de exercícios, contribuindo para o enriquecimento da discussão na segunda etapa da próxima aula/encontro.

### 2.3 METODOLOGIAS ATIVAS NO ENSINO DE MATEMÁTICA

Zamboni (2019) afirma que devido as críticas recebidas com relação ao ensino tradicional entrou no cenário a escola nova que tinha objetivo de propor uma reforma no processo de ensino e aprendizagem, porém isto não se concretizou devido que nem todas

as propostas faziam parte ou não se ajustavam ao ensino da matemática. [Morales et al. \(2003\)](#) complementa que Euclides Roxo tinha influências da escola nova para ensinar matemática, pois valorizava e colocava os alunos como protagonista no processo de ensino e aprendizagem.

[Zamboni \(2019\)](#) diz também que o ensino tradicional e a escola nova foram deixadas de lado e passou para o ensino tecnicista em que o ensino se baseava em objetivos, recursos e técnicas, além de não justificar seu uso, o professor era detentor do conhecimento e aluno não era visto como centro no processo de ensino e aprendizagem.

Daí, surgiu o Movimento da Matemática Moderna onde caracterizava que o ensino matemático estava conectado ao desenvolvimento político e tecnológico. Os pesquisadores privilegiavam as estruturas fundamentais uma vez que era importante para o processo de ensino e aprendizagem, e passaram a ter preocupações com a linguagem matemática, com o uso da simbologia adequada, com o rigor com fórmulas, com a matemática pura, e com os conceitos matemáticos ([HELIODORO, 2001](#)).

Estas preocupações exageradas deste movimento levava os alunos a não estudar matemática, além de não ter conexão com o contexto cotidiano dos alunos, então perceberam que necessitava de outras propostas para o ensino de matemática, daí o ensino tecnicista e o movimento da matemática moderna se romperam ([ZAMBONI, 2019](#)).

[Heliodoro \(2001\)](#) afirma que na década de 80 com o agravamento político e econômico, a educação crítica foi privilegiada, os professores ganharam destaques e foram chamados a realizar seminários, debates e congressos em prol de soluções para reconquista a importância da educação, uma vez que fundamentavam numa concepção construtivista em que eles deveriam ser orientadores e fazer conexão com os conteúdos com o cotidiano dos alunos.

Ainda passando por várias transformações no ensino de matemática e a partir de grande influência da concepção construtivista em que existia uma interação com os alunos. Nessa perspectiva, passaram a ser valorizados os conhecimentos prévios dos alunos contribuindo de forma efetiva na construção do conhecimento matemático, em que os erros eram valorizados, constituindo assim parte fundamental no processo de ensino e aprendizagem ([HELIODORO, 2001](#)).

Na atualidade é cada vez mais rápido o processo de transformações no que diz respeito a inserção da tecnologia na vida dos indivíduos e, conseqüentemente, essas transformações refletem na prática do professor e na aprendizagem dos alunos. Neste contexto, os professores necessitam constantemente buscar ferramentas para estar próximos aos alunos e propiciar um olhar diferenciado sobre a matemática, visto que esta área do conhecimento é considerada por muitos alunos como de difícil compreensão, que é para poucos, e por muita das vezes o professor corrobora para que esta visão se perpetue.

Desse modo, é necessário o professor buscar estratégias metodológicas de ensino que evidenciem a importância da matemática, afim de que todos os envolvidos tenham um

olhar diferenciado para esta área, para que possa ser compreendida por todos os indivíduos, evidenciando a história matemática presente nos conceitos, o significado dos objetos matemáticos e as relações presentes entre os diferentes conteúdos matemáticos.

Tais estratégias de ensino permitem ter uma maior relação com o conteúdo matemático quando aplicadas de modo correto, com planejamento detalhado e com os alunos compartilhando as suas ideias, trabalhar em grupos, questionar, e o professor atuar na mediação nas discussões entre aluno e aluno, aluno e professor, orientando na aprendizagem, podendo ainda acontecer de “dois professores possam dialogar e interagir com as turmas em certo momento de aula para aprofundar algum conteúdo em que um deles tenha maior domínio” (GONÇALVES; SILVA, 2018, p. 141).

Quando há essa possibilidade de ter mais de um professor em sala de aula lecionando o mesmo conteúdo, ou até mesmo professores de turmas diferentes mas dialogando os conteúdos de modo particular, a discussão pode ganhar mais elementos gerando, possivelmente, momentos riquíssimo para aprendizagem. Nestas ocasiões, também os dois professores estão trabalhando de modo cooperativo, ajudando um ao outro, cada um contribuindo no que tem maior expertise.

Daí, notemos a importância de inserir em nossas aulas de matemática estratégias de ensino, como também em outras áreas de ensino. Mas, os professores de matemática estão utilizando em suas práticas pedagógicas estratégias de ensino que proporcionem ao aluno o papel de protagonista no processo de ensino e aprendizagem?

Em seu estudo Zamboni (2019, p. 11) tem como objetivo geral “verificar “se” e “de que forma” as MA estão inseridas no ensino e aprendizagem da matemática escolar por meio da análise de pesquisas acadêmicas na área de Educação Matemática que aplicaram estratégias de ensino diferenciadas”. E este tema contribuir para os professores utilizar novos métodos/estratégias de ensino em suas salas de aulas. Nessa perspectiva, a autora realizou uma busca de dissertação e tese por meio do repositório da Capes, as quais deviam existir o termo MA no ensino e aprendizagem da matemática escolar, mas acabou encontrando muitos trabalhos que se fez necessário uma filtragem para aprimorar o estudo. Os trabalhos que foram analisados possuía o termo ativo e não apresentavam de forma explícito este termo, resultando assim em 70 trabalhos de dissertação e nenhuma tese.

Destas 70 dissertações encontradas existia 6 que não faziam parte dos critérios desejados, ou seja, não se tinha nenhuma ligação ou características comum com as MA, e resultando assim em 64 dissertações. Com isso, dos 70 trabalhos de dissertações analisados a maioria eram oriundos de curso de mestrado profissional, ou seja, das 70 dissertações apenas 10 eram de mestrados acadêmicos, e provavelmente isto aconteceu pelo fato de se concentra em trabalhos que fizeram intervenções pedagógicas em salas de aula da Educação Básica, proporcionando assim o compartilhamento e aprofundamento de conhecimentos.

Destacamos que das 64 dissertações encontradas e avaliadas por Zamboni (2019), 25

traziam no seu texto o termo *ativo(a)* ou sinônimos, publicadas nos anos de 2013 a 2017, e 39 que não possuía o termo *ativo(a)* ou sinônimo e não se tinha características específicas da teoria das MA nos referenciais teóricos, publicadas nos anos de 2012 a 2018. É notório nesses trabalhos a intenção de promover o aluno a protagonista no processo de ensino e aprendizagem, além de se preocuparem em elaborar e analisar materiais com estratégias de ensino proporcionando melhorias para aprendizagem do aluno.

Na figura 10 apresentamos o quadro com o quantitativo de trabalhos por estratégia que Zamboni (2019) retratou em sua pesquisa de mestrado.

Figura 10 – O quantitativo de trabalhos por estratégia.

QUESTÃO PROBLEMA	Como as Metodologias Ativas (MA) se inserem na Educação Matemática sob o ponto de vista do ensino e aprendizagem da matemática escolar?	
Categorias	Subcategorias associadas	Quantitativos das dissertações por subcategoria
C1 – Trabalhos que apresentam o termo “ativa(o)” ou sinônimo	Análise de erro	1
	Investigação matemática	5
	Modelagem matemática	3
	Resolução de problemas	6
	T.I.C.s	10
<b>TOTAL POR CATEGORIA</b>		<b>26</b>
C2 – Trabalhos que não apresentam o termo “ativa(o)”	História da matemática	1
	Etnomatemática	1
	Investigação matemática	10
	Jogos	3
	Modelagem matemática	8
	Resolução de problemas	9
<b>TOTAL POR CATEGORIA</b>		<b>39</b>
<b>TOTAL GERAL</b>		<b>64</b>

Fonte: (ZAMBONI, 2019, p. 84)

Nesse quadro é possível perceber as pesquisas voltadas para as tendências em educação matemática que propõem inserir os alunos como protagonista no processo de aprendizagem, mas ainda podemos perceber a baixo números de trabalhos voltados para esta metodologia de ensino deste tema como área de pesquisa no ensino de matemática.

Os resultados de Zamboni (2019) mostraram que as MA não estão presentes de forma evidente nas pesquisas analisadas pelo fato de não fazerem parte da formação acadêmica em relação a esta área de ensino. Por isso que aparece explicitamente as tendências em educação matemática por estas serem apresentadas como estratégias metodológicas durante sua formação. As tendências que mais se aproximaram das características que as MA tem de colocar o aluno como protagonista no processo de aprendizagem e tomem as suas próprias decisões, e o professor como mediador desta aprendizagem, foram a modelagem matemática, a resolução de problemas, a investigação matemática, as tecnologias da informação e da comunicação, a história da matemática, a etnomatemática e os jo-

gos, como também a análise do erro que não foi categorizada como tendências e nem metodologias ativas.

Dentre as tendências há a que mais aproxima das estratégias metodológicas das MA, como: a sala de aula invertida, a aprendizagem baseada em problemas, a aprendizagem baseada em pares, a aprendizagem baseada em grupos. Por fim, retrata que as MA estão retomando recentemente e ficou evidente nas pesquisas coletadas pelo fato de estarem baseados nas tendências em educação matemática, mesmo assim se mostraram relevante para os estudos das MA.

Portanto, destacamos que ainda a muito o que pesquisar esse tema extremamente importante para todos aqueles que buscam o melhor para a educação, e é fundamental que os pesquisadores utilizem as estratégias de ensino das MA no ensino de matemática como vem sendo utilizadas em relação à outras áreas de modo consciente, como, na Física no trabalho de Eric Mazur (aprendizagem baseada entre pares), na Administração no trabalho de Larry Michaelsen (aprendizagem baseada em grupos) e na Química no trabalho de Jonathan Bergamann e Aaron Sams (sala de aula invertida).

### 3 METODOLOGIA

A presente pesquisa é classificada quanto a abordagem metodológica como qualitativa. Busca compreender as causas dos estudos analisados utilizando um número pequeno de participantes, análise de dados não estatístico e desenvolvendo uma proposta para o objeto de estudo.

O pesquisador está presente de modo intenso no ambiente, permitindo assim se analisar com mais profundidade, sem passar do limite do que o necessário na busca de dados, além de não poder manipular os resultados encontrados, pois devemos ter credibilidade com todos os integrantes envolvidos na pesquisa (CRESWELL, 2007; PRODANOV; FREITAS, 2013).

Desse modo, a pesquisa qualitativa possibilita o pesquisador a ter uma visão mais detalhada de determinado ambiente, através da intervenção (seja por meio do questionário, da entrevista, da sequência didática, etc) e análise dos dados, proporcionando ao pesquisador compreender e mudar ou aprimorar suas práticas pedagógicas. Por isso, necessitamos buscar embasamentos teóricos nas pesquisas acadêmicas para não ficar com as concepções ou crenças própria do pesquisador, tornando assim mais significativa a pesquisa, e além do comprometimento dos participantes envolvidos com a presente pesquisa.

De modo geral, segue alguns benefícios da pesquisa qualitativa, como: objetivo com os acontecimentos, categorização das ações de retratar, entender e explicar, observação das diferenças entre o mundo social e natural, respeitar a individualidade dos participantes, os objetivos dos pesquisadores, os embasamentos teóricos e os dados, confiabilidade com os resultados esperados, etc (GERHARDT; SILVEIRA, 2009).

Embora exista alguns cuidados que o pesquisador deve ter ao utilizar a pesquisa qualitativa, como: a reflexão exaustiva dos dados obtidos numa tentativa de resolver o problema total do objeto de estudo, monitorar a influência do observador em relação ao seu objeto de estudo, falta de detalhes nos dados elencados para alcançar a conclusão, falta de observação nos diferentes aspectos sob concepções distintas, certeza absoluta do próprio pesquisador no que se refere a seus dados, intuição de que sabe tudo sobre o objeto estudo, se envolver demais com o ambiente pesquisado ou com os participantes no momento de pesquisa (GERHARDT; SILVEIRA, 2009), os benefícios da pesquisa qualitativa apresentadas no parágrafo anterior superam, em nosso julgamento, esses riscos. E é por isso que precisamos temos cuidado para que não ocorram frustrações.

Quanto à natureza, classificamos como uma pesquisa aplicada, e quanto aos objetivos classificamos como uma pesquisa exploratória, que tem como finalidade a geração de conhecimentos para a aplicação prática voltada para a solução de um problema específico (PRODANOV; FREITAS, 2013; GERHARDT; SILVEIRA, 2009).

No que se refere aos procedimentos técnicos, o que mais se aproximou da pesquisa foi o

estudo de caso. Conforme Gil (2008, p. 57-58), envolve um “estudo profundo e exaustivo de um ou de poucos objetos, de maneira a permitir o seu conhecimento amplo e detalhado [...]”, além de encontrar resultados que não foram previstos inicialmente na pesquisa.

Para Yin (2001, p. 20), o “estudo de caso não precisa conter uma interpretação completa ou acurada; em vez disso, seu propósito é estabelecer uma estrutura de discussão e debate entre os estudantes”. Isto é, proporciona analisar fenômenos dentro de sua realidade, especialmente quando estes não estão bem definidos, e de elaborar um planejamento detalhado para discussão e debate com os alunos. Isso corrobora com a seguinte afirmação de que o “estudo de caso é uma investigação empírica que investiga um fenômeno contemporâneo dentro de seu contexto da vida real, especialmente quando os limites entre o fenômeno e o contexto não estão claramente definidos” (YIN, 2001, p. 32).

No estudo de caso, a coleta e análise dos dados dependendo do tema proposto na pesquisa pode ser sobre determinado indivíduo, grupo, família, etc. Nesse sentido, a coleta de dados pode ser baseada em entrevistas, documentação, registros em arquivos, observação participante, etc, pois contribui para o pesquisador a validar o problema de pesquisa com mais credibilidade.

Devido a pandemia de COVID-19 as aulas foram suspensas no IFPB em 17 de março de 2020, retomando as atividades em agosto mesmo ano, no modelo de ensino remoto, de forma que a nossa pesquisa foi realizada no contexto do ensino remoto. A retomada as aulas com um modelo de ensino para o qual os professores não foram formados e não atuam, serviu como um incentivo a mais para a utilização das MA.

A escolha, por parte do professor, da sala de aula invertida como estratégia de ensino se deu por esta se organizar a partir da disponibilização de materiais referentes ao conteúdo de determinada aula com antecedência para que os alunos possam acessar e estudar. O momento da aula fica dedicado aos alunos fazerem suas intervenções sobre o conteúdo, questionamentos, esclarecer dúvidas, colaborar para o melhoramento dos materiais, etc, tudo sob a coordenação do professor. Essa característica da sala de aula invertida, que possibilita ao aluno exercer a função de protagonista no processo de sua aprendizagem, se encaixa perfeitamente com a demanda de aulas remotas nas quais são disponibilizado um tempo curto para momentos síncronos, ou seja, momentos nos quais o professor tem contato em tempo real com os alunos.

O nível de ensino que analisamos a aplicação da estratégia de ensino sala de aula invertida foi o Ensino Superior, e a turma escolhida foi a da disciplina de Álgebra Linear 1, ofertada no quarto período do Curso Superior de Licenciatura em Matemática do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia da Paraíba (IFPB), Campus Campina Grande. Destacamos que esta disciplina é ofertada em conjunto com o Curso Superior de Licenciatura em Física, 2º período. O motivo por esta decisão foi devido ao orientador ser professor desta disciplina e a pesquisadora ter familiaridade com o Curso de Licenciatura em Matemática, do qual foi aluna.

---

A coleta e análise de dados se deu por meio da observação participante dos 5 (cinco) encontros síncronos, das falas dos alunos e do professor a partir das interações nas discussões realizadas durante os encontros síncronos por meio das gravações destes encontros, e da avaliação dos materiais de apoio ao ensino elaborados e disponibilizados nos ambientes virtuais utilizados pelo professor.

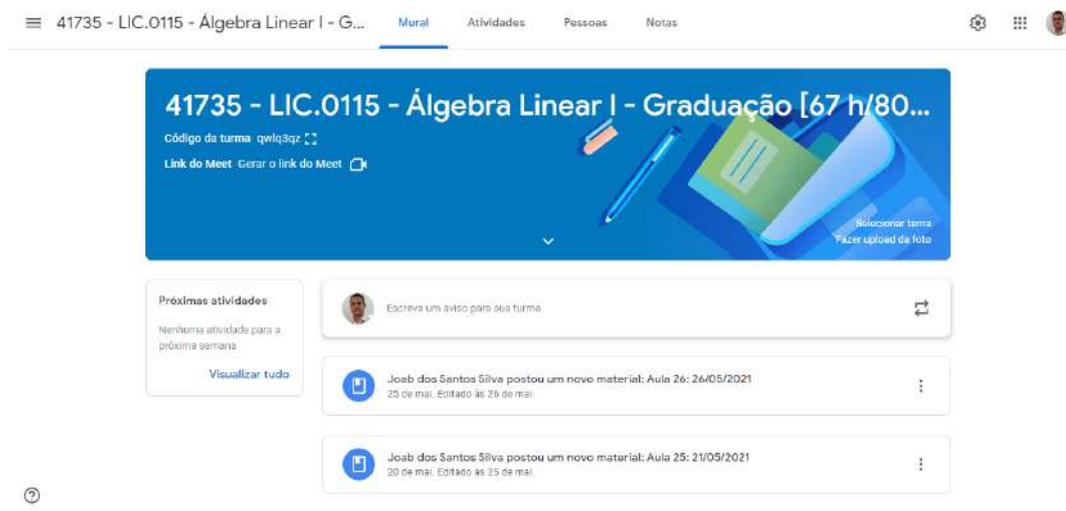
## 4 ANÁLISE E DISCUSSÃO DOS RESULTADOS

Neste capítulo descrevemos a aplicação prática da metodologia sala de aula invertida na disciplina de Álgebra Linear 1 do Curso de Licenciatura em Matemática em conjunto com o Curso Superior de Licenciatura em Física do IFPB, campus Campina Grande, ofertada no período letivo de 2020.2.

### 4.1 ESTRUTURAÇÃO DA SALA DE AULA INVERTIDA

A disciplina de Álgebra Linear 1 contava com 39 (trinta e nove) alunos matriculados, sendo 25 (vinte e cinco) de matemática e 14 (quatorze) de física. As aulas remotas síncronas aconteceram nas quartas-feiras das 18h30min às 20h00min, e nas sextas-feiras das 20h00min às 21h30min. O ambiente virtual de aprendizagem utilizado foi a plataforma GSA, na qual o professor disponibilizou informações sobre os encontros. Apresentamos nas Figuras [11](#) e [12](#) a plataforma digital GSA.

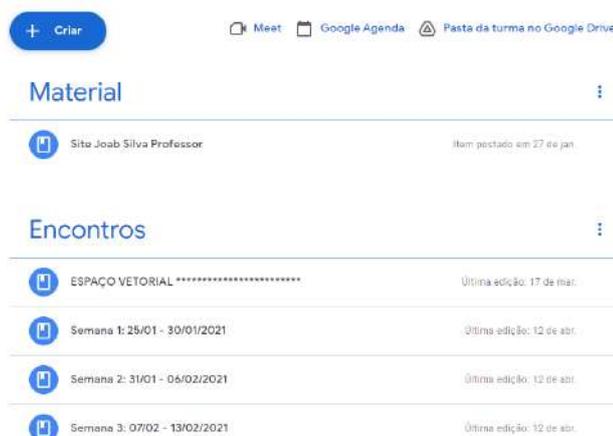
Figura 11 – Plataforma digital GSA - Álgebra Linear 1.



Fonte: Print screen - Plataforma digital GSA.

De acordo com a fundamentação teórica, particularmente a Subseção [2.2.7](#), foram utilizados slides narrados (SN) como material de vídeo a ser disponibilizado aos alunos no GSA. Para a produção dos SN foram elaborados slides com a teoria, exemplos e atividades propostas. Para a resolução dos exemplos contidos nos slides foi utilizado o software *OneNote for Windows 10* e mesa digitalizadora. A alternância entre slide e resolução de exemplos durante a gravação dos vídeos objetivaram a melhor compreensão do conteúdo e posterior resolução das atividades propostas.

Figura 12 – Plataforma digital GSA - materiais e encontros disponibilizados.



Fonte: Print screen - Plataforma digital GSA.

Além dos SN foram também disponibilizados como material de apoio ao ensino os arquivos em PDF dos slides utilizados para a gravação dos SN e lista de exercícios referente ao conteúdo de produto interno. A oferta destes materiais de apoio se deu por meio de um site cujo *link* foi postado no GSA, como podemos observar na Figura 13, no tópico Material.

Figura 13 – Página inicial do site *Joab Silva Professor*.

Fonte: Print screen do site - Joab Silva.

Trata-se do site *Joab Silva Professor*<sup>1</sup>, que além dos materiais de apoio ao ensino para a disciplina de Álgebra Linear 1, estão dispostos também materiais de apoio ao ensino para diversas outras disciplinas que o professor leciona, minicursos por ele ofertados, sugestões de vídeos, bem como informações acerca de eventos como congressos, seminários, etc.

Apresentamos na Figura 14 a interface do site, com as seções Início, Acadêmico, Disciplinas, Projetos, Novidades e Contato. Na Figura 15 está a seção Disciplinas na qual podemos ver algumas disciplinas ministradas pelo professor com disponibilização de materiais, e na Figura 16 a subseção Álgebra Linear 1, para a qual o aluno é encaminhado ao clicar no link postado no tópico Material da GSA.

<sup>1</sup> Disponível em: <<https://www.joabssilva.com.br/>>. Acesso em: 01 abr.2021.

Figura 14 – Site Joab Silva Professor.



Fonte: Print screen do site - Joab Silva.

Figura 15 – Página de Disciplinas e Cursos.



Fonte: Print screen do site - Joab Silva.

Figura 16 – Página da Disciplina Álgebra Linear 1.



Fonte: Print screen do site - Joab Silva.

Assumindo o conceito de sala de aula invertida como discutido na Subseção 2.2.7, ou seja, ocorrendo em três momentos (planejamento, confecção e disponibilização dos materiais didáticos; aprofundamento dos conceitos estudados na primeira etapa e resolução de problemas; e análise, por parte do professor, do desenvolvimento da primeira e segunda etapas para decidir sobre a próxima aula) destacamos que o primeiro momento ocorreu de forma assíncrona (antes do encontro) e o segundo de forma síncrona (o momento do encontro propriamente dito).

Assim, o momento assíncrono ocorria a partir da disponibilização dos materiais de apoio ao ensino no GSA e no site, com antecedência de 48 (quarenta e oito) horas da aula síncrona, para que os alunos tivessem acesso aos materiais e informes divulgados pelo professor. O período de antecedência foi estabelecido pelo fato dos encontros ocorrerem nas quartas-feiras e sextas-feiras, e para que os alunos tivessem tempo hábil para estudar o material disponibilizado, podendo chegar ao momento síncrono com condições de discutir sobre o tema proposto. Dentre os materiais disponibilizados o mais curto tinha de 22 minutos e o mais longo 59 minutos de duração.

Os momentos síncronos, correspondentes a segunda etapa da sala de aula invertida,

ocorreram em tempo real pela plataforma digital *Google Meet*, a partir de uma videoconferência com os alunos, professor e a pesquisadora. Estes momentos também foram gravados e as gravações disponibilizadas no GSA. Optamos por esta prática para que os alunos tivessem acesso caso desejassem assistir novamente o momento síncrono, possibilitando a eles fazerem questionamentos que julgassem necessários no próximo encontro.

Os encontros ocorreram em 12, 14, 19, 21 e 26 de maio de 2021, nos quais foram trabalhados, respectivamente, os conteúdos de produto interno, norma e propriedades, ângulo entre dois vetores e ortogonalidade, processo de ortogonalidade Gram-Schmidt e complemento ortogonal.

Ilustramos na Figura 9 as etapas da sala de aula invertida realizadas com os alunos nos momentos assíncronos (primeira etapa) e síncronos (segunda etapa) e a análise por parte do professor sobre a efetividade das etapas anteriores para decisão sobre o próximo encontro (terceira etapa), retornando a primeira etapa para um novo ciclo.

De acordo com as categorizações dos encontros síncronos, correspondentes a segunda etapa da sala de aula invertida, destacamos que em uma primeira fase foi feita a consulta, a partir de questionamentos orais realizado pelo professor, se os alunos conseguiram assistir os SN e como eles avaliam os materiais disponibilizados na plataforma GSA, e na segunda fase o professor indagou se os alunos compreenderam os conteúdos trabalhados nos SN e foi dado início às discussões dos conteúdos entre professor e alunos, e alunos e alunos.

## 4.2 DESCRIÇÃO DOS ENCONTROS SÍNCRONOS

### 4.2.1 Encontro 1

O primeiro encontro foi realizado em 12 de maio de 2021, tendo início às 18h30min e término às 20h00min, com a participação de 19 integrantes, sendo eles: a pesquisadora, o professor de matemática e 17 (dezessete) alunos. Os materiais divulgados na plataforma GSA versavam sobre o conteúdo de produto interno, especificamente, definição, exemplos e propriedades e os SN tinham duração de aproximadamente 59 minutos.

A Figura 17 apresenta o tópico postado no GSA referente ao encontro 1. Nele se observa o tema do encontro, o *link* do *Google Meet* para o encontro síncrono, o SN à esquerda e um segundo vídeo à direita. O vídeo à direita é referente a gravação do encontro síncrono, postado posteriormente para que os alunos tivessem acesso a mais esse material. Destacamos que esta estrutura de tópico no GSA foi replicado para os cinco encontros.

Na primeira fase, foi verificado que alguns alunos não conseguiram assistir os SN por completo, uns alegaram que faltaram poucos minutos para chegar ao final e outros informaram que não assistiram o SN por falta de disponibilidade no dia que foi postado e nos dias que antecederam o encontro síncrono.

Figura 17 – Materiais divulgados no GSA - Encontro 1.



Fonte: Print screen - Plataforma digital GSA.

De acordo com [Bergmann e Sams \(2018\)](#), no primeiro momento em que os alunos têm contato com algo diferente não visto anteriormente, devemos permitir que aos poucos se adaptem as mudanças implementadas nas aulas, e complementa dizendo que nas próximas experiências com esta estratégia de ensino podem se transformar em parte da cultura da instituição.

Como os alunos devem assumir uma postura de responsabilidade pela sua aprendizagem assistindo os SN e levando questionamentos para o momento síncrono, uma vez que os alunos não cumprem sua responsabilidade, não é possível permitir a inversão. [Bergmann e Sams \(2018\)](#) afirmam que neste caso os alunos não estão preparados para a aula, pois a maioria das informações sobre o conteúdo são ditas nos SN e, conseqüentemente, perdem de ter a interação com o professor.

Poucos alunos não assistiram o SN do primeiro encontro e por esse motivo não interagiram com o professor e os demais alunos. A partir das discussões na aula os alunos que não assistiram o SN puderam ter uma noção do conteúdo e se comprometeram em assistir posteriormente. Sendo este o primeiro contato com a estratégia da sala de aula invertida, era esperado que isso ocorresse e que aos poucos iriam se acostumando a assistir os SN. [Bergmann e Sams \(2018\)](#) afirmam que os alunos logo se dão conta que é fundamental assistir os vídeos para que aproveitem o tempo com o professor.

Ainda na primeira fase no que diz respeito a avaliação dos alunos sobre os materiais disponibilizados na plataforma digital, eles informaram que sentiram dificuldade de compreender a escrita da resolução dos exemplos apresentados no SN pelo fato do professor estar escrevendo em um quadro verde. A cor do quadro não permitia ver o texto com nitidez.

**ALUNO A:** *“eu não sei se foi minha internet [...] aí ficava difícil de ver o verdinho”.*

Destacamos que esta inquietação apontada pelos alunos possibilita que o professor faça melhoramentos nos SN para os próximos. [Matos \(2018\)](#) comenta que é neste momento que

eles aferem se o material disponibilizado foi satisfatório para aprendizagem e oportuniza a dizerem o que deve ser aprimorado. Podemos aferir nesse momento a importância de os alunos assistirem os SN, podendo assim fazer suas colaborações para a construção do material a ser disponibilizado.

Prosseguindo para a fase em que verificamos se os alunos compreenderam o conteúdo trabalhado no SN, observemos que eles sentiram dificuldade para compreender a notação de produto interno e mostraram algumas características destas dificuldades solicitando que o professor explicasse novamente esse ponto. Destacamos um diálogo entre o aluno e professor neste momento:

**ALUNO A:** *“em parte da teoria deu, viu professor? é [...] só que no final o senhor mostra primeiro os quatro axiomas, [...] o senhor deixa pra o final mostrar que o contrário também é válido [...] aí a pessoa fica meio bugado naquela hora [...] aí se você, se você voltar um pouquinho com exemplo, aí fica um pouquinho melhor”.*

**PROFESSOR:** *“podemos fazer, claro que sim”.*

**ALUNO A:** *“e na parte que o senhor tá trabalhando com números, e nos pontos e vírgula na de desenvolver, principalmente na segunda [...] fiquei meio perdido, aonde que eu devo botar o vetorial pra fazer a soma duas dois”.*

**PROFESSOR:** *“o escalar”.*

**ALUNO A:** *“do escalar, né?”.*

**PROFESSOR:** *“isso [...]”.*

Após os alunos informarem se compreenderam o conteúdo de produto interno apresentado no SN, o professor explicou sobre a notação de produto interno, ponto que os alunos alegaram ter mais dificuldades, fazendo uma associação com a escrita deste conteúdo quando visto na disciplina de Álgebra Vetorial e Geometria Analítica.

Destacamos mais uma vez a importância de os alunos assistirem os SN, pois permite que esclareçam suas dúvidas, gerencie seu próprio tempo e tomem suas próprias decisões. Isto se mostrou essencial para que eles sejam o foco principal da aula, melhor, da aprendizagem. Daí, podemos perceber as dificuldades que obtiveram no conteúdo.

As próximas discussões foram sobre os 4 (quatro) axiomas de produto interno, ponto que os alunos relataram ter voltado o vídeo mais de uma vez para assistir o SN:

**ALUNO A:** *“não é que ele seja difícil professor, é porque coloquei na cabeça que a vírgula me confunde, aí tá complicado pra mim”.*

**ALUNO A:** *“[...] ainda bem que tem a opção de você voltar 5 segundos”.*

**ALUNO B:** *“pois é, na aula não tem como”.*

Como dito anteriormente, os SN apresentavam a definição de produto interno com seus axiomas, vejamos:

**Definição:** Seja  $V$  um  $\mathbb{R}$ -espaço vetorial. Um produto interno sobre  $V$  é uma função

$$\begin{aligned} \langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (u, v) &\longmapsto \langle u, v \rangle \end{aligned}$$

ou seja, que associa a cada par de vetores  $(u, v) \in V \times V$  um número  $\langle u, v \rangle \in \mathbb{R}$ , que satisfaz os seguintes axiomas:

1.  $\langle u, v \rangle = \langle v, u \rangle, \forall u, v \in V$  (Axioma de Comutatividade ou Simetria)
2.  $\langle u + v, w \rangle = \langle u, w \rangle + \langle v, w \rangle, \forall u, v, w \in V$  (Axioma de Aditividade)
3.  $\langle \alpha u, v \rangle = \alpha \langle u, v \rangle, \forall u, v \in V$  e  $\forall \alpha \in \mathbb{R}$  (Axioma de Homogeneidade)
4.  $\langle u, u \rangle \geq 0, \forall u \in V$ , e  $\langle u, u \rangle = 0$  se, e somente se,  $u = 0$ . (Axioma de Positividade)

Diante das falas dos alunos podemos ressaltar que o **ALUNO A** descreveu sua dificuldade de entender a vírgula que estava gerando certa confusão e a possibilidade de apertar o botão de retrocesso, adiantar ou pausar os SN para assistir quantas vezes achar necessário para compreender. O **ALUNO B** complementou dizendo que na aula tradicional isto não seria possível, uma vez que não se tem a oportunidade de assistir a aula antecipadamente.

**Bergmann e Sams (2018)** afirmam que a inversão da sala de aula permite aos alunos destacar as suas necessidades individuais e em ritmo adequado. Em relação ao botão de retrocesso, pausar ou adiantar os SN, é uma ferramenta importante para que os alunos possam progredir em seu próprio ritmo, pois, alguns deles pausam para fazer as anotações, voltam mais de uma vez para assistir e compreender o conteúdo, apertam várias vezes no botão de retrocesso para rever o que não entendem. Assim, permite o professor trabalhar com eles de modo grupal ou individual.

O professor esclareceu as dúvidas que foram apresentadas sobre os axiomas pelos alunos. Interessante destacar no terceiro axioma que:

**ALUNO A:** “[...] essa foi tranquilo, está mais para a multiplicação por escalar”.

**PROFESSOR:** “exatamente, a multiplicação por escalar”.

A fala deste aluno demonstra o quanto foi importante compreender o conteúdo, visto a significância de estudar o conteúdo antes do momento síncrono, pois permite fazer associações e aprofundamentos. Com isso, os alunos passam a ser protagonistas na aprendizagem e não apenas receptores de informações.

Nos SN o professor propôs aos alunos a resolução de problemas e a demonstração de alguns resultados. Parte dos alunos desenvolveram o que foi pedido, apresentaram o processo realizado e discutiram com o professor para verificar a coerência da resolução. Alguns alunos informaram que não conseguiram, mas tinham a ideia de como fazer. Com o auxílio do professor, organizando a discussão, esses alunos conseguiram prosseguir.

Nesse exemplo:

Sejam  $u = (x_1, x_2), v = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$ , verifique se a função

$$\langle u, v \rangle = 2x_1y_1 - 5x_2y_2$$

define um produto interno sobre  $\mathbb{R}^2$ .

foi necessário o professor explicar o processo de resolução, aproveitando o momento para revisar e aprofundar a teoria como fazer. Da discussão destacamos as seguintes falas:

**ALUNO C:** *“preferi fazer dessa forma, porque fui riscando tudo que eu já tinha escolhido”.*

**PROFESSOR:** *“ótimo, ótimo, você colocar isso. É uma estratégia que você está usando, é bem interessante, faça como achar mais confortável, o importante, exatamente a verificação do axioma”.*

observamos aqui que existia outras formas de fazer a demonstração e o aluno o fez de modo diferente da que o professor fez. Notemos que o aluno tomou sua própria decisão, ou seja, foi autônomo em dizer que da forma que ele fez era melhor para a sua compreensão. Isso é primordial, uma vez que esta estratégia de ensino permite que os alunos façam suas escolhas e caminhem no seu ritmo.

O professor encerrou o momento síncrono deixando questionamentos e solicitando que os alunos pesquisassem possíveis respostas, como: porque alguns produtos internos recebem o nome de canônico? Também informou aos alunos o tema a ser trabalhado na próxima aula assíncrona.

Concluimos que em relação a categorização sobre o encontro os objetivos foram alcançados e notemos que dada a inversão da aula se percebe a interação entre alunos, conteúdo e professor, apresentando questionamentos riquíssimos sobre o conteúdo. A possibilidade de ter o botão para retrocesso, pausar ou acelerar os SN permitiu aos alunos progredir no próprio ritmo, fazendo as anotações com calma e assim assimilando melhor o conteúdo exposto. [Bergmann e Sams \(2018\)](#) comentam que esta flexibilidade não seria possível no ensino tradicional, pois a inversão oportuniza o tempo para auxiliar os alunos a descongestionarem suas rotinas.

## 4.2.2 Encontro 2

O segundo encontro aconteceu em 14 de maio de 2021, tendo início às 20h00min e término às 21h10min, contando com a participação de 14 integrantes, sendo eles: a pesquisadora, o professor de matemática e 12 (doze) alunos. Os materiais divulgados na plataforma GSA versavam sobre o conteúdo de norma e propriedades, e os SN tinham duração de cerca de 54 minutos.

A Figura 18 apresenta o tópico postado no GSA referente ao encontro 2.

Figura 18 – Materiais divulgados no GSA - Encontro 2.



Fonte: Print screen da plataforma GSA.

Na primeira fase da categorização destacamos que os alunos assistiram os SN por completo e procuraram resolver os problemas e questionamentos levantados nos SN e as questões propostas na lista de exercícios. A partir das contribuições feitas pelos alunos no Encontro 1, no qual eles relataram ter sentido dificuldades de compreender a escrita do quadro verde, o professor fez algumas modificações para melhoria do material disponibilizado. As modificações feitas foram a mudança da cor do quadro, de verde para branco, utilização de diferentes cores para o texto escrito e o aumento da letra na escrita. Neste sentido, destacamos o seguinte diálogo:

**ALUNO D:** *“ficou bem melhor, professor”.*

**PROFESSOR:** *“ficou melhor [...] para, para assimilar o que estava sendo escrito”.*

**ALUNO D:** *“assim, pelo menos visualmente melhorou muito [...] até pra prender mais a atenção da gente [...]”.*

**PROFESSOR:** *“bom, que bom, olha aí, uma evolução, então, o vídeo”.*

**ALUNO E:** *“verdade, eu até estranhei [...] quando vi [...] o fundo branco”.*

Vemos aqui a importância de os alunos assistirem os SN e, a partir das modificações sugeridas por eles, oportunizar uma melhor concentração no momento assíncrono, como

podemos verificar nas falas dos alunos. Estas falas convergem com a afirmação de Bergmann e Sams (2018) de que a utilização do quadro branco chama a atenção dos alunos e cativa para a aprendizagem.

Bergmann e Sams (2018) ressaltam ainda que na estratégia sala de aula invertida podem ser utilizadas quaisquer ferramentas que ofereçam condições para os alunos compreenderem o conteúdo abordado e fazer as suas contribuições para melhoria. Pois, esta estratégia tem o interesse de redirecionar a atenção na sala de aula, neste caso, na aula síncrona, tendo como foco principal os alunos e a aprendizagem.

Na segunda fase os alunos destacaram que entenderam o conteúdo, como podemos verificar em uma das falas dos alunos, e apontaram algumas dúvidas nas questões propostas.

**ALUNO D:** “[...] eu achei tranquilo essa parte da norma [...] de resolver [...] porque você pega cada entrada é [...] eleva ao quadrado dentro da raiz e depois soma tudo”.

O relato dos alunos sobre o conteúdo estudado é de fundamental importância, pois é a partir dos relatos que o professor percebe quais foram as dificuldades encontradas e o que deve se aprimorar para que os alunos compreendam.

Dando início as discussões, o professor faz alguns questionamentos sobre como foi definido norma, se a norma de um vetor é sempre a mesmo ou pode mudar, o que tinha levado a obter dois resultados para a norma de um mesmo vetor em um dos exemplos exposto nos SN, como é chamado um vetor que tem norma igual a 1 (um), entre outros. Destacamos algumas falas sobre alguns desses questionamentos obtidos nas discussões entre os alunos e o professor.

Apresentamos a seguir alguns diálogos referentes aos questionamentos feitos pelo professor. Em relação a definição de norma, apresentada nos SN com o seguinte texto:

Seja  $V$  um espaço euclidiano. Dado um vetor  $v \in V$ , chama-se norma de  $v$ , e denota-se por  $\|v\|$ , o número real definido por

$$\|v\| = \sqrt{\langle v, v \rangle}$$

temos o diálogo a seguir:

**ALUNO D:** “[...] o produto interno só que dentro de uma raiz, né?!”.

**PROFESSOR:** “Certo. Produto interno entre quem?”.

**ALUNO D:** “entre [...]  $v$  interno  $v$ ”.

**PROFESSOR:** “exatamente. [...]”.

Sobre o exemplo

Considere o espaço euclidiano  $\mathbb{R}^3$ .

- Calcule a norma do vetor  $u = (4, -2, 2)$  em relação ao produto interno canônico;
- Calcule a norma do vetor  $u = (4, -2, 2)$  em relação ao produto interno dado por

$$\langle u, v \rangle = x_1y_1 + 2x_2y_2 - 2 + 3x_3y_3$$

onde  $u = (x_1, x_2, x_3), v = (y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3$ .

destacamos o diálogo a seguir:

**ALUNO D:** “o primeiro é o produto interno canônico e o segundo [...]  $x_1y_1 + 2x_2y_2 + 3x_3y_3$ ”.

**PROFESSOR:** “exato. [...] é o produto interno ponderado de pesos 1, 2 e 3. [...]”.

Em outro diálogo, temos:

**PROFESSOR:** “quando a norma é 1 (um) a gente diz que o vetor é o quê?”.

**ALUNO B:** “unitário”.

**PROFESSOR:** “e se o vetor não for unitário, eu posso torná-lo unitário?”.

**ALUNO B:** “sim, é só dividir [...] ele pela norma, no caso”.

**PROFESSOR:** “e a gente vai chamar esse novo vetor de que?”.

**ALUNO E:** “de versor”.

Observamos que alguns questionamentos realizados pelo professor são interessantes, uma vez que [Bergmann e Sams \(2018\)](#) comentam que ao conhecermos os alunos sabemos até que ponto eles entendem cada objetivo de aprendizagem, para que possamos ajustar as perguntas para compreensão de cada aluno. Eles têm níveis de entendimento diferentes e o objetivo do professor é auxiliar no desenvolvimento dos alunos, já que esta estratégia permite ao professor realizar questionamentos sobre os temas previamente estudados pelos alunos e de várias maneiras diferentes, proporcionando com isso uma maior interação na aula.

Dando continuidade ao encontro síncrono alguns alunos informaram ter sentido dificuldade na resolução de uma das questões propostas. Mais uma vez, disseram que se tinha a ideia, mas não sabiam se estavam no caminho certo. O professor escutou as ponderações dos alunos e foi organizando uma discussão, retomando trechos da teoria, até que determinado momento os deixou livres para que dessem continuidade na resolução.

O encontro foi finalizado com o professor fazendo uma fala sobre espaço vetorial, que não constava nos SN, e que considera essencial para os alunos que cursarão a disciplina de Análise Real I e aos que deseja fazer pós-graduação.

### 4.2.3 Encontro 3

O terceiro encontro foi concretizado em 19 de maio de 2021, tendo início às 18h45min e término às 20h00min, contando com a participação de 14 integrantes, sendo eles: a pesquisadora, o professor de matemática e 12 (doze) alunos. Os materiais disponibilizados na plataforma GSA versavam sobre o conteúdo de ângulo entre dois vetores e ortogonalidade, e os SN tinham duração de aproximadamente 48 minutos.

A Figura 19 apresenta os materiais disponibilizados para os alunos no GSA referente ao encontro 3.

Figura 19 – Materiais divulgados no GSA - Encontro 3.



Fonte: Print screen da plataforma GSA.

Observamos que na primeira fase alguns alunos disseram que não conseguiram assistir os SN por completo, e em relação a avaliação não destacaram nenhum procedimento para melhoria. Assim, entendemos que o material produzido foi satisfatório para aprendizagem.

Percebemos que na segunda fase os alunos destacaram que compreenderam o conteúdo proposto nos SN, mas ficaram com dúvidas de entender um determinado exemplo.

**ALUNO I:** “[...] *tava tranquilo, para compreender bem*”.

A partir do conteúdo proposto nos SN iniciou as discussões sobre o conceito de ângulo, e destacamos algumas falas:

**PROFESSOR:** “*a partir de que tema foi [...] introduzido o conceito de ângulo, pessoal?*”.

**ALUNO B:** “*oh professor [...] SBS [...]*”.

**ALUNO B:** “*a desigualdade SBS. [...] Desigualdade de Cauchy-Bunyakovskii-Schwarz*”.

Dando continuidade a discussão o professor falou dos exemplos apresentados nos SN e na possibilidade de ter uma interpretação geométrica, vejamos algumas falas.

**PROFESSOR:** “em que situações a gente tem uma interpretação geométrica desse cosseno com aquele ângulo que realmente a gente vê em Geometria Euclidiana Plana? Em que espaços vetoriais eu posso ter essa interpretação geométrica?”

**ALUNO G:** “no  $\mathbb{R}^3$ ”.

**PROFESSOR:** “ $\mathbb{R}^3$ . Tem mais algum?”

**ALUNO B:** “no  $\mathbb{R}^2$ , né?!”.

**PROFESSOR:** “[...]  $\mathbb{R}^3$  e  $\mathbb{R}^2$ [...]”.

Podemos observar por estas falas que os alunos podem perceber que em alguns espaços vetoriais podemos ter uma interpretação geométrica para ângulo entre dois vetores e que esta interpretação se perde.

Os alunos não conseguiram desenvolver a solução do exemplo a seguir:

Seja  $V = C([0, 1], \mathbb{R})$  com produto interno canônico. Determine o ângulo entre as funções  $f(x) = x^3 - x$  e  $g(x) = x^2 - x$ .

Este é um problema que sai dos espaços  $R^n$  e cujo produto interno é definido por uma integral, o que fez com que os alunos exitassem. Nesse caso, o professor retomou a teoria do produto interno canônico sobre o espaço vetorial  $C([a, b], \mathbb{R})$ . Após a explicação, o professor sugeriu que os alunos retomassem a resolução do exemplo e a pedido deles o professor apresentou a resposta para que os alunos verificassem o resultado de suas respostas.

Em relação ao conteúdo de ortogonalidade o professor iniciou os questionamentos sobre as três definições apresentadas na SN, a saber, vetores ortogonais, conjunto ortogonal e conjunto ortonormal. Vejamos algumas falas:

**PROFESSOR:** “[...] quando é que nós dizemos que dois vetores são ortogonais?”

**ALUNO B:** “quando o produto interno é zero”.

**PROFESSOR:** “quando o produto interno é zero [...] E quando é que um conjunto é ortogonal?”

**ALUNO B:** “[...] você pega os elementos do conjunto [...] verifiquem entre eles se eles são [...] o produto interno dá zero, e se der é ortogonal”.

**PROFESSOR:** “[...] e quando é que o conjunto é ortonormal? [...]”.

**ALUNO B:** “[...] quando a gente calcular norma dos vetores dá um, né?”

**PROFESSOR:** “só isso?”

**ALUNO B:** “e também o produto interno dá zero, né? [...]”.

**PROFESSOR:** “isso, exatamente”.

Mais uma vez, podemos observar nas falas que os alunos de fato assistiram os SN e se prepararam para as discussões e aprofundamentos em relação ao conteúdo.

Na resolução do exemplo

Considere o espaço euclidiano  $\mathbb{R}^2$  e os vetores  $u = (1, 1), v = (-1, 1) \in \mathbb{R}^2$ .

- a) Verifique se os vetores  $u$  e  $v$  são ortogonais relativamente ao produto interno canônico.
- b) Verifique se os vetores  $u$  e  $v$  são ortogonais relativamente ao produto interno definido por  $\langle u, v \rangle = 2x_1y_1 + 3x_2y_2$  onde  $u = (x_1, x_2), v = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$ .

os alunos sentiram dificuldade de compreender a letra b). Observamos que esta dificuldade está relacionada com a dificuldade relatada no Encontro 1, na qual envolvia o produto interno ponderado. O professor organizou a resolução de modo que entendessem e aproveitou o exemplo para fazer uma associação com o conteúdo de norma, visto na aula anterior, analisando se os vetores eram unitários.

Esta associação com a norma se mostrou interessante, pois o **ALUNO G** apresentou uma dúvida semelhante no exemplo:

O conjunto  $B = v_1, v_2, v_3$ , onde  $v_1 = (1, -1, 0), v_2 = (1, 1, 1)$  e  $v_3 = (-1, -1, 2)$ , é uma base ortogonal de  $\mathbb{R}^3$ ?

podendo o aluno ter sua dúvida sancionada. Como [Bergmann e Sams \(2018\)](#) retratam, a medida que conhecemos nossos alunos podemos inferir até que ponto eles compreenderam e como podemos fazer os questionamentos para que as dúvidas sejam esclarecidas. Por isso, é importante o professor fazer os questionamentos para o aluno, e de acordo com as discussões ele já vai tendo a noção do que perguntar. Com isso, professor e alunos podem interagir uns com os outros, aprofundando as discussões e potencializando a assimilação do conteúdo.

Neste encontro o professor decidiu avaliar novamente se os materiais propostos estavam satisfatórios para os alunos compreenderem os conteúdos trabalhados. Refazer esta avaliação durante o encontro é importante, pois é possível que pela quantidade de conceitos os alunos esqueçam de algo em determinado momento e lembrem em outro. Como resposta a esses questionamentos destacamos o seguinte diálogo:

**ALUNO I:** “*tá sim, professor*”.

**ALUNO G:** “*tranquilo, professor*”.

**ALUNO B:** “*as aulas tão muito boa professor, só o tempo que é curto mesmo, mas aulas tão boa*”.

Dando continuidade a discussão, o professor destacou que foi apresentado nos SN um resultado interessante, e que foi visto tanto no Ensino Fundamental II e Ensino Médio, como também em disciplinas da Licenciatura em Matemática como Matemática Básica I e II, Geometria Euclidiana Plana e Álgebra Vetorial e Geometria Analítica. Um dos alunos interagiu com o professor, e destacamos esse momento:

**PROFESSOR:** “alguém recorda que resultado é esse?”

**ALUNO I:** “Pitágoras”.

Apresentou-se a seguir este resultado:

**Teorema de Pitágoras:** Sejam  $V$  um espaço euclidiano e  $u, v \in V$ . Então,  $u \perp v$  se, e somente se,

$$\|u + v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2$$

Após a apresentação do resultado o professor iniciou uma discussão sobre suas interpretação geométrica para o  $\mathbb{R}^2$  e  $\mathbb{R}^3$ , e também da sua demonstração em Álgebra Linear 1. Foi sugerido aos alunos a complementação da demonstração.

Em relação a proposição

Seja  $V$  um espaço com produto interno e  $A = v_1, v_2, \dots, v_m \subset V$  um subconjunto ortogonal formado por vetores não nulos. Se  $v \in [v_1, v_2, \dots, v_m]$ , então

$$\sum_{i=1}^m \frac{\langle v, v_i \rangle}{\|v_i\|^2} \cdot v_i$$

tivemos o seguinte diálogo:

**PROFESSOR:** “[...] se conseguiu compreender [...]?”

**ALUNO G:** “conseguir professor. É que me deixa mais ansioso é a questão do somatório, né? Mas, daquela forma é mais simples, eu fiz até o exemplo que o senhor deixou no  $\mathbb{R}^3$  baseado no exemplo que o senhor fez no  $\mathbb{R}^2$ , então, talvez esteja certo.”

**PROFESSOR:** “ok. Vamos lá conferir, então.”

A partir daí o **ALUNO G** foi explicando como realizou a resolução do exemplo e verificou-se em determinado momento que a resposta não estava completamente correta. Destacamos aqui a importância de o professor analisar o desenvolvimento da resposta do aluno para que possa compreender seu raciocínio e identificar o possível erro.

Nesse momento o professor sugeriu que os cálculos fossem feitos em separado para que não houvesse confusão. Além de proporcionar a associação com conteúdo visto na encontro anterior, o aluno pôde perceber a relação do conteúdo abordado no exemplo a seguir.

Dado o espaço euclidiano  $\mathbb{R}^3$  com produto interno canônico, determine a expansão de Fourier do vetor  $v = (2, 1, -3)$  em relação à base

$$B = (1, -1, 2), (2, 0, -1), (1, 5, 2)$$

O encontro foi finalizado com o professor informando qual seria o próximo conteúdo abordado nos SN, reforçando a importância de os alunos assistirem o vídeo para que possam discutir e aprofundar a teoria a partir da interação entre professor e alunos.

#### 4.2.4 Encontro 4

O quarto encontro aconteceu em 21 de maio de 2021, tendo início às 20h00min e término às 21h00min, contando com a participação de 10 integrantes, sendo eles: a pesquisadora, o professor de matemática e 8 (oito) alunos. Os materiais divulgados na plataforma GSA versavam sobre o conteúdo de processo de ortogonalização de Gram-Schmidt, e os SN tinham duração de cerca de 25 minutos.

A Figura 20 apresenta o tópico postado no GSA referente ao encontro 4.

Figura 20 – Materiais divulgados no GSA - Encontro 4.



Fonte: Print screen da plataforma GSA.

Observamos que na primeira fase os alunos conseguiram assistir os SN, então podemos perceber que eles estão se adaptando as mudanças propostas pelo professor. Com relação a avaliação sobre os SN não acrescentaram nenhuma informação para melhoria, visto que nos encontros anteriores algumas modificações já tinham acontecidas. Uma ressalva que fizeram foi sobre a duração dos SN em relação aos anteriores. Mas, o conteúdo exposto só compreendia de um tópico, tornando assim a duração menor.

Na segunda fase, evidenciaram que sentiram dificuldade de entender a demonstração do seguinte resultado:

**Teorema:** Todo espaço vetorial de dimensão finita  $n \geq 1$  com produto interno possui uma base ortonormal.

na qual traz o processo de ortogonalização de Gram-Schmidt. Mas, destacaram que quando assistiram a aplicação do processo em um exemplo ficou melhor de compreender

o que a demonstração queria dizer. E quando partiram para a realização da atividade proposta, puderam consolidar a apropriação aí ficou mais claro.

A demonstração do teorema consiste em construir, a partir de uma base arbitrária, uma base ortogonal e, na sequência, normalizar cada vetor da base ortogonal construída obtendo assim uma base ortonormal procurada. Diante dos questionamentos o professor explicou a ideia contida na demonstração e solicitou que após o término da aula os alunos pudessem assistir novamente os SN. [Bergmann e Sams \(2018\)](#) retratam que não necessita mais o professor explicar passo a passo todos os tópicos (neste caso, a demonstração) uma vez que os alunos podem ver e rever a gravação, e até mesmo aprofundar o conteúdo. Os autores também comentam que quando o professor faz os questionamentos é porque conhece seu aluno, e assim possibilita que possam interagir uns com os outros.

Ainda assim, alguns alunos pediram para explicar a última parte da questão, como podemos ver:

**ALUNO F:** “[...] eu só queria, se possível, o senhor desse uma explicadinha na última parte do exercício proposto, que é pra encontrar a base ortonormal”.

**ALUNO B:** “eu também fiz professor”.

**ALUNO G:** “[...] eu compreendi bem melhor o exemplo do que a demonstração em si [...]”.

Com isso, o professor iniciou a explicação e durante o processo de resolução fez questionamentos os alunos objetivando conduzi-los pela teoria trabalhada. O professor aproveitou o momento para falar um pouco sobre os matemáticos que emprestam os nomes ao processo de ortogonalização, a saber, Jörgen Pedersen Gram (1850-1916) e Erhard Schmidt (1876-1959).

A questão era a seguinte:

Dado o espaço euclidiano  $\mathbb{R}^3$  com o produto interno canônico, determine uma base ortonormal de  $\mathbb{R}^3$  a partir de  $B = \{(1, 0, 0), (0, -1, 2), (2, -3, -1)\}$ .

Destacamos algumas falas das discussões realizadas durante o resolução:

**PROFESSOR:** “qual a primeira coisa que a gente fazia, pessoal, para aplicar o método de Gram-Schmidt?”

**ALUNO B:** “tomava  $w_1$  sendo igual a  $v_1$ ”.

**PROFESSOR:** “Ok. Então, vamos lá. [...] Segundo passo: determinar  $w_2$ . Qual a expressão para calcular  $w_2$ ?”

**ALUNO F:** “ $v_2$  menos o produto interno [...] de  $v_2$  com  $w_1$  sobre o módulo de  $w_1$  ao quadrado vezes  $w_1$ ”.

**PROFESSOR:** “Então, vamos lá calcular  $w_3$ . Como é que fica a expressão para  $w_3$ ?”

**ALUNO B:** “ $v_3$  menos o produto interno de  $v_3$  com  $w_2$  dividido pela norma de  $w_2$  ao quadrado”.

Nessa parte o professor chamou atenção dos alunos:

**PROFESSOR:** “Quando vocês tiverem pagando matemática computacional [...] vão perceber que em alguns cálculos, quando a gente for, por exemplo, calcular a resolução de sistema pelo método indireto de Gauss-Seidel, o que a gente faz é pegar a resposta anterior e aplicar no cálculo da próxima. Perceba que isso aqui acontece [...] Quando eu vou calcular  $w_1$  eu usei o  $v_1$  que tá fixo, quando eu vou usar [...] calcular o  $w_2$  eu já uso o  $w_1$  anterior. Quando eu vou calcular o  $w_3$  eu já uso  $w_1$  que eu já [...] anterior e  $w_2$  que eu consegui também. Perceba no próximo eu já uso o que eu consegui anteriormente, tá? [...]”

Vejamos o quanto é importante a interação com o professor, pois a medida que vão surgindo questionamentos é possível trazer informações que podem ter passado despercebidas pelo aluno e que podem, futuramente, ser estudadas para uma compreensão mais apurada do conteúdo. Destacamos que os alunos já estavam cientes das ideias de como resolver e isso foi possível porque estudaram anteriormente e tentaram fazer o que se pedia no SN. Destacamos também como o professor tem condições de tirar as dúvidas de modo individualizado ou grupal à medida que vão estabelecendo os diálogos durante a aula.

Assim, fica clara a importância de os alunos terem estudados o conteúdo antes da aula propriamente dita para que haja as interações entre o professor e os alunos.

Por fim, o professor comentou que existem vários conteúdos matemáticos que estudamos em outras disciplinas e estão intimamente conectados com Álgebra Linear 1, particularmente com o conceito de ortogonalidade, dentre eles a Série de Fourier, visto na disciplina de Cálculo 3.

#### 4.2.5 Encontro 5

O quinto encontro aconteceu em 26 de maio de 2021, tendo início às 19:h00min e término às 20h00min, contando com a participação de 19 integrantes, sendo eles: a pesquisadora, o professor de matemática e 17 (dezessete) alunos. Os materiais disponibilizados na plataforma GSA versavam sobre o conteúdo de complemento ortogonal, e os SN tinham duração de cerca de 22 minutos.

A Figura 21 apresenta o tópico postado no GSA referente ao encontro 5.

Figura 21 – Materiais divulgados no GSA - Encontro 5.



Fonte: Print screen da plataforma GSA.

Na primeira fase analisamos que os alunos conseguiram assistir os SN, e foram se adaptando ao longo das aulas com as condições propostas para a estratégia sala de aula invertida. Com relação a avaliação do material não acrescentaram nenhuma ressalva em relação a melhoria dos SN. Com isso, entendemos que os materiais disponibilizados foram satisfatórios para aprendizagem dos alunos.

Na segunda fase os alunos destacaram que compreenderam o conteúdo exposto nos SN sobre Complemento Ortogonal, e com relação a questão proposta alguns alunos sentiram algumas dificuldades durante a resolução do processo. A partir daí, iniciaram alguns questionamentos sobre o conceito de Complemento Ortogonal para se chegar até a sua definição. Destacamos algumas falas:

**PROFESSOR:** “*O que é o complemento ortogonal? [...]*”

**ALUNO C:** “*eu acho que tem algum respeito com a base. Encontrar uma base e calcular o produto interno*”.

**PROFESSOR:** “*Certo. E esse produto interno tem que dar quanto?*”

**ALUNO C:** “*zero*”.

**PROFESSOR:** “*quando o produto interno entre dois vetores dá zero [...] o quê que a gente diz que os vetores são?*”

**ALUNO F:** “*ortogonal*”.

Diante das discussões sobre a definição de Complemento Ortogonal:

**Definição:** sejam  $V$  um espaço com produto interno e  $S \subset V$  um subconjunto não vazio de  $V$ . O complemento ortogonal de  $S$  é definido por

$$S^\perp = \{v \in V \mid \langle v, u \rangle = 0, \forall u \in S\}$$

foi realizada uma discussão sobre a seguinte proposição:

**Proposição:** Sejam  $V$  um espaço euclidiano e  $w = [w_1, \dots, w_k]$  um subespaço de  $V$ . Então,  $v \in W^\perp$  se, e somente se,  $\langle v, w_i \rangle = 0, \forall 1 \leq i \leq k$ .

Vejamos então um fragmento dessa discussão:

**PROFESSOR:** “*O quê que dizia essa proposição?*”

**ALUNO C:** “*se  $v$  interno  $w_1$  parece, for igual a zero [...]*”

**PROFESSOR:** “*só com  $w_1$ ?*”

**ALUNO B:** “*com todos os vetores daquela, daquela [...] a base é?*”

**PROFESSOR:** “*ali é conjunto gerador.*”

**ALUNO B:** “*do conjunto, então.*”

**PROFESSOR:** “[...] lembre: um conjunto gerador pode ser uma base. [...]”

Dando continuidade ao que foi apresentado nos SN, fizeram uma discussão sobre o processo de resolução e a representação geométrica do exemplo:

Considere o espaço euclidiano  $\mathbb{R}^3$  com o produto interno canônico. Determine o complemento ortogonal do seguinte subespaço de  $\mathbb{R}^3$ :

$$W = [(1, -1, 1), (2, 1, 3), (0, -3, -1)]$$

O professor ressaltou a importância de os alunos perceberem a relação do conteúdo em outras disciplinas de estudo. Percebemos que em Álgebra Linear 1 existem várias conexões com o conteúdo visto em outras disciplinas, especialmente as do Curso Superior de Licenciatura em Matemática, como por exemplo: Álgebra Vetorial e Geometria Analítica, Geometria Euclidiana Plana, Cálculo 2, entre outras.

Dando sequência ao encontro, o professor realizou alguns questionamentos, que são pertinentes ao tema e não foram colocados nos SN, sobre a primeira fórmula que determinava a equação de um plano vista na disciplina de Álgebra Vetorial e Geometria Analítica. Vejamos:

**PROFESSOR:** “*uma das fórmulas que a gente determinou era: a partir de dois vetores, é [...] desse plano, determinar um vetor que fosse ortogonal a ambos os planos [...] a ambos os vetores. Portanto esse vetor é ortogonal ao plano. Como que a gente chamava esse vetor que é ortogonal ao plano? [...] Vetor normal, meu povo.*”

**ALUNO C:** “*veio na minha cabeça [...] alguma coisa falando normal [...] reta normal, mas eu não associei.*”

**PROFESSOR:** “*exatamente. Da reta normal a gente pode fazer com o vetor normal [...].*”

A discussão se estendeu até a construção da equação de uma reta no espaço, retomando na discussão da disciplina de Álgebra Linear 1 conceitos como produto vetorial, propriedades do produto vetorial e vetor normal, comuns da disciplina de Álgebra Vetorial e Geometria Analítica.

Por vezes, no ensino tradicional, não encontramos tempo para aprofundar no conteúdo proposto e conectar com conteúdos abordados em outras disciplinas do curso de Licenciatura em Matemática, e a estratégia da sala de aula invertida oportuniza essa maior interação.

A seguir foram realizadas as discussões sobre o Teorema da Decomposição Ortogonal:

**Teorema:** Seja  $V$  um espaço com produto interno de dimensão finita  $n \geq 1$  e  $W$  um subespaço de  $V$ , então

$$V = W \oplus W^\perp$$

Além disso, a norma do vetor  $v \in V$  é dada pela **fórmula de Pitágoras**

$$\|v\|^2 = \|w_1\|^2 + \|w_2\|^2$$

onde  $v = w_1 + w_2$ , com  $w_1 \in W$  e  $w_2 \in W^\perp$ .

Vejamos:

**PROFESSOR:** “[...] quanto ao sentido daquele teorema do [...] da decomposição ortogonal, o que ele nos diz em essência?”

**ALUNO C:** “é o que tem a soma direta?”

**PROFESSOR:** “exatamente”.

**ALUNO C:** “é quando você tem um vetor  $v$  [...] e  $w$  [...], a soma direta dele com seu ortogonal [...]”. Tem algo a com relação o Teorema de Pitágoras, né?”

**PROFESSOR:** “também”.

**ALUNO C:** “a norma ao quadrado em [...] é a soma das normas ao quadrado”.

**PROFESSOR:** “exatamente”.

Percebemos que a partir da interação existente entre o aluno e professor se tem vários questionamentos interessantes sobre o conteúdo proposto nos SN, e isso somente foi possível através de uma estratégia de ensino bem planejada.

Desse modo, começaram a debater sobre uma questão proposta aos alunos e que alguns apontaram dificuldades durante o processo de resolução. Assim, o professor questionou como haviam realizado a resolução para que ele pudesse saber o que estava certo e o

deveria orientar para um desenvolvimento adequado da resposta. Além disso, o professor aproveitou a oportunidade de apresentar a sua representação geométrica do problema e de sua resolução.

Ao final do encontro os alunos relataram que as aulas de modo síncrona foram satisfatórias e contribuíram para a aprendizagem e que os SN foram fundamentais, uma vez que se tem o botão de retrocesso, pausar ou adiantar os SN para que possam progredir em seu próprio ritmo. Além disso, foi possível os alunos tomarem suas próprias decisões e serem protagonista no processo de aprendizagem. Essa percepção pode ser aferida, por exemplo, pelas nas falas dos alunos a seguir:

**ALUNO G:** *“e até essa aula gravada mesmo, que o senhor dar com antecedência, ajuda bastante a gente. Já chegar na aula aqui presencial já pra [...] tendo a base né? de [...] acho que facilitou muito mesmo a vida da gente”.*

**ALUNO B:** *“[...] quando o senhor tá passando as aulas assim, elas ficam mais limpa, porque na aula mesmo quando o senhor colocava lá gravada ficava muito conturbado, a gente falando e tal, ainda perdia o foco das coisas. E o senhor gravando a aula normalzinha assim, é bom porque fica tudo, passo a passo direitin”.*

**ALUNO E:** *“professor, sem contar que tem como a pessoa adiantar [...]”.*

Podemos observar na fala do **ALUNO G** a importância de utilizamos metodologias adequadas no processo de aprendizagem. Ele ainda retrata que as aulas de modo assíncronas são eficazes devido disponibilizar os materiais com antecedência para que possam se preparar para a aula de modo síncrona, uma vez que podem fazer seus questionamentos e aprofundar os conteúdos.

Outro ponto interessante que o **ALUNO B** retratou foi o fato das aulas de modo assíncronas serem proveitosas por não terem ruídos, diferente das aulas gravadas durante o encontro síncrono, nas quais acabava muitas das vezes não se concentrando e, conseqüentemente, não compreendendo o conteúdo abordado. Podemos fazer uma associação com o ensino tradicional, em que passamos a maioria do tempo na sala de aula transmitindo as informações sobre o conteúdo e não discutindo o tema com os alunos.

Portanto, é interessante que os professores possam progressivamente buscar estratégias metodológicas que auxiliem os alunos no processo de aprendizagem. Como podemos observar, a estratégia sala de aula invertida contribui para os alunos se tornarem autônomos, críticos, questionadores e criativos no processo de aprendizagem, e ao professor, que conhece tão bem seus alunos, exercer o papel de mediador.

## 5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

A partir do que abordamos neste trabalho, podemos perceber a importância de inserirmos as MA no ambiente escolar oportunizando aos alunos serem protagonistas no processo de ensino e aprendizagem, desenvolvendo assim a capacidade crítica, reflexiva e investigativa a partir da interação com outros alunos e com o professor, possibilitando com isso uma aprendizagem colaborativa e cooperativa, além de o professor ser orientador, mediador e planejador dos conteúdos abordados e das discussões nas aulas, como mostra na Figura 3.

Nessa concepção, as MA possibilitam que o professor saia da zona de conforto e se direcione ao encontro de buscar diferentes formas de os alunos assimilarem o conteúdo abordado, tanto fora quando dentro da sala de aula, proporcionando assim a uma nova visão de ensino no ambiente educacional. Por isso, destacamos na Figura 4 as estratégias de ensino das MA que possibilitam alcançar o protagonismo dos alunos quando o professor compreende e aplica de modo coerente tais estratégias, sendo necessário para isso planejamento e organização. Corroborando para a formação do professor no que diz respeito as práticas pedagógicas e rompendo assim a ideia de o professor ser o detentor do conhecimento e aluno receptor de informação.

Algumas estratégias de ensino das MA foram apresentadas e conceituadas resumidamente na pesquisa, dando destaque e aprofundamento para a estratégia sala de aula invertida devido a esta ter sido objeto de estudo na disciplina de Álgebra Linear 1. Nesta estratégia de ensino o professor possibilita aos alunos terem o primeiro contato com os conteúdos a partir de vídeos e outros materiais, destinando o horário de aula para as discussões e aprofundamento dos conceitos, bem como para resolução de problemas.

Como foi possível acompanhar no estudo de caso da disciplina Álgebra Linear 1, foram preparados e disponibilizados com antecedência materiais (SN, atividades e vídeos complementares) para que os alunos estudassem o conteúdo abordado, objetivando que eles tivessem um primeiro contato com o conteúdo, assimilando conceitos e resultados como a Desigualdade de Cauchy-Bunyakovskii-Schwarz (CBS), processo de ortogonalização de Gram-Schmidt e Teorema da Decomposição Ortogonal. Nos encontros síncronos, realizados com o auxílio da plataforma digital *Google Meet*, foram realizadas as discussões sobre o conteúdo e questionamentos/provocações propostos no SN, além da resolução de problemas, alguns propostos também no SN e outros propostos nas listas de exercícios. A potencialidade e êxito de sua utilização pôde ser evidenciada nas discussões registradas nos diálogos entre os alunos e o professor, e analisadas no Capítulo 4.

Destacamos a importância de lançarmos olhares para as práticas e relações que foram sendo construídas ao longo da aplicação sala de aula invertida. Pois, a cada encontro as ferramentas utilizadas na sala de aula foram sendo aprimoradas, de acordo com as

concepções dos alunos, para que pudessem melhor entender o conteúdo abordado. Ainda, notamos a existência da interação entre aluno-aluno e aluno-professor no que diz respeito aos conteúdos abordados, além de possibilitar aos alunos tomarem suas próprias decisões, serem críticos e investigativos no processo de ensino e aprendizagem, possibilitando assim uma divisão de responsabilidades no processo de ensino e aprendizagem entre professor e aluno.

Fica assim evidenciada a importância de os professores aplicarem em suas práticas pedagógicas as estratégias de ensino das MA, em especial a sala de aula invertida, objetivando com isso possibilitar aos alunos que sejam protagonistas no processo de aprendizagem. Bergmann e Sams (2018) retratam que são a partir das experiências com a aplicação da estratégia de ensino que os alunos vão se tornando parte da cultura da instituição.

Agora, como toda intervenção pedagógica, as dificuldades são inerentes ao processo de ensino e aprendizagem, e a dificuldade de alguns alunos em acessar o material com antecedência, fez com o que a discussão no momento síncrono (na sala de aula) não envolvesse todos os alunos. Os motivos apresentados para o não acesso aos materiais com antecedência foi, em sua maioria, por estarem em horário de trabalho ou outras atividades pessoais.

Outra dificuldade que destacamos foi o fato das aulas terem sido ofertadas no formato remoto. Dos 39 alunos matriculados apenas 17 (dezessete) frequentavam as aulas síncronas, sendo 10 (dez) de matemática e 7 (sete) de física. Destes, apenas 9 alunos participavam ativamente das aulas síncronas. Ao término da disciplina, 27 (vinte e sete) alunos foram aprovados, dos quais 10 (dez) fizeram a disciplina de forma totalmente assíncrona, realizando os estudos para as atividades avaliativa por meio dos materiais de apoio e SN postados no GSA.

Uma vez que as atividades avaliativas eram disponibilizadas com período de 7 (sete) dias para devolução e que os alunos que não assistiram as aulas síncronas não entraram em contato com o professor para discutir a atividade, destacamos que a verificação da aprendizagem dos alunos que fizeram a disciplina totalmente assíncrona ficou prejudicada por não ser possível a análise da assimilação dos conteúdos estudados por estes alunos.

Diante da discussão apresentada neste trabalho, apontamos como impactos positivos da aplicação da metodologia sala de aula invertida na disciplina de Álgebra Linear 1 a interação aluno-aluno e aluno-professor, possibilitado pelo acesso antecipado e estudo do conteúdo trabalhado em cada aula por meio dos materiais elaborados pelo professor e disponibilizados em plataforma digital, além de possibilitar aos alunos tomarem suas próprias decisões, serem críticos e investigativos no processo de ensino e aprendizagem. E como impacto negativo apontamos a dificuldade de alguns alunos em acessar o material com antecedência, o fez com que a discussão no momento síncrono (na sala de aula) não envolvesse todos os alunos. Dessa forma, os objetivos foram alcançados com êxito.

Portanto, o presente trabalho é relevante e riquíssimo para todos os professores que

buscam uma educação de qualidade. Devemos ter amor e coragem para promover propostas metodológicas que insiram os alunos ativos no processo de aprendizagem, pois, independente das dificuldades encontradas ao longo da caminhada necessitamos transformar a realidade que estão inseridos.

Como possibilidades de trabalhos futuros sugerimos a utilização da metodologia a sala de aula invertida para toda a disciplina de Álgebra Linear 1, na modalidade presencial, utilizando o ensino híbrido no sentido de integrar atividades em sala de aula com as digitais. Esta proposta se estende a outras disciplinas da licenciatura em Matemática, mas não se restringe, claro, ao ensino superior, podendo ser frutífera na educação básica. Para a educação básica, sugerimos a escolha de alguns conteúdos ou bimestre para que seja possível uma diversidade na aplicação de metodologias, a exemplo das oficinas com materiais manipulativos e processos de redescoberta, conjectura e formalização.

## REFERÊNCIAS

- BARBOSA, E. F.; MOURA, D. G. de. Metodologias ativas de aprendizagem na educação profissional e tecnológica. Rio de Janeiro, B. Tec. Senac., v. 39, p. 48–67, 2013. Disponível em: <<https://bts.senac.br/bts/article/view/349>>. Acesso em: 29 mar. 2021.
- BERGMANN, J.; SAMS, A. *A sala de aula invertida: uma metodologia de aprendizagem*. Rio de Janeiro: [s.n.], 2018.
- CAMARGO, F.; DAROS, T. *A sala de aula inovadora: estratégias pedagógicas para fomentar o aprendizado ativo*. Porto Alegre: Editora Pensol, 2018.
- CRESWELL, J. W. *Projeto de pesquisa: métodos qualitativo, quantitativo e misto*. Tradução Luciana de Oliveira da Rocha. 2. ed. Porto Alegre: Artmed, 2007.
- DIESEL, A.; SANTOS, A. L.; MARTINS, S. N. Os princípios das metodologias ativas de ensino: uma abordagem teórica. *Thema*, Lajedo- RS, p. 268–288, 2017. Disponível em: <<https://periodicos.ifsul.edu.br/index.php/thema/article/view/404/295>>. Acesso em: 02 mar. 2021.
- FREIRE, P. *Educação como prática da liberdade*. São Paulo: Paz e Terra, 1989.
- GERHARDT, T. E.; SILVEIRA, D. T. *Métodos de pesquisa*. Porto Alegre: Editora da UFRGS, 2009.
- GIL, A. C. *Métodos e técnicas de pesquisa social*. 6. ed. São Paulo: Atlas, 2008.
- GONÇALVES, M. de O.; SILVA, V. Sala de aula compartilhada na licenciatura em matemática:: relato de prática. *Penso*, Porto Alegre, 2018.
- HELIODORO, Y. M. L. Educação matemática e o contexto dos debates sobre educação no Brasil. Universidade Federal Rural de Pernambuco, 2001. Disponível em: <<https://www.maxwell.vrac.puc-rio.br/5796/5796.PDF>>. Acesso em: 15 jun. 2021.
- KENSKI, V. M. *Educação e tecnologias: o novo ritmo da informação*. São Paulo: Papyrus, 2012. Disponível em: <<https://www.redalyc.org/pdf/2912/291238322025.pdf>>. Acesso em: 18 mar. 2021.
- KRIVICKAS, R. V. Active learning at kaunas university of technology. *Global J. of Engng. Educ*, Australia, v. 9, 2005. Disponível em: <<https://citeseerx.ist.psu.edu/viewdoc/download?doi=10.1.1.455.7537&rep=rep1&type=pdf>>. Acesso em: 18 mar. 2021.
- KUMMER, T. *Um caminho para a matemática: do cotidiano para o escolar*. Curitiba: [s.n.], 2016.
- MATOS, V. C. *Sala de aula invertida: uma proposta de ensino aprendizagem em matemática*. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT) — Universidade de Brasília, Brasília - DF, 2018. Disponível em: <<https://repositorio.unb.br/handle/10482/34987>>. Acesso em: 31 mar. 2021.

- MORALES, C. et al. *Uma história da educação matemática no Brasil através dos livros didáticos de Matemática dos anos finais do ensino fundamental*. Dissertação (Monografia do curso de Pós Graduação Lato Sensu em Metodologia do Ensino-Aprendizagem da Matemática no Processo Educativo.) — Faculdade de Educação São Luís, Jaboticabal-SP, 2003. Disponível em: [http://www.educadores.diaadia.pr.gov.br/arquivos/File/2010/artigos\\_teses/MATEMATICA/Monografia\\_.pdf](http://www.educadores.diaadia.pr.gov.br/arquivos/File/2010/artigos_teses/MATEMATICA/Monografia_.pdf). Acesso em: 15 junl. 2021.
- MORAN, J. *Metodologias ativas de bolso: como os alunos podem aprender de forma ativa, simplificada e profunda*. São Paulo: Editora do Brasil, 2019.
- MORAN, J. M.; MASETTO, M. T.; BEHRENS, M. A. *Novas tecnologias e mediação pedagógica*. Campinas, 2000.
- MOREIRA, R. C. *Ensino de matemática na perspectiva das metodologias ativas: um estudo sobre a “sala de aula invertida”*. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) — Universidade Federal do Amazonas, Manaus, 2018. Disponível em: <https://tede.ufam.edu.br/handle/tede/6283>. Acesso em: 22 abril. 2021.
- PAIVA, T. Y. *Aprendizagem ativa e colaborativa: uma proposta de uso de metodologias ativas no ensino de matemática*. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) — Universidade de Brasília, Brasília, 2016. Disponível em: <https://repositorio.unb.br/handle/10482/21707>. Acesso em: 01 mar. 2021.
- PINTO, M. L. da S. *Práticas educativas numa sociedade global*. Edições asa. [S.l.: s.n.], 2002.
- PRINCE, M. Does active learning work? a review of the research. *JEngineering Education*, Bucknell University, p. 1–9, 2004. Disponível em: <https://doi.org/10.1002/j.2168-9830.2004.tb00809.x>. Acesso em: 29 mar. 2021.
- PRODANOV, C. C.; FREITAS, E. C. de. *Metodologia do trabalho científico: métodos e técnicas da pesquisa e do trabalho acadêmico*. 2. ed. Rio Grande do Sul: Editora Feevale, 2013.
- RECH, G. A. *Metodologias ativas na formação continuada de professores de matemática*. Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino de Ciências Exatas) — Univates, Lajedo, 2016. Disponível em: <http://hdl.handle.net/10737/1714>. Acesso em: 29 marl. 2021.
- SAVIANI, D. *Escola e democracia*. 42. ed. São Paulo: Campinas, 2012.
- SUHR, I. R. F. *Implantação de cursos semipresenciais usando a metodologia da sala de aula invertida: limites e possibilidades a partir do olhar dos professores envolvidos*. Curitiba, 2015. Disponível em: [https://educere.bruc.com.br/arquivo/pdf2015/15919\\_7227.pdf](https://educere.bruc.com.br/arquivo/pdf2015/15919_7227.pdf). Acesso em: 26 setl. 2021.
- YIN, R. K. *Estudo de caso: planejamento e métodos*. 2. ed. Porto Alegre: Bookman, 2001.
- ZAMBONI, T. M. *Metodologias ativas no ensino da matemática escolar: o que as pesquisas acadêmicas revelam*. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) — Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Pato Branco, 2019. Disponível em: <http://repositorio.utfpr.edu.br/jspui/handle/1/4515>. Acesso em: 02 fev. 2021.

## ANEXO A – EMENTA DA DISCIPLINA ÁLGEBRA LINEAR 1

PLANO DE ENSINO	
NOME DA DISCIPLINA: Álgebra Linear 1	CÓDIGO: 41
CURSO: Licenciatura em Matemática	
SEMESTRE: 4º	
PRÉ-REQUISITO: Matemática para o Ensino Médio 2; Álgebra Vetorial e Geometria Analítica	
CARGA HORÁRIA TEÓRICA: 67h / 80 aulas	CARGA HORÁRIA PRÁTICA: 0h / 0 aula
DOCENTE RESPONSÁVEL:	

### EMENTA

Espaços Vetoriais. Transformações Lineares. Diagonalização de Operadores e Produto Interno.

### OBJETIVOS

*Geral:*

Proporcionar ao estudante uma visão integrada dos conceitos de álgebra linear e suas aplicações, tomando o estudante capaz de reconhecer e resolver problemas na área, associados a futuras disciplinas e/ou outros projetos a que se engajarem.

*Específicos:*

Ao final desta Unidade Curricular, o aluno deve estar preparado para:

- Estabelecer os conceitos e propriedades básicas de espaços vetoriais finitamente gerados;
- Identificar / reconhecer transformações lineares e suas aplicações;
- Apresentar o conceito de autovalores e autovetores como base nas aplicações de diagonalização de operadores;
- Definir produto interno em um espaço vetorial e estabelecer medidas e ângulos entre vetores.

**CONTEÚDO PROGRAMÁTICO**

- I. Espaços Vetoriais:**
1. Espaços Vetoriais;
  2. Subespaços Vetoriais;
  3. Combinação Linear, Dependência e Independência Linear;
  4. Bases e Dimensão.
- II. Transformações Lineares:**
1. Transformações Lineares;
  2. Núcleo e Imagem de uma Transformação Linear;
  3. Transformação Inversa;
  4. Isomorfismos;
  5. Matriz de uma Transformação Linear;
  6. Matriz de Mudança de Base.
- III. Diagonalização de Operadores:**
1. Autovalor e Autovetor;
  2. Polinômio Característico;
  3. Diagonalização de Operadores;
  4. Polinômio Minimal.
- IV. Produto Interno**
1. Produto Interno;
  2. Norma;
  3. Ortogonalidade;
  4. Ortogonalização de Gram-Schmidt;
  5. Complemento Ortogonal.

**METODOLOGIA DE ENSINO**

Aulas expositivas com aplicação e resolução de listas de exercícios, seminários e trabalhos extraclasse.

**AValiação DO PROCESSO DE ENSINO E APRENDIZAGEM**

Serão realizadas ao longo do semestre letivo exames de avaliação individuais ou em grupo, ficando a critério do docente ministrante da disciplina a escolha dos instrumentos de avaliação e dimensionamento dos conteúdos para cada avaliação de acordo com o seu cronograma e evolução dos conteúdos programáticos durante o semestre letivo em curso.

**RECURSOS DIDÁTICOS NECESSÁRIOS**

Quadro branco, pincéis coloridos, projetor multimídia, computador, softwares.

**BIBLIOGRAFIA***Básica:*

- STEINBRUCH, Alfredo; WINTERLE, Paulo. *Álgebra Linear*. 2ª ed. Pearson: São Paulo, 1995.
- ANTON, Howard. HORRES, Chris. *Álgebra Linear com Aplicações*. 10ª ed. Porto Alegre: Bookman, 2012.
- BOLDRINI, José Luiz. *et al. Álgebra Linear*. 3ª ed. São Paulo: Harbra, 1986.

*Complementar:*

- CALLIOLI, Carlos A. *et al. Álgebra Linear e Aplicações*. 6ª ed. Rev. São Paulo: Atual, 2013.
- COELHO, Flávio Ulhoa. *et al. Um curso de Álgebra Linear*. 2ª ed. São Paulo: EDUSP, 2013.
- LIMA, Elon Lages. *Álgebra Linear*. 9ª ed. Coleção Matemática Universitária. Rio de Janeiro: IMPA, 2016.
- LIPSCHUTZ, Seymour; LIPSON, Marc. *Álgebra Linear*. 4ª ed. Porto Alegre: Bookman, 2011.
- STRANG, Gilbert. *Álgebra Linear e suas Aplicações*. 4ª ed. São Paulo: Cengage Learning, 2009.



## Documento Digitalizado Restrito

### Entrega do trabalho de conclusão de curso

**Assunto:** Entrega do trabalho de conclusão de curso  
**Assinado por:** Samara Sousa  
**Tipo do Documento:** Tese  
**Situação:** Finalizado  
**Nível de Acesso:** Restrito  
**Hipótese Legal:** Informação Pessoal (Art. 31 da Lei no 12.527/2011)  
**Tipo do Conferência:** Cópia Simples

Documento assinado eletronicamente por:

- **Samara Maria Sousa Melo, ALUNO (202011280010) DE ESPECIALIZAÇÃO EM ENSINO EM MATEMÁTICA - CAMPINA GRANDE**, em 16/12/2021 20:54:08.

Este documento foi armazenado no SUAP em 16/12/2021. Para comprovar sua integridade, faça a leitura do QRCode ao lado ou acesse <https://suap.ifpb.edu.br/verificar-documento-externo/> e forneça os dados abaixo:

**Código Verificador:** 402224  
**Código de Autenticação:** f2c9333969

