INSTITUTO FEDERAL
Paraíba
Campus Cajazeiras

INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA DA PARAÍBA
CURSO SUPERIOR DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

ALEXANDRE GONÇALVES DANTAS

EXPLORANDO A GEOMETRIA ESPACIAL NO ENSINO MÉDIO A PARTIR DO TEOREMA DE EULER PARA POLIEDROS CONVEXOS

CAJAZEIRAS - PB
2023

ALEXANDRE GONÇALVES DANTAS

EXPLORANDO A GEOMETRIA ESPACIAL NO ENSINO MÉDIO A PARTIR DO TEOREMA DE EULER PARA POLIEDROS CONVEXOS

Trabalho de Conclusão de Curso (TCC) apresentado ao Curso Superior de Licenciatura em Matemática do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia da Paraíba (IFPB), como requisito parcial para obtenção do título de Licenciado em Matemática.

Orientador: Prof. Me. Geraldo Herbetet de Lacerda

IFPB / Campus Cajazeiras
Coordenação de Biblioteca
Biblioteca Prof. Ribamar da Silva
Catalogação na fonte: Cícero Luciano Félix CRB-15/750

D192e Dantas, Alexandre Gonçalves.
Explorando a geometria espacial no ensino médio a partir do teorema de Euler para poliedros convexos / Alexandre Gonçalves Dantas.– 2023.

42f. : il.

Trabalho de Conclusão de Curso (Licenciatura em Matemática) - Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia da Paraíba, Cajazeiras, 2023.

Orientador(a): Prof. Me. Geraldo Herbetet de Lacerda.

1. Ensino de matemática. 2. Geometria espacial. 3. Teorema de Euler. 4. Polígono. I. Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia da Paraíba. II. Título.

IFPB/CZ CDU: 514(043.2)

ALEXANDRE GONÇALVES DANTAS

EXPLORANDO A GEOMETRIA ESPACIAL NO ENSINO MÉDIO A PARTIR DO TEOREMA DE EULER PARA POLIEDROS CONVEXOS

Trabalho de Conclusão de Curso (TCC) apresentado ao Curso Superior de Licenciatura em Matemática do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia da Paraíba (IFPB), como requisito parcial para obtenção do título de Licenciado em Matemática.

Orientador: Prof. Me. Geraldo Herbetet de Lacerda

Aprovado em: 11 /07/2023

BANCA EXAMINADORA

Geraldo H. L.

Prof. Me. Geraldo Herbetet de Lacerda
Orientador
Instituto Federal da Paraíba

Francisco Airton A. de Sousa

Prof. Me. Francisco Airton Alves de Sousa
E.E.E.F.M. Bonifácio Saraiva de Moura

Francisco Aureliano Vidal

Prof. Me. Francisco Aureliano Vidal
Instituto Federal da Paraíba

"Há aqueles que já nascem póstumos"
(Friedrich Wilhelm Nietzsche)

RESUMO

Este trabalho contempla algumas características dos polígonos e poliedros convexos e não convexos, priorizando a demonstração da Relação de Euler em que $V - A + F = 2$. A Característica de Euler ou Teorema de Euler para poliedros convexos é um resultado muito conhecido e de grande importância em Geometria Espacial. Compõe boa parte dos conteúdos abordados no Ensino Médio, etapa final da Educação Básica, a exemplo da Geometria Plane e Espacial. O referido trabalho tem como objetivo geral ampliar a compreensão acerca do Teorema de Euler para Poliedros Convexos e fazer com que o educador, conheça algumas propriedades do teorema. Trata-se de uma pesquisa de caráter qualitativo embasada nas abordagens de Boyer (2002); Dante(2016); De Morais Filho (2012); Eves (2004); Iezzi (2005) e Lima(1999). Sendo também descritivo-exploratório quanto aos objetivos. Os procedimentos são bibliográficos e documentais. A coleta de informações aconteceu através da busca de artigos, dissertações e TCCs, em sites sobre a temática abordade.

Palavras-chave: Poliedros. Euler. Teorema. Geometria.

ABSTRACT

This work contemplates some characteristics of polygons and convex and non-convex polygons, prioritizing the demonstration of Euler's Relation in which $V - A + F = 2$. The Euler Characteristic or Euler's Theorem for convex polyhedra is a well-known result of great importance in Space Geometry. It makes up a good part of the contents addressed in High School, the final stage of Basic Education, such as Plane and Spatial Geometry. This work has the general objective of expanding the understanding of Euler's Theorem for Convex Polyhedra and making the educator know some properties of the theorem. This is a qualitative research based on Boyer's approaches (2002); Dante(2016); De Morais Filho (2012); Eves (2004); Iezzi (2005) and Lima(1999). It is also descriptive-exploratory regarding the objectives. You procedures are bibliographic and documental. The collection of information took place through the search for articles, dissertations and TCCs, on websites about the theme addressed.

Keywords: Polyhedra. Euler. Theorem. Geometry.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

A Geometria Espacial estuda as figuras geométricas no espaço e procura identificar o lugar onde podemos encontrar as propriedades geométricas em mais de duas dimensões. Está presente nas abstrações da matemática e no nosso cotidiano; percebemos a sua existência todos os dias ao olharmos para objetos, estruturas e animais que estão ao nosso redor.

Proporcionar na escola um ambiente de construção de pesquisa é necessário para o aprendizado do aluno do ensino médio. O professor de Matemática, que ministra conteúdos básicos, deve buscar atender a essas necessidades trazendo um estudo prático e contextualizado. Nesse sentido cabe ao professor de Matemática o aprimoramento do raciocínio geométrico.

A Geometria é considerada parte essencial da Matemática, contribuindo com a vida na sociedade atual e colaborando com o desenvolvimento de competências e habilidades essenciais à formação do aluno.

Por isso é preciso dar a este conteúdo a atenção devida, inserindo-o no planejamento, permitindo representar e significar o que é ensinado.

É necessário que o professor utilize práticas que estimulem o interesse do aluno pelo conhecimento geométrico, construindo e desafiando a aprendizagem do conteúdo estudado.

Nosso interesse em explorar o Teorema de Euler para poliedros convexos, tema de nosso trabalho, surgiu da experiência que acumulamos como estagiário da disciplina de Matemática, especificamente ao abordar o conteúdo de Geometria Espacial, durante o Estágio Supervisionado III.

Utilizar o Teorema de Euler para Poliedros Convexos como ferramenta de aprendizagem da geometria espacial em turmas do Ensino Médio é uma alternativa para construção do conhecimento matemático que vai do "padrão clássico do ensino à forma lúdica, tornando o conteúdo mais atrativo e dinâmico"(MORAIS FILHO, 2013). Dessa maneira, buscamos por meio desse trabalho contribuir com esses métodos e ainda ampliar com mais recursos, utilizando uma abordagem do Teorema de Euler para Poliedros Convexos, trazendo um recurso didático a mais para contribuir no trabalho do educador.

1.1 TEMA E OBJETIVOS

O Teorema de Euler para poliedros convexos, conhecido desde 1758, diz que se um poliedro tem V vértices, A arestas e F faces, então, vale a relação: $V - A + F = 2$.

Esse teorema tem sido ensinado, há décadas, nas aulas de Geometria Espacial nas escolas secundárias e possui características usuais que o tornam atraente e popular; generalidade de validez, simplicidade de enunciado, demonstração elegante e inteligível.(LIMA, 1999).

Além disso, é fácil ilustrá-lo com desenhos nos quais se constata visualmente a relação $V - A + F = 2$, conhecida como "Característica de Euler".

Nosso objetivo principal é ampliar a compreensão acerca do Teorema de Euler para poliedros convexos e fazer com que o educador, conheça algumas propriedades do teorema, fazendo uma intervenção em sala de aula para sua prática; buscar também interagir, conhecimento, didática, contextualização e realidade do aluno na aplicação do mesmo.

O presente trabalho tem como objetivos específicos: (i) apresentar de forma sucinta a demonstração do teorema de Euler para poliedros convexos a partir das definições que o antecedem, buscando despertar o interesse do educador pelos métodos teóricos da geometria. (ii) ressaltar a importância do uso de demonstrações matemáticas no Ensino Médio e investigar sua utilização em sala de aula. (iii) Desenvolver uma abordagem didática para explorar a geometria espacial no ensino médio, utilizando o Teorema de Euler como base teórica.

1.2 METODOLOGIA UTILIZADA

Para a realização da pesquisa, em razão dos objetivos que delimitamos e do referencial teórico adotado, optamos por procedimentos metodológicos básicos descritivos através de uma pesquisa qualitativa embasada nas abordagens de Boyer (2002); Dante(2016); De Morais Filho (2012); Eves (2004); Iezzi (2005) e Lima(1999), dentre outros autores que foram consultados no decorrer da pesquisa.

Apresentamos a demonstração do Teorema de Euler para poliedros convexos usando três maneiras difentes e por fim expomos os poliedros de Platão.

Nessa perspectiva, como procedimento inicial, foi adotado uma busca por obras que pudessem contribuir como base teórica para a consecução do trabalho.

1.3 ESTRUTURA DO TRABALHO

Este trabalho consta de três capítulos, além das Considerações Finais. O primeiro deles faz referência ao nosso tema, destacando os objetivos gerais e específicos e a metodologia adotada para realização do mesmo. O Capítulo 2 apresenta a fundamentação teórica e insere, a partir da leitura de alguns autores, os conceitos e propriedades sobre a Geometria, em especial, o estudo de polígonos e poliedros além de mostrar um pouco da história de alguns personagens que deram uma grande contribuição para os avanços da geometria, encerrando com o Capítulo 3 que trata das demonstrações do Teorema de Euler para poliedros convexos e por fim as Considerações Finais .

2 REFERENCIAL TEÓRICA E UM BREVE HISTÓRICO SOBRE OS AVANÇOS DA GEOMETRIA

Neste capítulo introduzimos o conceito de polígonos e poliedros, identificando seus elementos e apresentando as diferenças entre regulares, não regulares, convexos e não convexos. Abordamos ainda alguns conceitos, definições e teoremas sobre geometria plana e espacial, em particular os sólidos geométricos, relação de Euler e os poliedros regulares denominados poliedros de Platão. Para isso, utilizamos os escritos e exemplos dos livros de DANTE (2013) e LIMA (1999).

Em todo esse trabalho, admitimos o conhecimento de todos os conceitos e resultados prévios da geometria.

A geometria plana é a área da matemática que estuda as figuras de duas dimensões: altura e largura. Estamos falando das formas que podem ser representadas no plano cartesiano (polígonos). Provavelmente, você já ouviu falar delas: triângulos, quadriláteros, pentágonos, etc.

A geometria espacial é a área da Matemática que estuda as posições relativas entre formas geométricas presentes no espaço. Ou seja, é a geometria para objetos tridimensionais (poliedros), diferente da geometria plana, que é o estudo de figuras bidimensionais.

2.1 POLÍGONOS

Polígonos são regiões planas delimitadas por segmentos de reta que formam uma linha poligonal fechada. Linha poligonal fechada é um conjunto de segmentos consecutivos que não estão alinhados na mesma reta e que se fecham, conforme definições a seguir.

Definição 1: Uma linha poligonal é uma figura formada por uma sequência de pontos $A_1, A_2, A_3, \cdots, A_n$ e pelos segmentos $A_1A_2, A_2A_3, A_3A_4, \cdots, A_{n-1}A_n$. Os pontos são vértices da poligonal e os segmentos são os seus lados.

Definição 2: Um polígono é uma linha poligonal em que as duas condições abaixo são satisfeitas:

a) $A_n = A_1$

b) Os lados da poligonal podem se interceptar;

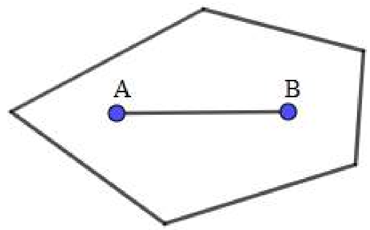
2.1.1 Polígono convexo

São polígonos onde quaisquer dois pontos pertencentes ao polígono ou ao seu interior definem um segmento de reta contido no polígono.

Definição 1: Uma região do plano é convexa quando o segmento de reta que liga dois pontos quaisquer dessa região está inteiramente contido nela.

Definição 2: Um polígono será convexo se, dados dois pontos A e B no interior do polígono, o segmento de reta AB estiver inteiramente contido no interior do polígono.

Figura 1 – Polígono convexo



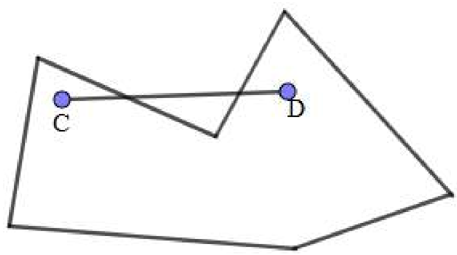
Fonte: Autoria própria

2.1.2 Polígono não convexo

São polígonos onde nem todos os pares de pontos pertencentes ao polígono ou ao seu interior definem um segmento que esteja contido no polígono ou no seu interior.

Definição 1: Polígonos não convexos, a partir da definição de polígonos convexos, são polígonos que existem dois pontos C e D qualquer no interior do polígono, o segmento de reta CD não está inteiramente contido no seu interior.

Figura 2 – Polígono não convexo



Fonte: Autoria própria

2.1.3 Polígonos regulares

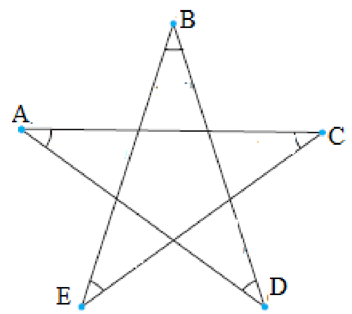
Os polígonos convexos podem ser equiláteros (quando possuem todos os lados com mesma medida), equiângulos (quando possuem os ângulos internos com mesma medida), regulares (quando são equiláteros e equiângulos) ou irregulares (quando não são nem equiláteros e nem equiângulos).

Em geral os livros restringem a definição de polígonos regulares aos convexos: É todo polígono convexo que possui todos os lados e todos os ângulos com as mesmas medidas. Então podemos citar o triângulo equilátero, o quadrado, e todos os polígonos com lados congruentes e ângulos interno congruentes, mas os polígonos regulares não se resumem a apenas os convexos, existem perfeitamente polígonos que não são convexos mas são regulares . Observe a definição abaixo.

Definição 1: Polígonos regulares são polígonos onde todos os lados são congruentes entre si e todos os ângulos também.

Na figura 10, temos um exemplo de um polígono regular não convexo. Nela, podemos observar que os lados do polígono são segmentos congruentes e que todos os ângulos internos também são congruentes e, portanto é um polígono regular, no entanto não se trata de um polígono convexo.

Figura 3 – Polígono regular não convexo



Fonte: Autoria própria

2.2 POLIEDROS

Um poliedro é uma reunião de um número finito de polígonos convexos, chamados as faces do poliedro. Os lados desses polígonos chamam-se arestas do poliedro e os vértices dos polígonos são também chamados vértices do poliedro. Além disso:

- Cada lado de um desses polígonos é também lado de um, e apenas um, outro polígono.
- A interseção de duas faces quaisquer, ou é um lado comum, ou é um vértice ou é vazia.

Cada lado de um polígono, comum a exatamente duas faces, é chamado uma aresta do poliedro e cada vértice de uma face é um vértice do poliedro.

- É sempre possível ir de um ponto de uma face a uma ponto de qualquer outra, sem passar por nenhum vértice (ou seja, cruzando apenas arestas).

Em um poliedro, destacamos os seguintes elementos:

i) faces: são os polígonos que formam a superfície do poliedro;

ii) arestas: são os lados comuns a duas faces do poliedro;

iii) vértices: são os vértices das faces do poliedro.

Em um poliedro, se qualquer reta, não paralela a nenhuma das faces, intersecta suas faces em, no máximo, dois pontos, dizemos que ele é convexo; caso contrário, é um não convexo.

2.2.1 Poliedro regulares

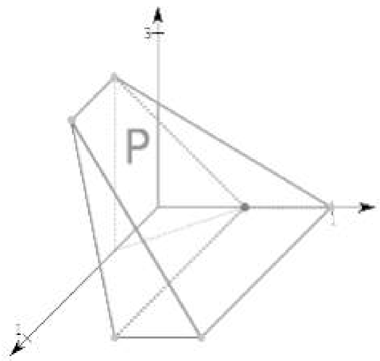
Um poliedro convexo é regular quando suas faces são polígonos regulares e congruentes entre si e quando em todos os vértices concorre o mesmo número de arestas. É possível provar que existem somente cinco poliedros regulares: tetraedro, hexaedro, octaedro, dodecaedro e icosaedro.

2.2.2 Poliedros convexos

Um poliedro é chamado convexo quando o plano que contém cada face deixa todas as outras em um mesmo semiespaço.

Uma outra forma de identificar um poliedro convexo é verificar que qualquer reta não contida em nenhuma das face e nem paralela a elas, corta os planos das faces em, no máximo, dois pontos.

Figura 4 – Poliedro convexo

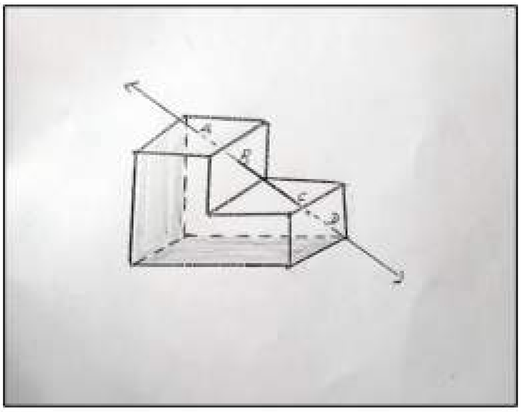


Fonte: Melo, 2013

2.2.3 Poliedros não convexos

Um poliedro é não convexo se existir pelo menos uma reta não paralela a nenhuma de suas faces que o corta em mais de dois pontos.

Figura 5 – Poliedro não convexo



Fonte: Autoria própria

2.2.4 Poliedros de Platão

Os poliedros regulares são chamados de sólidos platônicos, ou poliedros de Platão, em homenagem ao filósofo grego Platão(427-347a.C) que os utilizava para explicar cientificamente os fenômenos naturais. Dedicou-se à vários temas como Ética, Política, Matemática e Teoria do Conhecimento, Metafísica, dedicou-se também, de forma bem particular, à geometria, pela qual teve uma grande paixão.

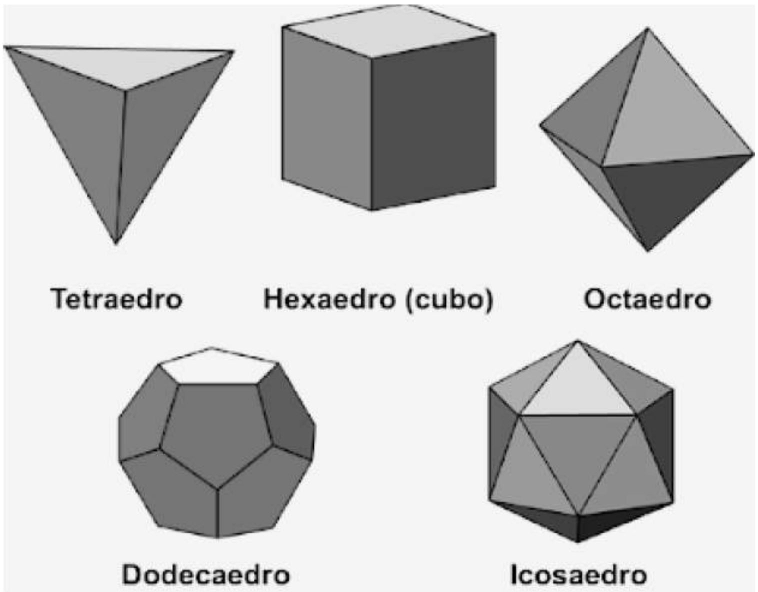
Platão era um entusiasta da Matemática. Os grandes matemáticos do seu tempo, ou foram seus alunos, ou seus amigos. Nesse sentido, não se poderá deixar de referir que, à entrada da Academia, segundo fontes posteriores, se lia a máxima: “Que não entre quem não saiba geometria”.

Para Platão a Matemática é, antes de mais, a chave da compreensão do universo. Indagado certa vez sobre a atividade do demiurgo, respondeu: “Ele geometriza eternamente”.

Platão foi um filósofo grego que deu grandes contribuições para o desenvolvimento da matemática. Os sólidos ou poliedros de Platão é a forma como são conhecidos os cinco sólidos estudados a fundo por ele e seus seguidores. Cada um eles era associado a um elemento da natureza

Os sólidos de Platão são casos particulares de poliedros. Platão buscava explicar a criação do Universo a partir da geometria e associava esses sólidos geométricos a elementos da natureza. São classificados como sólidos de Platão o tetraedro, o hexaedro, o octaedro, o dodecaedro e o icosaedro. Todos esses cinco sólidos são poliedros regulares, ou seja, possuem arestas e faces congruentes.

Figura 6 – Poliedros de Platão



Fonte: DOLCE (2005)

Demonstra-se que existem apenas cinco poliedros regulares convexos, denominados Poliedros de Platão.

A Geometria pode ser apaixonante para uns e desinteressante para outros, mas qualquer que seja o caso, é inegável os avanços que essa área do conhecimento trouxe para a humanidade.

Fizemos uma lista com os matemáticos mais importantes que transformaram e continuam a transformar o nosso mundo. Neste capítulo são apresentados alguns personagens das mais variadas áreas da matemática que deram uma grande contribuição para os avanços da geometria, sendo assim fundamentais para construção desse trabalho.

2.3 PERSONAGENS QUE CONTRIBUÍRAM PARA OS AVANÇOS DA GEOMETRIA

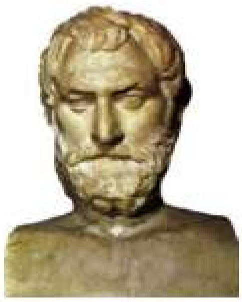
2.3.1 Tales de Mileto

Tales de Mileto (625-546 a.C.) é considerado, segundo Morais Filho (2013),

> "como o primeiro investigador da natureza. Pelos critérios atuais, isso também significa que ele foi o primeiro matemático e filósofo ocidental, no sentido de que abstraiu as ideias de uma Matemática puramente aplicativa, dando-lhe um tratamento lógico e transformando-a numa disciplina intelectualmente independente da aplicação".

Este fato, que não havia ocorrido em outras culturas, se consolidaria com os pitagóricos e com o posterior desenvolvimento da matemática grega. Pelo tratamento dedutivo dado

Figura 7 – Tales de Mileto, considerado o primeiro filósofo do Ocidente.



Fonte: Darela, 2011

à Geometria por Tales, credita-se a ele a primeira demonstração formal que foi feita na Matemática.

2.3.2 Pitágoras

Figura 8 – Antigo desenho representando Pitágoras

Fonte: Morais Filho, (2013)

Pitágoras (Século VI a.C.), um homem que mistificava a Matemática e cuja biografia está misturada com a lenda (Morais Filho, 2013). Foi um filósofo, matemático, astrônomo e músico grego pré-socrático. Nasceu na ilha de Samos no ano aproximado de 570 a.C. e morreu, provavelmente, em 496 a.C.. Passou boa parte de sua vida na antiga região da Magna Grécia (atual território italiano) e lá fundou a sua escola filosófica.

Pouco se sabe sobre a vida do pensador pré-socrático devido à distância histórica que o separa de nós. O que se sabe, em geral, advém de antigos historiadores e filósofos, como Heródoto, Xenófanes e Aristóteles. Pitágoras ficou bastante conhecido por ter fundido os seus conhecimentos de Filosofia, Astronomia, Geometria e Música em uma seita, angariando seguidores fiéis de sua doutrina, o pitagorismo.

Pitágoras foi um exímio geômetra, deixando como principal contribuição para a Matemática a descoberta da relação de igualdade entre o quadrado da hipotenusa e a soma dos quadrados dos catetos no interior de um triângulo retângulo, o que ficou conhecido como teorema de Pitágoras.

2.3.3 Euclides

Figura 9 – Euclides

Fonte: Boyer, 2002

Euclides foi um matemático de Alexandria, no Egito. É chamado o pai da Geometria. Escreveu o livro "*Elementos de Euclides*". Foi professor de Matemática na Escola Real de Alexandria, no Egito.

Euclides de Alexandria nasceu provavelmente por volta do ano 300 a.C. em pleno florescimento da cultura helenística, quando Alexandria, no Egito, era o centro do saber da época.

Muito antes de Euclides, a geometria já era assunto no Egito. Era usada para medir terrenos e projetar pirâmides. Tão famosa era a geometria egípcia, que matemáticos gregos como Tales de Mileto e Pitágoras, iam ao Egito para ver o que havia de novo em matéria de linhas e ângulos.

Embora sejam escassos os dados sobre a vida de Euclides, sabe-se que ele fundou a Escola Real de Alexandria, no reinado de Ptolomeu I (306-283 a.C.). Foi com Euclides que a geometria do Egito se tornou importante, fazendo de Alexandria o centro mundial do compasso e do esquadro.

A grande obra de Euclides, *Elementos*, com 13 volumes, que constitui um dos mais notáveis compêndios de matemática de todos os tempos. Foi adotado como livro básico por gregos e romanos durante toda a Idade Média e até o Renascimento.

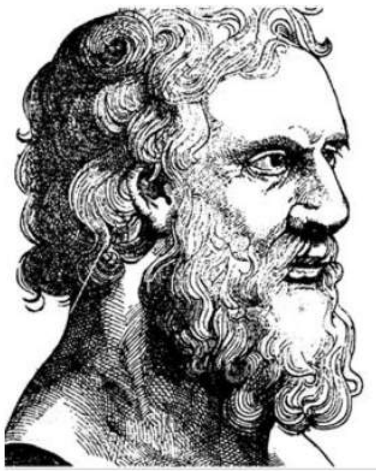
A obra "*Elementos*"foi considerada, por excelência, o livro mais importante para o estudo da geometria. Euclides é com razão chamado "o pai da Geometria". Na obra, ele reuniu em um sistema coerente e compreensível, tudo o que se sabia sobre matemática em seu tempo. Todos os fragmentos surgiram da necessidade prática do uso da aritmética, geometria plana, teoria das proporções e geometria sólida.

Embora os Elementos contenham grande número de teoremas já demonstrados nas obras de Tales, Pitágoras, Platão e dos gregos e egípcios que o precederam, coube a Euclides o mérito de apresentar uma sistematização dos conhecimentos geométricos dos antigos com grande clareza e o encadeamento lógico dos teoremas.

Sua contribuição não consistiu na solução de novos problemas de geometria, mas na ordenação de todos os métodos conhecidos, formando um sistema que permitia combinar todos os fatos desenvolvidos, para descobrir e provar novas ideias.

2.3.4 Platão

Figura 10 – Platão



Fonte: Boyer, 2002

Os poliedros regulares são chamados de sólidos platônicos, ou poliedros de Platão, em homenagem ao filósofo grego Platão(427-347a.C) que os utilizava para explicar cientificamente os fenômenos naturais. Dedicou-se à vários temas como Ética, Política, Matemática e Teoria do Conhecimento, Metafísica, dedicou-se também, de forma bem particular, à geometria, pela qual teve uma grande paixão.

Platão era um entusiasta da Matemática. Os grandes matemáticos do seu tempo, ou foram seus alunos, ou seus amigos. Nesse sentido, não se poderá deixar de referir que, à entrada da Academia, segundo fontes posteriores, se lia a máxima: “Que não entre quem não saiba geometria”.

Para Platão a Matemática é, antes de mais nada, a chave da compreensão do universo. Indagado certa vez sobre a atividade do demiurgo, respondeu: “Ele geometriza eternamente”.

Platão foi um filósofo grego que deu grandes contribuições para o desenvolvimento da matemática. Os sólidos ou poliedros de Platão é a forma como são conhecidos os cinco sólidos estudados a fundo por ele e seus seguidores. Cada um deles era associado a um elemento da natureza.

Os sólidos de Platão são casos particulares de poliedros. Platão buscava explicar a criação do Universo a partir da geometria e associava esses sólidos geométricos a elementos da natureza. São classificados como sólidos de Platão o tetraedro, o hexaedro, o octaedro, o dodecaedro e o icosaedro. Todos esses cinco sólidos são poliedros regulares, ou seja, possuem arestas e faces congruentes.

2.3.5 René Descartes

Figura 11 – René Descartes

Fonte: Boyer, 2002

René Descartes foi um filósofo, físico e matemático francês, que viveu entre os anos 1596 e 1650, ficou conhecido como pai da filosofia moderna, e apresentou contribuições para o desenvolvimento da ciência, em geral.

Para a matemática, *A Geometria* é uma das obras mais importantes de René Descartes. Ela foi publicada em 1637 e apresentava a geometria sob um novo olhar, a partir do ponto de visto algébrico.

René Descartes uniu geometria e álgebra, possibilitando o estudo das formas geométricas a partir de equações algébricas, dando origem ao que hoje conhecemos como geometria analítica, da qual René Descartes é então, considerado criador ou pai.

Na geometria analítica, os conceitos geométricos podem ser compreendidos com mais clareza a partir de um sistema de coordenadas. Essa parte da matemática se caracteriza pelo estudo de métodos algébricos para descrever as figuras geométricas, suas posições, intersecções, distâncias, etc.

Descartes solucionou um dos problemas matemáticos considerados sem solução pelos antigos estudiosos de geometria, o *Problema de Pappus*, que se referia a uma determinada condição que era atendida por um conjunto de pontos.

Foi através da solução desse problema que o matemático propôs a criação do sistema de coordenadas cartesiano, o plano cartesiano.

O plano cartesiano é formado por dois eixos perpendiculares, chamados de eixo das abscissas e eixo das ordenadas, permitindo a localização de pontos a partir de coordenadas.

2.3.6 Leonhard Euler

Figura 12 – Leonhard Euler

Fonte: Boyer, 2002

Leonhard Euler (1707 + 76 - 1783) nasceu na Basiléia, uma importante cidade suíça, filho de um pastor calvinista, é um dos maiores nomes da história da Matemática. Ele é considerado pelos historiadores como a pessoa que mais produziu artigos matemáticos de todos os tempos, escrevendo sobre praticamente todos os ramos da Matemática, bem como sobre ramos da Física. O pai de Euler era um ministro religioso que, como o pai de Jacques Bernoulli, esperava que seu filho seguisse o mesmo caminho. Porém o jovem estudou com Jean Bernoulli e se reuniu com seus filhos, Nicolaus e Daniel, e através deles descobriu sua vocação.

O pai de Euler esperava que seu filho continuasse sua carreira teológica, mas logo viu seu grande potencial para exatas. Seu filho continuaria a carreira teológica , mas logo viu seu grande potencial para ciências exatas. Foi o próprio pai de Euler, que tinha conhecimentos em campos das exatas, que o colocou no caminho da lógica. Mais tarde, ele conseguiu que seu filho estudasse com Jean Bernoulli, o que lhe permitiu conhecer a família Bernoulli. A história da vida de Leonhard Euler é riquíssima em contribuições para os diversos ramos da Matemática e das ciências, tendo produzido artigos em diversas áreas do conhecimento. Mesmo com tamanha sabedoria e profundidade ele era também conhecido por sua didática e simplicidade ao abordar temas trabalhados nos níveis escolares elementares, nesse sentido ele também produziu livros didáticos para esses níveis de ensino da Matemática para a Rússia.

Segundo Boyer (2, p. 305),

> De 1727 a 1783 a pena de Euler esteve ocupada aumentando os conhecimentos disponíveis em quase todos os ramos da matemática pura e aplicada, dos mais elementares aos mais avançados. Além disso, em quase tudo, Euler escrevia na linguagem e notação que usamos hoje, pois nenhum outro indivíduo foi tão grandemente responsável pela forma da matemática de nível universitário de hoje quanto Euler, o construtor de notação mais bem-sucedido em todos os tempos.

Aos vinte e oito anos Euler perdeu a visão do seu olho direito, devido a esforços excessivos da visão em seus estudos e aos sessenta anos começou a perder a visão do outro olho devido a uma catarata. Sabendo de sua cegueira inevitável ele mandou construir um quadro negro enorme, no qual treinou escrever sem olhar e dessa forma, ditando para seus filhos e escrevendo no quadro negro, continuou produzindo artigos na mesma dinâmica de antes devido à sua memória extraordinária e sua grande capacidade de concentração. Boyer (2, p. 304) afirma que

> (...) Em 1735 tinha perdido a visão do olho direito - por excesso de trabalho, ao que se diz - mas esta infelicidade não diminuiu em nada sua produção de pesquisa. Conta-se que ele disse que ao que parecia seu lápis o superava em inteligência, tão facilmente fluíam artigos; e ele publicou mais de 500 artigos durante sua vida. Por quase meio século depois de sua morte obras de Euler continuavam a aparecer nas publicações da Academia de S. Petersburgo (...)

Carl Boyer (2, p. 304) afirma ainda que,

> (...) em 1766 Euler voltou à Rússia. Durante esse ano Euler soube que estava perdendo a visão do olho que restava devido a catarata, e preparou-se para a cegueira final praticando escrever com giz numa grande lousa e ditando para seus filhos. Uma operação foi feita em 1771, e durante alguns dias Euler enxergou novamente; mas o sucesso não durou e Euler passou quase todos os últimos dezesseis anos de sua vida na total cegueira.

2.3.7 Augustin Louis Cauchy

Augustin Louis Cauchy (1789 + 68 - 1857), nasceu em Paris, França. Filho de Louis François Cauchy e Marie Madeleine Desastre, era o filho mais velho entre dois irmãos e quatro irmãs. O seu pai era advogado de profissão e sua mãe era uma mulher afável e de bom coração, ambos católicos intolerantes.

A família Cauchy enfrentou dificuldades em decorrência da Revolução Francesa, que continuou afetando a alimentação que consumiam. Laplace e Lagrange, amigos do seu pai, viram a aptidão do menino e ajudaram o pai, incentivá-lo sugerindo inicialmente que ele estudasse línguas. Cauchy teve uma educação de qualidade ofertada pelo seu pai até os 13 anos de idade, incluindo suas crenças religiosas.

Figura 13 – Cauchy

Fonte: Boyer, 2002

Entre 1802 e 1804, estudou línguas clássicas na *Centrale du Panthéon School.* Depois disso, frequentou aulas de matemática para se preparar para o vestibular da *École Polytechnique línguas na Escola Centrale du Panthéon* . Ele estudou muito e entrou na *École* em segundo lugar em 1805. Aluno brilhante que tirou notas extraordinárias e teve aulas com professores conhecidos como Ampere.

Em seguida partiu para Cherbourg e auxiliou no apoio ao exército de Napoleão enquanto estudava e desenvolvia pesquisas matemáticas. Mostrou que os ângulos de um poliedro convexo são determinados pelas suas faces. Incentivado por Legendre e Malus, publicou em 1812 um artigo sobre polígonos e poliedros, onde demonstrou, para um caso particular de poliedros, a fórmula de Euler, objeto do nosso estudo.

2.3.8 Adrien Legendre

Figura 14 – Legendre

Fonte: Boyer, 2002

Adrien-Marie Legendre foi um matemático francês que fez importantes contribuições para a Estatística, Teoria dos Números, Álgebra Abstrata e Análise Matemática.

Algumas fontes afirmam que Legendre nasceu em Paris, enquanto outras afirmam ter sido em Toulouse, mas o que se pode afirmar com certeza é que ele nasceu em 18 de setembro de 1752.

Os primeiros trabalhos de Legendre foram centrados em mecânica e grande parte de sua obra e trabalhos científicos foi fonte de inspiração para várias teorias matemáticas. Em 1782, escreve o ensaio *Recherches sur la trajectoire des projectiles dans les milieux résistants,* que lhe deu o prêmio oferecido pela Academia de Berlim.

Em 1794 publicou o livro *Éléments de géométrie.* Esse texto era uma versão reordenada e simplificada da obra *Os Elementos*, de Euclides, e foi traduzido em mais de 30 idiomas. Após algumas edições, o texto começou a apresentar tópicos de trigonometria, assim como uma demonstração simples de que π (Pi) é um número irracional e a primeira demonstração que se tem notícias de que (Pi quadrado) é irracional. No final do livro aparece a conjectura de que π (Pi) não é algébrico, fato demonstrado em 1882 por Ferdinand Lindemann (1852-1939).

2.3.9 Henri Poincaré

Figura 15 – Poincaré

Fonte: Boyer, 2002

O francês Jules Henri Poincaré nasceu em 29 de Abril de 1854 e faleceu em 17 de Julho de 1912. Foi um famoso matemático, físico e filósofo da ciência, sendo descrito como o último "universalista"capaz de entender e contribuir em todos os âmbitos da disciplina matemática.

Para o século 19, a obra de Poincaré foi de extrema importância, apresentando contribuições nas áreas de teoria das funções, teoria de números, equações diferenciais e topologia, entre outras.

Um dos itens mais importantes, no desenvolvimento da matemática, durante o século 19, foi a geometria não-euclidiana. A geometria não-euclidiana levava à existência de um espaço diferente do que era acreditado desde Euclides. As noções de reta, plano e distância num espaço não-euclidiano eram completamente diferentes e não podiam ser observadas diretamente como a geometria euclidiana. Devido à essa questão da não-existência concreta (que pode ser tocada) da geometria não-euclidiana, ela demorou a ser aceita entre os matemáticos e só foi considerada de grande importância com o trabalho de Bernhard Riemann, publicado em 1867.

Com a obra de Riemann, passou-se a aceitar a existência de um espaço em que não precisavam valer os postulados de Euclides, mas que, no limite do extremamente pequeno, a geometria euclidiana poderia ser considerada. É nesse contexto que se encontra a obra matemática de Poincaré.

Poincaré desenvolveu o estudo de funções automórficas (1884), chamadas de *funções fuckianas* (em homenagem ao matemático Lazarus Fuchs), que possuem seu domínio num espaço não-euclidiano. As funções automórficas também eram objeto de pesquisa de Klein nessa época, porém a conexão com o espaço não-euclidiano não havia sido feita. Utilizando as ideias de multiplicidade de Riemann, Poincaré foi o primeiro a introduzir a ideia de preencher tal multiplicidade por uma sequência de regiões compactas e obter o mapeamento por um processo de limite.

Além de desenvolver teorias em funções abeliannas e geometria algébrica, Poincaré também contribuiu no estudo da álgebra para resolução de problemas de análise e nos estudos de Lie sobre grupos.

Os estudos sobre equações diferenciais, que em grande parte faziam referência à geometria diferencial, chamaram a atenção de Poincaré na resolução de problemas da mecânica, principalmente na solução do problema de interação de mais de três corpos.

Na solução deste problema, Poincaré começou com as equações gerais: $\frac{dx}{X} = \frac{dy}{Y}$, onde X, Y são polinômios reais arbitrários em x, y. Para considerar todos os possíveis caminhos das integrais curvas, ele projeta o plano (x,y) sobre uma esfera, a partir do centro desta, trabalhando, pela primeira vez, com uma integral curva de um campo vetorial sobre uma multiplicidade compacta.

3 DEMONSTRAÇÕES DO TEOREMA DE EULER PARA POLIEDROS CONVEXOS

Apresentar um raciocínio dedutivo exige ter um conhecimento de uma acervo de noções primordiais que ainda não são claras, bem como uma reunião de axiomas e postulados, que são propriedades que são aceitas como verdadeiras . Essas premissas mostram como outras particularidades, tidos como teoremas.

Os Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio não estabelece uma obrigatoriedade sobre o uso de demonstrações no entanto, eles destacam a importância do desenvolvimento do pensamento dedutivo.

> A Matemática no Ensino Médio tem um valor formativo, que ajuda a estruturar o pensamento e o raciocínio dedutivo [...] Em seu papel formativo, a Matemática contribui para o desenvolvimento de processos de pensamento e a aquisição de atitudes, cuja utilidade e alcance ~ transcendem o âmbito da própria Matemática, podendo formar no aluno a capacidade de resolver problemas genuínos, gerando hábitos de investigação, ~ proporcionando confiança e desprendimento para analisar e enfrentar situações novas, propiciando uma visão ampla e científica da realidade, o desenvolvimento da criatividade e de outras capacidades pessoais. (BRASIL, 2000).

Embora a demonstração não seja o objetivo principal, a verificação de habilidades matemáticas é sempre necessária. Uma maneira de amadurecer o pensamento matemático é fazer que valorizam a criatividade e o potencial do pensamento humano.

Os Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio também em preconizam uma abordagem abrangente e não restritiva do ensino de Matemática:

> [...] o aprendizado, no Ensino Médio, no sentido de se produzir um conhecimento efetivo, de significado próprio, não somente propedêutico...Referenda-se uma visão do Ensino Médio de caráter amplo, de forma que os aspectos e conteúdos associados ao aprendizado científico e matemático sejam parte essencial da formação cidadã de sentido universal. [...] a crescente valorização do conhecimento e da capacidade de inovar demanda cidadãos capazes de aprender continuamente, para o que é essencial uma formação geral e não apenas um treinamento específico (BRASIL, 2000).

A importância da demonstração vai além de se mostrar uma veracidade matemática, uma demonstração tem valor não só porque prova um resultado, mas também porque pode apresentar novos métodos e conceitos que tenham uma execução mais ampla em matemática e apontando novas vertentes matemáticas.

Diante de tudo isso, verificamos em nossos estudos que o uso de demonstração consiste em uma junção de raciocínios lógicos e fundamentos incontestáveis , legitimando uma proposição, sendo amparado por um método axiomático. Convencidos de que as demonstrações estão ligadas à Matemática e à produção de conhecimento matemático, somos levados a discutir o seu papel no Ensino Básico.

O uso de formas e propriedades geométricas, desenvolvido pelas habilidades de visualização, desenho, argumentação, lógica e aplicação, é refletido nos PCN do ensino médio. "Essas competências são importantes na compreensão e ampliação da percepção de espaço e construção de modelos para interpretar questões da Matemática e de outras áreas do conhecimento." (BRASIL, 2000, p. 40).

De acordo com DOLCE (2005), qualquer poliedro convexo, ou sua superfície, tem a relação $V - A + F = 2$, onde V é o número de vértices, A é o número de arestas e F é o número de faces.

DEMONSTRAÇÃO 1:

a) Por indução finita referente ao número de faces, vamos provar de caráter preliminar, que, para uma superfície poliédrica e limitada convexa e aberta, vale a relação:

$$V + A + F = 1$$

Em que,
V é o número de vértices;
A é o número de arestas;
F é o número de faces da superfície poliédrica limitada aberta.

1) Para *F = 1*

Neste caso a superfície se reduz a um polígono plano convexo de n lados e, então, $V_1 = n$, $A_1 = n$. Temos:

$$V - A + F = n - n + 1 = 1 \Rightarrow V - A + F = 1$$

Logo, a relação está verificada para *F = 1.*

2) Admitindo que a relação vale para uma superfície de *F'* faces (que possui *V'* vértices e *A'* arestas), vamos provar que também vale para uma superfície de $F' + 1$ faces (que possui $F' + 1 = F$ faces, V vértices e A arestas).

Por hipótese, para a superfície de *F'* faces, *A'* arestas e *V'* vértices vale:

$$V' - A' + F' = 1$$

Acrescentando a essa superfície (que é aberta) uma face de **p** arestas (lados) e considerando **q** dessas arestas (lados) coincidem com arestas já existentes, obtemos uma nova superfície com F faces, A arestas e V vértices tais que:

$$F = F' + 1.$$

$A = A' + p - q$ (**q** arestas coincidem)

$V = V' + p - (q + 1)$ (arestas coincidem, $q + 1$ vértices coincidem).

Formando a expressão $V - A + F$ e substituindo os valores acima, vem:

$$V - A + F = V' + p - (q+1) - (A' + p - q) + (F' + 1) = V' + p - q - 1 - A' - p + q + F' + 1 = V' - A' + F'$$

Com $V - A + F = V' - A' + F'$ provamos que essa expressão não se altera se acrescentarmos (ou retirarmos) uma face da superfície.

Como, por hipótese, $V' - A' + F' = 1$, vem que $V - A + F = 1$ o que prova a relação preliminar.

DEMONSTRAÇÃO 2:

A demonstração que será apresentada a seguir é devida a Cauchy, e foi apresentada no ano de 1813. Para o Ensino Médio é limitada à poliedros convexos, para evitar uma abordagem muito mais complexa. Diz-se que uma região C do espaço é convexa quando todo segmento que liga dois pontos de C está inteiramente contida em C.

Um poliedro é dito convexo quando limita em seu interior uma região convexa do espaço. O enunciado do **Teorema de Euler para Poliedros Convexos** afirma: Seja P um poliedro convexo com F faces, V vértices e A arestas, então: $V - A + F = 2$.

Primeiro passo: Retira-se uma face do poliedro. Note que esse procedimento diminui uma face, mas preserva o número V, de vértices, e A, de arestas. Logo se tem $V - A + F = 1$.

Segundo passo: chama-se aresta livre do poliedro a aresta que é lado de apenas um polígono. O poliedro, após a retirada de uma de suas faces possui as arestas livres correspondentes ao número de lados da face retirada.

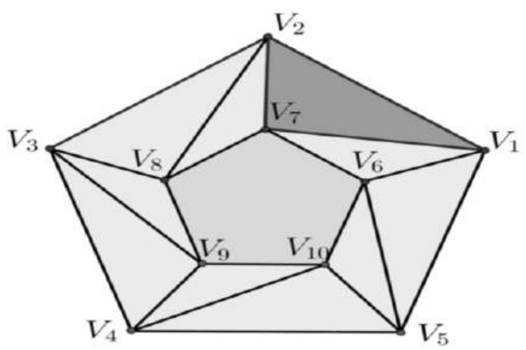
Como o poliedro em questão é convexo, projeta-se o poliedro sobre um plano H, a partir de um ponto Q suficientemente próximo ao lugar onde ficava a face que foi retirada, de forma que nenhuma semi-reta que parta de Q contenha mais de um ponto do poliedro P. Uma ideia muito interessante é imaginar o ponto Q como um foco luminoso que projeta a imagem do poliedro num anteparo (o plano H).

Terceiro passo: Decompondo-se cada polígono da imagem plana em triângulos que não se cruzam, isso pode ser feito traçando diagonais a partir de um único vértice de cada face, não se altera a expressão $V - A + F = 1$.

Nota-se que para cada novo triangulo formado aumenta-se uma aresta e aumenta-se uma face, então essa alteração não interfere no resultado da expressão. Considerando que uma aresta é chamada de aresta livre quando é lado de apenas uma face da figura plana gerada pela projeção sobre o plano H.

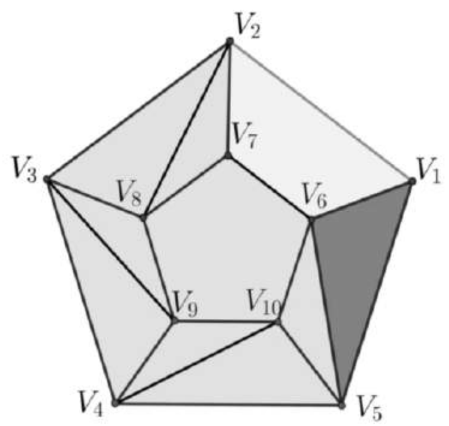
Na figura 16 o triangulo $V_1V_2V_7$ destacado, possui uma aresta livre, a aresta V_1V_2, pois é aresta de apenas um triangulo. Na figura 17 o triangulo $V_1V_5V_6$ possui duas arestas livres, são elas: V_1V_5 e V_1V_6.

Figura 16 – Despetalando: a face sombreada possui uma aresta livre



Fonte: DOLCE (2005)

Figura 17 – Despetalando: a face sombreada possui duas arestas livre

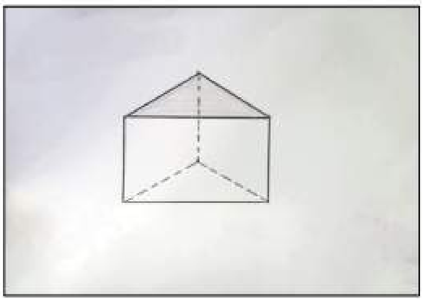


Fonte: DOLCE (2005)

Quarto passo: Desprendendo a imagem plana, partindo de fora para dentro vai-se retirando cada triangulo da figura plana. Se for retirado um triangulo que possui uma aresta livre diminui-se uma aresta e uma face, logo a expressão $V - A + F$ continua resultando um. Se o triangulo retirado tiver duas faces livres então serão retirados: uma face, um vértice e duas arestas, logo a expressão continua valendo um.

Quinto passo: Retirando-se, uma a uma, as faces que tem uma ou duas arestas livres chaga-se, finalmente, a última face, que é um triangulo, para o qual a expressão $V - A + F = 1$, ficando então demonstrado o Teorema de Euler para poliedros convexos. A seguir tem-se a sequência dos cinco passos descritos por Cauchy para um prisma triangular, o qual foi escolhido pela simplicidade da visualização do processo. Toma-se o poliedro inicialmente: um prisma triangular reto.

Figura 18 – Prisma triangular



Fonte: Autoria própria

Em seguida retira-se uma de suas faces, por exemplo, o triangulo superior que é uma das bases, nesse caso.

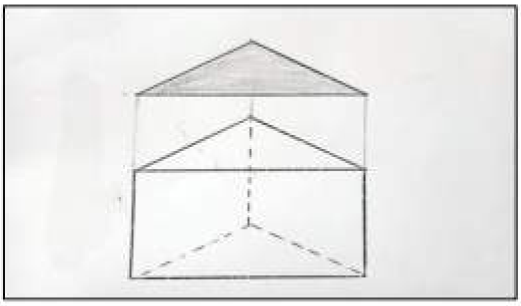
Tomando um ponto próximo à face que foi retirada e usar esse ponto como origem de semirretas para projetar a sombra no plano H.

Dessa forma, fica criada a imagem correspondente ao poliedro projetado no plano, ou seja, tem-se o poliedro planificado e neste caso tem-se que:

$V = 6, A = 9$ e $F = 4$, logo $V - A + F = 6 - 9 + 4 = 1$.

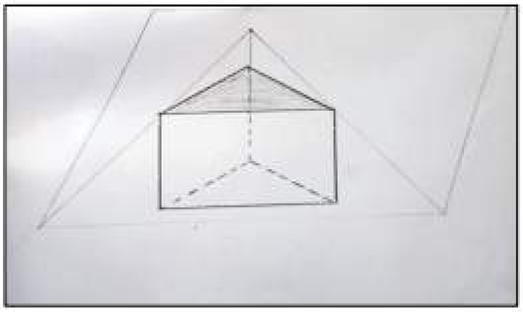
Dividindo cada um dos polígonos planos com diagonais para formar triângulos. A figura ficou com 7 triângulos, com V = 6 (não alterou o número de vértices),

Figura 19 – Retirando uma face



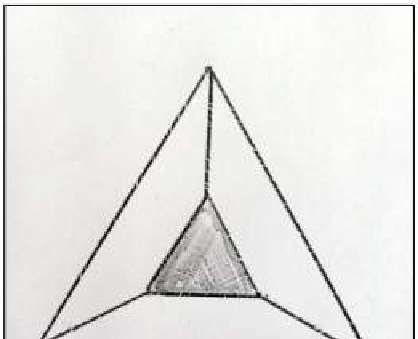
Fonte: Autoria própria

Figura 20 – Projeção ortogonal sobre o plano H



Fonte: Autoria própria

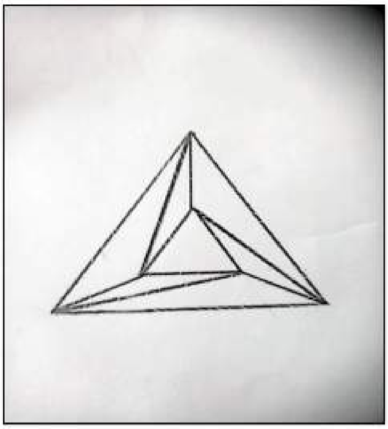
Figura 21 – Poliedro planificado, sem uma das faces



Fonte: Autoria própria

A = 12, (aumentou em 3 o número de arestas) e F = 7 (aumentou em 3 o número de faces). Tem-se que: $V - A + F = 6 - 12 + 7 = 1$. As alterações sofridas pela figura não alteraram o valor da característica de Euler-Poincaré.

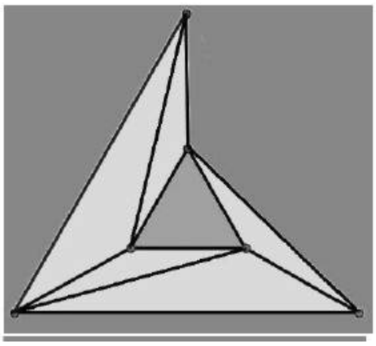
Figura 22 – Faces divididas em triângulos



Fonte: Autoria própria

Desprendendo a figura, vai-se retirando um triângulo (face) com uma aresta livre. Diminuiu-se uma face e uma aresta, logo: $V - A + F = 1$.

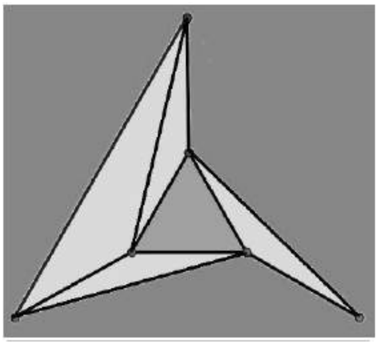
Figura 23 – Retirando a primeira face com uma aresta livre



Fonte: DOLCE (2005)

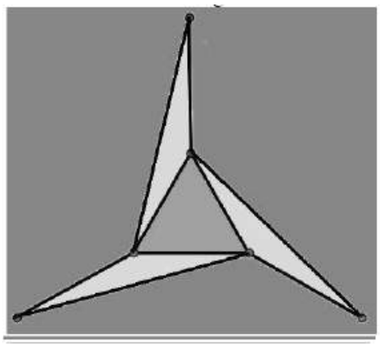
Depois outro triangulo com uma aresta livre, até retirar o último triangulo com uma face livre

Figura 24 – Retirando a segunda face



Fonte: DOLCE (2005)

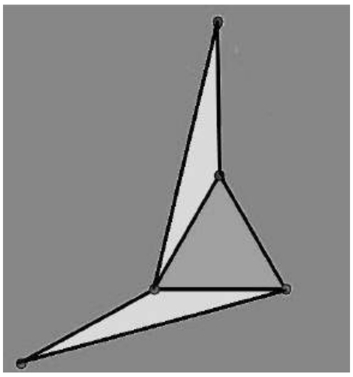
Figura 25 – Continuando a sequência



Fonte: DOLCE (2005)

Retirando-se, em seguida, os triângulos com duas arestas livres, diminui-se uma face duas arestas e um vértice, conservando-se o valor da expressão: $V - A + F = 1$.

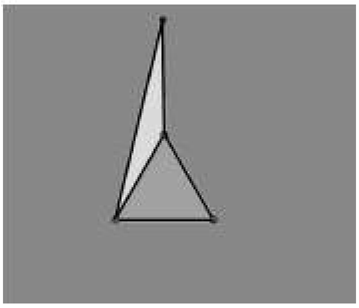
Figura 26 – Retirando a primeira das faces com duas arestas livres



Fonte: DOLCE (2005)

Retira-se o último triângulo com duas arestas livres. Figura 25:

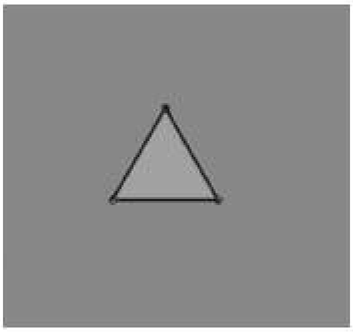
Figura 27 – Retirando a segunda face com duas arestas livres



Fonte: DOLCE (2005)

E, finalmente, tem-se um triangulo em que $A = 3, V = 3$ e $F = 1$, logo: $V - A + F = 1$ Ficando, nesse exemplo, confirmado o teorema de Euler.

Figura 28 – Despetalando: última face, um triângulo.



Fonte: DOLCE (2005)

DEMONSTRAÇÃO 3:

Demonstração utilizando a soma dos ângulos internos das faces do poliedro.

A demonstração aqui para o Teorema de Euler, tem como referência Azambuja Filho (1983) e Lima et al. (2006).

Apresentamos a demonstração de forma bastante detalhada, intercalando com algumas ilustrações de situações particulares, visando uma melhor compreensão da mesma.

(Teorema de Euler). Em todo poliedro convexo é satisfeita a relação $V - A + F = 2$, em que V é o número de vértices, A é o número de arestas e F é o número de faces.

Para não recairmos sobre uma geometria não euclidiana e tornarmos mais elementar a prova do Teorema de Euler, apresentamos uma demonstração feita por Zoroastro Azambuja Filho, que é uma adaptação da demonstração de Legendre.

Primeiramente, devemos calcular a soma dos ângulos internos de todas as faces de um poliedro convexo, digamos P.

Seja P um poliedro convexo, logo suas faces são polígonos convexos e sejam os números $n_1, n_2, ..., n_k$ os gêneros dos polígonos correspondentes às faces, entende-se por gênero o tipo de polígono (triangulo $n = 3$, quadrilátero $n = 4$, pentágono $n = 5$, etc.), numerando as faces de 1 a F temos que $1 \leq k \leq F$. A soma dos ângulos de um polígono convexo é dada por

$$S = (n - 2)\pi$$

então a soma dos ângulos internos de todas as faces será:

$$S = (n_1 - 2)\pi + (n_2 - 2)\pi + ... + (n_f - 2)\pi$$

colocando π em evidencia e agrupando os números de faces e as parcelas 2 pode-se escrever:

$$S = \pi[(n_1 + n_2 + ... + n_f) - (2 + 2 + ... + 2)].$$

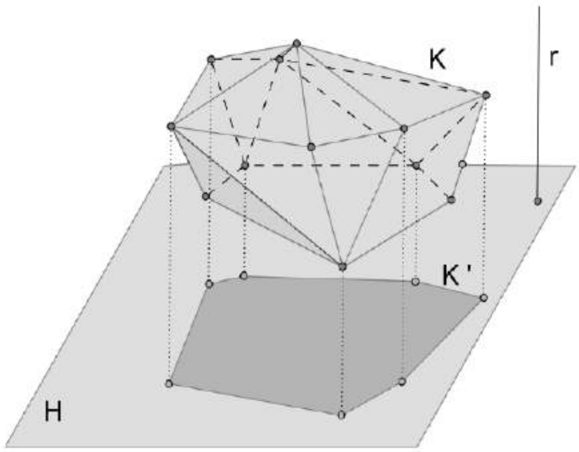
Na equação $(n_1 + n_2 + ... + n_f)$ corresponde ao número total de lados de todas as faces, como cada lado é comum a duas faces então esse número é o dobro do número de arestas $(2A)$ e na expressão do segundo parênteses tem-se tantas parcelas 2 quanto o número de faces, logo é correspondente a $2F$, portanto:

$$S = \pi(2A - 2F) = 2\pi(A - F)$$

Em seguida será calculada a mesma soma de todos os ângulos internos das faces do poliedro, só que por outro caminho.

Considere, agora, uma reta r, que não seja paralela e nenhuma face de P e um plano H, que não intersecte P e que seja perpendicular a r. O plano H será chamado de plano horizontal e todas as retas paralelas a r serão chamadas retas verticais. O plano H divide o espaço em dois semiespaços, chama-se espaço superior àquele que contem P e diz-se que seus pontos estão acima de H. A cada ponto X do espaço superior toma-se uma reta paralela a r que intersecta H no ponto X', chamado sombra de X. A sombra de qualquer conjunto C, contido no semiespaço superior é, por definição, o conjunto C', contido em H, formado pelas sombras dos pontos de C. Na Figura 28 tem-se a representação de um poliedro e da sombra gerada pela interseção com o plano H.

Figura 29 – Projeção sobre o plano H



Fonte: DOLCE (2005)

Seja P' a sombra do poliedro P. Tem-se que os pontos de P' são sombra de um ou dois pontos de P, pois o poliedro P é convexo. O contorno K', da sombra do poliedro, é um conjunto de pontos que são sombra de apenas um ponto do poliedro. K' é o conjunto das sombras dos segmentos de uma linha poligonal fechada K, dos pontos em que a reta paralela a r que passa por esse ponto não intersecta mais o poliedro. Chama-se de contorno iluminado a linha poligonal K. Note-se que todos os outros pontos da sombra do poliedro é sombra de dois pontos, um da parte iluminada e outro da parte escura do poliedro.

A partir dessas considerações procede-se o cálculo da soma dos ângulos internos de todas as faces. É importante notar que a sombra de uma face é um polígono do mesmo gênero, ou seja, com o mesmo número de lados, logo a soma dos ângulos internos do polígono é igual à soma dos ângulos internos da sua sombra. Sejam Vi, o número de vértices iluminados, Vs o número de vértices sombrios e Vc o número de vértices do contorno K, que é sombra de apenas um ponto.

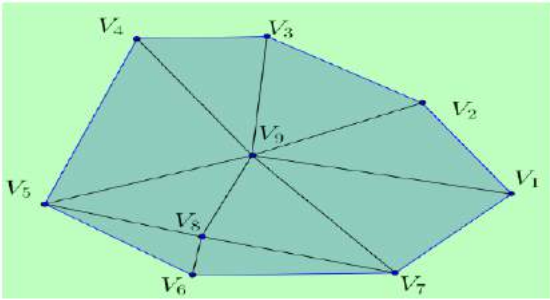
Então $V = V_i + V_s + V_c$. Tem-se que V é o número de vértices e, logicamente, o número de lados da poligonal K', contorno de P.

Considere a sombra da parte iluminada de P, essa sombra é um polígono convexo com V_c vértices e subdividido por V_i pontos interiores, que determinam as sombras dos polígonos iluminados, que são também polígonos com o mesmo número de lados.

Para cada ponto V_i tem-se que a soma dos ângulos internos é 2π radianos, como se vê na Figura 30 os vértices do contorno V_c são: $V_1, V_2, ..., V_7$ e os vértices iluminados do interior V_i são: V_8 e V_9. Logo a soma dos ângulos contidos na sombra da parte iluminada será:

$$S_i = 2\pi.V_i + \pi.(V_c - 2).$$

Figura 30 – Contorno



Fonte: DOLCE (2005)

Para se calcular a soma das medidas de todos os ângulos sombrios procede-se do mesmo modo é fundamental lembrar que a essa soma envolve todos os vértices que estão no interior da região sombria assim como todos os vértices da poligonal K', logo:

$$S_{Vs} = 2.\pi.V_i + \pi.(V_c - 2).$$

Conclui-se, então, que a soma de todos os ângulos do poliedro será a soma entre todos os ângulos iluminados e todos os ângulos sombrios, então:

$$S = S_i + S_{Vs} = 2.\pi.V_i + \pi.(V_c - 2) + 2.\pi.V_i + \pi.(V_c - 2)$$

$$S = 2.\pi.V_i + 2.\pi.V_i + 2.\pi.(V_c - 2)$$

$$S = 2.\pi.(V_i + V_i + V_c - 2)$$

$$S = 2.\pi.(V - 2)$$

Como, pelo primeiro cálculo,

$$S = 2.\pi(A - F)$$

e, pelo segundo cálculo,

$$S = 2.\pi.(V - 2)$$

temos, então, que

$$2.\pi(A - F) = 2.\pi.(V - 2)$$

Dividindo-se os dois membros por 2π, temos:
$V - 2 = A - F$ ou $V - A + F = 2$
Ficando, assim, demonstrado o Teorema de Euler para Poliedros Convexos.

4 CONSIDERAÇÕES FINAIS

O ensino de Geometria na escola é de grande importância, uma vez que esta está presente no nosso dia-a-dia e consequentemente faz parte da vida escolar do aluno. Portanto, seu ensino deve ser tratado com a devida importância. É evidente que, devido às dificuldades no ensino dos temas de geometria, são necessárias encontrar novas abordagens de apresentar estes conteúdos.

Dessa forma, permite que o aluno participe do processo de aprendizagem. Abordar os conceitos matemáticos envolvidos de uma forma que permita ao professor utilizá-lo como meio auxiliar no ensino do Teorema de Euler para uma turma de Ensino Médio.

Ao apresentarmos diferentes demonstrações deste Teorema, esperamos ter fornecido alternativas para que o professor possa explorar o tema de acordo com o nível de desenvolvimento da turma em que leciona. No que se refere ao ensino de Geometria na escola, em particular o Teorema de Euler, o que foi evidenciado pelos trabalhos analisados é que muitos dos alunos saem do Ensino Médio sem atingir as metas planejadas, necessitando de um maior desenvolvimento do seu raciocínio lógico dedutivo.

Pode-se notar que parte desse problema é causado pela falta de motivação por parte dos alunos, pelo fato de os conteúdos serem lançados sem nenhuma conexão entre eles, apenas como fórmulas prontas a serem utilizadas. Outra causa apontada é a dificuldade do aluno em visualizar um objeto tridimensional contando apenas com uma representação plana apresentada no livro.

Neste sentido, acreditamos que o uso das demonstrações pode contribuir de modo significativo para o aprendizado do aluno. Auxiliado por esta ferramenta e com a mediação do professor, o aluno poderá verificar a existência de uma relação associando o número de vértices *(V)*, o número de arestas *(A)* e o número de faces *(F)*, através da fórmula $V - A + F = 2$, visualizando e manipulando o poliedro e os elementos vértices, arestas e faces. Além disso, um contato com um pouco mais de atenção sobre a história do estudo dos poliedros e do Teorema de Euler trarão mais sentido e podem favorecer a compreensão dos conceitos envolvidos.

Não se está propondo, neste trabalho, que o ensino da geometria volte ao axiomático, o que se propõe instiguem nos estudantes o sentimento de construção e de argumentação, compreender como funciona os mecanismos da matemática e da geometria. Tal postura deve refletir no modo de pensar desses estudantes, deve gerar o hábito de questionara validade de algumas afirmações, não só em matemática, mas em termos gerais.

REFERÊNCIAS

BOYER, Carl.;MERZBACH, Uta C. História da Matemática. Tradução: Elza Gomide. Edgard Blicher, São Paulo, 2002.

BRASIL,Parâmetros Curriculares Nacionais. Ciências da Natureza e Matemática e suas tecnologias. Brasília: MEC, 2000.

_______. Parâmetros Curriculares Nacionais. Ensino Médio: Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias . Brasília: Ministério da Educação, Secretaria da Educação Básica, 2000.

DANTE, Luiz Roberto. Matemática : contexto & aplicações : ensino médio / Luiz Roberto Dante. 3. ed. – São Paulo : Ática, 2016.

DOLCE, Oswaldo e POMPEO, Jose Nicolau. Fundamentos de Matemática Elementar: Geometria espacial, posição e métrica. Volume 10. 7ª ed. São Paulo: Editora Atual, 2005.

EVES, Howard. Introdução à História da Matemática. Tradução: Hygino H. Domingues. Unicamp, Campinhas, SP, 2008.

FILHO, Z. A. As coisas que ensinamos: Demonstração do Teorema de Euler para poliedro convexo. Revista do professor de matemática. São Paulo: Sociedade Brasileira de Matemática, n. 3, 1983.

IEZZI, G. et al. Matemática: ciência e aplicações, v.2: Ensino Médio. São Paulo. Editora Saraiva. 2010.

LIMA, Elon Lages. Meu professor de Matemática e outas histórias. Sociedade Brasileira de Matemática(SBM).Col. do Professor de Matemática – 1999 IMPA, R.J.

MELO, Henrique Alves de. Fórmula de Euler no plano e para poliedros. 2013. 54 f. Dissertação (Mestrado em Matemática em Rede Nacional) – Centro de Ciências, Universidade Federal do Ceará, Fortaleza, 2013. Acessado em 01.07.2023.

MORAIS FILHO, Daniel Cordeiro de. Um convite à matemática. $2^{\underline{a}}$ ed. - Rio de Janeiro: SBM, 2013.

INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA DA PARAÍBA
Campus Cajazeiras
Rua José Antônio da Silva, 300, Jardim Oásis, CEP 58.900-000, Cajazeiras (PB)
CNPJ: 10.783.898/0005-07 - Telefone: (83) 3532-4100

Documento Digitalizado Restrito

ENTREGA DE TCC

Assunto: ENTREGA DE TCC
Assinado por: Alexandre Dantas
Tipo do Documento: Declaração
Situação: Finalizado
Nível de Acesso: Restrito
Hipótese Legal: Informação Pessoal (Art. 31 da Lei no 12.527/2011)
Tipo do Conferência: Cópia Simples