INSTITUTO FEDERAL
Paraíba
Campus Campina Grande

INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA DA PARAÍBA
CURSO SUPERIOR DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

CARLOS DANIEL HENRIQUE DE SOUSA

UMA FRAÇÃO DA ARTE E A ARTE DA FRAÇÃO: UMA PERSPECTIVA NO ENSINO DE FRAÇÕES

CAMPINA GRANDE - PB
DEZEMBRO DE 2023

CARLOS DANIEL HENRIQUE DE SOUSA

UMA FRAÇÃO DA ARTE E A ARTE DA FRAÇÃO: UMA PERSPECTIVA NO ENSINO DE FRAÇÕES

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado no Curso Superior de Licenciatura em Matemática do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia da Paraíba (IFPB), como requisito parcial para para obtenção do título de Licenciado em Matemática.

Orientador: Prof. Me. Joab dos Santos Silva.

S725f

Sousa, Carlos Daniel Henrique de.
Uma fração da arte e a arte da fração: uma perspectiva no ensino de frações / Carlos Daniel Henrique de Sousa. - Campina Grande, 2023.
75 f. : il.

Trabalho de Conclusão de Curso (Curso Superior de Licenciatura em Matemática) - Instituto Federal da Paraíba, 2023.
Orientador: Prof. Me. Joab dos Santos Silva.

1.Frações 2. Aritmética 3. Geometria I. Silva, Joab dos Santos III. Título.

CDU 51

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
SECRETARIA DE EDUCAÇÃO PROFISSIONAL E TECNOLÓGICA
INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA DA PARAÍBA
CAMPUS CAMPINA GRANDE

CARLOS DANIEL HENRIQUE DE SOUSA

UMA FRAÇÃO DA ARTE E A ARTE DA FRAÇÃO: UMA PERSPECTIVA NO ENSINO DE FRAÇÕES

Trabalho de Conclusão de Curso, aprovado como requisito parcial para a obtenção de graduação em Licenciatura em Matemática pelo Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia da Paraíba – Campus Campina Grande.

Habilitação: Licenciatura

Data da aprovação

11 / 12 / 2023.

BANCA EXAMINADORA:

Joab dos Santos Silva

ORIENTADOR: Prof. Me. Joab dos Santos Silva – IFPB

Rômulo Alexandre Silva

AVALIADOR: Prof. Dr. Rômulo Alexandre Silva – IFPB

Tony Regy Ferreira da Silva

AVALIADOR: Prof. Dr. Tony Regy Ferreira da Silva - UEPB

Dedico primeiramente a Deus, por me proporcionar viver este momento e aos meus pais, Daniel Barbosa de Sousa e Valquíria Henrique dos Santos, pelos cuidados, proteção e formação educacional que me proporcionam até hoje. Ao meu melhor amigo que não pode estar presente nesta caminhada, mas que estaria me apoiando até este momento, Eudes Antônio Pessoa Alves (In Memoriam).

AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente à Deus, que me abençoa para lhe dar com as constantes atribulações e continuar minha caminhada e almejando minha formação profissional.

Agradeço ao Instituto Federal de Educação Ciência e Tecnologia da Paraíba - IFPB, Campus Campina Grande, e a todos os funcionários dessa instituição que me proporcionaram um ambiente propício para meu desenvolvimento no curso e do meu trabalho de conclusão de curso.

A toda minha família, meu pai, Daniel Barbosa de Sousa, minha mãe, Valquiria Henrique dos Santos e meus irmãos, Carla Cristina e Davi Henrique de Sousa que devem estar muito orgulhosos e felizes por eu está terminando esta graduação. Ao meu tio José Alberto e sua esposa, Elisângela, pelo apoio nos estudos e ajuda fornecida durante o curso.

Aos amigos que fui presenteado durante o curso, a Allisson, Beatriz, Carlos, Cecília, Daniel, Dennis, Erika, Evelly, Fernanda, Isaac, Larissa, Letícia, Liliane, Lucas, Nicole, Raynara e outros colegas que fazem parte da minha convivência e me motivaram a continuar no curso. Em especial, aos meus mais que amigos, novos irmãos que o curso me presenteou, Daliana Alves, Gleysom Moizinho, Iara Luiza e Wendell Souto.

Aos meus amigos fora do curso, que me escutaram e acreditaram em mim me dando motivação para continuar, Eudes, Josinaldo, Maysa e Rafael. Ao motorista do ônibus, Robson Douglas, pela sua paciência nesses 4 anos em esperar o horário das aulas acabarem.

Em especial aos meus professores do ensino fundamental e médio que me motivaram a seguir esta carreira, Prof.ª Danyally, Prof. Eudes Henrique, Prof.ª Maria José, Prof. Jeferson Clementino e outros profissionais que estarão guardados comigo na memória.

Aos profissionais e alunos do 8º ano da Escola Municipal do Ensino Fundamental e Médio Padre Simão Fileto que contribuíram significantemente com esta pesquisa.

Ao meu Orientador, Prof. Joab dos Santos Silva. Agradeço pela atenção e os conselhos, incentivando-me a superar as dificuldades que surgiam, um excelente profissional.

Aos professores da banca, Prof. Rômulo Alexandre e Prof. Tony Regy por terem aceitado o convite para analisar este trabalho, agradeço pelas devidas intervenções para o aperfeiçoamento desta obra, o qual entendo como de grande importância.

A todos os professores do IFPB, que são profissionais excelentes, em especial ao coordenador e professor Orlando Batista por sua grande dedicação com discentes, docentes e programas que auxiliam na manutenção e permanência do curso de Matemática. Como também os professores Salomão, Cícero, Jorge, Maxwell e outros excelentes profissionais.

Aos programas de iniciação à docência e residência pedagógica(PIBID e RP) oferecidos pelo CAPES, a disciplina de estágio supervisionado, onde fui participante e estagiário, estes incentivaram minha permanência no curso e a criação deste trabalho.

Muito obrigado à todos.

"A matemática, vista corretamente, possui não apenas verdade, mas também suprema beleza - uma beleza fria e austera, como a da escultura"

(Bertrand Arthur William Russell)

RESUMO

O presente trabalho de conclusão de curso tem como objetivo principal desenvolver o conceito de frações e suas quatro operações fundamentais por meio de abordagens aritméticas e geométricas, utilizando materiais didáticos manipuláveis e não manipuláveis, buscando aplicar esses conceitos em situações do dia a dia. O estudo destaca a importância das frações no desenvolvimento matemático dos estudantes e analisa abordagens variadas sobre o tema, identificando possíveis falhas e lacunas no seu ensino, sendo baseados em obras e falas de Cavalieri (2005), Freire (1996), Santos (2014), entre outros autores que se preocupava com a educação Matemática. Através de um breve período, na turma do 8º do Ensino Fundamental, coloco em prática a *oficina geonumérica* como forma de analisar esta hipótese e reforçar conceitos do tema e suas propícias abordagens. Esta obra conta com capítulos onde estão expostas as discussões e ideias sobre o tema, metodologia adotada durante a oficina, resultados e análise crítica sobre a proposta de pesquisa por meio de gráficos e registros de relatos.

Palavras-chave: Frações; Aritmética; Geometria; Material Didático.

ABSTRACT

The main objective of this undergraduate thesis is to develop the concept of fractions and their four fundamental operations through arithmetic and geometric approaches, using manipulative and non-manipulative teaching materials, and aiming to apply these concepts in everyday situations. The study emphasizes the importance of fractions in the mathematical development of students and analyzes various approaches to the topic, identifying possible shortcomings and gaps in its teaching. The analysis is based on the works and statements of authors such as Cavalieri (2005), Freire (1996), Santos (2014), among others who were concerned with mathematical education. Through a brief period in the 8th-grade class of Elementary School, i put into practice the *geonumeric workshop* as a way to analyze this hypothesis and reinforce concepts related to the theme and its appropriate approaches. This work consists of chapters where discussions and ideas about the theme are presented, the methodology adopted during the workshop, results, and a critical analysis of the research proposal through graphs and recorded reports.

Keywords: Fractions; Arithmetic; Geometry; Teaching Materials.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

BNCC	Base Nacional Comum Curricular
COVID-19	Corona Virus Disease - 2019
CAPES	Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior
D.G.	Desenho Geométrico
EJA	Educação de Jovens e Adultos
E.M.E.F.	Escola Municipal do Ensino Fundamental
IFPB	Instituto Federal de Educação Ciência e Tecnologia da Paraíba
M.M.C.	Menor Múltiplo Comum
M.D.C.	Maior Divisor Comum
PcD	Pessoa com deficiência
PIBID	Programa Institucional de Bolsas de Iniciação à Docência
PRP	Programa de Residência Pedagógica
SAEB	Sistema de Avaliação do Ensino Básico
UEPB	Universidade Estadual da Paraíba

LISTA DE SÍMBOLOS

$\in$	Pertence
$\forall$	Para todo
$\exists$	Existe
$\neq$	Diferente
$+$	Adição
$-$	Subtração
$\cdot$	Multiplicação
$\div$	Divisão
$\equiv$	Equivalente
$\mathbb{N}$	Conjunto dos números naturais
$\mathbb{Z}$	Conjunto dos números inteiros
$\mathbb{R}$	Conjunto dos números reais

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

Este trabalho trás como proposta de intervenção pedagógica no âmbito escolar, uma perspectiva no ensino de frações na aula de Matemática. Sendo proposto um estudo que se inicie de conceitos e registros históricos, utilizando do saber que os alunos possuem como forma de dialogo e construção gradativa do conhecimento.

A *oficina geonumérica*, intervenção no ensino de Matemática proposta na turma do 8º ano da escola Padre Simão Fileto, teve por finalidade a execução da teoria proposta, analisando a veracidade da tese que estrutura este trabalho. O uso do material didático manipulável e a utilização de figuras geométricas, são retratadas como principal forma utilizada na oficina.

Ao longo da nossa jornada de formação docente em matemática, as dificuldades de compreensão e assimilação do componente curricular dos discentes, nos leva a procurar diferentes estratégias de ensino para cada assunto em específico, sejam sequências didáticas auxiliadas pelo uso de materiais lúdicos manipuláveis, pelo resgate de exemplificações das situações cotidianas cabíveis para o momento, por "músicas" com finalidade de memorização mais efetiva, por dispositivos práticos que miniminize os cálculos e operações, entre outras formas.

Essas demandas, requerem dos docentes um preparo intensivo e adequado para lhe dar com o ensino desses jovens, onde cada um deles possuem características e saberes únicos, compreendendo o conhecimento em tempos distintos. À vista disso, todo aluno é detentor de uma idiossincrasia, consequentemente, essas trajetórias de forma isoladas não garantem ter uma generalização de um único resultado, o que torna aceitável e aconselhável a busca/criação de métodos convenientes aos discentes.

Desta forma, o principal motivo que levou-me a aprofundação nesse tema, parte da minha insatisfação na abordagem do assunto por alguns professores e comentários que chegavam aos meus ouvidos, proponho uma abordagem propicia para a aprendizagem. Tendo também contribuição das minhas experiências nas disciplinas de Estágio Supervisionado, Laboratório de Matemática e Prática do Ensino de Matemática, onde conseguir ter melhores orientações sobre a utilização dos materiais didáticos em abordagens durantes as aulas deste componente curricular.

Ademais, o fato de diversificar as aulas por meio de atividades lúdicas, possui grande ganhos para a aprendizagem, pois, quando o aluno se sente motivado e interessado para participar da aula, a sua produtividade é potencializada. Contudo, a exposição da origem e a construção do conhecimento é um fator indispensável para o ensino, conhecer mais um pouco sobre as estrategias que motivaram historicamente o avanço do saber nos proporciona entende a sua construção. Por exemplo, é comum o professor de matemática em sala de aula dizer "divisão entre frações! Repete a primeira e multiplica pelo inverso da segunda", mas acaba por muitas vezes esquecendo de expor a justificativa do método.

Dai, alguns questionamentos poderiam ser feitos, o que realmente garante a execução deste processo ser verdadeira? Porventura, se o professor explicar o processo de construção do seu argumento (demonstração), a turma conseguiria mostrar resultados melhores comparada a outra turma que não está ciente desta construção? Algo impede que a resolução seja a razão dos numeradores pela razão dos denominadores? Como ensinar frações com argumentos comprovados pela matemática desassociando métodos estereotipados e tradicionais[1]?

Refletindo sobre mudanças de concepção a cerca do que é matemática, Soares (2015, p. 15) afirma que "[E]m diferentes épocas, modificações nas concepções sobre o que é matemática, sobre seu ensino e sobre as relações externas a ela, transformam nossas hipóteses sobre os entraves de aprendizagem nessa área."

Ao analisarmos os diferentes períodos históricos da humanidade, notamos um avanço gradual do significado de "ensinar" e "ser professor", de maneira que os estudantes passaram a ser o centro da aula, para um maior engajamento, descobertas e compreensão do tema estudado. Uma vez no papel de professor de matemática, devemos explorar diferentes vertentes, para melhorar o modo de repassar determinado conhecimento, trabalhando a construção do raciocínio (lógico, dedutivo e operacional), por meio de definições, conceitos, evoluções históricas e gradativas, axiomas, demonstrações e situações reais oportunas, enaltecendo a matemática como ferramenta de uso geral e crucial na vida dos estudantes. Vale salientar que com todos esses anos de avanços tecnológicos, o professor que se recusa ao utilizar novas tecnologias no ensino, acaba por muitas vezes se tornando ultrapassado e não atrativo na visão dos alunos, contudo, a diferença entre *usar* e *utilizar* são bastantes distintas.

1.1 OBJETIVOS

Objetivo geral

Desenvolver o conceito de frações e suas quatro operações fundamentais por meio de abordagens aritméticas e geométricas, utilizando figuras manipuláveis e não-manipuláveis, buscando aplicar esses conceitos em situações do dia a dia. Assimilando, assim, conhecimentos essenciais e possibilitando uma vivência mais efetiva com a Matemática que encontrarão ao longo de sua trajetória social e educacional.

Objetivos específicos

- Apresentar um breve resgate histórico sobre as frações e seu uso na civilização egípcia antiga;

[1] Questão diretriz da pesquisa.

- Conceituar o tema de frações entrelaçando com problemas lógicos e dedutivos;
- Ensinar as 4 operações aritméticas com números fracionários, assim como fortalecer os seus conhecimentos sobre assuntos antecessores a eles;
- Utilizar a representação geométrica como diferencial no ensino deste conteúdo, com uso de softwares e desenho geométrico;
- Entrelaçar o ensino das operações dos números não exatos com a geometria e aritmética;

1.2 ESTRUTURA

O trabalho está organizado em 5 capítulos: introdução; as contribuições das frações na construção do conhecimento; a abordagem matemática no ensino de frações; *Oficina Geonumérica* e a análise e discussão dos resultados. O segundo capítulo expõe algumas dificuldades para o a construção do saber cognitivo e no ensino de frações nas aulas de Matemática, contando também com um resgate histórico. No terceiro capítulo abordamos a Matemática nos estudos das frações, além de expor formas para seu ensino permitindo a relação entre distintas maneiras de percepções relacionadas a geometria e aritmética. No quarto capítulo trazemos a exposição da metodologia através da oficina e da caracterização dos alunos envolvidos. No quinto capítulo iremos relatar de forma crítica o ensino-aprendizagem em Matemática, bem como os seus resultados, presentes nos encontros com ressalvas a algumas falas e pensamentos de alunos. Durante os encontros, trabalhamos com as seguintes metodologias: aulas expositivas, dialogadas e interativas.

2 AS CONTRIBUIÇÕES DAS FRAÇÕES NA CONSTRUÇÃO DO CONHECIMENTO

Ao longo dos séculos, o homem sempre esteve rodeado de problemas que por muitas vezes não conseguia resolver, o conhecimento que ele possuía era até então insuficiente para encontrar uma solução. A Matemática nessas circunstâncias, foi uma das áreas mais importante do saber. Seus estudos acerca de aplicações na agricultura, construção, comércio, navegação, guerras, entre outras foi crucial para que conforme o passar do tempo, novas ideias, pensamentos, conflitos, cenários e necessidades surgissem, estimulando o avanço tanto da própria Matemática como pela busca por soluções de problemas em outras áreas.

O ensino de matemática nas escolas é fruto de um processo histórico e das situações em determinada sociedade e época, que influenciaram a busca por respostas entrelaçadas com conclusões apropriadas, justificada por sequências de raciocínio lógico-dedutivos. Desta forma, para ser dado continuidade a este trabalho sobre propostas para o ensino de frações será feito um breve resgate histórico sobre os registros na civilização egípcia.

2.1 A REPERCUSSÃO MALÉFICA SOBRE SUA APRESENTAÇÃO

É perceptivo a dificuldade dos alunos em relacionar o assunto dos números inteiros ao universo "quebrado". Em minha experiência como aluno e professor em formação, uma fatia interessante dos professores de matemática demonstram certa resistência em iniciar o ensino dos números fracionários por uma maneira não tradicional (expondo apenas as táticas de representações e operacionalizações). Acabam por muitas vezes relacionando este universo infinito a somente repartições de pizzas, bolos e chocolates. Contudo, não vejo maldade em tal ato, mas percebo certa dificuldade exploratória para abandonar certos exemplos tradicionais. Possivelmente, talvez, estes atos são ocasionados pela sua formação, onde tiveram poucos momentos exploratórios.

Cavalieri (2005, p. 31) ressalta que "[N]a escola é comum ouvirmos exclamação do tipo "*nesse exercício tem frações*" quando usada em algumas atividades. Essa é uma constatação que desanima um número grande de alunos de 1º grau e até mesmo do 2º grau." É notável a preocupação por parte dos professores em questões que os envolva, geralmente é feita uma ênfase desnecessária e enfadonha. "*Turma!! preste bastante atenção pois nas questões tem frações*". No ponto de vista do alunado, ao escutar pecaminoso pronunciamento, é plausível que o aluno imagine a existência de um "monstro" na questão X de forma a tornar-la extremamente difícil, e que na verdade sua resolução não proporciona um nível conteudista fora de suas capacidades.

O que para mim agora parece ser extremamente natural e fácil, houve épocas que não podia dizer o mesmo. Houve momentos de desafios, frustrações e alegria quando me deparava com certos resultados em sala de aula. Lembro bem que minhas notas não chegaram próximas as médias anteriores, contudo, com passar do tempo comecei a perceber que essa dificuldade se tratava pelo fato de não ter sido adequadamente apresentado aos conteúdos e, com isso, não entender sua abstração e natureza que se diferi dos demais números até então estudados. Nada que um período de diálogo não conseguisse resolver.

2.2 DIFICULDADES NO ENSINO DE FRAÇÕES

Várias são as perguntas em torno da relações de ensino e aprendizagem, como podemos traçar etapas de tal forma que possibilite uma melhor compreensão, de tal maneira, que futuramente os alunos consigam usufruir o conhecimento já construído em soluções de questões com maior propriedade. Sobre como percorrer e determinar o percusso ao conhecimento Soares (2015, p. 49) fala que "[E]m termos filosóficos, esta questão que tem embaraçado pensadores de todos os tempos é colocada, em nossos dias, por vários caminhos[.]". As formas de interpretação e ensino são variadas, existe maneiras adequadas para se tratar cada assunto em sala de aula, dependendo dos grupos sociais que a eles pertençam e acartando sempre as regras da instituição do ensino.

Devemos propor atividades que possibilitem a troca de ideias que viabilizem aceitações e contestamentos, possibilitando a construção do saber por um processo de erros e acertos, não buscamos criar alunos que simplesmente memorizem o procedimento, mas sim que sejam capazes de alcançar resultados corretos através de um raciocínio lógico e bem organizado. Desejamos que, ao concluir o processo, a solução obtida seja pertinente apropriada.

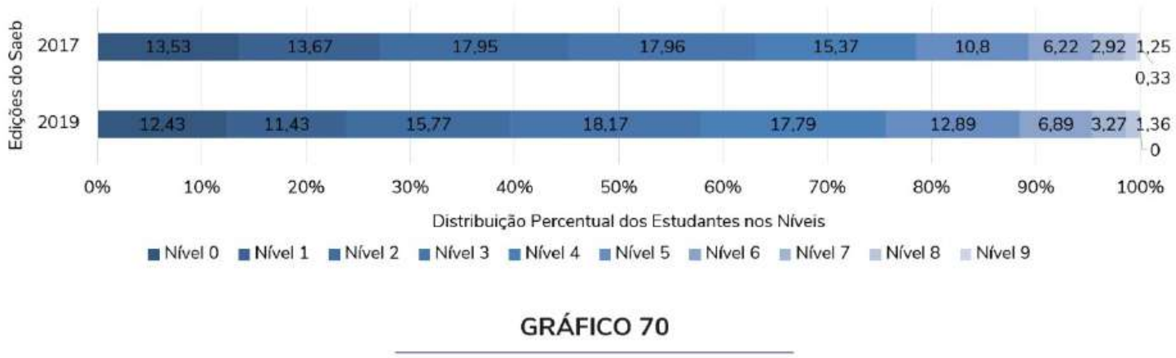
Analisando os informações e definições dos níveis do conhecimento dos alunos fornecidos pelo Sistema de Avaliação da Educação Básica (**??**), podemos observar as distintas situações do qual os nossos alunos estão situados. Realizando um recorte do nível 6, temos definidos que:

> ***"... – Reconhecer frações equivalentes. Associar um número racional, escrito por extenso, à sua representação decimal, e vice-versa. Estimar o valor da raiz quadrada de um número inteiro aproximando-o de um número racional em sua representação decimal. Resolver problema envolvendo grandezas diretamente proporcionais, com constante de proporcionalidade não inteira...."(BRASIL, 2019, p. 167)***

Visualizo este nível como adequado para detectar os alunos que já estudaram e compreenderam o suficiente sobre frações, onde conseguem lidar com as situações cotidianas que possam surgir ou usufruir de seus conceitos para apoio nos demais assunto que ainda serão explorados e necessários deste conhecimento prévio.

Em um curto espaço de tempo, os estudantes de Matemática passam a trabalhar com um grande volume de conhecimentos, e sua utilização assume carácter indispensável para o prosseguimento da temática. Contudo, com os resultados da avaliação do BRASIL (2019) é perceptivo que os alunos do ensino fundamental não encontram, em sua maioria, no nível 6 ou maior, como mostrado na Figura 1.

Figura 1 – Gráfico 70 do relatório do SAEB 2019.



Fonte: BRASIL (2019, p. 177).

Como podemos observar na Figura 1, aproximadamente 75„5% dos estudantes se encontra abaixo do *nível 6*, nos levando a crer que o empenho de ambas as partes (discentes e docentes), caso continuem estagnados na mesma forma de enxergar e operar a Matemática, suas dificuldades futuras serão expressivas e numerosas. Destacamos ainda que os dados expressos, remetem a um período antecedente à pandemia de escala mundial do *corona virus disease* (COVID-19).

As aulas posterior a este momento de pandemia, obtiveram bastantes empecilhos em suas execuções, dado ao fato dos alunos não serem devidamente apresentados aos conteúdos que sustentariam o restante de sua vida discente. Embora tenha existido aulas remotas, o ensino em um aspecto geral, foi prejudicado pela distância, que muitas vezes atrapalhava o conhecimento do docente pela realidade vivenciada por seus alunos, desconhecendo suas dificuldades tanto conteudista, como as impossibilidades sociais vivenciadas com percas de entes e acesso precário a materiais de suporte adequados para educação. Estudantes estes que pouco interagia nas aulas, não expressando suas dúvidas por vergonha ou desânimo com o que estava sendo ali exposto, ou nem sequer frequentava essas aulas, sua presença em vários momentos era escassa. Freire (1996) em seu trabalhos discuti temáticas favoráveis para solução destes tipos de situações "A reflexão crítica sobre a prática se torna uma exigência da relação Teoria/Prática sem a qual a teoria pode ir virando blablablá e a prática, ativismo."(FREIRE, 1996, p. 12), fazendo nos pensar, como podemos, aos poucos, procurar resolver esse problema?

Ao retorno das aulas presenciais, o número de alunos no Ensino Fundamental II que detém dificuldades em leitura e escrita tornasse preocupante. Tendo consciência, que mesmo em um período antecessor a pandemia, onde o ensino que possuía resultados com desempenhos discutíveis, mesmo usufruindo da proximidade entre os estudantes, onde existia um cooperação e observação da resolução de problemas, perde mais ainda credibilidade na pandemia.

Em contexto, trago como exemplo a seguinte a situação:

> *Augustinho é um aluno do sétimo ano, em suas aulas de Matemática ele já estudou sobre números naturais e negativos, agora se encontra explorando multiplicações e divisões com frações, em seus cálculos ele depara-se com um produto entre números positivos sendo menor que os fatores desta multiplicação, logo mais, realiza a razão entre números positivos e resulta em um quociente maior que estes dividendo e divisor. Augustinho exclama "porque?", o professor refaz os cálculos de forma detalhada e chega na mesma solução para chegar a uma conclusão e responder "por que é assim".*
>
> FONTE: Autor.

Entendo que esse diálogo hipotético é mais realista do que muitas pessoas possam acreditar, e traz consigo uma características bastante presente nas aulas de matemática: a não discussão dos conceitos. Devemos perceber "que ensinar não é transferir conhecimento, mas criar as possibilidades para a sua própria produção ou a sua construção." (FREIRE, 1996, p. 21).

Claro que a Matemática trás consigo abstração e formalidade, mas exitem explorações distintas que podem nos fazer chegar a generalizações que facilitem a compreensão deste saber.

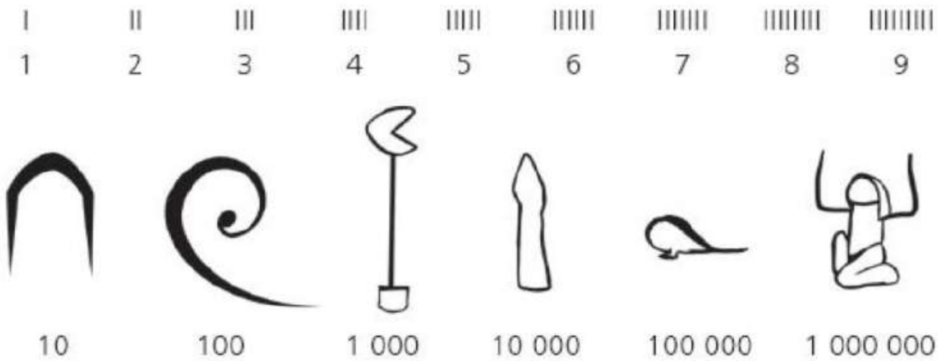
2.3 REGISTROS HISTÓRICOS SOBRE OS NÚMEROS FRACIONÁRIOS

A origem dos números surge concomitante com a necessidade da contagem de objetos e animais, o que de início eram representados pelo o uso de pedras, marcas em ossos e cordas, até o surgimento dos algarismos que conhecemos hoje. Durante o passar do tempo, a necessidade humana por avanços em suas técnicas agrícolas, comerciais, medicinais e lazer, foram de suma importância para a evolução dos cálculos, de tal forma a abranger as carências da sociedade. Na história da humanidade, podemos destacar três civilizações com papeis fundamentais no avanço dos números, os mesopotâmios, os egípcios e os babilônios (ROQUE, 2012), tratadas muitas vezes por fazer parte da tradição ocidental. Mesmo que a matemática do tempo das cavernas tenha sido pioneiras no estudo numérico, foi no Egito e na Babilônia que a fração obteve maior ênfase.

Estudiosos acreditavam que o sistema de numeração egípcio foi desenvolvido, aproximadamente, na mesma época que o sistema de numeração babilônico, por volta de 3000 a.C. (Figura 2) Caracterizado por ser um sistema decimal e aditivo (decimal pois os algarismos eram múltiplos de "10" e aditivo por ser composto pela união dos valores numéricos entre eles), mostrava-se de grande valia nos cálculos sobre demarcação de terrenos, embora possuísse desvantagem em relação a expressão de números altíssimos (ROQUE; CARVALHO, 2012).

Por volta do século XX a.C., eram utilizadas cordas com nós separados pela mesma distância para efetuar a medição. De forma que, "os estiradores de cordas"(denominação dos trabalhadores designados a esse cargo) esticavam uma corda pelo perímetro do terreno a ser medido. Porém, essas medidas muitas vezes não contabilizavam exatamente um "número inteiro", surge então a necessidade de uma nova representação para eles (SANTOS, 2014, p. 19).

Figura 2 – Sistema de numeração egípcio.



Fonte: (ROQUE; CARVALHO, 2012, p. 25).

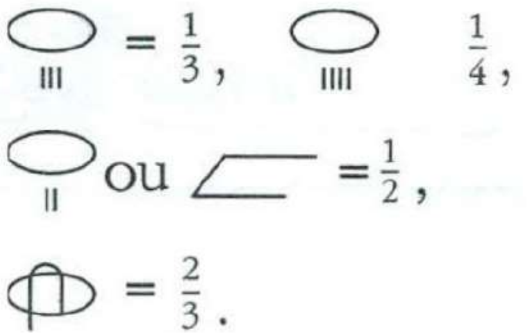
Após essa situação os egípcios criaram sua própria representação para o que seria este "número quebrado". De início, a representação fracionária dava-se por meio de uma elipse acima e um número egípcio tradicional (como mostrado na figura 3), de forma a representar uma fração unitária nos dias de hoje (numerador igual a um), posteriormente, foram criados símbolos para duas frações em específico.

> "Eles usavam um conceito que, para nós, equivale às frações unitárias, da forma $\frac{1}{n}$. Uma fração, com numerador diferente de 1 a ter uma representação no sistema egípcio era a fração $\frac{2}{3}$, e a fração $\frac{1}{2}$ era por vezes representada por um símbolo especial." (ROQUE; CARVALHO, 2012, p. 26).

Vale salientar a diferença entre o "símbolo oval egípcio" e as frações unitárias dos dias de hoje, a escrita da "elipse" sobre o algarismo representa apenas uma parte do total, o uso crescente de elipses não indicam o crescimento do numerador, contrapondo a escolha das partes habituais do uso dos denominadores.

Roque e Carvalho (2012, p. 27) ilustram um problema de fácil entendimento. Vamos pensar da seguinte forma: O senhor faraó tem 5 sacos de trigos para dividir entre 8 hebreus, como seria a repartição igualitária e correta deste problema?

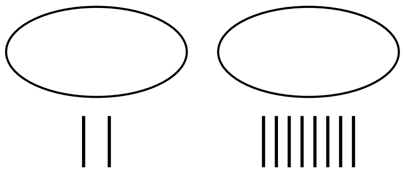
Figura 3 – Especificidades sobre frações egípcias.



Fonte: (ROQUE; CARVALHO, 2012).

Inicialmente é perceptivo que podemos repartir 4 dos sacos pela metade e entregar a cada um dos 8 hebreus, restando assim apenas 1 saco. Em seguida, é feita a repartição deste inteiro entre as 8 pessoas, totalizando assim metade de um saco mais a oitava parte de um saco.

Figura 4 – Possível representação egípcia da solução do problema dos sacos



FONTE: Autor.

A priori, este tipo de linguagem não mostra ganho operacional substancial nos dias de hoje, pois para representar boa partes dos nossos números sua escrita tornasse enfadonha, contudo, esta linguagem era suficiente para resolver os problemas enfrentados naquela época e contexto.

3 A ABORDAGEM MATEMÁTICA NO ENSINO DE FRAÇÕES

3.1 A PASSAGEM NO ENSINO DOS NÚMEROS INTEIROS AOS RACIONAIS

Como já visto em momentos anteriores, o conjunto dos números inteiros é constituídos pelos números positivos, negativos e o número nulo(zero), onde estes possuem parte decimal igual a “0”, são inteiros/exatos. Estes podem ser facilmente encontrados em situações do nosso cotiano, seja com a divulgação da temperatura de uma cidade, movimentação financeira em uma conta bancária, índice de pluviosidade para uma cidade em determinado mês, entre outras situações.

Por conseguinte, nestas situações veremos também a presença de números “quebrados”, que possuem partes decimais distintas de zero, o uso deles são de extrema importância para maior precisão e honestidade de resultados.

Figura 5 – Queda de temperatura mínima entre segunda (31) e terça-feira (1).

Queda de temperaturas

Entre 31/10 e 01/11

Município	31/10 Segunda-feira	01/11 Terça-feira	Queda
Bom Jardim da Serra\ Morro da Igreja (SC)	10,7 °C	-0,4 °C	11,1 °C
Quaraí (RS)	10,8 °C	2,3 °C	8,5 °C
São Joaquim (SC)	13,3 °C	2,7 °C	10,6 °C
Canguçu (RS)	7,9 °C	3,0 °C	4,9 °C
Bagé (RS)	8,8 °C	3,1 °C	5,7 °C
Ponta Porã (MS)	15,9 °C	6,6 °C	9,3 °C
Amambai (MS)	17,5 °C	9,0 °C	8,5 °C
General Carneiro (PR)	11,9 °C	6,7 °C	5,2 °C

INMET

FONTE: Instituto Nacional de Meteorologia (INMET, 2022).

Observando a tabela de queda de temperaturas na figura 5, encontramos medições feitas em cidades das regiões sul, sudeste e centro-oeste, nela é feita uma comparação da variação térmica nos dias 31/10[1] e 01/11. Nesta tabela, notamos a forte presença de números decimais, tomando como exemplo a cidade de Canguçu(RS) que na segunda-feira tinha registrado temperatura de $7,9°C$ e no outro dia sofreu uma queda de $4,9°C$ chegando a 3°C na terça-feira.

[1] Neste sentido, a barra que geralmente é utilizada para expressar razões, representa uma relação de dia e mês.

Agora imagine que você foi lanchar com um amigo e ao receberem a conta dividiram seu valor igualmente entre vocês, supondo que o valor da conta tenha sido R$ 23,00 para realizar a divisão igualitária do pagamento, é necessário o uso de números fragmentados.

Outra indagação que pode ser feita é a seguinte. Uma pessoa de sua família precisa tomar uma certa dosagem de um remédio ao dia, contudo, este ente apresenta efeitos colaterais por causa da medicação, o medico sugeri a redução da dosagem pela metade e caso as reações adversas persistirem um novo exame é indicado. Ao reduzir esta dosagem, o médico se refere a proporção de determinada(s) substância(s) presente(s) na fórmula química da medicação, regredindo em uma semelhante proporção estes efeitos colaterais.

Observe então as quantidades de situações pertinentes que pode ser feitas abordando alguns assuntos que podem estão ao alcance e entendimento dos discentes.

3.2 ESTRUTURANDO OS NÚMEROS QUEBRADOS

É comum relacionamos frações a repartições de objetos e figuras em parte menores de tamanhos iguais, é possível que pelo menos alguma vez você já tenha escutado ou lido em algum lugar a expressão *numa fração de segundo*, mas o que isso significa?

Nesta vertente o significado de fração assume sentido numa pequena parte do segundo, em um intervalo muito curto de tempo. Da mesma forma, esta situação é abordada nos livros didáticos adotados por várias intuições de ensino, enaltecendo este carácter representativo do tema sobre frações.

Definição 3.2.1. *(DANTE, 2012, p. 153-157) Fração é a razão entre grandezas.. Em linguagem matemática:*

$$\forall n, d \in \mathbb{N}, d \neq 0,\ F \textit{ é um número fracionário, tal que } F = \frac{n}{d}.$$

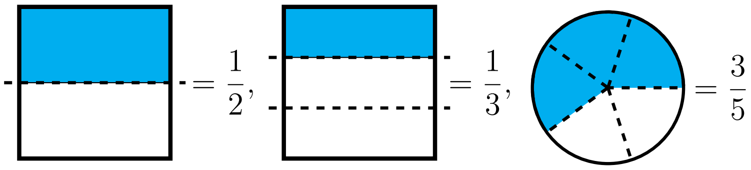
Sua representação no sistema de numeração indo-arábico tratasse de números separados por uma traço, onde chamamos de <u>numerador</u> o número natural acima do traço, que expressa a quantidades de partes selecionadas ou destacadas, e chamamos de <u>denominador</u> o número natural diferente de zero abaixo do traço, expressa a quantidade total de repartições de um determinado conjunto.

$$\frac{Numerador}{Denominador}$$

Fracionar possui o seguinte significado morfológico, fragmentar, dividir ou particionar em pequenas partes. Uma fração tanto pode ser escrita na forma $\frac{n}{d}$ como nas formas n/d ou $n \div d$, indicando que uma unidade foi dividida em d pedaços de mesmo tamanho, e dessa quantidade foram tomados n pedaços.

Ilustramos na Figura 6 a discussão sobre frações representadas pelas regiões sombreadas.

Figura 6 – Exemplos de frações como repartições de figuras em partes iguais



FONTE: Autor.

Entretanto, frações possuem significados muito mais amplos que apenas divisões. No universo probabilístico, quando calculamos determinada chance de um evento acontecer, usamos frações para representar-las. Tome como exemplo o lançamento de uma moeda comum não viciada, a probabilidade de cair coroa é 1 em 2, logo podemos representar-la como $\frac{1}{2}$, metade ou 50% de chance ao lançar a face voltada para cima ser coroa. Desta forma, notamos que a porcentagem é outra forma de representar uma fração qualquer.

Encontramos vestígios dela também presente nas representações de inteiros por inteiros, tome como exemplo a seguinte notícia "Cidade do Piauí com maior percentual de indígenas tem 1 a cada 10 habitantes" (*portal saiba mais*[2], 2023). Por uma interpretação Matemática, o significado de tal notícia pode ser expresso por uma proporção de 1 para 10, ou seja, a cada x habitantes 10% são indígenas ou $\frac{10 \cdot x}{100}$ é aproximadamente a quantidade de habitantes indígenas.

Destarte, questões diversas possibilitam sua participação em sala de aula até mesmo com exemplos no próprio ambiente.

Exemplo 3.2.1. *Em turma de 28 alunos, uma atividade é proposta para ser feita em 3 grupos com um mesmo número de integrantes e que todos participem da prática proposta, repare que um possível decisão a ser tomada é a formação de dois grupos com 9 integrantes e mais um grupo com 10 participantes, de forma a atender o critério imposto ao número de grupos.*

Em forma análoga, podemos pensar na subdivisão em 2, 4, 7 ou 14 grupos de forma a atender ao critério da quantidade igual de número de participante por grupo.

Sendo assim, um reposta numérica para esta divisão seria 9,333..., o que relacionado com a situação é inviável. Direcionando esta visão para ambas áreas, uma possível exploração, é as situações sitadas anteriormente, como possibilidades igualitárias de respostas verídicas.

É bem provável que os educandos consigam assimilar/apresentar respostas sem muitas preocupações com a aritmética por trás de sua resolutiva, embora que sejam utilizados variados saberes para estruturação de suas respostas.

[2] <https://www.portalsaibamais.com.br/cidade-do-piaui-com-maior-percentual-de-indigenas-tem-1-a-cada-10-habitantes-veja-numeros-do-ibge/>

3.2.1 Leitura, escrita e visualização

Para uma potencial aprendizagem, tanto a resolução de problemas por cálculo como a interpretação lógica de seu enunciado possuem papeis mutualmente importantes. Compreender o que foi dito para traçar a trajetória resolutiva de um problema é o passo inicial e de extrema importância. Saber o que foi dito e interpretar de forma eficaz muitas das vezes nos poupa esforços.

Diante disto, a aprendizagem de frações mediante sua ambientação e entendimento de sua escrita torna-se de carácter indispensável. Para que a sua leitura seja feita, o seu numerador é lido normalmente como o número que o representa, contudo para seu denominador vai existir duas situações:

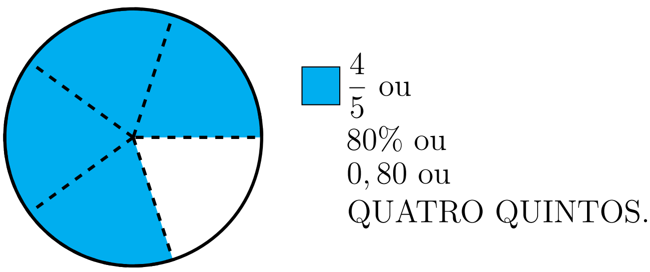
1. Denominador entre 2 e 9:
   $\frac{9}{2}$: Nove meios; $\frac{4}{3}$: Quatro terços; $\frac{3}{4}$: Três quartos; $\frac{7}{5}$: Sete quintos;

   $\frac{1}{6}$: Um sexto; $\frac{5}{7}$: Cinco sétimos; $\frac{3}{8}$: Três oitavos; $\frac{2}{9}$: Dois nonos.
2. Denominador acima de 10:

   A leitura das frações cujo denominadores são maiores que 9, recebem o acréscimo da terminação **avos**[3]. São exemplos:
   $\frac{5}{12}$: Cinco doze **avos**; $\frac{7}{16}$: Sete dezesseis **avos**; $\frac{4}{23}$: Quatro vinte e três **avos**.

Observação 3.2.1. *Nos casos de frações cujo denominadores são múltiplos de 10, possuem outra nomeação. Por exemplo, os denominadores 10, 100 e 1000 são lidos como décimo, centésimo e milésimo, respectivamente. Este conjunto de frações também são conhecidas como frações decimais.*

Figura 7 – Representações da fração quatro quintos



FONTE: Autor.

Ao referenciar uma parte de um todo, usamos uma linguagem fracionária para nos expressar. Seja por conceitos: De porcentagem, de números decimais, da representação

[3] Avos quer dizer: "Divisão em partes iguais"(Dante, 2012). Ela se origina da denominação em latim oitavos, que era escrito *oit'avos* para referir-se a fração um oitavo. Com o passar do tempo, o termo avos foi utilizada para frações com denominadores maiores que 10(dez).

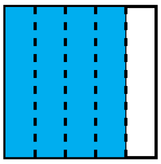
geometria, da escrita ou fala. Observe na Figura 7 quantos formas diferentes pode-se fazer referência a fração $\frac{4}{5}$.

Partindo para as classificações, temos as *frações próprias*, *impróprias* e *aparentes*, além de destacar os *números mistos*.

Frações próprias são todas aquelas cujo numerador é menor que o denominador. Por exemplo, as frações $\frac{4}{5}, \frac{6}{7}$ e $\frac{1}{2}$ são próprias. Elas representa valores menores que um total (todas estas estão compreendidas no $]0, 1[$). Estão presentes principalmente nas divisões de bens e objetos, assim como no uso das grandezas de medidas e cálculos probabilísticos. Neste grupo está situado, em minha opinião, uma das maiores dificuldades no estudo de frações.

Em carácter geométrico:

Figura 8 – Representação geométrica da fração $\frac{4}{5}$

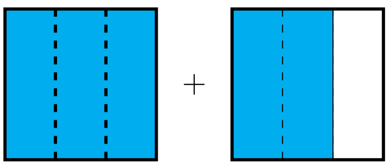


, $\frac{4}{5}$ é uma fração própria pois representa menos que o total da figura.

FONTE: Autor.

Frações impróprias são todas aquelas cujo numerador é maior que o denominador. Por exemplo, as frações $\frac{3}{2}, \frac{5}{3}$ e $\frac{10}{5}$. Elas representa valores maiores que um todo. Estas por sua vez, possui presença significativa nas representações das grandezas de medidas como: O volume; O comprimento; A área; e O tempo. Em carácter geométrico:

Figura 9 – Representação geométrica da fração $\frac{5}{3}$



, $\frac{5}{3}$ é uma fração imprópria por representar mais que um inteiro.

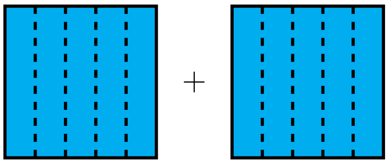
FONTE: Autor.

Dentre estas, temos os casos das frações aparentes[4], nelas os numeradores são múltiplos dos denominadores. Caso como este é o da fração $\frac{10}{5}$, ela é imprópria e aparente po representa o número natural 2, pois $10 \div 5 = 2$. Representada na Figura 10.

Outra forma de descrever frações impróprias é através dos números mistos. Número estes sendo outra representação de uma fração imprópria, onde sua parte inteira e decimal "bem evidente". No caso da fração $\frac{5}{3}$, sua representação em número misto é $1\frac{2}{3}$, indicando desta que a fração indica um inteiro mais uma parte decimal equivalente a dois terços desse mesmo inteiro, como mostrado na figura 9.

[4] "Frações aparentes são frações que representam números naturais"(DANTE, 2012, p. 159).

Figura 10 – Representação geométrica da fração $\frac{10}{5}$



, $\frac{10}{5}$ é uma fração aparente por representar exatamente uma quantidade inteira, 2 (dois).

FONTE: Autor.

3.3 OPERAÇÕES COM NÚMEROS FRACIONÁRIOS

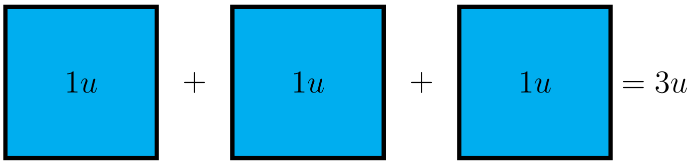
3.3.1 Adição e subtração

O que é a adição? O que significa somar dois números?

Trabalharemos a adição como a união, o acréscimo ou a junção de elementos da mesma natureza. Por exemplo, se eu tenho 3 laranjas e recebo mais duas laranjas, totalizo um total de 5 laranjas.

Exemplo 3.3.1. *Para melhor visualização da operação da adição.*[5]

Figura 11 – Operacionalização geométrica da adição: Exemplo 3.3.1



FONTE: Autor.

Quando envolvemos números inteiros na adição surge mais uma pergunta, o que seria a junção de 3 e -2?

A resposta é bem simples, quando falamos de **menos um número qualquer "x"**(refiro-me aos números negativos), estamos nos dirigindo ao **oposto** deste "x". Logo:

$$\begin{array}{ccccccccccc} 3 & + & 2 & = & 5; & & 3 & + & (-2) & = & 1; \\ (-3) & + & (-2) & = & -5; & & (-3) & + & 2 & = & -1. \end{array}$$

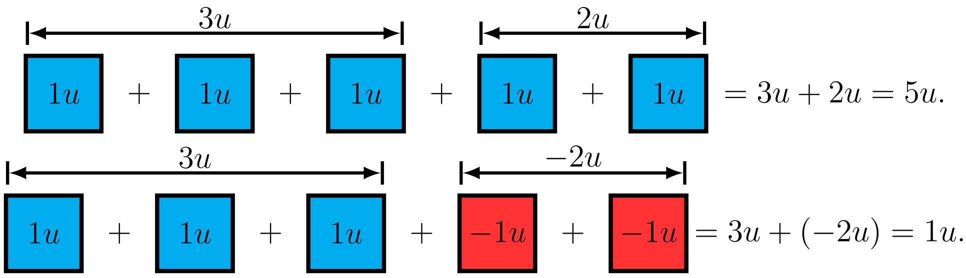
De forma geométrica, Figura 12.

Analisaremos as operações que envolve números negativos como a diferença de áreas, representada pela cor vermelha simbolizando a retirada, como mostrado na figura 12.

Direcionando esta visão para o conjunto dos números racionais. Como ocorre a adição entre números inteiros e fracionários? Em boa parte dos cálculos de agora em adiante, utilizaremos frações equivalentes, então vale ser feitas algumas observações.

[5] Definição VII.1 A unidade é aquilo segundo o que cada uma das coisas existentes é dita "uma".(Roque e Carvalho, 2012). No caso mostrado, $1u$ equivale a uma unidade, no problema totaliza 3 unidades.

Figura 12 – Noção de diferença entre números.



FONTE: Autor.

Observação 3.3.1. *A **forma irredutível** de uma fração é onde o maior divisor comum(M.D.C)*[6] *entre o numerador e o denominador resulta em 1(um), o chamado "primos entre si".*

Exemplo 3.3.2.

$$\frac{1}{2},\ mdc(1,2)=1;\quad \frac{5}{8},\ mdc(5,8)=1;\quad \frac{35}{12},\ mdc(35,12)=1.$$

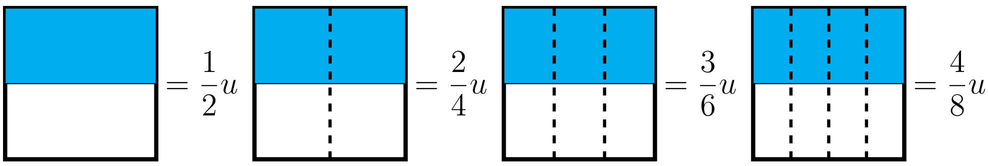
Mesmo que o numerador ou denominador não seja números primos a fração pode está em sua forma irredutível. Seu uso facilita os cálculos uma vez que trabalhamos com números "menores".

Observação 3.3.2. ***Frações equivalentes***[7] *são frações que apresenta mesmo valor numérico apesar de ser seus numeradores e denominadores serem diferentes, ela derivam de múltiplos de uma fração em forma irredutível.*

Exemplo 3.3.3. *Forma irredutível:* $\frac{1}{2}$

Frações equivalentes: $\frac{1}{2} \equiv \frac{2}{4} \equiv \frac{3}{6} \equiv \frac{4}{8} \equiv \ldots \equiv \frac{n}{2n}, \forall n \in \mathbb{N}$

Figura 13 – Frações equivalentes a um meio



Fonte: Autor.

Por meio da visualização geométrica, o processo de aprendizagem pode tornasse mais dinâmico. Vejamos algumas formas de resolver estas operações.[8]

[6] Apêndice A.
[7] Iremos denotar equivalência entre frações por $\equiv$.
[8] A partir desse momento, deixaremos implícito que a representação geométrica está correlacionada com a repartição da área total nas figuras, omitindo o termo u anteriormente utilizado.

1º Maneira: M.M.C dos denominadores(Apresentadas nos livros didáticos).

$$\frac{1}{2} + 3 = \frac{1}{2} + \frac{6}{2} = \frac{1+6}{2} = \frac{7}{2}. \tag{3.1}$$

Este método consiste no cálculo do M.M.C.[9] dos denominadores, para descoberta do denominador comum, o qual será relacionado com os múltiplos dos números usados anteriormente, e no final, ser realizada a operação da adição ou subtração.

Tomando como exemplo o cálculo 3.1: Inicialmente é identificado os denominadores do números fracionários, 2 e 1 respectivamente, logo o M.M.C entre eles é o próprio 2. Em seguida, este novo denominador é dividido pelo denominador da primeira fração e multiplicado pela numerador da mesma, resultando em 1 $(2 \div 2 \cdot 1)$, o mesmo processo é repetido com o número 3, resultando em 6 $(2 \div 1 \cdot 3)$. Temos assim, que a primeira fração permanece em sua forma $\frac{1}{2}$ e o número 3 tornasse a fração aparente $\frac{6}{2}$. Pelo fato dos novos denominadores serem iguais, é realizado a soma dos numeradores e a resposta é encontrada.

Este método está correto uma vez que trabalha com frações equivalentes e de mesma natureza (mesmo denominador), possibilitando a adição e subtração desta forma, mas perceba também que é um quanto demorado para chegar a solução final.

2º Maneira: Dispositivo Prático (Método da borboleta).

$$\frac{1}{2} + 3 = \frac{(1 \cdot 1) + (2 \cdot 3)}{2} = \frac{1+6}{2} = \frac{7}{2}. \tag{3.2}$$

Esse método tem como base a redução dos cálculos que estão presente na 1º maneira exposta. Ela consiste na multiplicação dos numeradores pelos denominadores. Utilizando como exemplo o cálculo 3.2, nela é feita a multiplicação do número 3, o qual seria a fração $\frac{3}{1}$, pelo denominador da primeira fração "2", após essa etapa é feita a respectiva operação de adição no que resulta em sete meios. Vejamos uma esquematização do processo.

$$3 \cdot 2 = 6$$

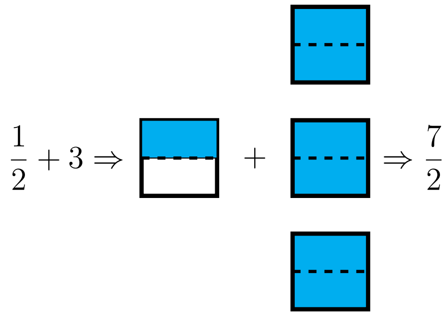
$$\frac{4}{3} - \frac{2}{9} = \frac{36 - 6}{27} = \frac{30}{27} = \frac{10}{9}$$

$$4 \cdot 9 = 36$$

A diferença acima é feito pela multiplicação do numerador da primeira e pelo denominador da segunda, o numerador da segunda pelo denominador da primeira e feita a diferença para encontrar o novo numerador. Já o novo denominador é calculado pelo produto dos denominadores, por fim é encontrada a forma irredutível.

3º Maneira: Visualização geométrica (Processo mental sugerido pelo autor).

Figura 14 – Exemplo de adição *geonumérica*



FONTE: Autor.

Proponho a visualização do abstrato, a transformação desses números tão assustadores em figuras simplórias para uma fácil compreensão. Como mostrado na Figura 14, os números são representados como figuras **iguais**, desta forma pode-se operar tudo diante da mesma natureza, relacionando $\frac{1}{2}$ a uma metade e três a seis metades "Uma metade mais seis metades é igual a sete metades ou sete meios de maneira formal."

3.3.2 Multiplicação

O que é a multiplicação? O que significa multiplicar dois números? Trabalhamos também a multiplicação de números naturais como a quantidade de interseções entre retas. Por exemplo, qual é o produto entre 3 e 4?

Uma das vertentes matemática é: $3 \cdot 4 = 3 + 3 + 3 + 3 = 4 + 4 + 4 = 12$

Visando esta vertente, temos que a multiplicação de $4 \cdot 3$ é a repetição da adição do número 3 em 4 parcelas ou a repetição da adição do número 4 em 3 parcelas[10]. Tomando a multiplicação como a adição de parcelas iguais,vejamos outros exemplos:

Exemplo 3.3.4.

$$\begin{aligned}
(2) \cdot (3) &= (2) + (2) + (2) = (3) + (3) &&= 6 \\
(-2) \cdot (3) &= (-2) + (-2) + (-2) = -2 - 2 - 2 &&= -6 \\
(2) \cdot (-3) &= (-3) + (-3) = -3 - 3 &&= -6
\end{aligned}$$

Adotando esses singelos exemplos, como uma forma intuitiva para conceituar a operação de multiplicação, temos que a mesma é derivada de um processo de sucessivas somas de um número "x" com ele mesmo.

Quando envolvemos números inteiros na multiplicação surge mais uma pergunta, sendo o procedimento utilizado nas resoluções acima (Exemplo 3.3.4) e a propriedade associativa na multiplicação validas, o que seria a repetição de 2 em -3 parcelas?

[9] Apêndice A.
[10] Dante (2012).

A resposta é bem simples, quando falamos de **menos um número qualquer "x"**, estamos nos referindo ao **oposto** deste "x". Logo:

$$(2) \cdot (-3) = -[(2) \cdot (3)] = \text{oposto de } (2 \cdot 3) = \text{oposto de } 6 = -6 \tag{3.3}$$

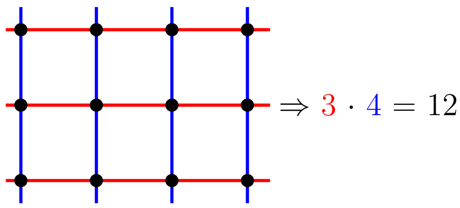
Na resolução do produto entre -2 e -3, caso você tenha imaginado em utilizar o oposto do oposto, está correto, essa multiplicação resultará de fato em $+6$, conforme mostrado na sentença (3.4).

$$(-2) \cdot (-3) = -[(2).(-3)] = \text{oposto de } (2 \cdot (-3)) = \text{oposto de } -6 = +6 = 6 \tag{3.4}$$

Uma outra forma de enxergar o produto de dois números naturais é a interseção entre retas, onde um dos fatores é simbolizado pela quantidade de retas paralelas e o outro fator representa a quantia de retas concorrentes a estas, como mostrado na Figura 15.

Observemos agora a multiplicação de números naturais como a intersecção entre retas na Figura 15.

Figura 15 – Produto entre 3 e 4 como interseção de retas



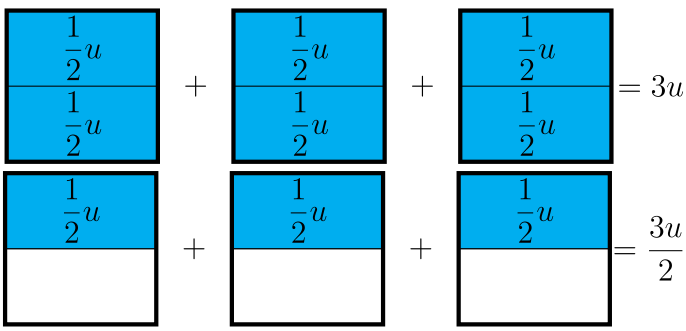
FONTE: Autor.

Direcionando esta visão para o conjunto dos números racionais. Como irá ocorre a multiplicação entre um número inteiro e um fracionário? Pela aritmética:

$$\frac{1}{2} \cdot 3 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$

Logo, posso repartir cada uma dessas partes que totalizam $3u$ ao meio.

Figura 16 – Representação geométrica do produto entre um meio e três



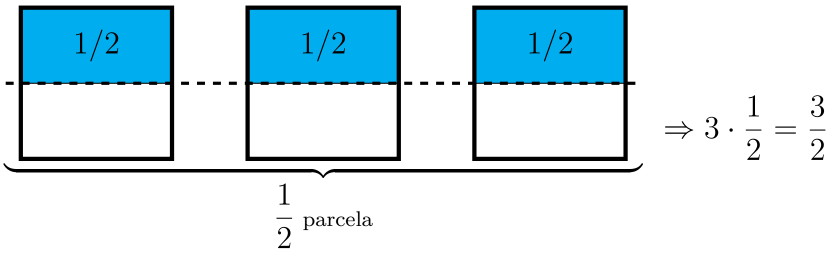
FONTE: Autor.

Contudo, em sala de aula pode surgir a seguinte pergunta: "Mas e se for $3 \cdot \frac{1}{2}$?". Por preguiça, poderia simplesmente justificar que seria o mesmo processo que o anterior, pois a multiplicação admiti propriedade comutativa. Porém, isso não é o objetivo deste trabalho, faremos então a seguinte relação:

$$\begin{cases} 3 \cdot \dfrac{1}{2} = \; Três\,parcelas\,de\,\dfrac{1}{2} = \; Três\,metades\,ou\,três\,meios & = \dfrac{3}{2}. \\ \\ \dfrac{1}{2} \cdot 3 = \; Meia\,parcela\,de\,3 = \; Metade\,de\,3 & = \dfrac{3}{2}. \end{cases}$$

Iremos representar[11] na forma exposta na figura 17.

Figura 17 – Noção de meia quantia



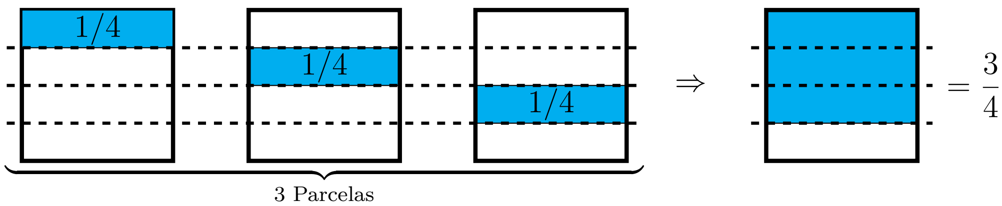
FONTE: Autor.

Observação 3.3.3. *Iremos trabalhar geometricamente frações, utilizando de sua forma unitária*[12] *multiplicada por um número qualquer inteiro:*

$$\frac{1}{n} \cdot k, \forall n, k \in \mathbb{N},\ com\ n \neq 0.$$

Exemplo 3.3.5. *A fração* $\dfrac{3}{4}$ *pode ser representada algebricamente como* $3 \cdot \dfrac{1}{4}$ *e geometricamente como mostrado na figura 18:*

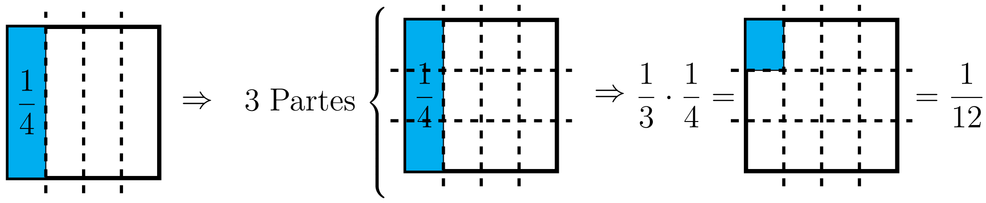
Figura 18 – Exemplo 3.3.5



FONTE: Autor.

Analisando as multiplicações feitas entre números inteiros e fracionários, por dedução percebemos somas de frações cujos denominadores são iguais, mas e as multiplicações entre frações?

Figura 19 – Solução geométrica do exemplo 3.3.6



FONTE: Autor.

Exemplo 3.3.6. *Encontre a solução de* $\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4}$*?*

Quando surge está questão, a melhor forma de encontrar a solução é justamente a relação da fala com a visualização. $\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4}$ *é a* ***terça parte*** *da* ***quarta parte*** *de um todo, ou seja, um inteiro repartido em quatro partes iguais, sendo que uma dessas partes é equivalente a* $\frac{1}{4}$ *e ao repartir uma delas em três partes iguais, obtemos três partes equivalente a um terço de um quarto, exatamente a nossa solução como mostrado na figura 19.*

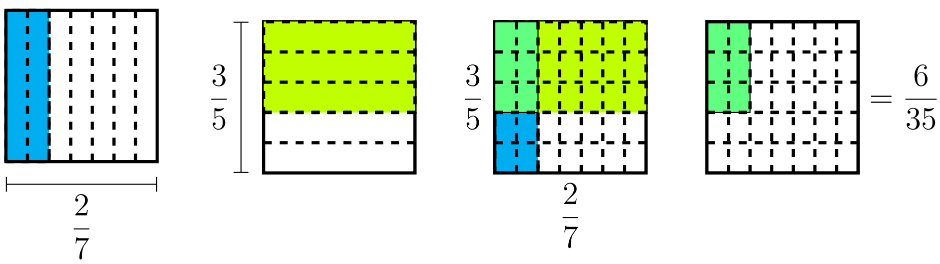
1º Maneira: Forma aritmética necessária e suficiente (Apresentadas nos livros didáticos).

$$\frac{2}{7} \cdot \frac{3}{5} = \frac{2 \cdot 6}{7 \cdot 5} = \frac{6}{35}$$

Esse método tem como base a redução dos cálculos que estão presente na 1º maneira exposta. Ela consiste na multiplicação dos numeradores pelos denominadores.

2º Maneira: Visualização geométrica (Estipulado por Almeida, 2021).

Figura 20 – Exemplo de multiplicação *geonumérica*



FONTE: Autor.

A parte que representa a interseção entre as áreas das frações é o produto das mesmas. Inicialmente se representa geometricamente umas das frações, em seguida deve ser feita a representação da outra fração sobreposta a ela, de forma com que as linhas traçadas sejam perpendiculares. Destacadas ambas as frações na Figura 20, em uma sequência de

[11] A partir deste ponto não utilizaremos mas u em todas as figuras como unidade unitária, entendemos este implicitamente entrelaçado.

[12] Forma unitária de uma fração é quando a mesma possui numerador igual a 1(um).

linhas e colunas, a área representada na interseção deste processo, é a solução geométrica do produto.

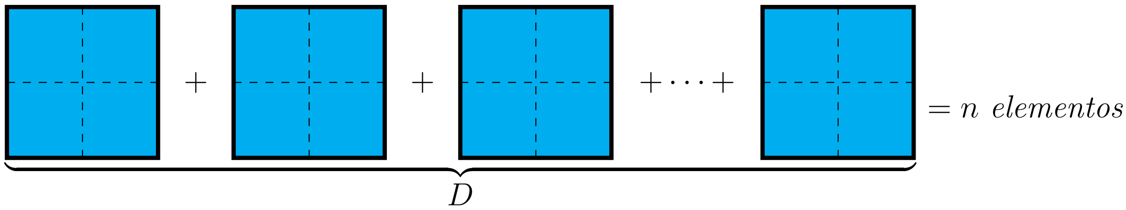
Sendo assim: $\frac{2}{7} \cdot \frac{3}{5} = \frac{6}{35}$.

3.3.3 Divisão

Iremos utilizar a seguinte definição.

Definição 3.3.1. *Divisão (D) é a quantidade partes/elementos formadoras de m grupo(s) com todos(as) os(as) n partes/elementos*[13].

Figura 21 – Conceito visual de divisão (D)

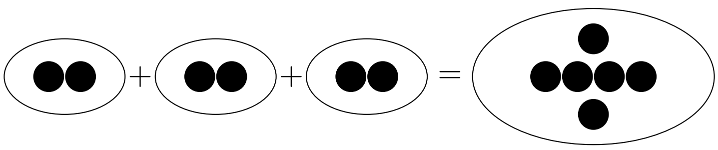


FONTE: Autor.

Exemplos 3.3.1. *Observe os seguintes itens:*

1. *6 dividido por 3 é igual a 2, pois 3 grupos de 2 elementos terá ao todo 6 elementos;*
2. *8 dividido por 4 é igual a 2, pois 4 grupos de 2 elementos terá ao todo 8 elementos;*
3. *63 dividido por 9 é igual a 7, pois 9 grupos de 7 elementos terá ao todo 63 elementos;*

Figura 22 – Possível representação do item 1 do exemplo 3.3.1



FONTE: Autor.

Pensando na divisão entre números naturais fracionários, o raciocínio segue a mesma vertente da multiplicação com pequenas observações a serem destacadas

$$\begin{cases} 3 \div \frac{1}{2} = & Três\, dividido\, por\, \frac{1}{2} = & Seis\, metades\, formam\, três\, inteiros & = & 6. \\ \frac{1}{2} \div 3 = & Meia\, parcela\, dividida\, por\, 3 = & Terça\, parte\, de\, meia\, parcela & = & \frac{1}{6}. \end{cases}$$

[13] Almeida (2021).

Surge nesse momento um dos maiores monstros do ensino das frações, saber, a associação na mente do aluno que ao término de qualquer divisão, o quociente deverá ser menor que o dividendo. Contudo, o quociente pode sim resultar em uma quantia maior que o dividendo/numerador, desde que o divisor/denominador seja uma fração própria, e por existir esses casos os estudantes questionam-se sobre a veracidade de seu raciocínio.

Tomando como exemplo o denominador de uma razão sendo $\frac{1}{2}$, para a maioria dos alunos, é estipulado por eles que o número está se particionando ao meio, contudo não é isto que está sendo proposto de fato.

Interligando com a ideia de agrupamento já estipulada, será mostrado algumas formas de resolução dessa operação.

1º Maneira: Dispositivo Prático (Apresentado nos livros didáticos).

$$3 \div \frac{1}{2} = \frac{3}{1} \div \frac{1}{2} = \frac{3}{1} \cdot \frac{2}{1} = \frac{6}{1} = 6. \tag{3.5}$$

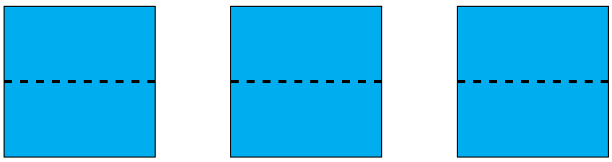
O famoso algoritmo que está fixada na memória dos alunos, e por muitas vezes não esquecemos nos fala que, *divisão de fração - repete a primeira e multiplica pelo inverso da segunda*. Pelo exemplo, repito a fração que seria o dividendo[14] e multiplico pelo inverso multiplicativo da fração que representa o divisor[15].

Repare bem que ao realizarmos este produto, podemos está operando por um número inferior a um, e para este intervalo real de zero a um, o produto pode resultar em algum elemento inferior aos fatores. Caso semelhante acontecido em nossos estudos foi com a manipulação dos numerais negativos, onde o produto também poderia ser modesto.

2º Maneira: Divisão por Conceitos de Agrupamentos (Estipulado por Almeida, 2021).

O problema proposto é o seguinte: $3 \div \frac{1}{2}$, sua solução é a quantidade de agrupamentos de $\frac{1}{2}$ quem cabem em 3. Dessa forma:

Figura 23 – Exemplo de divisão geométrica



FONTE: Autor.

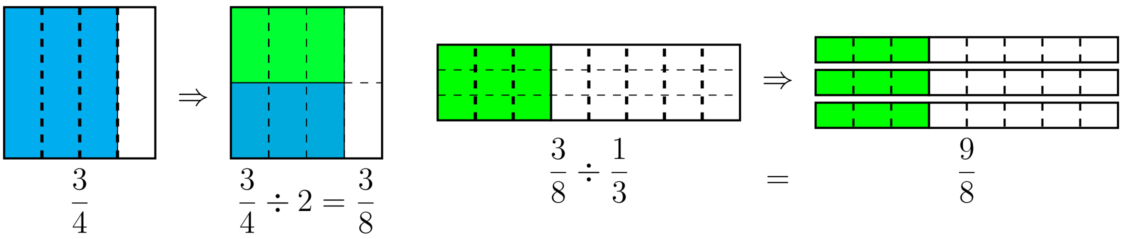
[14] Fração que é enunciada no inicio da problemática, no exemplo $\frac{3}{1}$.

[15] Última fração falada, no exemplo $\frac{1}{2}$.

Nesta forma de resolução, utilizo o conceito de pertencimento entre as áreas de figuras, no problema proposto o resultado de $3 \div \frac{1}{2}$ resulta em 6, no qual esse 6 simboliza a quantidade de partes equivalentes a $\frac{1}{2}$, necessárias para formação de 3 inteiros. Observe outro exemplo, desta vez entre a divisão de $\frac{3}{4}$ por $\frac{2}{3}$.

3º Maneira: Divisão *geonumérica* (Estipulada pelo autor).

Figura 24 – Exemplo de divisão *geonumérica*



FONTE: Autor.

Nesta maneira, a realização da divisão por divisor sendo um número natural y, iremos considerar a y parte do dividendo. E a divisão por um divisor sendo um número representado por uma fração unitária $\frac{1}{z}$, iremos interpretar como z cortes (como uma tesoura) que origine novos inteiros, e ao final do processo deve ser somado o valor dessas novas frações.

Observando a divisão de $\frac{3}{4}$ na Figura 24, temos inicialmente que $\frac{3}{4} \div 2$ pode ser representado como a *meia parte*(duas partes no qual seleciono sempre uma) de $\frac{3}{4}$ totalizando $\frac{3}{8}$. Após este processo, este resultado é dividido por $\frac{1}{3}$, onde origina três novas representações para um inteiro, portanto a soma dessas novas frações resulta nesta razão $\frac{9}{8}$.

Sendo assim: $\frac{3}{4} \div \frac{2}{3} = \frac{9}{8}$;

Mas o que garante esta sequência de operações?

Demonstração. Provemos que dados $a, b, c, d \in \mathbb{N}^*$ então $\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \left(\frac{a}{b} \div c\right) \div \frac{1}{d}$

Pelas propriedades associativas e distributivas, podemos reescreve-lhas.

$$\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{\frac{a}{b}}{\left(c \cdot \frac{1}{d}\right)} = \frac{\frac{a}{b}}{c} \cdot \frac{1}{\frac{1}{d}} = \frac{\frac{a}{b}}{c} \cdot \left(\frac{1}{1} \cdot \frac{d}{1}\right) = \frac{\frac{a}{b}}{c} \cdot d$$

Note então, que podemos reescrever-lo,

$$\left(\frac{a}{b} \div c\right) \div \frac{1}{d} \tag{3.6}$$

■

4 METODOLOGIA: A OFICINA GEONUMÉRICA

Esta pesquisa se originou, como já mostrada na Introdução, dos alardes minuciosos provocados por professores aos alunos, pelo grau de dificuldade que serão encontrados por estes diante dos conceitos algébricos e visualizações das operações matemáticas comparadas com situações reais, envolvendo números fracionários no decorrer da vida estudantil.

A *Oficina Geonumérica* foi desenvolvida durante um breve período na turma do oitavo ano, da Escola do Ensino Fundamental e Médio(E.M.E.F.M.) Padre Simão Fileto na Cidade de Cubati, Paraíba, com o objetivo de reforçar os conhecimentos dos alunos e realizar uma tentativa de exposição "diferenciada" sobre o mesmo.

Implementamos a pesquisa de carácter qualitativo para a turma, em uma sequência de 8 encontros[1], que duraram 16 aulas, onde teve por finalidade estimular e propôr uma visão focalizada na interpretação de seus cálculos, bem como, nas perspectivas geométricas, com o auxilio do D.G. (Desenho Geométrico), *Softwares* e dispositivos práticos. Além de investigar as causas que ocasionam as dificuldades a longo e curto prazo sobre problemas envolvendo frações.

Os assuntos abordados durante este intervalo de tempo foram: Frações equivalentes, próprias, impróprias e aparentes; Fração unitária; Número misto e inverso de um número; Adição, subtração, multiplicação e divisão com frações; Introdução ao D.G., aos conceitos e propriedades de conjuntos.

4.1 DESCRIÇÃO DA ESCOLA

Figura 25 – E.M.E.F.M. Padre Simão Fileto

FONTE: Autor.

[1] Identificados no Cronograma da oficina geonumérica, Apêndice B, posteriormente alterado para adequasse a turma, por sugestão da professora regente, Apêndice C.

A *Oficina Geonumérica* foi colocada em prática na Escola Municipal de Ensino Fundamental e Médio Padre Simão Fileto, foi criada em 1972 e está localizada na cidade de Cubati-PB, na Rua Padre Apolônio S/N. A única escola da cidade que disponibiliza séries do Fundamental II. Possuí 600 alunos em média, tem 12 professores efetivos e 8 contratados, 4 coordenadores pedagógicos, uma psicóloga e uma assistente social.

O local usufrui dos seguintes recursos tecnológicos: aparelho de DVD, quatro impressoras, dois projetores multimídia, duas TVs, um aparelho de som e dois computadores na secretaria. Além disso, dez computadores no laboratório de informática e acesso a internet via Wi-fi.

A instituição oferece o ensino para o Fundamental II nos turnos manhã, tarde e noite, ofertado pelo programa EJA (Educação de Jovens e Adultos), cíclos III e IV no turno da noite.

A escolha dessa escola em particular para o prosseguimento da oficina, deu-se em decorrência de minhas experiências como discente do Ensino Fundamental II, e como professor estagiário.

4.2 DESCRIÇÃO DA TURMA

A turma do *oitavo ano b* possuía 26 alunos regulamente matriculados, dos quais, 17 eram do sexo masculino e 9 do sexo feminino, a uma faixa etária de 13 à 15 anos. Destes apenas 23 alunos frequentaram a oficina.

A turma apresentava, 4 alunos com dificuldades em leitura e escrita de textos, que frequentavam aulas de apoio. as questões que apresentavam enunciado superior a duas linhas ou que não possuía figuras, eram desmotivadoras e chatas para eles solucionarem. Mesmo entendendo a situação deles, não optei por inserir apenas questões diretas em minhas atividades, a leitura e interpretação de textos, bem como situações problematizadas, são de extrema importância para a execução de direitos sociais e exposição de ideias, antes de resolver as questões eu ditava-as em alto e bom som, além de fornecer possíveis raciocínios a serem utilizados em sua solução.

A sala contava com alunos com necessidades específicas, entre eles, estudantes que frequentavam as aulas de reforço[2]. Dentre esses alunos, havia a presença de 2 alunos com deficiências, PcD's[3], a professora regente fez-me orientações específicas de como proceder minhas aulas e forneceu suporte para o que eu necessitasse durante minha estadia.

[2] As aulas de reforços na instituição era dedicada para as disciplinas de Matemática e Língua Portuguesa. Os alunos a frequentavam em um horário paralelo ao das aulas regulares onde consolidavam princípios fundamentais de Matemática e linguagem..

[3] Pessoa com Deficiência.

4.3 DESCRIÇÃO DA PROFESSORA

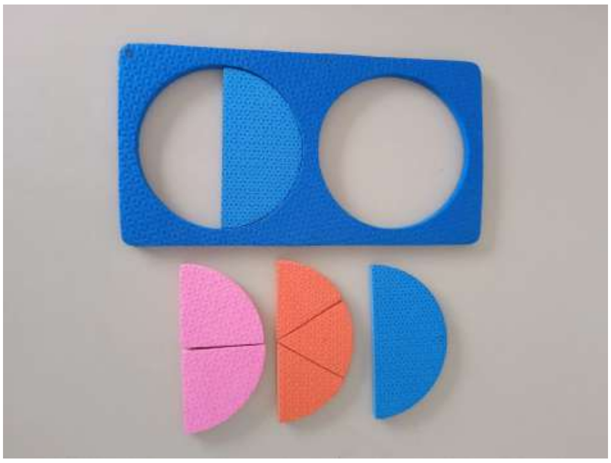
Formada em Matemática Plena no ano de 2014 pela Universidade Estadual da Paraíba(UEPB), possuidora de 11 anos no magistério, professora contratada na Escola Padre Simão Fileto, desde o ano de 2013, onde trabalha com turmas do Ensino Fundamental II, além de ser professora regente da turma onde a oficina foi realizada. Participou de forma ativa e passiva desse trabalho, uma vez que seu Trabalho de Conclusão de Curso (SANTOS, 2014) contribuiu significativamente para a construção dessa pesquisa.

Demonstrou características de excelências profissionais para sua função na área, possuidora de domínio de conteúdo e de classe, buscou sempre o melhor jeito de ensinar a classe de forma que todos conseguissem compreender o assunto. É evidente o respeito mútuo da turma com ela. Sua metodologia consistia na alternância entre o assunto exposto no quadro com respectivos exemplos, e se dirigia à carteira dos discentes e tentava retirar suas dúvidas um por um. Além disso, utilizava do lúdico para mostrar o assunto que seria trabalhado quando possível.

Lida com muita paciência os seus alunos, tendo uma didática digna de elogios e uma rotina curricular adequada para cada bimestre. Seus “desafios” partem da elaboração de aulas que contemplem todos na turma, inclusive aqueles que frequentam as aulas de reforço, onde procura encontrar uma forma de ensinar que contribua a evolução gradativa dos seus alunos.

4.4 O DISCO DE FRAÇÕES

Figura 26 – Material lúdico: Disco de frações representando $\frac{2}{4}, \frac{3}{6}$ e $\frac{1}{2}$



FONTE: Autor.

O material lúdico utilizado na oficina foi o disco de frações. Fui apresentado pela primeira vez a este material didático de manipulação durante o meu estágio na instituição de ensino, implementei ele até a primeira metade dos encontros[4] como ferramenta no ensino de frações.

Como já destacados em estudos da área, trago este material didático manipulável com forma de compreensão da importância de seu uso e papel para o ensino-aprendizagem da Matemática, como uma outra forma de exploração conteudista, mas com objetivos apropriados e associados ao tema.

Além disso, Lorenzato (2021) como defensor deste material, enaltece em seus estudos o papel do professor de Matemática na mediação da aprendizagem através da utilização destes materiais, bem como o conhecimento por trás de suas implementações, tanto no ambiente da sala de aula como o próprio laboratório de Matemática, um fator indispensável na formação dos professores.

Foi trabalhado tanto as classificações dos tipos de frações como adição e subtração destas, por meio de equivalência de frações, peças eram sobrepostas de forma a relacionar diferentes frações com suas respectivas formas equivalentes. Dentre o material encontrava-se peças de tamanhos distintos, em que sua área total era dado por um disco particionadas em partes de tamanhos iguais e de modelos variados. Estava presente nesse material, frações de um mesmo molde de um círculo, dez tamanhos diferentes, um pedaço (o próprio círculo) até 10 pedaços de mesmas proporções.

Para o utilização do material didático, foi feita a divisão em grupos com 5 integrantes, onde foi entregue duas cartelas preenchidas com diferentes representações de frações. Durante as aulas eram apresentados questionamentos, onde eles deviam buscar formas de solucionar estas perguntas com as peças que lhe foram entregues, caso suas

4.5 DESCRIÇÃO DAS AULAS

4.5.1 1º Encontro

Foi feita uma apresentação geral para a turma sobre o cronograma e os objetivos, do trabalho a ser desenvolvido, assim como, a exposição da justificativa de está justamente nessa turma desenvolvendo essa dinâmica. Boa parte da turma me confrontaram com perguntas que diziam a respeito da sequência de aulas sendo de jogos ou material lúdico.

Após esse momento, foi feita a avaliação diagnóstica[5] com a turma para saber o nível de conhecimento deles sobre o tema, eles demonstrarem confusos acerca de bastante dúvidas sobre o assunto, questões que envolviam contextualizações de situações levaram o surgimento de perguntas, como a feita pelo aluno C:

> *Professor! Nessa questão três . . . é pra eu fazer o que? É pra eu dividir ou subtrair ou multiplicar? . . . Nessa c . . . é pra deixar conta? [. . .] e nessa 5,*

[4] Do 2º ao 4º encontro.
[5] Apêndice D.

como eu faço?

Exclamações como essas e as respostas dadas pelo alunos nas avaliações, levam a acreditar que o pensamento dedutivo e o raciocínio lógico ainda podem ser trabalhados com mais frequência durante as aulas, questões que envolvam mais interpretações tornam sua presença importante.

Após todos terem entregue as avaliações, a sequência da aula ocorreu de forma dialogada, onde foi feita uma conceituação sobre hipóteses deles por possíveis significados das frações. Além disso, foi feita uma exposição de traços históricos com ênfase no Egito e situações que tiveram significativa importância para a construção desses números.

Figura 27 – 1º Encontro

FONTE: Autor.

4.5.2 2º Encontro

Foi feito o estudo sobre tipos e classificações de frações - próprias, impróprias, aparentes e números mistos - através do material representativo circular em pequenos grupos. A metodologia nesse dia, ficou dividida entre o uso das formas geométricas na interpretação do conteúdo juntamente com os cálculos aritméticos, fornecendo ao assunto maior engajamento e curiosidade por parte da turma. O trabalho coletivo forneceu a eles estímulo de relações sociais, em forma de apoio entre os grupos, aumentando o companheirismo e incentivando discussões sobre o tema, auxiliando mais ainda a compreensão do assunto.

Entre essas discussões em um grupo teve o caso de um aluno não querer participar mais de sua equipe, e solicitou fazer o restante das atividades sozinhos e não ouve impedimento por minha parte.

Durante o decorrer da aula, percebi que a visão que eles até então detinham estava associada a fração própria, menciono isso pois para a grande maioria, fração "tem que ser algo menor", quando divido algum objeto ou quantia "tem que resultar em algo menor".

Durante o estudo de frações equivalentes, foi sugerido aos alunos para sobreporem as figuras como forma de verificação dos cálculos, fazendo com que eles chegassem a sua própria conclusão sobre a significação de fração equivalentes. Observe o relato da aluna C.

> *Então fração equivalente não depende do número de pedaços, porque tem que dar o mesmo tamanho.*

Esse foi um argumento interessante no qual busquei incentivar-los a chegar! Claro que frações não se arremetem apenas a tamanhos, mas a conceituação realizada, era um dos objetivos propostos para aquela aula.

Figura 28 – 2º Encontro

FONTE: Autor.

4.5.3 3º Encontro

Através de exposição oral e auxílio do material manipulável, o ensino da operações de adição e subtração, assim como a compreensão escrita e conceitual do *dispositivo prático da borboleta*, ocorreu de forma com que os alunos interagissem de forma ativa propiciando a participação de todos, embora que uma significante parcela da turma apresentou certa dificuldade na compreensão visual das operações. O complemento da explicação de forma oral como também escrita, foi crucial para compreensão da solução dos problemas expostos em sala de aula.

A dificuldade de percepção apresentadas por eles, ocorreu pelo fato do desentendimento com a definição exposta sobre números mistos. Exemplificando, considere que o enunciado de uma questão peça para determinar por desenho um número misto, eles escolhia um desenho na maioria das vezes particionados em dois e o dividiam novamente, para eles números mistos eram “a junção de frações distintas. Momento esse que foi resolvido posteriormente com a ajuda dos próprios colegas.

Figura 29 – 3º Encontro

FONTE: Autor.

4.5.4 4º Encontro

Este encontro teve por finalidade o processo de recapitulação da teoria estudada, como revisão dos assuntos vistos nos dias anteriores durante a oficina. Este momento foi dedicado para reforçar ideias, refletir saberes e consolidar as técnicas aprendidas, resolvendo tanto questões objetivas com argumentações e cálculos matemáticos, como também, para dialogar questões contextualizadas e problemas do cotidiano.

Foi cedido uma parte do tempo para que a professora conseguisse realizar uma atividade de reforço com os estudantes.

Figura 30 – 4º Encontro

FONTE: Autor.

4.5.5 5º Encontro

Aula expositiva com uso do computador e TV para reprodução de slides, contando como auxilio na visualização de figuras elaboradas em *software*. Os alunos não demonstraram tanta dificuldade para relacionar a interseção das figuras com a operação de multiplicação. Após mais um tempo de explicação sobre esta operação entre frações, foi repassado um execício sobre multiplicação de fração para ser feito, com finalidade de reforçar o que foi exposto, assimilando o cálculo ao desenho geométrico e situações problematizadas, justamente questões presentes na avaliação diagnóstica.

Diferente do meu último encontro com eles, neste dia comecei a notar menos interesse na metodologia utilizada, mas, a busca em resolver questões sobre assunto aumentou. Afirmou a aluna "B".

> *Tá bom professor. Coloca só as questões que a gente faz. Precisa explicar mais não!*

Nessa situação pensei em duas hipóteses! Ou a minha metodologia aplicada na oficina estava tediosa e eles não se sentiam mais a vontade em participar da pesquisa, ou, minhas questões estavam encorajando-os a resolver uma maior quantidade por conta de seu nível. Tentei dialogar com eles para entender o motivo de minha desconfiança e buscar uma forma de ajudar-los! Contudo a resposta que recebi e notei da parte deles foi apenas que *a semana não foi boa* (era uma quinta-feira).

Embora que eles realizassem a operação corretamente, surgia desconfianças sobre a veracidade de seus resultados, por em alguns casos a solução de uma multiplicação resultar em número menor do que os numeradores e denominadores. Pela visualização do processo de construção geométrica, o resultado era plausível em relação ao procedimento, em outras palavras os alunos tinham mais facilidade de aceitar o resultado pelo desenho da operação.

Figura 31 – 5º Encontro

FONTE: Autor.

4.5.6 6º Encontro

A aula foi expositiva, com uso do computador e TV para reprodução de slides, contando com auxilio na visualização de figuras elaboradas em *software*. Os discentes demonstraram certa dificuldade para relacionar as figuras com a operação de divisão. Dentre esta situação, destaco a fala da aluna "B", em cinco minutos de explicação.

> *"Como assim isso é isso, ..., como eu posso chegar nisso? Eu não sei fazer isso não!"*

Após explicação sobre a visualização da divisão entre frações, foi repassada uma atividade para ser feita e reforçar o algoritmo de divisão.

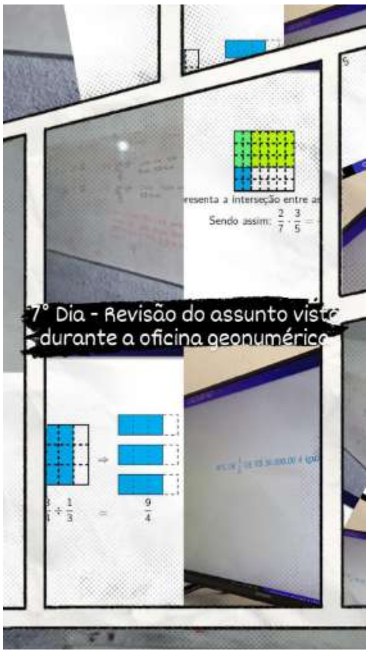
Embora que eles realizassem a operação corretamente, surgia desconfianças sobre a veracidade de seus resultados, por em alguns casos a solução de uma divisão resultar em número maior do que os denominadores e numeradores. Pela visualização do processo de construção geométrica, o resultado era plausível em relação ao procedimento, em outras palavras os alunos tinham mais facilidade de aceitar o resultado pelo desenho da operação.

Figura 32 – 6º Encontro

FONTE: Autor.

4.5.7 7º Encontro

Figura 33 – 7º Encontro



FONTE: Autor.

Penúltimo encontro com a turma, a aula foi direcionada para resolução de questões e retiradas de dúvidas, sobre o que foi discutido e mostrado durante a oficina. Também foi destacada a correção de questões trabalhadas durante este período. Boa parte dos alunos pareciam nervosos e concentrados na aula, enquanto a outra parcela da turma não demonstravam tanto interesse com as discussões e participação durante a mesma.

4.5.8 8º Encontro

Último dia da *oficina geonumérica*, foi feita uma avaliação somativa[6] com a turma, de questões com um nível mais alto em comparação com a avaliação diagnóstica e me despedi da turma.

Os alunos mostravam-se estarem confusos e um pouco impacientes quanto a resolução das questões durante a avaliação, após seu término, suas respostas foram discutidas. Após o encerramento das atividades, ouve uma saudosa despedida e agradecimento a turma e professora regente, pelo espaço, carinho e atenção.

Figura 34 – 8º Encontro

FONTE: Autor.

4.6 DIFICULDADES ENCONTRADAS

Durante a oficina percebi dificuldades nos alunos em três das quatro operações básicas (subtração, multiplicação e divisão). Vale salientar que, esta turma cursou o 5º(quinto) e 6º(sexto) ano de forma remota, onde o ensino infelizmente não conseguiu seguir no mesmo nível do presencial.

O fato de alguns alunos não dominarem essas operações, não devem ser explorados como justificativa para redução de esforços, uma vez no papel de educador, devemos nos

[6] Apêndice E.

dedicar a explorar o máximo de técnicas e metodologias que viabilizem o ensino para eles, em tamanha dedicação se possível for, que se esgote as maneiras para construir conceitos e noções na cabeça dos alunos, de mesma forma como a professora Maria José esforçasse a cada dia com cada um de seus alunos, mesmo que signifique mais trabalho para ela, pois tem em mente, que os seus frutos serão igualmente proporcionais.

Ademais, devemos ter consciência que o processo de ensino aprendizagem não se resume apenas ao professor. Caso o aluno não se permita aprender[7], dificilmente o docente irar conseguir exercer o seu papel profissional no ramo da educação, e o aluno ficará "amarrado" a uma ideia retrograda de que o saber necessário não tratasse do que está sendo apresentado, deixando as aulas e falas do professor em inércia.

[7] Não escute os conselhos dos professores, muito menos exercite posteriormente o conhecimento apresentado em sala de aula.

5 ANÁLISE E DISCUSSÃO DOS RESULTADOS

5.1 ANÁLISE DAS AVALIAÇÕES E HABILIDADES CONTEMPLADAS

Durante a oficina, percebi as relações de convivência dos discentes, no início eles se mostravam muito amigos para conversar sobre assuntos que não eram diretamente relacionados aos estudos. Busquei trazer discussões sobre os assuntos da disciplina com temas que eles gostassem e adequados para o ambiente, essa forma sutil um efeito benéfico ao longo da primeira metade dos encontros, uma grande parcela da turma se mostravam engajados na participação das atividades propostas, pequenos grupos se formavam para oferecer auxílio uns aos outros.

Após esta primeira metade das atividades, o engajamento diminuiu um pouco, embora que sempre houvesse a participação nas aulas dos estudantes, eles apresentavam um cansaço por conta de todas as demais disciplinas na grade escolar e por se tratar de um período próximo ao final do ano letivo.

No inicio e ao término da *oficina geonumérica*, realizei duas atividades[1] com níveis de dificuldade distintos para aferir as mudanças do desempenho da turma como um todo e dos alunos individualmente, buscando proporcionar ao leitor uma análise otimizada da eficácia do método, esta avaliação não influenciou nas demais informações qualitativas acerca, do comportamento, da participação, dos debates e da execução de ações coletivas.

Na avaliação diagnóstica, tentei averiguar o nível de conhecimento e entender um pouco do raciocínio dos alunos em questões problematizadas por situações contextualizadas e questões direcionadas ao aspecto aritmético. Nesse primeiro momento a avaliação contou com a presença de questões sobre representação fracionárias de figuras fracionadas, equivalência de frações, divisão e conceitos entrelaçadas, operacionalização e interpretações de situações. Um total de 22 estudantes realizaram a avaliação.

Para ilustrar os resultados obtidos na avaliação diagnóstica, elaborei um gráfico que retrata a média do desempenho dos alunos como um todo, onde seu cálculo foi expresso pelo número de cada classe[2] dividido pelo total de questões, uma **média de valores**, o quantitativo de questões que eram contempladas por cada classe.

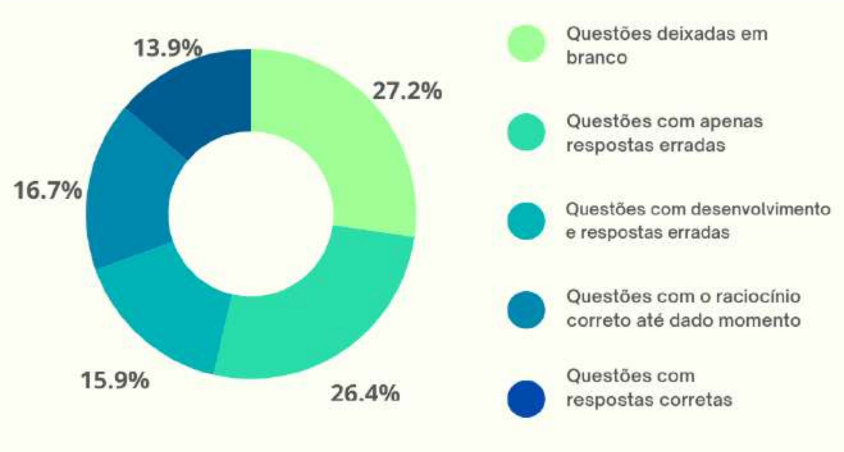
A classe de tom mais claro, verde claro, representa a quantidade de questões deixadas em branco. A classe posterior representa a quantidade de respostas diretas e incorretas, sem qualquer descrição do caminho trilhado. Em seguida temos a classe dada pela quantidade de respostas incorretas cujo o caminho trilhado foi registrado. Em seguida a

[1] Avaliação diagnóstica: Ocorreu no inicio da primeira aula, como proposta de base estatística nas demais atividades a serem desenvolvidas.
Avaliação somativa: Ocorreu ao término da oficina, com finalidade de análise de resultados e comparação dos desempenhos dos estudantes.

[2] As “classes” representa a quantidade de questões atendidas por categoria.

classe que representa a quantidade de questões onde os alunos acertaram até certo ponto o raciocínio e/ou a resposta antecedente[3]. Por fim a classe em tom mais escuro, azul escuro, representando a quantidade de questões assinaladas e calculadas corretamente, como mostrado na Figura 35.

Figura 35 – Média do desempenho dos alunos na avaliação diagnóstica



FONTE: Autor.

Pelas respostas apresentadas na avaliação diagnóstica podemos levantar algumas discussões. O número de questões deixadas em branco, atingiu um percentual elevado 27,3%, esse fato pode ter sido ocasionado por medo em se tratar do meu primeiro encontro com eles e de cara uma avaliação, além disso, solicitei a eles que fizessem com calma, pois caso não conseguissem acertar muitas questões não seriam prejudicados em suas notas na disciplina. Este percentual também pode está relacionado ao fato de quanto tempo faz que eles estudaram aquele assunto[4], eles poderiam está "enferrujados", contudo, tive a preocupação de levar questões que não dependesse de apenas um assunto, mas uma conceituação do tema explorado, bem como uma lógica dedutiva de um nível razoável. Minha visão até então sobre a avaliação, era de adequada e apropriada para uma turma do 8º ano responder e conseguir um desempenho ponderado, uma taxa de 40% das respostas corretas.

Outrossim, a quantidade de problemas solucionados com registro escrito pelos alunos na avaliação diagnóstica foi inferior a 50%. Os fatores que influenciaram esse dado, dar-se ao fato que boa parte das questões não despertaram o interesse neles, a maneira que foi abordada e apresentada, não foi cativante. Inclusive, o fato delas não estarem de maneira acessível em suas recordações influenciaram diretamente em seu desempenho, levando em

[3] Por exemplo, questões que pedia para encontrar a forma irredutível de determinada fração, onde deveria ser encontrada a fração que representa, para depois ser calculada a sua forma irredutível. Os alunos encontrava a fração mas não calculava ou errava a forma irredutível. Maneira semelhante foi utilizada nas questões com mais de uma alternativa.

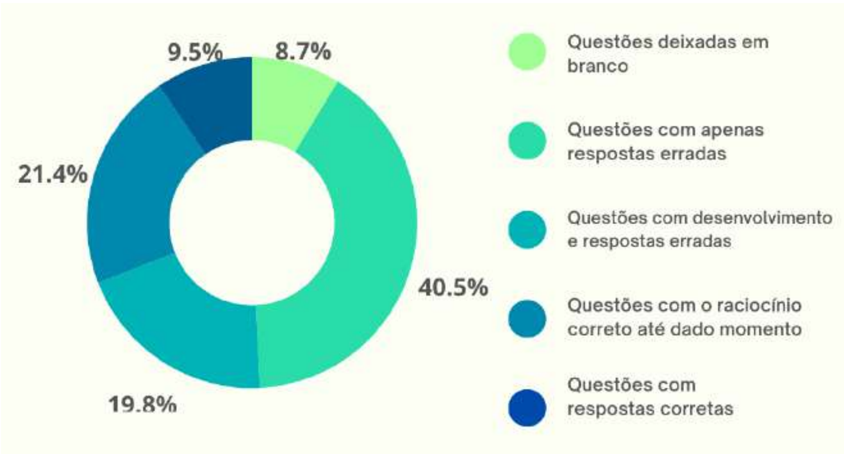
[4] As questões envolvendo apenas operacionalização com frações nessa atividade era cerca de 16,7%, 1 em 6.

consideração que os estudos na turma estava direcionado para propriedades de triângulos (último assunto ministrado pela professora antes de minha chegada). Vale destacar, que este gráfico representa a média das questões resolvidas pela turma, não implicando no mesmo desempenho de todos.

Após os setes primeiros encontros da oficina, com discussões e problemáticas em torno deste universo (conjunto), foi realizada a avaliação somativa, onde constatou as mudanças na turma referente especificamente na elaboração de estratégias nas resoluções de problemas pertinentes ao tema de frações, durante a prática metodológica em relação as respostas fornecidas no teste, e o seu desenvolvimento em relações sociais.

Para ilustrar os resultados obtidos na avaliação somativa, elaborei um gráfico que retrata a média do desempenho dos alunos como um todo, onde seu cálculo foi expresso pelo número de cada classe[5] dividido pelo total de questões, uma **média de valores**, o quantitativo de questões que eram contempladas por cada classe. Sendo retratado com mesmo significados para cada tom de cor das classes, como mostrado na Figura 36.

Figura 36 – Média do desempenho da turma na resolução da avaliação somativa



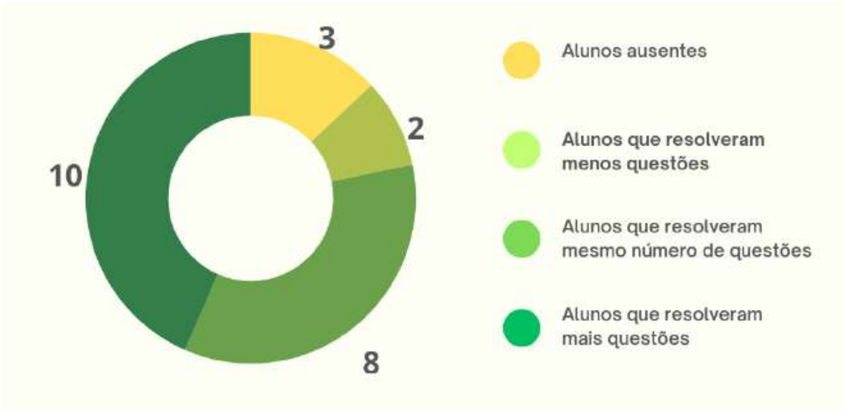
FONTE: Autor.

Pelas respostas apresentadas na avaliação somativa representadas na Figura 36, dois fatos detém a atenção do leitor; a quantidade de abstenções foi reduzida, os alunos buscaram resolver mais questões em comparação a primeira avaliação; a quantidade de respostas corretas da turma diminuíram, esta situação deteve influência dos níveis das questões, ao optar em realizar uma atividade que demanda conhecimentos e processos lógicos numa maior quantia, os alunos situam-se igualmente propícios aos erros. O percentual de erros aumentou nesta classe - como já especificado anteriormente sobre a segunda classe encontrasse o quantitativo de questões que tiveram como solução direta, respostas errôneas sem quaisquer registros do raciocínio utilizado - este número sofreu influência das questões de múltipla escolha, onde os alunos aparentaram solucionar-las pelo palpite com base estética (*chute*).

[5] As “classes” representa a quantidade de questões atendidas por categoria.

Ademais, a quantidade de problemas solucionados com registro escrito pelos alunos na avaliação somativa foi maior que 50%. Os fatores que influenciaram esse desfecho, pode ser atribuído ao aumento da segurança para resolvê-los, com as aulas ministradas e ideias mais fáceis para recordação, o domínio de conteúdo e técnicas de soluções levaram eles a buscar solucionar integralmente a avaliação. Observe o desempenho individual dos alunos na Figura 37.

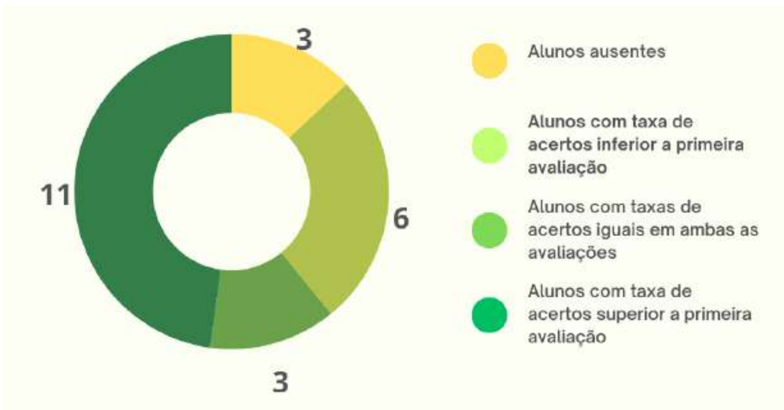
Figura 37 – Desempenho individual do quantitativo questões solucionadas



FONTE: Autor.

Fazendo uma análise quantitativa do desempenho individual dos estudantes, tendo como base a diferença de rendimentos em ambas avaliações, é constatada a melhora significativa em elaboração de estrategias que viabilizem o acerto. A apuração por resultados quantitativos mostrou-se que a execução da *oficina geonumérica* contribui para este avanço significativo no rendimento em relações as notas.

Figura 38 – Relação da quantidade de questões solucionadas corretamente



FONTE: Autor.

Na Figura 38 é apresentado a diferença de rendimento dos alunos, considerando o desempenho deles, onde o saber conteudista foi exposto por intermédio das avaliações diagnóstica e somativa, como forma de comparação das prováveis notas que lhe seriam atribuídos.

As questões presente na segunda avaliação explicitarem nível superior a primeira atividade, o retrospecto mostrou-se favorável. Uma grande parcela da turma (19 alunos) apresentaram um avanço satisfatório em relação ao saber cientifico puro matemático que antes eles mantinham. Conforme mostrado na Figura 38, a oficina conseguiu atingir "quase a metade" da turma, tendo em vista os alunos faltosos em um dos dias dedicados às avaliações, impossibilitando mostrar o avanço dentre eles.

As questões presentes nas avaliações, buscavam atender um conhecimento muitas vezes dormente na maioria dos alunos. Quando determinado assunto é exposto o professor insisti nas resoluções de questões simples, nada que necessite de um conhecimento anterior a este. Contudo busquei trazer questões que explorasse mais de uma maneira de solução, para com que eles conseguissem elaborar suas próprias estratégias nas resoluções dos problemas.

Tendo como focos: resolver e elaborar problemas que envolvam as ideias de múltiplo e divisor; compreender, comparar e ordenar frações; reconhecer que os números racionais positivos podem ser expressos nas formas fracionária; utilizar, na resolução de problemas, a associação entre razão e fração; comparar e ordenar frações associadas às ideias de partes de inteiros; entre outras maneiras expostas e organizadas no Apêndice H.

5.2 ANÁLISE DA *OFICINA GEONUMÉRICA* POR OUTRO PONTO DE VISTA

Durante os encontros a turma conseguir contribuir para a construção de um diferente ponto de vista, embora a professora regente seja uma excelente profissional, o enriquecimento educacional dar-se ao fato das distintas percepções do mundo que os rodeia, quanto mais diferentes são as opiniões apresentadas para os alunos, maiores as possibilidades de tomadas das decisões futura com consciência de seus respectivos frutos.

> "[...] o conhecimento é uma grande teia, uma grande rede de significações. Os nós são os conceitos, as noções, as ideias, os significados; os fios que compõem os nós são as relações que estabelecemos entre algo - ou um significado que se constrói - e o resto do mundo. Iniciar essa teia não constitui - nunca constituiu um problema escolar: todos os alunos já chegam à escola com uma prototeia de significações, engendrada pelo domínio da língua em sua forma oral." (MACHADO, 2004, p. 17)

O conhecimento referido, tratasse principalmente das distintas formas que ele é apresentado para o os discentes dentro e fora da sala de aula. Muitas vezes os estudantes trazem do seu meio social o mesmo conhecimento que é visto em sala de aula mas com uma abordagem diferente.

Ao término dos encontros, foi feito um breve levantamento sobre o trabalho desenvolvido, com finalidade de fornecer aos leitores desta obra ferramentas auxiliares e de possíveis correções a serem feitas e pensadas.

Questionamentos propostos

1. *Você acha que aprendeu?*

2. *O que você achou das aulas?*

3. *Se você acha que não aprendeu, qual foi o motivo?*

Analisando especificamente algumas repostas[6] e desempenho que chamaram minha atenção, faço a exposição de forma com que o leitor consiga retirar suas próprias conclusões sobre a metodologia adotada.

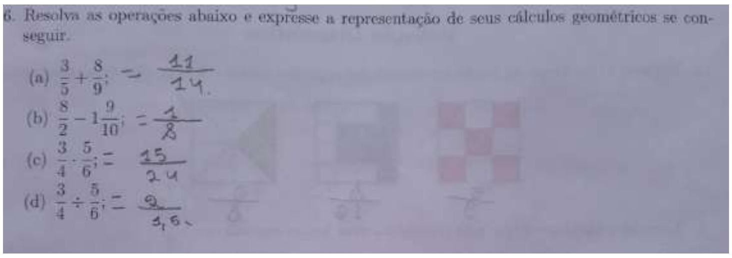
Iniciando a análise pela aluna "A", ele apresentou uma queda de desempenho em relação a primeira atividade, entretanto suas notas foram uma das melhores em sua turma. Participava de forma discreta das aulas, gostava de ficar mais tempo sozinha na aula, em outros momentos ficava com seu grupo executando as atividades propostas. Não apresentava comportamento rebelde, sempre foi muito educada durante minha presença em sala de aula. Em relação a primeira atividade ela escreveu a seguinte mensagem:[7]

OOO povinha dificio viu chão beijo ♡

Apesar de não estar satisfeita com seu desempenho na avaliação, conseguiu recordar informações que facilitaram a resolução das demais questões. Sua opinião sobre os questionamentos propostos estão na Figura 43.

A aluna "B", participava ativamente das aulas, ficando a todo tempo em seu trio executando as atividades propostas e dialogando durante a aula, sempre muito atenta às discussões, não apresentava comportamento rebelde, sempre foi muito educada durante minha presença em sala de aula. Embora a quantidade de acertos na avaliação somativa tivesse sido menor que a diagnóstica, em comparação com as respostas fornecidas nas avaliações, foi evidente as mudanças como mostrado nas Figuras 39 e 40, onde ela conseguiu compreender o algoritmo das operações, mas esqueceu como operava-se números mistos, contudo sua solução foi excelente.

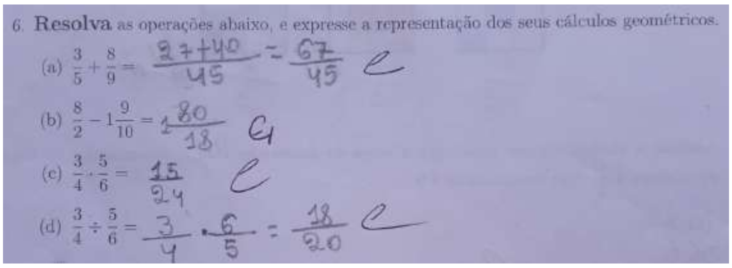
Figura 39 – Solução da questão 6 na avaliação diagnóstica feita pela aluna B



Fonte: Autor.

[6] Respostas dos alunos aos questionamentos propostos se encontram no Apêndice F.
[7] Encontrasse também no Apêndice G.

Figura 40 – Solução da questão 6 na avaliação somativa feita pela aluna B


6. **Resolva** as operações abaixo, e expresse a representação dos seus cálculos geométricos.

(a) $\frac{3}{5}+\frac{8}{9}=\frac{27+40}{45}=\frac{67}{45}$ C

(b) $\frac{8}{2}-1\frac{9}{10}=2\frac{80}{18}$ C

(c) $\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}=\frac{15}{24}$ C

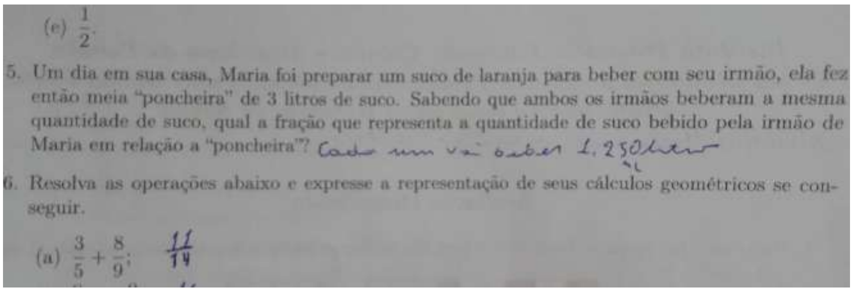
(d) $\frac{3}{4}\div\frac{5}{6}=\frac{3}{4}\cdot\frac{6}{5}=\frac{18}{20}$ C

Fonte: Autor.

Sua nota foi uma das melhores da turma e sua opinião está registrada na Figura 44

O aluno "C" cooperava parcialmente das aulas, gostava de sentar na ultima fileira e debater questões com a turma, embora pouco se tomava iniciativa de se pronunciar, contudo proseava bastante com os amigos ocasionando na perca do raciocínio nas resoluções das questões. O exemplo disso está a quinta questão da avaliação diagnóstica, onde ele percebeu que bastava-se dividir por dois duas vezes a quantidade da *poncheira* que se poderia chegar ao resultado, contudo ele dividiu metade da metade e acrescentou ao resultado, como mostrado na Figura 41.

Figura 41 – Solução da questão 5 na avaliação diagnóstica feita pela aluno C


(e) $\frac{1}{2}$.

5. Um dia em sua casa, Maria foi preparar um suco de laranja para beber com seu irmão, ela fez então meia "poncheira" de 3 litros de suco. Sabendo que ambos os irmãos beberam a mesma quantidade de suco, qual a fração que representa a quantidade de suco bebido pela irmão de Maria em relação a "poncheira"? Cada um vai beber 1,250 litro

6. Resolva as operações abaixo e expresse a representação de seus cálculos geométricos se conseguir.

(a) $\frac{3}{5}+\frac{8}{9}$; $\frac{11}{14}$

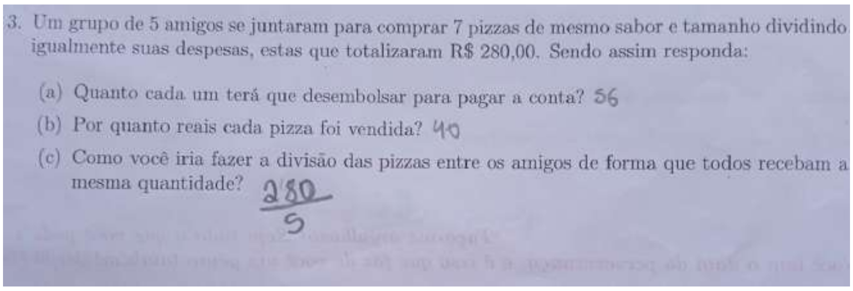
Fonte: Autor.

Não chegou a apresentar comportamento rebelde, sempre muito calmo e tímido, sua opinião sobre os questionamentos propostos estão na Figura 45

A aluna "D", participava ativamente das aulas, ficando a todo tempo em seu trio executando as atividades propostas e dialogando durante a aula, sempre muito atenta as palavras ditas. Mostrava seu ponto de vista e expressava suas opiniões, dadas as questões com um contexto intrínseco debatidas em sala, embora que suas respostas não estivessem sempre corretas, os seus erros nunca impediram de continuar tentando (como exposto na Figura 42). Ela apresentou significativo aumento de desempenho constatado pela avaliação somativa, sua opinião sobre os questionamentos propostos estão na Figura 46.

Os registros dos cálculos encontrasse em uma material a parte. O registro das soluções finais foram feitas coerente com as presentes na folha de rascunho.

Figura 42 – Solução da questão 3 na avaliação diagnóstica feita pela aluna D



3. Um grupo de 5 amigos se juntaram para comprar 7 pizzas de mesmo sabor e tamanho dividindo igualmente suas despesas, estas que totalizaram R$ 280,00. Sendo assim responda:

(a) Quanto cada um terá que desembolsar para pagar a conta? 56

(b) Por quanto reais cada pizza foi vendida? 40

(c) Como você iria fazer a divisão das pizzas entre os amigos de forma que todos recebam a mesma quantidade? $\frac{280}{5}$

Fonte: Autor.

Foi solicitado a opinião da professora regente da turma sobre a oficina como um todo por um pequeno questionário.

1. *Qual sua opinião sobre os encontros, abordagens, questionamento e dinâmica?*
2. *Caso você volte a lecionar esse mesmo assunto futuramente, utilizaria as ideias e conceitos abordados durante a oficina? Se sim, faria alterações? Quais?*

Professora do 8º “B” em resposta a questão 1:

> *As aulas foram bastante dinâmicas, foram usados alguns recursos para dinamizar, como slides, material disco de frações. Demonstra muita propriedade no que ensina, bastante didático, mim auxiliou bastante e tenho certeza que seu trabalho gerou muitos frutos e como consequência, a aprendizagem dos alunos.*

Professora do 8º “B” em resposta a 2:

> *Utilizaria as metodologias que o mesmo usou, pois propicia aos alunos uma aprendizagem diferente, que não seja o uso de quadro e pincel.*

As respostas fornecidas pela professora, mostra satisfação tanto pelas atividades desenvolvidas como a metodologia adotada durante os encontros. Sendo aprovada por sua parte a forma de discussão em cada dia inicialmente exposto no cronograma da oficina, além de fazer discretas alterações e recomendações em sua prática.

6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Durante os dias que antecederam a execução desse trabalho em sala de aula, fiquei preocupado por seus resultados e muito mais pelas expectativas que tinham sido criadas por mim, pensando sobre a possibilidade dessa oficina não conseguir realmente atender as demandas da turma e não ser uma provável ferramenta para outros profissionais e pessoais.

O objetivo ao iniciar essa pesquisa, era propor uma sequência didática para o ensino de frações que facilitasse o enfrentamento das situações problemáticas ocasionada por suas abstrações e fugas do senso comum[1]. Percebo o quanto estava errado ao esquecer a principal peça no quebra-cabeça da sala de aula, o aluno. Cada estudante possui suas próprias características, pensamentos, tempo de aprendizagem e maneiras de conseguirem interpretar cada assunto de uma forma diferente.

Quando conhecemos o ambiente em que estamos e o publico no qual nós iremos trabalhar, estratégias especificas resultarão em melhores efeitos que comparadas com outras, que por sua vez em uma outra turma poderá ser mais eficaz a essa, fazendo com que mesmo danos a educação ocasionado por períodos conturbados não se tornem permanentes.

Devemos sempre está atentos ao conhecimento que nossos alunos trazem consigo, assim como defendido por Machado (2004) e Locke (2019), com suas teorias sobre o aluno não ser um tabua rasa, mas as suas experiências e percepções sensoriais desempenhavam um papel de grande significado no avanço de seu conhecimento

Após adaptações dos meus objetivos, fiquei ciente que os resultados esperados poderiam não ser alcançados, uma vez no papel de professor o mais desejado prêmio não é que os nossos alunos consigam reproduzir o que está sendo exposto, mas sim que consiga elaborar processos que viabilizem os acertos e miniminize o erro, utilizando o saber adquirido como ferramenta para enfrentamento das possíveis problemáticas futuras.

Durante este período com a turma, conceituamos problemas lógicos oportunos, onde através de discussões e trabalho em equipe, muitas das vezes os alunos conseguiram resolver as questões propostas de formas criativas e escritas. Existia uma certa dificuldade em passar para o papel as soluções que eles encontraram, mas este fato foi contornado aos poucos através da prática e revisões.

Exploramos diferentes formas de assimilação das operações aritméticas com frações, utilizando recursos variados como tentativa de contemplar vertentes que possibilitem o aprendizado dos alunos. Com o uso de dispositivos práticos, desenho geométrico, material manipulável, *slides* e trabalho em grupos conseguimos fazer com que mais de 70% dos alunos que se mantiveram presentes e participativos na oficina, apresentassem resultados melhores dos quais foram retratados na avaliação diagnóstica.

[1] Caso ocasionado, como antes já exposto sobre a multiplicação e divisão das frações próprias.

Por conseguinte, a conexão entre o desempenho dos alunos e a implementação prática das instruções permitiu que o projeto atingisse os objetivos propostos pela pesquisa. Isso se manifestou como uma oportunidade para abordar conteúdos e intervir no processo durante a aprendizagem em sala de aula.

Portanto, embora não seja o foco central dessa pesquisa, acreditamos que a execução e avaliação do processo de aprendizagem por formas distintas cativam de positivamente a participação nos entrelaces do saber cientifico dos discentes, sendo elemento crucial para uma análise mais aprofundada, não sendo fruto apenas deste trabalho, mas também como parte nas realizações de estudos futuros desta área. Essas práticas oferecem a chance de averiguar a importância de determinada proposta metodológica, tornando possível a verificação ou negação das hipóteses sob consideração.

REFERÊNCIAS

ALMEIDA, S. P. d. *Matemática Essencial*. [S.l.: s.n.], 2021.

ARMELLA, L. M.; WALDEGG, G. Construtivismo e educaçao matemática. *Educación matemática*, v. 4, n. 2, p. 7–15, 1992.

BOYER, C. B.; MERZBACH, U. C. *História da matemática*. [S.l.]: Editora Blucher, 2019.

BRASIL. *BASE NACIONAL COMUM CURRICULAR EDUCAÇÃO É A BASE*. 2018. Disponível em : <http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC_EI_EF_110518_versaofinal_site.pdf>. Último acesso em: 17 de Novembro de 2023.

______. *Relatório SAEB 2019 Matemática*. 2019. Disponível em : <https://www.gov.br/inep/pt-br/areas-de-atuacao/avaliacao-e-exames-educacionais/saeb/resultados>. Último acesso em: 10 de Julho de 2023.

CAVALIERI, L. O ensino das frações. *Monografia, ano de*, 2005.

D'AMBROSIO, U. *Educação Matemática: da teoria à prática*. [S.l.]: Papirus Editora, 2007.

DANTE, L. R. *Projeto Teláris: Matemática*. [S.l.]: Editora Ática, 2012.

FREIRE, P. *Pedagogia da autonomia: saberes necessários à prática educativa*. [S.l.]: Paz e Terra, 1996.

LOCKE, J. *Carta sobre a tolerância*. [S.l.]: hedra, 2011.

______. *Segundo tratado sobre o governo civil e outros escritos*. [S.l.]: BOD GmbH DE, 2019.

LORENZATO, S. *O laboratório de ensino de matemática na formação de professores*. [S.l.]: Autores Associados, 2021.

MACHADO, A. R. A formação de professores como lócus de construção de conhecimentos científicos. *Revista da Anpoll*, v. 1, n. 17, 2004.

ROQUE, T. *História da Matemática–Uma visão crítica, desfazendo mitos e lendas*. [S.l.]: Zahar, 2012.

ROQUE, T.; CARVALHO, J. B. P. de. *Tópicos de história da matemática*. [S.l.]: Sociedade Brasileira de Matemática, 2012.

SANTANNA, N. F. P. Práticas pedagógicas para o ensino de frações objetivando a introdução à álgebra. *Trabalho de conclusão de Curso (Mestrado)*, 2008.

SANTOS, M. J. B. S. d. O ensino e aprendizagem das frações utilizando materiais concretos. *Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação em Matemática)-Universidade Estadual da Paraíba, Campina Grande, 47f*, 2014.

SOARES, L. H. A dialética entre o concreto e o abstrato na construção do conhecimento matemático. Universidade Federal da Paraíba, 2015.

APÊNDICE A – DEFINIÇÃO DE M.D.C. E M.M.C.

Definições e Exemplos[1]

Definição A.0.1. *O Máximo Divisor Comum (M.D.C.) de dois ou mais números naturais é o maior dos divisores comuns desses números.*

Exemplo A.0.1. *Observe o máximo divisor comum entre 24 e 15,* $mdc(24, 25)$ *e entre 18 e 15,* $mdc(18, 25)$*.*

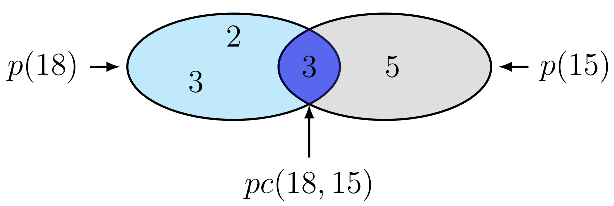
$$\begin{array}{r|l} 24,\ 15 & 2 \\ 12,\ 15 & 2 \\ 6,\ 15 & 2 \\ 3,\ 15 & 3 \\ 1,\ 5 & 5 \\ 1,\ 1 & /\ mdc(24,15) = 3. \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 18,\ 15 & 2 \\ 9,\ 15 & 3 \\ 3,\ 5 & 3 \\ 1,\ 5 & 5 \\ 1,\ 1 & /\ mdc(18,15) = 3. \end{array}$$

Definição A.0.2. *O Mínimo Múltiplo Comum (M.M.C.) de dois ou nais números é o menor número, exceto zero, que é múltiplo desses números.*

Exemplo A.0.2. *Observe o mínimo múltiplo comum entre 24 e 15,* $mmc(24, 25)$ *e entre 18 e 15,* $mmc(18, 25)$*.*

$$\begin{array}{r|l} 24,\ 15 & 2 \\ 12,\ 15 & 2 \\ 6,\ 15 & 2 \\ 3,\ 15 & 3 \\ 1,\ 5 & 5 \\ 1,\ 1 & /\ mmc(24,15) = 2^3 \cdot 3 \cdot 5 = 120. \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 18,\ 15 & 2 \\ 9,\ 15 & 3 \\ 3,\ 5 & 3 \\ 1,\ 5 & 5 \\ 1,\ 1 & /\ mdc(18,15) = 2 \cdot 3^2 \cdot 5 = 90. \end{array}$$

Podemos visualizar como relações de conjuntos.



$$\begin{array}{rcccrcl} p(18) \bigcup p(15) & = & \{2,3,3,5\} & \Rightarrow & mmc(18,15) & = & 90 \\ p(18) \bigcap p(15) & = & \{3\} & \Rightarrow & mdc(18,15) & = & 3 \end{array}$$

$pc(18, 15)$ significa "primos comuns de 18 e 15", analogamente, $p(18)$ e $p(15)$ significa "primos formadores de 18" e "primos formadores 15" respectivamente.

[1] (DANTE, 2012, p. 137-143)

APÊNDICE B – CRONOGRAMA INICIAL

OFICINA GEONUMÉRICA

CRONOGRAMA

1º Dia

Apresentação do projeto e discussões com situações cotidianas e introdução do tema a ser estudado. (Apresentação do carácter geométrico, Basicamente o 3.1.).

Inicio com minha apresentação (Quem sou, porque estou lá, minha pesquisa/oficina), logo em seguida faço a aplicação de uma avaliação diagnostica.
Após término desta avaliação levanto os seguintes questionários: O que vocês entendem quando falo em frações? O que é uma fração? Para que elas servem? Desta forma proponho construir um dialogo entre todos para ser formado um pré-conceito acerca do assunto. Irei expor situações onde envolve frações sem adiantamento de percurso.
Assunto:
Construção de conceitos fracionários.

2º Dia

Viagem no tempo, estudo de frações no egito -talvez babilonia- exposição, argumentação e resolução de questões em equipes.

De onde surgiu as primeiras noções de frações?
Exposição histórica do avanço dos cálculos e escritas de frações, com um enfoque maior na história egípcia.
Após este momento, irei perdi para ser feitas equipes e resolverem perguntas que irei enunciar para a turma questionamentos sobre aplicações para que eles possam criar estrategias de solucionar estas questões.
Assuntos:
História das frações no Egito; Noções de cálculos fracionários; Raciocínio lógico e cálculo dedutivo.

3º Dia

Formalização do assunto sobre frações. (uso do material fracionário circular)

Será iniciado a apresentação formal de fração com sua notação em algarismo indo-arábicos, notações e representações algébricas, geométricas e aritméticas.
Assuntos:
Definição, representação geométrica e exemplos de frações;
Diferentes formas das noções fracionárias;
Frações próprias, impróprias e números mistos.

4º dia

Final da ambientação, execução e término do 3.2. Cabendo revisão geral.

Possa ser que não seja necessário este 4º dia.

5° Dia

Capitulo 3.3.1 explicações e resoluções de exemplos. Utilização das formas geométricas.

Ensino das operações de adição e subtração com o material fracionário.
Assuntos:
Forma irredutível de uma fração;
Frações equivalentes;
Adição e subtração de frações.

6º Dia

Continuação do capitulo 3.3.1, resolvendo questões em grupos.

Continuação da aula passada e resolução de questões problemas em grupos. Poderão contar com o uso do material fracionário circular.

7º Dia

Capítulo 3.3.2 explicações e resoluções de exemplos. Utilização de desenhos geométricos.

Ensino das operações de multiplicação com o desenho geométrico.
Assuntos:
Conceituação de figuras envolvendo multiplicação;
Conceitos de conjuntos;
Multiplicação de frações.

8º Dia

Continuação do capitulo 3.3.2, resolvendo questões em grupos.

Continuação da aula passada e resolução de questões problemas em grupos. Poderão utilizar o desenho geométrico de forma auxiliar se necessário.

9º Dia

Capítulo 3.3.3 explicações e resoluções de exemplos. Utilização de desenhos geométricos.

Ensino das operações de divisão com o desenho geométrico.
Assuntos:
Conceituação de figuras envolvendo divisão;
Conceitos de conjuntos;
Divisão de frações.

10º Dia

Continuação do capitulo 3.3.3, resolvendo questões em grupos.

Continuação da aula passada e resolução de questões problemas em grupos. Poderão utilizar o desenho geométrico de forma auxiliar se necessário.

11º Dia

Avaliação escrita e despedida.

APÊNDICE C – CRONOGRAMA ALTERADO

OFICINA GEONUMÉRICA

CRONOGRAMA

1º Dia

Apresentação do projeto e discussões com situações cotidianas e introdução do tema a ser estudado. (Apresentação do carácter geométrico, Basicamente o 3.1.).

Inicio com minha apresentação (Quem sou, porque estou lá, minha pesquisa/oficina), logo em seguida faço a aplicação de uma avaliação diagnostica.
Após término desta avaliação levanto os seguintes questionários: O que vocês entendem quando falo em frações? O que é uma fração? Para que elas servem? Desta forma proponho construir um dialogo entre todos para ser formado um pré-conceito acerca do assunto. Irei expor situações onde envolve frações sem adiantamento de percurso e uma pequena viagem no tempo para o Egito.
Assuntos:
Construção de conceitos fracionários.
História das frações no Egito;
Raciocínio lógico e cálculo dedutivo.

2º Dia

Formalização do assunto sobre frações (uso do material fracionário circular).

Será iniciado a apresentação formal de fração com sua notação em algarismo indo-arábicos, notações e representações algébricas, geométricas e aritméticas.
Assuntos:
Definição, representação geométrica e exemplos de frações;
Diferentes formas das noções fracionárias;
Frações próprias, impróprias e números mistos.

3° Dia

Capitulo 3.3.1 explicações e resoluções de exemplos. Utilização das formas geométricas.

Ensino das operações de adição e subtração com o material fracionário.
Assuntos:
Forma irredutível de uma fração;
Frações equivalentes;
Adição e subtração de frações.

4º Dia

Continuação do capitulo 3.3.1, resolvendo questões em grupos.

Continuação da aula passada e resolução de questões problemas em grupos. Poderão contar com o uso do material fracionário circular.

5º Dia

Capítulo 3.3.2 explicações e resoluções de exemplos. Utilização de desenhos geométricos.

Ensino das operações de multiplicação com o desenho geométrico.
Assuntos:
Conceituação de figuras envolvendo multiplicação;
Conceitos de conjuntos;
Multiplicação de frações..

6º Dia

Capítulo 3.3.3 explicações e resoluções de exemplos. Utilização de desenhos geométricos.

Ensino das operações de divisão com o desenho geométrico.
Assuntos:
Conceituação de figuras envolvendo divisão;
Conceitos de conjuntos;
Divisão de frações.

7º Dia

Revisão do 5º e 6º dia.

Resolução de questões problemas em grupos. Poderão utilizar o desenho geométrico como forma auxiliar, se necessário.

8º Dia

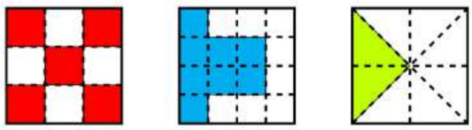
Avaliação escrita e despedida.

APÊNDICE D – AVALIAÇÃO DIAGNÓSTICA

Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia da Paraíba
Escola Municipal do Ensino Fundamental e Médio Padre Simão Fileto.
Professor: Carlos Daniel Henrique de Sousa.
Aluno(a):____

Avaliação Diagnóstica

1. Represente em forma de fração irredutível das seguintes partes coloridas dos quadrados abaixo.



2. Assinale a alternativa que **não** representa uma fração equivalente à $\frac{7}{3}$.

   (a) $\frac{14}{6}$;
   (b) $\frac{35}{15}$;
   (c) $\frac{7}{4}$;
   (d) $\frac{77}{33}$.

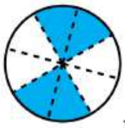
3. Um grupo de 5 amigos se juntaram para comprar 7 pizzas de mesmo sabor e tamanho dividindo igualmente suas despesas, estas que totalizaram R$ 280,00. Sendo assim responda:

   (a) Quanto cada um terá que desembolsar para pagar a conta?
   (b) Por quanto reais cada pizza foi vendida?
   (c) Como você iria fazer a divisão das pizzas entre os amigos de forma que todos recebam a mesma quantidade?

4. Assinale a alternativa que **não representa** de forma alguma a fração $\frac{2}{4}$:

   (a) $\frac{8}{4}$;

   (b)

   
   ;

   (c) 50%;

   (d) 0,5;

   (e) $\frac{1}{2}$.

5. Um dia em sua casa, Maria foi preparar um suco de laranja para beber com seu irmão, ela fez então meia "poncheira" de 3 litros de suco. Sabendo que ambos os irmãos beberam a mesma quantidade de suco, qual a fração que representa a quantidade de suco bebido pela irmão de Maria em relação a "poncheira"?

6. Resolva as operações abaixo e expresse a representação de seus cálculos geométricos se conseguir.

   (a) $\frac{3}{5}+\frac{8}{9}$;

   (b) $\frac{8}{2}-1\frac{9}{10}$;

   (c) $\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}$;

   (d) $\frac{3}{4}\div\frac{5}{6}$;

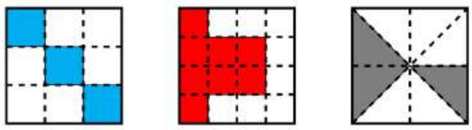
"Faça-me orgulhoso! Seja tudo o que você pode ser! Você tem o dom da perseverança, e é isso que faz de você um gênio também!" *Might Guy.*

APÊNDICE E – AVALIAÇÃO SOMATIVA

Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia da Paraíba
Escola Municipal do Ensino Fundamental e Médio Padre Simão Fileto.
Professor: Carlos Daniel Henrique de Sousa.
*Aluno(a):*____

Avaliação Somativa

1. Represente em forma de fração irredutível das seguintes partes coloridas dos quadrados abaixo.



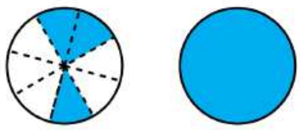
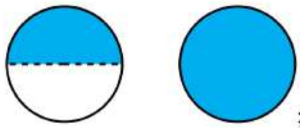
2. Assinale a alternativa que representa a soma do numerador com o denominador da fração equivalente à $\frac{4}{3}$, cujo denominador é 9.

   (a) 3;
   (b) 9;
   (c) 12;
   (d) 21;
   (e) 23.

3. Cláudia gastou $\frac{1}{3}$ da farinha de trigo que possuía para fazer um bolo para suas amigas, mais tarde resolveu gastar $\frac{5}{8}$ do restante da farinha para fazer uma torta. Determine a fração da farinha que sobrou.

4. Transformando o número misto $1\frac{1}{2}$ em fração imprópria e a fração imprópria $\frac{11}{8}$ em número misto, encontramos **respectivamente**:

   (a) $\frac{3}{2}$ e $3\frac{1}{8}$;

   (b)  e  ;

   (c) $\frac{3}{2}$ e $1\frac{3}{8}$;

   (d) $\frac{3}{2}$ e $\frac{8}{11}$;

   (e) $\frac{2}{2}$ e $1\frac{3}{8}$.

5. (AG.PEN-2001) Três amigos pediram 2 pizzas. A primeira pizza foi cortada em 6 pedaços iguais. Gisele comeu 2 pedaços, João comeu 1 e Fernando 3 pedaços. A segunda pizza foi dividida em 8 pedaços iguais, dos quais Gisele comeu 3, João comeu 4 e Fernando 1 pedaço. Comparando o que cada um consumiu pode-se afirmar que:

   (a) Fernando comeu menos que João.

   (b) João comeu mais que Gisele.

   (c) Fernando e Gisele comeram quantias iguais.

   (d) Gisele e João comeram quantias iguais.

   (e) Gisele comeu menos que Fernando.

6. **Resolva** as operações abaixo, e expresse a representação dos seus cálculos geométricos.

   (a) $\frac{3}{5} + \frac{8}{9} =$

   (b) $\frac{8}{2} - 1\frac{9}{10} =$

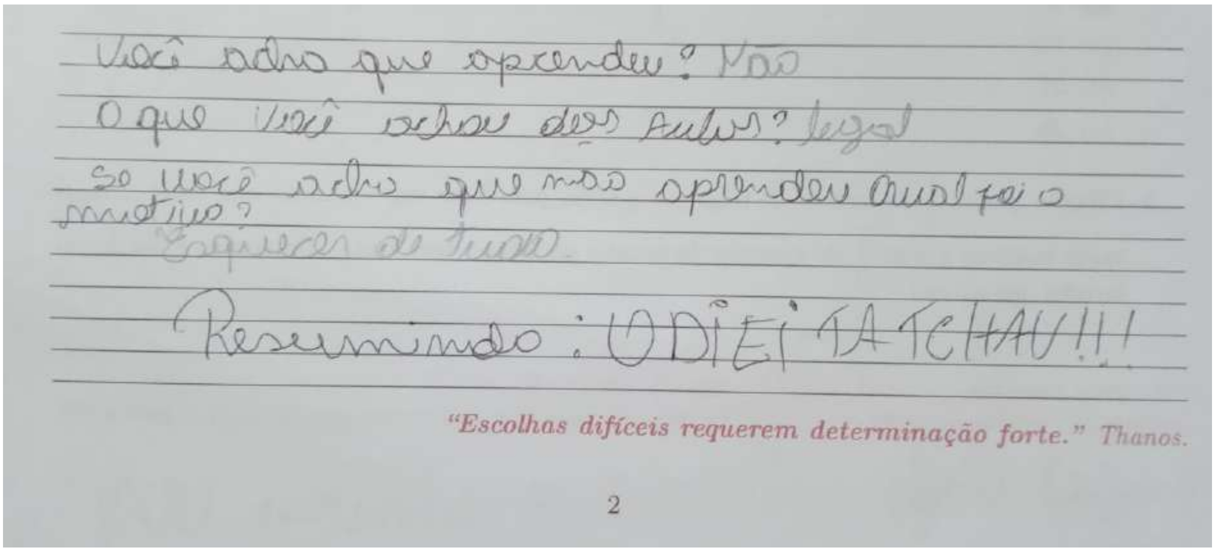
   (c) $\frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} =$

   (d) $\frac{3}{4} \div \frac{5}{6} =$

"Escolhas difíceis requerem determinação forte." *Thanos.*

APÊNDICE F – RESPOSTAS DOS ALUNOS AOS QUESTIONAMENTOS PROPOSTOS

Figura 43 – Respostas da aluna A aos questionamentos

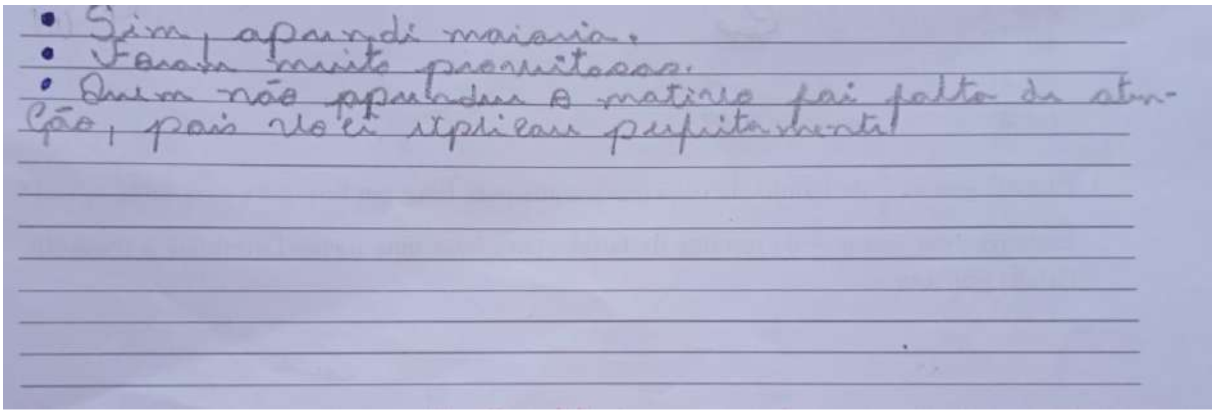


Você acha que aprendeu? Não
O que você achou das Aulas? legal
Se você acha que não aprendeu qual foi o motivo?
Esquecer de tudo.
Resumindo: ODIEI TA TCHAU!!!

"Escolhas difíceis requerem determinação forte." Thanos.

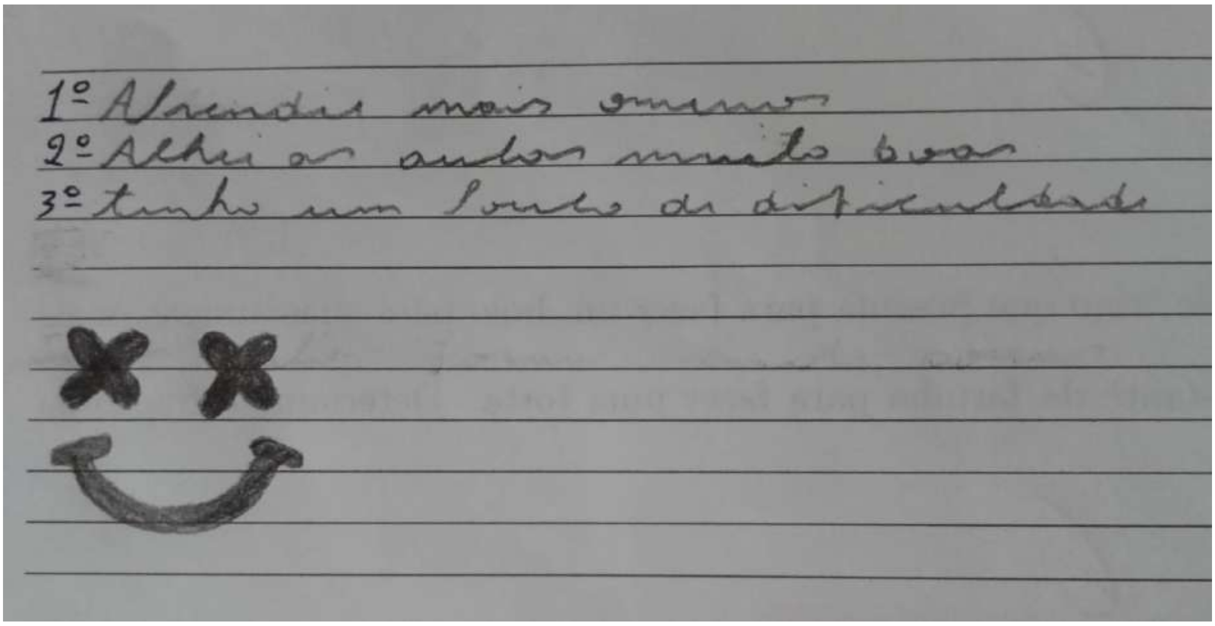
2

Figura 44 – Respostas da aluna B aos questionamentos



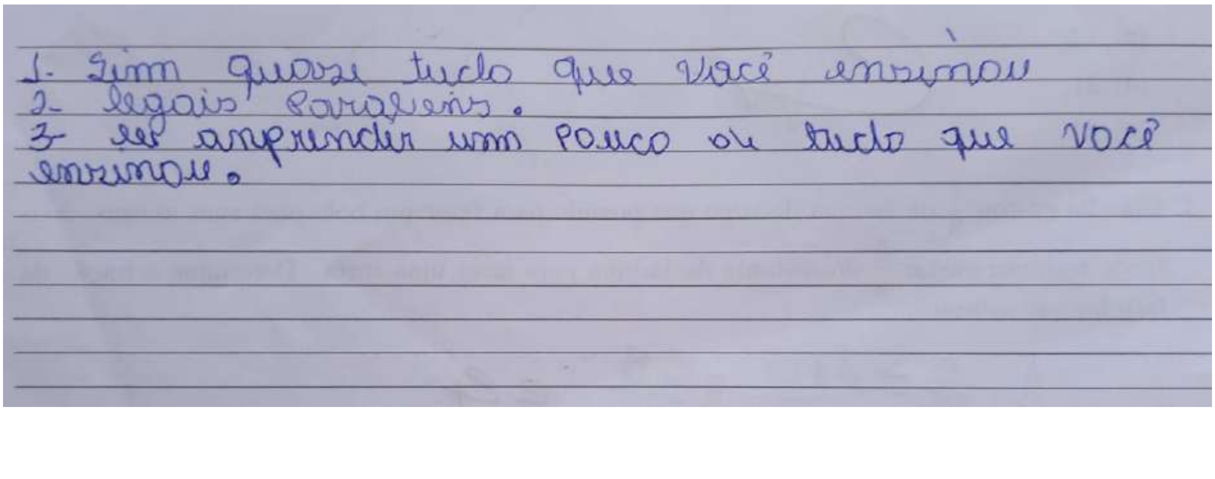
- Sim, aprendi maioria.
- Foram muito proveitosas.
- Quem não aprendeu a matéria foi falta de atenção, pois você explicou perfeitamente

Figura 45 – Respostas do aluno C aos questionamentos



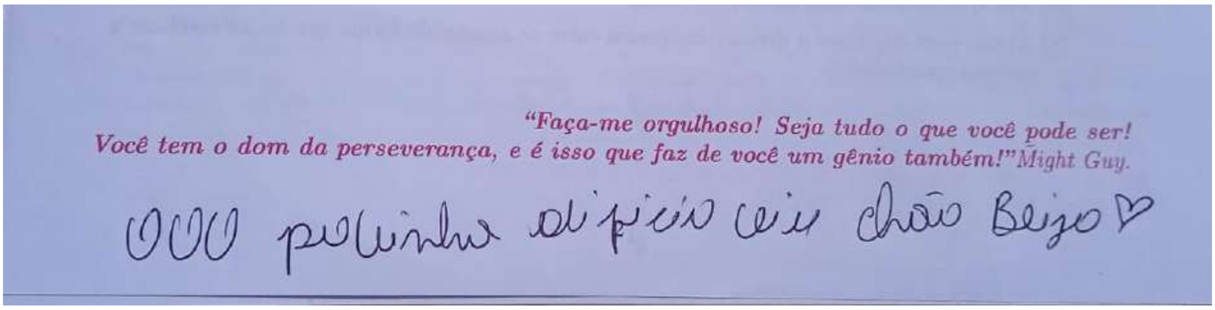
1º Aprendi mais ou menos
2º Achei as aulas muito boas
3º tinha um pouco de dificuldade

Figura 46 – Respostas da aluna D aos questionamentos



1. Sim quase tudo que você ensinou
2. legais Parabéns.
3. eu aprender um pouco ou tudo que você ensinou.

APÊNDICE G – COMENTÁRIOS REESCRITOS



"Faça-me orgulhoso! Seja tudo o que você pode ser! Você tem o dom da perseverança, e é isso que faz de você um gênio também!" Might Guy.

Ooo pulinho difícil viu chão Beijo ♡

APÊNDICE H – HABILIDADES DA BNCC EXPLORADAS DURANTE A OFICINA

EF01MA09	Organizar e ordenar objetos familiares ou representações por figuras, por meio de atributos, tais como cor, forma e medida
EF06MA06	Resolver e elaborar problemas que envolvam as ideias de múltiplo e de divisor.
EF06MA07	Compreender, comparar e ordenar frações associadas às ideias de partes de inteiros e resultado de divisão, identificando frações equivalentes.
EF06MA08	Reconhecer que os números racionais positivos podem ser expressos nas formas fracionária e decimal, estabelecer relações entre essas representações, passando de uma representação para outra, e relacioná-los a pontos na reta numérica.
EF06MA09	Resolver e elaborar problemas que envolvam o cálculo da fração de uma quantidade e cujo resultado seja um número natural, com e sem uso de calculadora.
EF06MA10	Resolver e elaborar problemas que envolvam adição ou subtração com números racionais positivos na representação fracionária.
EF06MA11	Resolver e elaborar problemas com números racionais positivos na representação decimal, envolvendo as quatro operações fundamentais e a potenciação, por meio de estratégias diversas, utilizando estimativas e arredondamentos para verificar a razoabilidade de respostas, com e sem uso de calculadora.
EF06MA13	Resolver e elaborar problemas que envolvam porcentagens, com base na ideia de proporcionalidade, sem fazer uso da "regra de três", utilizando estratégias pessoais, cálculo mental e calculadora, em contextos de educação financeira, entre outros.
EF06MA15	Resolver e elaborar problemas que envolvam a partilha de uma quantidade em duas partes desiguais, envolvendo relações aditivas e multiplicativas, bem como a razão entre as partes e entre uma das partes e o todo.
EF06MA24	Resolver e elaborar problemas que envolvam as grandezas comprimento, massa, tempo, temperatura, área (triângulos e retângulos), capacidade e volume (sólidos formados por blocos retangulares), sem uso de fórmulas, inseridos, sempre que possível, em contextos oriundos de situações reais e/ou relacionadas às outras áreas do conhecimento.
EF07MA05	Resolver um mesmo problema utilizando diferentes algoritmos.

EF07MA06	Reconhecer que as resoluções de um grupo de problemas que têm a mesma estrutura podem ser obtidas utilizando os mesmos procedimentos.
EF07MA08	Comparar e ordenar frações associadas às ideias de partes de inteiros, resultado da divisão, razão e operador.
EF07MA09	Utilizar, na resolução de problemas, a associação entre razão e fração, como a fração $\frac{2}{3}$ para expressar a razão de duas partes de uma grandeza para três partes da mesma ou três partes de outra grandeza.
EF07MA29	Resolver e elaborar problemas que envolvam medidas de grandezas inseridos em contextos oriundos de situações cotidianas ou de outras áreas do conhecimento, reconhecendo que toda medida empírica é aproximada.
EF07MA30	Resolver e elaborar problemas de cálculo de medida do volume de blocos retangulares, envolvendo as unidades usuais (metro cúbico, decímetro cúbico e centímetro cúbico).

INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA DA PARAÍBA
Campus Campina Grande
R. Tranqüilino Coelho Lemos, 671, Dinamérica, CEP 58432-300, Campina Grande (PB)
CNPJ: 10.783.898/0003-37 - Telefone: (83) 2102.6200

Documento Digitalizado Ostensivo (Público)

TRABALHO DE CONCLUSÃO DE CURSO

Assunto:	TRABALHO DE CONCLUSÃO DE CURSO
Assinado por:	Carlos Sousa
Tipo do Documento:	Dissertação
Situação:	Finalizado
Nível de Acesso:	Ostensivo (Público)
Tipo do Conferência:	Cópia Simples

Documento assinado eletronicamente por:

- **Carlos Daniel Henrique de Sousa**, **ALUNO (202011230024) DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA - CAMPINA GRANDE**, em 26/12/2023 19:56:23.

Este documento foi armazenado no SUAP em 26/12/2023. Para comprovar sua integridade, faça a leitura do QRCode ao lado ou acesse https://suap.ifpb.edu.br/verificar-documento-externo/ e forneça os dados abaixo:

Código Verificador: 1038592
Código de Autenticação: 1aac2ad5a0