INSTITUTO FEDERAL
Paraíba
Campus Campina Grande

INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA DA PARAÍBA
CURSO SUPERIOR DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

JOSÉ ADENILTON DE BARROS SOBRINHO

ZERO: ÀS VEZES NADA, ÀS VEZES TUDO

CAMPINA GRANDE - PB
2023

JOSÉ ADENILTON DE BARROS SOBRINHO

ZERO: ÀS VEZES NADA, ÀS VEZES TUDO

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado no Curso Superior de Licenciatura em Matemática do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia da Paraíba (IFPB), como requisito parcial para obtenção do título de Licenciado em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Luís Havelange Soares

B277z Barros Sobrinho, José Adenilton de.
Zero: às vezes nada, às vezes tudo / José Adenilton de Barros Sobrinho. - Campina Grande, 2023.
46 f. : il.

Trabalho de Conclusão de Curso (Curso Superior de Licenciatura em Matemática) - Instituto Federal da Paraíba, 2023.
Orientador: Prof. Dr. Luís Havelange Soares.

1.Matemática- números 2. Civilização 3. Cálculo I. Soares, Luís Havelange II. Título.

CDU 51

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
SECRETARIA DE EDUCAÇÃO PROFISSIONAL E TECNOLÓGICA
INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA DA PARAÍBA
CAMPUS CAMPINA GRANDE

JOSE ADENILTON DE BARROS SOBRINHO

ZERO: ÀS VEZES NADA, ÀS VEZES TUDO

Trabalho de Conclusão de Curso, aprovado como requisito parcial para a obtenção de graduação em Licenciatura em Matemática pelo Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia da Paraíba – Campus Campina Grande.

Habilitação: Licenciatura

Data da aprovação

05 / 12 / 2023.

BANCA EXAMINADORA:

ORIENTADOR: Prof. Dr. Luis Havelange Soares – IFPB

Daiana Estrela Ferreira Barbosa

AVALIADORA: Profª. Ma. Daiana Estrela Ferreira Barbosa – IFPB

Cicero da Silva Pereira

AVALIADOR: Prof. Me. Cicero da Silva Pereira – IFPB

AGRADECIMENTOS

Adentrar rumo ao desconhecido nunca é uma tarefa fácil, mas o aprendizado e a evolução constante me possibilitaram a descoberta da minha vida, à docência. Atualmente não posso dizer que sou perfeito, pois sei que nunca atingirei a perfeição. No entanto, sou melhor do que ontem e amanhã serei melhor do que hoje.

Meus agradecimentos vão a todos que me proporcionaram a chance de conhecer esse meu lado, a todos que me ensinaram a ensinar.

Primeiramente agradeço à Deus por todo o caminho que ele planejou para minha vida, as coisas nem sempre são fáceis, mas as dificuldades estão aí para nos mostrar o quão forte e capazes somos.

Agradeço a minha mãe por sempre estar ao meu lado quando precisei, todos precisam de alguém que independente da opinião do mundo estará ao seu lado.

Agradeço ao IFPB por proporcionar adentrar em programas como a residência pedagógica, espaço de muito aprendizado e amadurecimento.

Agradeço a todos os meus amigos. A vida acadêmica exige dedicação e esforço, que com bons amigos e boas risadas, não há dificuldade que não se torne meros probleminhas. Levarei vocês comigo e lembrarei de cada bom momento que tivemos, dos maus também, porque na caminhada nem sempre encontramos flores.

Agradeço aos meus professores que tive ao longo da vida, principalmente os que puxaram minha orelha, me propiciando reflexão e a busca da melhora. Por último, mas não menos importante, queria agradecer ao meu orientador por sempre me acalmar e ser esse lugar de conforto, onde a aflição e a ansiedade se tornam tranquilidade e paz.

Às vezes nada, às vezes tudo.

Tem gente que me ignora,
Com desprezo, com desdém,
Me considera um “ninguém”,
Quer tirar-me do seu mundo.
Eu não quero ser arrogante.
Mas prometo ser importante,
Do simples ao profundo

Eu sou posição vazia,
Sou um nada que é tudo,
À esquerda eu fico mudo,
Eu não sirvo pra divisão.
Sou neutro na aditiva,
Sou marca forte e viva,
Na indeterminação.

Sou grande interrogação
Se o assunto é função Zeta
Sou um encontro de retas
Quando o plano é conteúdo
Sou nota que não agrada
Sou zero: às vezes nada
Sou zero: às vezes tudo

(Autor: Luís Havelange)

RESUMO

A presente pesquisa bibliográfica possui caráter qualitativo e tem como objetivo geral responder a seguinte pergunta: "Qual a origem do zero, como funciona a sua fantástica ligação com as operações matemáticas e quais as contribuições ele trouxe a essa ciência?". A chegada construção dos números possibilitou o desenvolvimento da Matemática e Inúmeras portas se abriram e a evolução humana pôde, enfim, evoluir constantemente. Nem todos os números foram criados no mesmo momento, o zero, objeto de estudo desta pesquisa, foi o último algarismo a ser aceito e utilizado pelas antigas civilizações. Para eles, os números serviam para contar e como o zero não era essencialmente utilizado para contar, não haveria razão plausível para a sua criação. Muitas civilizações chegaram a utilizar o zero, mas não como hoje o utilizamos. Sua real capacidade foi primeiramente explorada pelos indianos e aprimorada pelos árabes que criaram a nossa numeração usual. Alguns pilares da civilização como a igreja por exemplo, tentaram barrar a ascensão do zero. As interações humanas e filosóficas induziram o zero a diferentes conceitos e significados, desde representar o nada, até representar o recomeço, podendo ser usado tanto para o bem, quanto para o mal. O conceito de zero foi extremamente necessário para que grandes matemáticos pudessem adentrar a ideia de cálculo, ferramenta atualmente altamente utilizada em diversos ramos da civilização moderna. Um simples número que inicialmente nem foi criado para ser um número e sim uma casa vazia, conseguiu quebrar diversos estigmas e batalhar para obter o seu devido local de número.

Palavras-chave: Zero. Número. Matemática. Civilizações. Cálculo.

ABSTRACT

The present literature review has a qualitative nature and aims to answer the following general question: "What is the origin of zero, how does its fantastic connection with mathematical operations work, and what contributions has it brought to this science?" The construction of numbers enabled the development of mathematics, opening numerous doors and allowing human evolution to progress continuously. Not all numbers were created at the same time, and zero, the subject of this research, was the last digit to be accepted and used by ancient civilizations. For them, numbers served the purpose of counting, and since zero was not essentially used for counting, there was no plausible reason for its creation. Many civilizations did use zero, but not in the same way we do today. Its true capacity was first explored by the Indians and perfected by the Arabs, who created our usual numbering system. Some pillars of civilization, such as the church, attempted to hinder the rise of zero. Human and philosophical interactions led to different concepts and meanings for zero, ranging from representing nothing to symbolizing a fresh start, capable of being used for both good and ill. The concept of zero was crucial for great mathematicians to delve into the idea of calculation, a tool now highly utilized in various branches of modern civilization. A simple number that was initially not created to be a number but rather an empty place managed to break various stigmas and fight for its rightful place as a number.

Keywords: Zero. Number. Mathematics. Civilizations. Calculation.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

Qual a origem do zero, como funciona a sua fantástica ligação com as operações matemáticas e quais as contribuições ele trouxe a essa ciência? A cada linha desse trabalho, tentarei explicar de maneira mais esclarecedora possível, como surgiu, quando, onde, e alguns dos povos que chegaram a utilizar, de alguma forma, a ideia do zero.

Ao longo dos anos diversas coisas se perdem, eventos e pessoas incríveis que passaram pelo planeta terra são esquecidos ou perdidos no tempo. Grandes feitos possuem uma data de validade muito longa, porém, realizar uma façanha que altere a vida das pessoas, prolonga bastante essa validade. Nikola Tesla foi o "criador" da energia; Isaac Newton um dos maiores matemáticos já conhecidos; Albert Einstein, um dos maiores físicos. Essas e outras pessoas importantes são lembradas até hoje, e serão lembradas por muitos e muitos anos, mas não existe uma certeza de até quando, não se sabe o que o futuro nos reserva e eles também podem, em algum momento, ser esquecidos. O tempo é implacável. E longos períodos de tempo após as grandes descobertas, as grandes invenções, poderão traçar empecilhos para uma análise relevante sobre as origens, os descobridores, os inventores.

É assim também, quando investigamos a epistemologia dos conhecimentos, dos conceitos matemáticos. "Onde, como e por quem foi lançada pela primeira vez para o espaço a pergunta - por quê? - impossível de dizer. O que já é mais fácil de fixar datas aproximadas ao primeiro conjunto coerente de resposta a essa pergunta, ao primeiro esboço" (Caraça, 1951, p. 64). Quem teve a primeira ideia de uma representação para o zero? Qual a primeira pessoa que o utilizou? Essas respostas não são tão fáceis de se conseguir, não existem dados históricos suficientes para responder tal perguntas de forma exata, poucos relatos concretos ainda existem e serão a partir deles que iremos prosseguir. "O inventor do zero, escriba meticuloso e preocupado em delimitar um lugar numa série de algarismos submetidos ao princípio da posição, provavelmente nunca teve consciência da revolução que tornava possível (Ifrah, 1989, p. 10).

O presente trabalho aborda as inúmeras relações entre o zero e as operações matemáticas, dentre elas estão: na adição e subtração, na multiplicação, na divisão (onde aqui poderemos ver uma relação bastante curiosa), na radiciação e na potenciação. Ao utilizar-se do zero, os matemáticos construíram peculiaridades, propriedades e diferentes relações dele com cada operação, possibilitando então formas distintas de modelagem e utilização. O zero não expandiu somente o universo da Matemática e sim diversos segmentos de diferentes áreas da educação e da humanidade. A aceitação do zero abriu as fronteiras do pensamento humano, deixando assim de ser o nada e transformando-se em uma das maiores invenções humanas.

A reflexão sobre o conceito numérico tende a ficar um pouco mais complexa e abstrata quando adentramos no contexto da matemática superior, o que não é um fator problemático. Pelo contrário, algumas vertentes da Matemática acabam por evitar utilizar o zero, um exemplo simples é que em alguns contextos, um número natural é definido como um número inteiro positivo, portanto o zero não se enquadra nessa definição e não é considerado natural. Quando focamos na operação de divisão, especificamente na divisão por zero, chegamos a um outro ponto bastante importante que será desenvolvido, as indeterminações. Mas o que é uma indeterminação? Pesquisamos em um dicionário da língua portuguesa a palavra "indeterminação" significa aquilo que não está determinado, que é indefinido, ou seja, ausência de determinação, imprecisão. Tendo isso em mente, encontramos as indeterminações no cálculo trabalhando com limites e atualmente existem sete delas, sendo: uma multiplicação, $0.\infty$; uma subtração, $\infty - \infty$; duas que envolvem um quociente, 0/0 e ∞/∞; três envolvem a potenciação, 1^{∞}, 0^0 e ∞^0. Podemos ver claramente que das sete indeterminações existentes quatro delas envolvem de alguma forma o número zero. Nessa investigação exploramos como o zero desencadeou o conceito de infinitesimais e posteriormente o surgimento do cálculo.

A história que será contada aqui é repleta de revolução, aprendizado e misticismo. Ousamos dizer que o zero motivou diversas batalhas entre vários povos, filósofos e até influenciou revoluções no contexto religioso, tudo isso para que pudesse ser considerado o número que aceitamos e compreendemos atualmente. A falta de compreensão dos povos antigos, as diferentes e complexas possibilidades com sua modelagem e a negação da igreja, foram apenas algumas das muitas dificuldades encontradas pelo zero.

Quando nos deparamos com algo comum no nosso cotidiano, não nos passa pela cabeça que por trás há uma longa e complexa história. O passado sempre foi um tópico muito importante e um dos principais modificadores do futuro, engraçado achar que algo que já ficou para trás tem todo esse poder com relação ao futuro! Mas é verdade, com o passado podemos aprender, melhorar e buscar aperfeiçoar aspectos da nossa sociedade no geral.

A ideia inicial dessa pesquisa surgiu de diferentes acontecimentos em que presenciados. Um deles ocorreu em uma rede social, quando uma mãe de uma criança relatou que o seu filho tinha chegado a uma conclusão de que se havia infinitos números positivos e infinitos números negativos o zero era então o centro de tudo. A criança com apenas dez anos chegou a essa interessante conclusão, um pouco equivocada, mas muito interessante.

Não podemos atribuir essa ideia ao conjunto dos naturais tendo em vista que os negativos não fazem parte. Porém, quando falamos do conjunto dos Números Inteiros a ideia até faz sentido. Mas, se decidirmos selecionar o número três e afirmar que existem infinitos números à direita e infinitos números à esquerda, a afirmação continua sendo verdadeira. Não podemos definir qual número é o número central e nem se existe realmente um número central, é possível considerar qualquer número como o centro dos números, pois há infinitos números à direita e infinitos números a esquerda de todos os números. Ao se trabalhar com o infinito as ideias acabam ficando um pouco complexas. Ao verificar o conjunto dos reais, aí é que a coisa fica verdadeiramente complicada, pois entre quaisquer dois números reais existem infinitos números reais.

Em outro momento, em uma aula de filosofia da matemática, já na graduação em licenciatura em Matemática, o professor nos perguntou o que era o zero. Um colega de turma respondeu que era nada. O professor explicou que a resposta estava equivocada e alterou drasticamente o rumo da aula, que passou a girar então no entorno de aspectos a respeito do zero. Ao buscar um tema para realizar essa pesquisa me deparei com várias ideias fascinantes, porém a ideia de investigar a epistemologia da construção do conceito do zero foi a que mais despertou uma grande e irradiante vontade.

Esse trabalho, que teve como objetivo investigar a epistemologia do conceito do número zero visa chamar à atenção do leitor para toda exuberância desse número, desde as suas origens até as discussões que perduram até hoje. Além de especial, o zero é fascinante, tantas dúvidas e relações dele com a Matemática no ensino básico e no superior, me fizeram crer que esse seria um caminho que eu sentiria prazer em explorar, aprender e compartilhar. Se ao fim dessa pesquisa o leitor passar a enxergar o zero de uma maneira diferente e concordar que um número pode ser especial, creio que essa monografia tenha cumprido o seu papel inicial e fundamental.

A pesquisa está organizada em três capítulos, além dessa introdução e das considerações finais. No primeiro capítulo trazemos o percurso metodológico da investigação. O capítulo 2, que tem como título “a “chegada” de um novo integrante à família dos números”, traz à tona a concepção do que hoje chamamos de números, porém, incompleta, em seguida, conheceremos um pouco de algumas civilizações e sua utilização/não utilização do símbolo zero, e futuramente número zero. Posteriormente embarcamos em uma discussão filosófica, do porquê o zero ter demorado tanto tempo para ser concebido e introduzido a um sistema de numeração. Dando seguimento ao trabalho, observamos a relação do zero em vários segmentos matemáticos, além das suas mais diversas interações comunicativas.

No capitulo 3, mergulhamos na utilização do zero na matemática básica, explorando sua relação com as operações. Por fim, trabalhamos com o zero em alguns ramos do ensino superior, trabalhando conceitos como o infinito, os infinitesimais e os limites.

1. DO ZERO DE INVESTIGAÇÃO ÀS CONSIDERAÇÕES FINAIS

Se demarcarmos através de um segmento da linha do tempo o caminhar dessa investigação, partindo de um marco zero, momento em que surgiu a ideia de pesquisa, até a última frase escrita nas considerações finais, teremos um intervalo de aproximadamente 12 meses.

O marco zero, embora tenha sido o dia que foi construída a questão de pesquisa, não representa o zero da investigação. Muitos saberes prévios para a pesquisa, muitas inquietações que não seguiram à frente, muitas reflexões sobre o ato de pesquisa, contribuíram para o delineamento dessa investigação. No entanto, em termos operacionais, podemos dizer o percurso da investigação começava ali.

Diante da definição da questão de pesquisa "Qual a origem do zero, como funciona a sua fantástica ligação com as operações matemáticas e quais as contribuições ele trouxe a essa ciência?", foram feitos os encaminhamentos seguintes, quais sejam, o objetivo e a temática de estudo, para daí buscar os elementos teóricos. Com base na questão diretriz definimos o objetivo geral do trabalho: investigar a epistemologia do conceito do número zero. Portanto, seguimos interessados em pesquisar as origens da construção do conceito do número zero, suas dificuldades e contribuições no contexto sociocultural e matemático. Ao final desse trabalho deseja-se que o leitor passe a enxergar de maneira diferente e reflexiva todo o contexto histórico do zero e sua relação complexa e essencial com a Matemática e, consequentemente, com a nossa vida.

Dadas essas características da pesquisa, descritas anteriormente, fica evidenciado que se trata de uma investigação de natureza qualitativa. O seu desenvolvimento e a sua construçãose deram por meio de um levantamento histórico e bibliográfico, onde foram abordadas algumasdas civilizações que introduziram o conceito do zero em suas atividades e alguns dos mais diversos envolvimentos do mesmo nas operações matemáticas e na ideia dos infinitesimais, quepor sua vez deram início ao cálculo diferencial e integral.

Realizamos uma análise, desde os povos antigos até os atuais, sobre qual a influência que o zero teve e tem com a Matemática. Como característica de qualquer estudo dessa natureza, não será possível compartilhar a história de forma fiel à realidade, por não haver detalhamentos históricos concretos, porém, o trabalho buscará trazer uma interpretação dessa história acrescentando aspectos da importância e de algumas peculiaridades desse objeto matemático (zero) nos contextos da educação básica e da educação superior.

A coleta de informações foi feita a partir de trabalhos e livros correlacionados com o tema. Ao pesquisar-se sobre, muito pouco material é encontrado, mas o pouco foi mais que suficiente para realizar de maneira eficiente o que este trabalho se propõe. Com o fim desta pesquisa, busca-se também agregar quantidade e qualidade a essa temática de forma a proporcionar um melhor e maior arsenal de trabalhos com a mesma linha de raciocínio a futuros leitores e pesquisadores.

O principal termo utilizado para exploração dos materiais base e construção da fundamentação teórica foi o "zero", alguns trabalhos, livros e pesquisas, que mencionaram ou citaram esse termo, foram reservados e analisados. A ferramenta mais utilizada para encontrar trabalhos acadêmicos para fundamentar essa pesquisa foi o meio digital, o *google acadêmico*.

Alguns livros físicos também foram utilizados. A biblioteca acaba ficando em segundo plano, mas nela o ambiente sempre é propício ao aprendizado e ao conhecimento. Muitos deles chamaram bastante atenção. A pesquisa teve como sua espinha dorsal fundamental o livro: "Zero: A biografia de uma ideia perigosa", do autor (Seife, 2001), um livro extremamente necessário, expositivo e completo, muito do que se quer saber sobre o zero está escrito aqui de forma muito bem elaborada. Cada capítulo desse livro nos mergulha de cabeça em diversos pensamentos e conclusões.

Para falar de um número em especifico, é preciso saber da história dos números, suas origens e o passado desses fantásticos algarismos que nos proporcionaram e nos proporcionam a vida que temos hoje, o livro certo para conhecer esse mundo foi a fantástica "História universal dos algarismos" e "Os números: a história de uma grande invenção", ambos escritos pelo mesmo autor (Ifrah, 1985) aqui o passado se torna bem mais presente e o conhecimento fixado. Outros livros utilizados são intitulados como: "História da matemática" (Boyer, 2010), "Conceitos fundamentais da matemática" (Caraças, 1951), "Sobre o que não há", um livro brilhante, que explora e expõe três vertentes fundamentais para o autor, o zero, o vazio e o vácuo (Morais, 2018) definindo, mediando e relacionando cada um desses temas.

O trabalho aqui em questão, não foi criado apenas por leituras de livros, mas também de muitas dissertações, alguns dos principais são: "A origem do zero", (Padrão, 2008), "Indeterminações" (Desanti, 2017) e "Sentidos do zero" (Guimarães, 2008). Autores brilhantes que conseguiram expor suas ideias e pensamentos de forma competente e precisa.

Alguns artigos foram muito necessários para que a construção de argumentos e a inspiração pudessem marcar presença. Sendo os principais: História do número zero (Pinedo, 2004), os primórdios do cálculo infinitesimal (Ramos, 2016) e Infinitésimos: Panorama histórico e possibilidades no ensino (Pasa; Binotto e Moretti, 2021).

Esses referenciais teóricos, que fizeram parte de quase todo o segmento da linha do tempo do percurso da pesquisa, nos conduziram a interpretações relevantes sobre esse objeto matemático, nos mostraram a fluidez conceitual, nos levaram a ressignificar concepções sobre a Matemática e seus objetos. Eles nos levaram do ponto zero da pesquisa ao ponto no qual interpretamos como satisfatório para finalização dessa investigação.

2. A "CHEGADA" DE UM NOVO INTEGRANTE À FAMÍLIA DOS NÚMEROS

A criação dos números revolucionou e transformou toda a nossa civilização, sem eles não teríamos noção de tempo, não haveria minutos, nem horas, nem meses, nem anos, não existiria um calendário. Não teríamos noção de valor, não haveria dinheiro, muito menos a economia. Nunca poderíamos descrever fenômenos físicos como a força, a energia, a velocidade. A matemática, a física, a química, as ciências exatas no geral seriam inexistentes. Uma realidade paralela onde os números não fossem criados nem utilizados estaria fadada a estagnação intelectual.

> Projetado num universo não apenas qualitativo, mas também quantitativo, o homem, por necessidade, explorou pouco a pouco tudo o que lhe caiu sobre a mão para livrar-se do perigo. A natureza forneceu-lhe todos os modelos cardinais possíveis (as asas de um pássaro para simbolizar o par, as pétalas de um trevo comum para três, as patas de um animal para quatro, os dedos de uma mão para cinco etc.) bem como todas as espécies de exemplos da relação de sucessão; ele acedeu então progressivamente à abstração dos números e do cálculo (Ifrah, 1985, p. 18).

Nada acontece de repente, grandes invenções não nascem do dia para noite, é preciso de tempo e estudo para que ideias saiam do papel, que desabrochem. A história em que uma maçã cai na cabeça de Isaac Newton e a partir dela ele define a ideia de gravidade não passa deuma simplificação da complexa e fascinante caminhada de um homem até, de fato, obter essa fantástica conclusão. O mesmo acontece com o zero. Não existiu alguém que ao pôr as mãos no bolso e não encontrar nenhum tostão furado teve o entendimento de que possuía zero reais, mas então, como será que esse pensamento surgiu? "O zero pode ter surgido de forma independente em diferentes civilizações e teve um percurso conturbado até que se consolidasse como elemento-chave da Matemática" (Pinedo, 2004, p. 2). Antigamente o planeta não era formado por essa enorme civilização que conhecemos atualmente, os costumes e as tradições são derivados dessa época em que diferentes regiões do planeta, povos distintos viviam. Egípcios, gregos, babilônios, maias, árabes, dentre inúmeras outras, cada civilização possuía uma forma para representar seus números, uma base numérica e sua Matemática.

A partir daqui conheceremos a idealização de zero que cada uma dessas civilizações construiu ao longo dos anos, criando assim uma linha cronológica que vai desde a primeira aparição, até a insurreição[1] desse "objeto matemático" que conhecemos como o último integrante da família dos números.

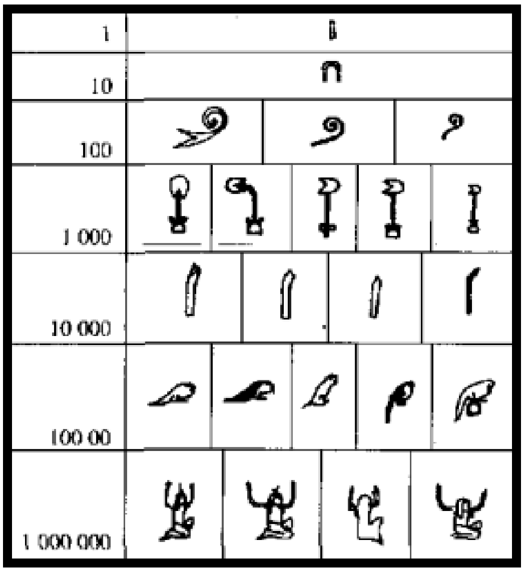
---

[1] Insurreição é uma forma de contestação, de ir contra uma ordem ou conceito antes estabelecido.

> O tempo e a história são, é claro, sem emendas, como contínuo da matemática, e qualquer subdivisão e períodos é obra do homem. Mas assim como sistema de coordenadas é útil na geometria, também a subdivisão dos acontecimentos em períodos ou eras é conveniente para história. (Boyer, 1974, p. 180)

Os Egípcios construíram uma das mais formidáveis civilizações vistas até então. Um povo repleto de maravilhas e conhecimentos aprimorados. Consolidaram-se como o berço de muitas das invenções que conhecemos e admiramos atualmente. As pirâmides, construções gigantes e fascinantes foram construídas numa época que não existia equipamento adequado, tudo era feito de forma manual e artesanal, e sem sombra de dúvidas, até hoje, se mostra como um feito intimidante. Os egípcios também inventaram sua escrita e seu próprio sistema de numeração formado por sete símbolos, que eram utilizados para realizar cálculos e representar valores. O traço, o calcanhar, a corda enrolada, a flor de lotus, o dedo indicador, o girino ou pássaro e o homem ajoelhado, constituíam o sistema numérico egípcio. Como mostrado na figura 1 a seguir:

Figura 1: Sistema de numeração egípcio.



Fonte: números: a história de uma grande invenção, Ifrah, página 158, 1989.

Para os egípcios os números não possuíam um valor pela posição em que ocupavam, tornando seu sistema em não posicional. Para representar 11 tanto fazia o traço vir primeiro que o calcanhar ou vice-versa. Por serem apegados somente ao cálculo por meio de ideias concretas como medidas, áreas e volumes, não desenvolveram nada relacionado ao número zero.

> Os antigos faraós designavam agrimensores para avaliarem os prejuízos e restabelecerem as fronteiras e assim nasceu a geometria. .... Os Egípcios também aprenderam a medir volumes de objetos - como pirâmides. A matemática do Egito era famosa em todo o Mediterrâneo, e é possível que os primeiros matemáticos gregos, mestres da geometria, como Tales e Pitágoras, tenham estudado no Egito. Todavia, apesar de todo o brilhante trabalho geométrico dos Egípcios, o zero não existia em lado nenhum no Egipto. (Seife, 2001, p. 15)

Apesar da Grécia ser o berço de grandes matemáticos como Pitágoras, Euclides, Arquimedes e Tales, e de suas concepções alterarem o mundo em que vivemos, os gregos formaram outra grande civilização que não construiu o conceito de zero. Embora possuíssem um sistema de numeração baseado em letras mais avançado e complexo e os cálculos envolverem um pouco de abstração e filosofia, segundo Seife (2001, p. 15) "não foram os gregos que descobriram o zero, o zero veio do oriente, não do ocidente."

A primeira civilização oriental que iremos adentrar serão os Babilônios, região localizada onde atualmente é o Iraque, lar de um sistema de numeração sexagesimal, ou seja, baseado no número 60. Engraçado existir uma base numérica baseada em um número tão alto, de primeira vista temos a sensação de que deva ser a base mais complicada de se trabalhar, mas essa conclusão não passa de um equívoco. Mas por que será? Simples, o número 60 possui inúmeros divisores, sendo eles: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 10, 12, 15, 20, 30 e o próprio 60, realizar cálculos com um número repleto de divisores, facilita e simplifica consideravelmente o cálculo. Não é à toa que a nossa medida de tempo é dividida exatamente em grupos de 60, 60 segundos equivalem a um minuto, 60 minutos equivalem a uma hora.

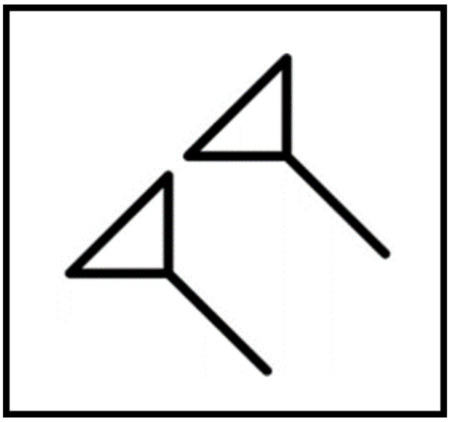
Quando falamos em um sistema posicional lembramos do nosso sistema decimal, mas ele não foi o único, o sistema sexagesimal também é um sistema numérico posicional, se falamos em posição, o zero desempenha um papel importantíssimo: o de representar a ausência de valor em determinada posição de um número. Na base decimal, por exemplo, o número 105, tem o 1(um) representando uma centena, o 0(zero) indicando que ele possui um grupo de 10 dezenas e o cinco representando a quantidade de unidades menor que uma dezena. Os babilônios utilizavam cunhas para representar seus números, enquanto a cunha em pé chamada de cravo representa o número um, a cunha deitada chamada de asna representa o número 10, "esses símbolos tinham valores diferentes em cada posição que ocupavam" (Fabiane, 2008, p. 38) podendo assim valer 1, 60, 3600... com apenas esses dois símbolos eles escreviam todos os números, de forma não tão pratica, mas representavam.

Figura 2: Símbolos do sistema de numeração babilônico (sistema sexagesimal)

Fonte: os números: A história de uma grande invenção, Ifrah, 1989

Os babilônios utilizavam o zero para representar uma posição vazia. Essa posição vazia era inicialmente uma "marca" ou um espaço em branco que indicava a ausência de um valor, "Embora o zero fosse útil, era apenas um marca-lugar. Era meramente um símbolo para uma casa em branco no ábaco [...] não tinha realmente um valor numérico por si mesmo" (Seife, 2001, p. 18). Podemos visualizar como era a representação do zero babilônio conforme a figura 3.

Figura 3: Zero babilonico



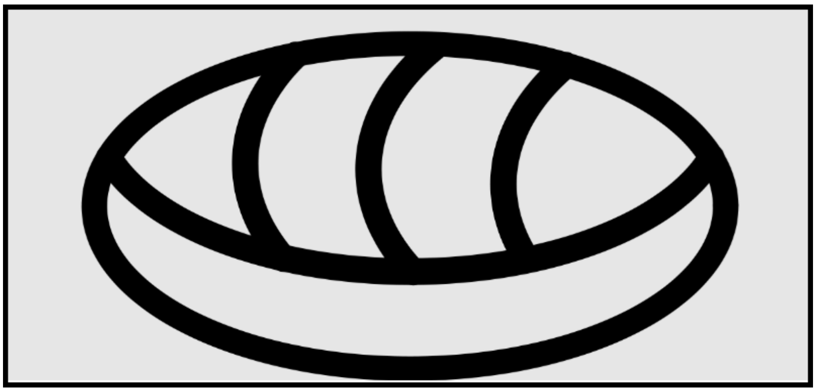
Fonte: o fantástico mundo dos números: a matemática do zero ao infinito, Ian Stewart, 2016

> Este zero algarismo babilônio era utilizado apenas em posições intermediárias, ele não era utilizado no final do número, o que provocava muita ambiguidade que precisavam ser resolvidas recorrendo-se ao contexto. Surge nos babilônios, o zero, como marcar lugar, mas ainda limitado (Guimarães, 2008, p. 39).

Viajando para o outro lado do mundo, especificamente na região da américa central residiu um povo com características e criações fascinantes. Os maias constituíram mais uma das antigas civilizações, rica em conhecimentos aprimorados, dentre esses conhecimentos está a astronomia, a ciência amplamente estudada e desenvolvida e a engenhosa habilidade em construir calendários. Uma informação incrível é que os sábios maias utilizavam apenas aparelhos rudimentares para realizar os cálculos de “tempo”, conseguindo assim obter aproximações impressionantes como a do ano solar, errando apenas por milésimos. “Mas a astronomia não era a única ciência com a qual os maias nos surpreenderam. No campo da matemática, eles chegaram a resultados igualmente importantes, pois descobriram o princípio de posição e inventaram o zero” (Ifrah, 1985, p. 250). Criaram seu próprio sistema de numeração baseado no número 20, ao somarmos a quantidade de dedos de nossas mãos com a quantidade de dedos de nossos pés obtemos o número que eles utilizaram para construir seu sistema de numeração vigesimal, que por sua vez era formado por meio de símbolos, pontos e traços. Como os egípcios, os maias também possuíam uma escrita numérica baseada em hieroglifos, possuindo uma gama de tipos e formatos.

Sempre que a ideia de um sistema posicional aparece em alguma civilização junto a ela o zero marca presença. Não foi diferente com os maias, que inclusive possuíam um símbolo para o próprio zero. “Os maias utilizavam o zero, em todas as posições, diferente dos babilônios que só os utilizavam nas posições intermediarias” (Guimarães, 2008, p.44).

Figura 4: Zero maia



Fonte: O fantástico mundo dos números: a matemática do zero ao infinito do autor Ian Stewart, 2016

Vimos até aqui que as civilizações que conceberam a ideia de zero não chegaram a considerá-lo realmente um número. Mas então, qual foi a civilização que deu um passo adiante do que já estava estabelecido? “nem o zero babilônico nem o zero maia foram concebidos como um número: só o zero indiano teve aproximadamente as mesmas possibilidades que o que utilizamos hoje em dia” (Ifrah, 1985, p. 23).

Na índia, diferente do restante do mundo onde a grande maioria dos religiosos segue a religião com um único Deus, a cultura religiosa de lá é composta por uma série de deuses e suas ramificações. Mas o que esse aspecto religioso tem a adicionar ao tema trabalhado nesse texto? Bem, mais do que se pode imaginar, naquela época “O que se via era a influência direta da Igreja no convívio social e político da idade média, inclusive com limitação do conhecimento à sociedade, o que permitia a suserania[2] social e impedia qualquer confronto das verdades postas pela Igreja (Vainfas, Ronaldo. et al, 2016).

Os indianos além de utilizarem a base 10 e o sistema posicional, foram os primeiros a utilizar um símbolo para cada número, eles inovaram e não fizeram o mesmo que as demais civilizações ao representar valores em forma de pontos ou traços, também foram pioneiros em escrever valores numéricos muito grandes por “extenso”, porém escreviam de forma inversa a nossa, “os indianos para representar grandes números, resolveram utilizar uma notação por extenso. E, para não repetir sempre as mesmas palavras, os poetas indianos atribuíam diversos sinônimos aos nomes dos números” (Fabiane, 2008, p. 47). Os números indianos usados a centenas de anos atrás são os mesmos que nós utilizamos atualmente, apenas passaram por um longo período de modificações em sua simbologia.

Os hindus reuniram ideias fundamentais e puderam assim dar início a democratização do cálculo. Calcular deixaria de ser algo que apenas uma seleta população possuía acesso e se tornaria algo democrático. Os indianos deram um passo além das demais civilizações, além de possuir um símbolo para o zero, fizeram bem mais do que utilizá-lo apenas para marcar uma casa vazia, para Seife (2001, p. 61) “os matemáticos indianos fizeram mais do que simplesmente aceitar o zero. Eles transformaram-no, mudando o seu papel de mero titular de um lugar para um número. Esta reencarnação foi o que deu ao zero o seu poder”. Daqui em diante o vazio se torna sinônimo de nada. O zero não se chamava zero desde o princípio:

> O nome indiano para o zero era "sunya", que significa "vazio", e os árabes o transformaram em "sifr". Quando alguns estudiosos ocidentais descreveram o novo número aos seus colegas, transformaram "sifr" em uma palavra com sonoridade latina, resultando em "zephirus", que é a raiz de nossa palavra "zero". Outros matemáticos ocidentais não mudaram a palavra tão drasticamente e chamaram o zero de "cifra", que se tornou "cipher". (Seife, 2001, p. 66)

Na idade das trevas[3], a religião acabava limitando e dificultando o acesso da população ao conhecimento, os árabes foram os responsáveis por impedir que o conhecimento chegasse ao fim, uma vez que no ocidente a religião se encarregava de destruir ou confiscar livros e

2- Território ou propriedade governada por um suserano, aquele que tinha o domínio do feudo.
[3] O termo “idade das trevas” é uma expressão utilizada para se referir a um período na história europeia marcado por um declínio no desenvolvimento cultural, cientifico e econômico.

materiais didáticos que lhe despertasse qualquer mínimo resquício de desaprovação. Quando o zero se viu encurralado pela igreja, que o considerava uma afronta a Deus e a sua existência, fato demarcado como um grande erro para o ser humano, na Índia, ele vislumbrou uma grande oportunidade de aceitação e consolidação.

Quando somos questionados a respeito de nossos medos, as respostas mais comuns são: o escuro, algum animal, a morte, o medo de falar em público, a pobreza, dentre outros. Mas se de repente lhe fosse pronunciada a palavra Z-E-R-O, você sentiria algum medo? Provavelmentenão. Mas se eu te contar que "o pequeno vazio oval foi visto como uma representação demoníaca, associada à cultura árabe e seu uso foi prontamente proibido" (Morais et al., 2018, p. 25), você acreditaria? Eu sei que "é difícil imaginar ter medo de um número. Contudo, o zero estava inexoravelmente ligado ao vazio - ao nada. Havia um medo primário do vazio e do caos. Também havia medo do zero" (Seife, 2001, p. 22). O plano para manchar a reputação de um recém-chegado novo número, utilizando todas artimanhas possíveis, estava declarado.

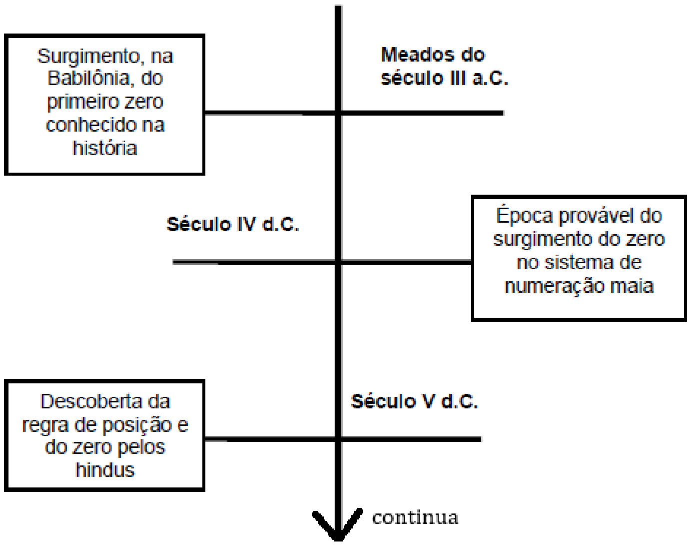
Renegado pelo ocidente e amado no oriente, o zero precisava mostrar ao restante do mundo e a igreja sua real capacidade de transformar a Matemática como um todo. Não era necessário voltar triunfalmente, só era preciso uma pequena brecha, ou alguém que fizesse essaligação, "o cristianismo rejeitou inicialmente o zero, mas o comércio não tardou a exigi-lo. O homem que reintroduziu o zero no Ocidente foi Leonardo de Pisa" (Seife, 2001, p. 70). Leonardo de Pisa é conhecido popularmente como Fibonacci, descobridor do famoso número de ouro. Apesar de não aceitar diretamente o conceito de zero e de ainda não o entender tão claramente, ele enxergou a importância desse novo número.

> Fibonacci havia aprendido matemática com os muçulmanos, então ele conhecia os algarismos arábicos, incluindo o zero. Ele incluiu o novo sistema no "Liber Abaci[4]", finalmente apresentando o zero à Europa. O livro mostrou o quão úteis eram os algarismos arábicos para fazer cálculos complexos, e os mercadores e banqueiros italianos rapidamente adotaram o novo sistema, incluindo o zero. No final, os governos tiveram que ceder diante da pressão comercial. A notação árabe foi permitida na Itália e logo se espalhou por toda a Europa. O zero havia chegado (Seife, 2001, p. 72).

A partir daqui o mundo passaria a enxergar e utilizar o zero de forma a transformá-lo no número que conhecemos atualmente. Os principais povos que utilizaram o zero então descritos abaixo, numa breve linha do tempo.

[4] O "Liber Abaci" é um livro escrito por Leonardo de Pisa, que foi publicado no ano 1202. O título "Liber Abaci" significa "O Livro do Ábaco" em latim.

Figura 5: Linha do tempo sobre povos que utilizaram de alguma forma o zero



Fonte: A origem do zero, Darice Padrão, 2008, Página 64

2.1. O zero e a contagem

O estudo de matemática, das suas diversas áreas incluindo o estudo dos números, não é um assunto isolado por região, o aprendizado dessa área não possui barreiras. Um brasileiro pode muito bem entender o que um japonês escrever, desde que se esteja usando a linguagem matemática. A linguagem dos números é universal.

Os números possuem aspectos importantes. Para Ifrah (1985, p.48), “a noção de número recobre dois aspectos complementares: O Chamado cardinal, baseado unicamente no princípio da equiparação, e o chamado ordinal, que existe ao mesmo tempo o processo de agrupamento e o da sucessão.” Na frase, “fui ao mercado e comprei quatro maçãs”, o número quatro está sendo usado para representar uma quantidade, portanto nesse caso estamos falando do quatro como cardinal. Já na frase, “em uma corrida cheguei em segundo lugar”, o dois está representando uma ordem, portanto estamos falando do dois como ordinal. Enquanto o termo “cardinal” expressa quantidades, “ordinal” representa posições ou ordem. Um deles é usado para contar, outro é usado para ordenar.

As primeiras civilizações utilizavam os números para um único propósito que era o de contagem, contar animais, comida, bens possuídos..., atividade essa fundamental e indispensável. A implementação dos números foi de fundamental importância para a evolução dos povos antigos. Todo o trabalho de utilização de pedras, gravetos, riscos em alguma superfície, acabava por ser uma tarefa árdua e complicada quando pensamos em valores numéricos altos. O tempo gasto para contar um grande rebanho de animais diminuiu drasticamente quando a utilização dos números foi implementada. Se o único propósito dos números era contar, como o zero que representa ausência de valor poderia ser considerado um número se ele não pode ser usado para contar? Essa era uma das principais indagações feitas para deslegitimar o zero como número.

Uma das formas de entendermos o progresso do desenvolvimento da ideia do zero pode ser analisando os mecanismos de contagem utilizados pelos humanos desde sempre. E um exemplo formidável disso que se constituiu, provavelmente em todas as civilizações, foram as mãos. “Maravilha de mobilidade e de eficácia, a mão do homem é o mais antigo e difundido dos acessórios de contagem e de cálculo para os povos através dos tempos” (Ifrah, 1985, p. 79). As mãos foram e sempre serão um dos grandes aliados no aprendizado da contagem. Quem nunca utilizou a mão na hora de calcular que atire a primeira pedra! O sistema de numeração que utilizamos atualmente tem grande relação com as mãos. Para George Ifrah (1985, p. 18) “como todo mundo começou por contar com seus dez dedos, a maioria dos sistemas de numeração que existem atualmente são de base dez.” Utilizar do concreto para basear o ensino dos números, sempre foi uma forma educativa possível e relevante.

Atualmente utilizamos o sistema de numeração decimal, de base dez, composto pelos seguintes algarismos: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 e 9. Mas o que é uma base numérica? Sendo bem resumido, uma base numérica é um conjunto de símbolos que viabiliza a representação de uma certa quantidade ou certo número. Existem inúmeras bases numéricas, qualquer pessoa que tenha interesse pode aprender uma das mais famosas, a base binária, base essa utilizada nos sistemas de programação dos computadores. Os povos antigos viviam em diferentes regiões e cada um deles tinha seu próprio jeito de ver o mundo, uma cultura particular e sua própria base numérica. Os sumérios e os babilônios, por exemplo, utilizavam a base 60, bem diferente do que temos hoje. É graças a essa base que temos a nossa atual contagem de tempo.

Com apenas dez algarismos, o nosso sistema decimal é capaz de manipular números que representem grandes quantidades de uma maneira simples e eficiente, para poder fazer o mesmo os povos antigos precisavam de inúmeros símbolos, o que acabava dificultando e prejudicando os sistemas de numeração que não utilizavam a base dez, isso não ocorria no sistema posicional já utilizando o zero.

O zero como algarismo e depois como número, posteriormente utilizado na representação de outros números - no fim, no meio ou na frente, teve importante papel para a constituição do sistema de numeração decimal que utilizamos hoje. No fim do número, além de representar a falta da unidade, aumenta o número, dependendo da quantidade de zeros 10, 100, 1000 vezes. No meio, representa a ausência de grupos dezenas inferiores a uma centena, ou a ausência de grupos centenas inferiores a uma milhar, e assim por diante. “Desse modo, sem ele, seria impossível escrever 102 ou 2007, por exemplo. Na frente, permite a escrita de números menores que uma unidade, nos fazendo viajar pelo mundo das partes, pelos fracionários, pelos decimais menores que a unidade” (Fabiane, 2008, p. 86).

Os números nasceram da ideia humana de contar e contar foi o primeiro registro histórico da matemática. Enquanto crianças, associamos os números a objetos, animais, frutas... e a primeira coisa envolvendo a Matemática que nos é ensinado é a representação numérica acompanhada da contagem. Na maioria das vezes, a princípio, nos é mostrado a contagem partindo do número um. Uma criança diz a sua mãe: Mamãe, aprendi a contar! um, dois, três...

Se analisarmos a forma que a criança conta percebemos que falta algo, o que seria? Se até hoje começamos aprendendo a contar partindo do um, por que antigamente deveria ser diferente? Para Charles Safe (2001, p. 12), “como não é preciso um número para expressar a falta de qualquer coisa, não ocorreu a ninguém atribuir um símbolo à ausência de objetos. E foi por esta razão que as pessoas toleraram a ausência do zero durante tanto tempo. Simplesmente não era preciso.” Ao questionar uma mulher sem filhos, quantos filhos ela possui, ela certamente responderá que não possui filhos. Responder que não possui determinada coisa é prático e dedutivo, utilizar o termo zero filhos, é muito pouco provável. A mesma coisa ocorre quando um bebê possui menos de um ano de idade. Não falamos que ele possui zero anos, para isso, é utilizado os meses, as semanas, os dias... Foi preciso que algum fator externo entrasse em jogo para que se percebesse que ao contar, a ausência de quantidade também precisava de uma representação numérica. Esse fator nada mais era do que uma abstração ainda mais marcante do que a abstração que utilizamos para os outros números. Esse fato nos mostra, a significância de um dos ensinamentos da Filosofia: em casos específicos, se afastar um pouco da realidade é um ponto positivo.

Ao longo dos anos a ideia de contar se tornou cada vez mais abstrata. Tal fato desencadeou em alguns povos o ponto preciso e ideal para começar a utilizar um algarismo que não representasse quantidade. Os números e as frações não existem na vida real, porém ao usarmos da abstração, passam a representar coisas reais. Após a aceitação do número zero, muitas outras vertentes da Matemática acabaram sendo aceitas com bem menos dificuldade. Exemplos disso são os números negativos e o infinito. “Muitos livros de história dizem que a ideia chave aqui foi a invenção do símbolo para o “nada”. Isto pode ter sido a chave para tornar a aritmética prática; mas para a matemática a ideia importante era o conceito de um novo tipo de número, que representava a ideia concreta de “nada”.” (Stewart, 2013, p.34)

Quando passamos a trabalhar com o zero na Matemática vemos que um simples número pode causar grande desordem no que já era previamente definido e aceito. Para Charles Safe (2001, p. 23) "este número insubstancial ameaça minar as mais simples operações matemáticas, como a multiplicação ou a divisão." Com o progredir dos anos diferentes olhares passaram a tentar entender e utilizar o zero em suas operações, porém ele nunca havia deixado de ser irregular. Se nos colocarmos no lugar de um matemático daquela época, temos então a entrada de um novo e estranho número diretamente em nossa vida, mudando drasticamente o rumo do que antes era definitivo e imutável. Dá para entender que um dos principais motivos da grande rejeição partia da ideia ser altamente abstrata. Representar algo que não precisava ser representado, representar o nada.

2.2. O poder do zero no estudo da Matemática

Apenas um número, inúmeros significados. Dependendo da área da matemática, o zero possui diferentes conceitos e percepções. Nessa seção, algumas dessas áreas serão exploradas.

A linguagem binária é formada por códigos, que são compostos por sequências de apenas zeros e uns. O sistema binário consegue escrever qualquer número existente utilizando somente estes dois números. "Os números binários são utilizados atualmente como um elemento indispensável na comunicação entre computadores eletrônicos digitais por serem usados como representação de número em codificações de caracteres, de imagens, de sons e de qualquer outro tipo de informação" (Mendes, 2015, p. 9). Muitas tecnologias presentes nos dias de hoje funcionam exclusivamente por meio desse sistema. Sem a existência do zero a linguagem binária provavelmente não existiria e consequentemente os computadores e todas as tecnologias que utilizam dessa linguagem também não.

Um exemplo de uma tecnologia bastante utilizada pelas pessoas e que usa os números binários é a calculadora, uma ferramenta manuseada por todos, por quem tem dificuldades em Matemática, por quem anseia por agilidade e por quem tem preguiça de fazer as contas, tanto para resolver cálculos na escola, no trabalho ou organizar as contas do mês da casa ou de uma loja, o principal instrumento usado para realizar essas funções é a calculadora. Atualmente existem diversos recursos tecnológicos avançados que nos possibilitam a facilidade do cálculo matemático. A calculadora não é uma tecnologia recente, mas ao longo dos anos vem sendo aprimorada e otimizada, a grande maioria da população possui um celular e de tabela também possui uma calculadora. As calculadoras estão por toda parte, seja aquela antiga, grande e rústica, ou as mais atuais, pequenas e compactas, seja instalada no celular, notebook ou computador, as calculadoras utilizam o sistema binário para armazenar e identificar a entrada de dados e assim conseguir resultar numa saída correta.

Sem a existência das calculadoras seria preciso utilizar o ábaco como principal ferramenta de cálculo. O ábaco era bastante usado no passado, por ser uma ferramenta prática e por ainda não existir recursos superiores para aquele tempo, esse instrumento consistia em uma tábua de madeira com cordas e fios paralelos, com ele era possível realizar, adições, subtrações, multiplicações e divisões, sendo elas simples ou complexas.

Assim que os indianos começaram a utilizar um sistema de numeração posicional os cálculos através do ábaco se tornaram mais eficientes, “a primeira coluna da direita representava à unidade simples, e da direita para a esquerda as colunas iam ascendendo, sendo a seguinte a coluna das dezenas, a terceira das centenas e assim por diante” (Guimarães, 2008, p. 48). Para que essas ferramentas de cálculo fossem aprimoradas e mostrassem seu potencial total, o zero precisou ser utilizado.

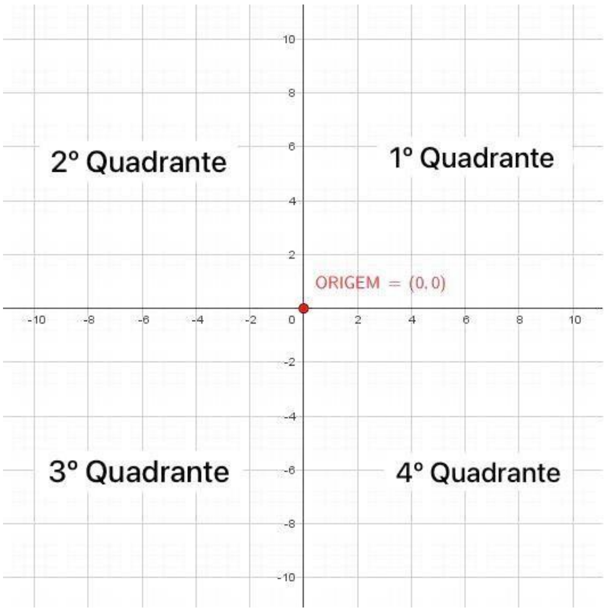
No estudo da física o zero desempenha um papel extremamente eficiente, sem ele não seria possível representar numericamente muitas grandezas, a representação de algumas delas possui às vezes quantidades extraordinariamente grandes ou pequenas, o que dificulta e atrapalha na hora de realizar cálculos. “O diâmetro da terra é de aproximadamente 10.000.000 metros. Por outro lado, outras grandezas são muito menores que a unidade, como por exemplo o raio de uma bactéria comum, que é de aproximadamente 0,000001 metros. Em casos como esses, escrever algarismos com muitos algarismos zero é problemático, podendo levar a uma maior chance de se deparar com possíveis erros. Para contornar essa dificuldade os físicos passaram a utilizar as potências de dez para representar esses valores, notação onde o zero cumpre papel essencial. O diâmetro da terra passa a ser escrito como: 10^7, já o raio de uma bactéria comum passa a ser representado como: 10^{-6}. O uso das potências de dez resulta na facilitação dos cálculos e na melhor visualização dos termos físicos.

Ainda no estudo da física, aprendemos sobre diferentes representações de temperatura, sendo elas: celsius, kelvin e fahrenheit, possuindo os celsius como padrão. Ao verificar-se o comportamento da água quando exposta a diferentes temperaturas descobrimos que quando os níveis estão muito altos a água evapora, e exatamente quando a temperatura mede zero graus celsius a água passa do estado liquido para o sólido, fenômeno chamado de “solidificação”.

O plano cartesiano é formado por duas retas perpendiculares, as retas também podem ser chamadas de eixos. Uma das retas é chamada de eixo das abscissas e a outra é o eixo das ordenadas. Definindo-se um par ordenado, e atribuindo um valor desse par no eixo das abscissas e outro valor no eixo das ordenadas é possível representar esse par por um único ponto.

Chamam-se os valores do par ordenado de coordenadas do ponto. O plano cartesiano é composto por quatro quadrantes que possuem diferentes relações com as coordenadas. No primeiro quadrante os valores das coordenadas, tanto para abscissa, quanto para ordenada, são positivos; no segundo quadrante o valor para a abscissa é negativo e para a ordena é positivo; no terceiro quadrante, ambos as coordenas são negativas; no quarto e último quadrante o valor para a abscissa permanecesse positivo e apenas o valor da ordenada é negativo. As retas do plano cartesiano se intersectam em um único ponto, esse ponto é chamado de origem e para ele atribui-se a coordenada: (0,0).

Figura 6: Plano cartesiano



Fonte: Geogebra

Nesse caso sim, podemos afirmar que a origem é o ponto central e divide os eixos do plano cartesiano. O zero novamente se mostrando presente em mais um ramo da matemática.

2.3. O uso do zero nas interações comunicativas

Quem já estudou ou estuda sabe, independentemente do nível em que se esteja, fundamental, médio ou superior, que receber como nota um valor muito próximo do zero ou o próprio zero é sinônimo de fracasso, mesmo sabendo que notas não definem um aluno, a sensação da nota baixa e o sentimento de insignificância sempre acabam se sobressaindo, a resposta mais plausível imaginada por si mesmo, pelos colegas e pelos familiares é que o aluno não aprendeu o conteúdo. Por que a Matemática sempre é taxada como umas das piores disciplinas? Justamente porque, grande parte dos alunos termina tirando notas muito baixas nas provas, o que acaba sendo descontado na disciplina. É muito simples, se perguntarmos a um aluno que tira notas boas em Matemática se ele gosta da disciplina, a resposta será sim, se o aluno em questão tirar notas baixas com frequência e sentir muita dificuldade, a resposta será que não gosta da disciplina. Receber “zero” como nota em determinados ramos da vida desperta no ser humano a sensação de repulsa.

Não apenas estampado em notas o zero desempenha um papel negativo, existem insultos relacionados ao mesmo que remetem ao *bullying*, chamar alguém de “zero à esquerda” possui o intuito de diminuir e questionar a capacidade intelectual da pessoa que recebeu o xingamento. A existência do algarismo zero à esquerda de qualquer número não altera valor, estar ou não estar não resulta em nenhuma alteração, utilizar deste xingamento como forma pejorativa tem o intuito de afirmar insignificância.

Possuir uma conta bancária repleta de zeros pode significar duas coisas dependendo de onde os zeros estejam posicionados, se estiveram à direita de um outro número, sua situação financiaria se torna invejável, agora se a posição dos zeros estiver à esquerda, sinto informar, mas sua situação financeira não vai nada bem.

As pessoas utilizam o tempo livre realizando diversas atividades, sejam elas físicas ou opções de entretenimento como filmes, livros, músicas, teatro, dança e jogos de vídeo game, esses são apenas alguns do grande leque de opções. A expressão: “zerar um jogo” é popularmente conhecida pelas pessoas que gostam de jogos no geral, utilizar essa expressão significa que o jogador chegou ao fim de determinado jogo, o finalizou.

A vida tem início, meio e fim, mas não só a vida. Tudo o que conhecemos uma hora chegará ao fim. Mas será que o fim é realmente o ponto final? Será que não há nada além? Não é possível responder esses questionamentos de forma concreta, a única opção que nos resta é a suposição. A morte é encarada de diversas formas pelos seres humanos, rodeada de uma grande interrogação. Ao discutir-se sobre esse tema, podemos viajar entre a ciência, a filosofia, a mitologia e principalmente a religião. Na religião católica, acredita-se que em algum momento Jesus ressuscitou. Para ele o fim não foi o ponto final, foi apenas um recomeço. Para os budistas, a existência não acaba com a morte, quando a vida de um ser humano chega ao fim, ela renasce em outro ser vivo. A fênix é uma criatura mítica que simboliza o renascimento, a vitória da vida sobre a morte, sendo a personificação do ciclo eterno de recomeço. Mas o que realmente esses episódios possuem em comum? A resposta é simples, todos recomeçaram do zero. O recomeçar nos dá a ideia de perseverança e esforço, tentar novamente não é um trabalho fácil, poucos possuem a capacidade e a perseverança de começar do zero.

3. O NÚMERO ZERO E A MATEMÁTICA BÁSICA

A matemática vem sendo aprimorada ano após ano, novidades sempre são descobertas e utilizadas para refinar o que já existe. Nesse capítulo conheceremos um pouco sobre algumas das principais operações básicas, suas características, funcionalidades, exemplos e principalmente como o zero se comporta diante de cada uma delas.

O número se constitui como das maiores invenções da humanidade, algo que revolucionou as formas de interpretação dos processos da vida e de convivência dos seres humanos. A partir deles outras necessidades foram possibilitadas. Daí, muito tempo após foram construídas as operações com números.

Brahmagupta, importante matemático e astrônomo indiano, foi talvez o primeiro homem a definir importantes conceitos e regras ao se realizar operações utilizando-se o zero, são usados alguns termos como "bens" para representar os números positivos e uma "dívida" para representar os negativos, sucedeu em:

> Uma dívida menos zero é uma dívida.
> Um bem menos zero é um bem.
> Zero menos zero é nulo
> Uma dívida tirada de zero é um bem.
> Enquanto que um bem tirado de zero é uma dívida.
> O produto de zero por si mesmo é nulo.
> O produto ou o quociente de dois bens é um bem.
> O produto ou quociente de duas dívidas é um bem.
> O produto ou quociente de uma dívida por um bem é uma dívida.
> O produto ou quociente de um bem por uma dívida é uma dívida." (Ifrah, apud Guimarães, 2008, p.54).

Desta citação podemos retirar diversos conceitos concretos que são usadas até hoje, sendo eles: "Uma dívida menos zero é uma dívida" – a subtração por zero de um número negativo resulta sempre em um número negativo; "Um bem menos zero é um bem" – a subtração por zero de um número positivo é sempre um número positivo; "Zero menos zero é nulo" – zero subtraído dele mesmo resulta em zero; "Uma dívida tirada de zero é um bem" – zero menos um número negativo é um número positivo; "Enquanto que um bem tirado de zero é uma dívida" – zero menos um número positivo é sempre um número negativo; "O produto de zero por si mesmo é nulo" – zero multiplicado por ele mesmo é zero; "O produto ou quociente de dois bens é um bem" – a multiplicação ou divisão de um número positivo por um número positivo é sempre um número positivo; O produto ou quociente de duas dividas é um bem – a divisão de dois números negativos é sempre um número positivo; O produto ou quociente de uma dívida por um bem é sempre uma dívida – a divisão de um número negativo por um número positivo resulta em um número negativo; “O produto ou quociente de um bem por uma dívida é uma dívida” a multiplicação ou divisão de um número positivo por um número negativo resulta em um número negativo.

As primeiras operações que aprendemos na escola são a adição e a subtração, e são, sem sombra de dúvidas, as mais utilizadas. Todas as pessoas precisam de alguma forma somar e subtrair em vários momentos de suas vidas. É praticamente impossível passar pela vida e não saber que, na aritmética decimal, um mais um é igual a dois. Um aspecto bastante comum é existir pessoas que não sabem ler, nem escrever, mas sabem resolver contas utilizando essas duas operações. Temos o primeiro contato com os sinais mais (+) e menos (-) na escola e aprendemos desde cedo o que eles representam. Ao decorrer dos dias nos deparamos com diversas situações que nos será necessário a utilização dessa habilidade, utilizar suas funções em casa, no mercado, na feira e em diversos outros ambientes em que passamos é inevitável.

Qual será o resultado da soma ou subtração de um elemento pelo zero? A resposta é simples, o elemento não se altera, mas por que isso acontece? Um número, seja ele qualquer, somado ou subtraído pelo zero não passa por nenhuma alteração, pois o zero na adição, é chamado de elemento neutro. Para que algumas operações ocorram é necessário existir dois elementos, sejam distintos ou não, portanto, supondo x, y e z sendo valores reais, existe um x e um y que somados ou subtraídos resulte em z. Na matemática, o elemento neutro é qualquer elemento cuja utilização não causa alteração alguma no outro elemento com o qual entra em operação. O zero não é o elemento neutro de todas as operações, temos como exemplo o número 1 (um) que é o elemento neutro da multiplicação.

Para a adição, uma interpretação do elemento neutro zero, é: Um acionista possuía 100,00 em ações em uma determinada empresa, ao analisar seus rendimentos, percebeu que no primeiro dia ocorreu um ganho de 2,00, seus investimentos totalizavam então 100,00 + 2,00 = 102,00 já no segundo dia não houve aumento algum, a variação das suas ações permaneceu inalterada, ou seja, $102{,}00 + 0{,}00 = 102{,}00$, percebe-se que ao se adicionar zero ao 102,00 o valor não passa por alteração. Para a subtração, uma possibilidade interpretativa, é: Paulo estava querendo emagrecer e iria começar uma dieta de dois meses, ao fim de cada mês ele subiria na balança para monitorar o seu peso, ele iniciou com 80 quilos, no primeiro mês Paulo perdeu cinco quilos e no segundo mês ele não perdeu nenhum quilo, transformando o emagrecimento de Paulo numa expressão numérica, obteremos: $80 - 5 - 0 = 75$. O zero nos dois casos, na edição e na subtração, não representa valor, portanto, ao se adicionar ou subtrair zero de algum valor, o valor não passará por nenhuma mudança.

A multiplicação é uma das quatro operações básicas presentes na Matemática, o símbolo usado para representa-la é $(\times)$. A partir de dois ou mais fatores obtemos um produto, que é o resultado obtido quando se é realizada a multiplicação. Uma das formas utilizadas didaticamente para explicar essa operação é associá-la a contagem de muitas quantidades. Imaginemos um prédio que possui 50 andares e em cada andar existem seis apartamentos. O trabalho de contagem de forma individual, do total de apartamentos, seria longo e cansativo. De rápida chegamos à resposta utilizando a multiplicação, 50×6, chegando à conclusão de que no prédio existem 300 apartamentos.

Uma forma interessante para nos referirmos à multiplicação de números inteiros nas séries iniciais da educação básica é dizer que a multiplicação se trata de uma soma de parcelas iguais. Voltando ao problema visto anteriormente, e verificamos que 50×6 nada mais é que o número 50 sendo somado a ele mesmo 6 vezes, ou seja:

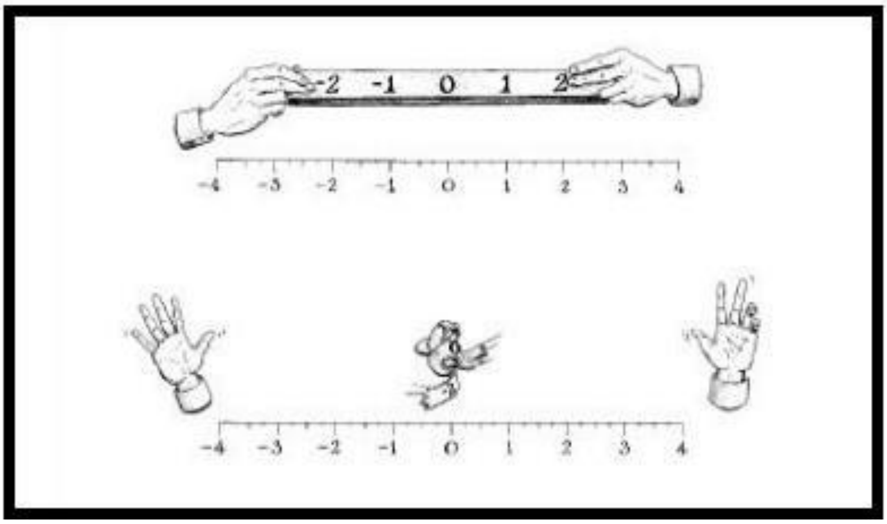
$$50 + 50 + 50 + 50 + 50 + 50 = 300$$

Na multiplicação, o elemento neutro não é o número zero, como vimos anteriormente na adição e na subtração, mas sim o número um, lembrando que o elemento neutro quando operado com algum termo, esse termo não passa por nenhuma alteração. Quando multiplicamos qualquer número por um, obteremos o próprio valor. Portanto, o número um é o elemento neutro da multiplicação. Sendo *"a"* pertencente aos reais, temos: $a \times 1 = a$.

Nesta área, o zero passa a desempenhar um papel bastante peculiar. Todo número multiplicado pelo zero resulta no zero, independe do número multiplicado, o resultado sempre será zero. Diferentemente do que acontecia na adição onde o número zero passava despercebido, não resultando em nenhuma alteração, aqui o resultado da operação é bastante significativo. Sendo "a" pertencente aos reais, temos: $a \times 0 = 0$. Nesta definição concluímos que independentemente do valor de "a" o zero seria somado a ele mesmo "a" vezes, mas apesar da quantidade de zeros, a soma deles resulta em no próprio zero. Natural, inteiro, racional, irracional ou real, a imponente força da multiplicação por zero terá sempre como resultado ele mesmo.

Se imaginarmos um elástico contendo a reta numérica e em seguida for feita uma multiplicação de qualquer número por zero, presenciaremos a seguinte ocorrência vista abaixo:

Figura 7: A mágica da multiplicação por zero



Fonte: Livro a biografia de uma ideia perigosa, Seife, Página 25, 2001

A ideia de dividir quantidades em partes iguais é inerente à natureza humana e tem sido utilizada em diversas culturas ao longo dos anos. Dividir quantidades de animais, de objetos e principalmente o dinheiro é uma ação extremamente comum no nosso dia a dia. As divisões também podem ser escritas em forma simbólica. Uma delas é na forma de fração, sendo: $\frac{a}{b}$, o *"a"* é chamado de numerador e o *"b"* de denominador. Numa fração o numerador está sendo dividido em partes iguais, a quantidade de partes que o numerador será divido dependerá do valor atribuído ao denominador. Na fração: $\frac{5}{2}$, o número cinco está sendo dividido em duas partes iguais.

Numa divisão existem vários componentes, o número que está dividindo é chamado de divisor, o que está sendo dividido é chamado de dividendo, o resultado de uma divisão é chamado de quociente, quando uma divisão não é exata, ou seja, o dividendo não é divisível pelo divisor, o valor que "sobra" é chamado de resto. Para se realizar uma divisão existe o chamado "algoritmo", ou seja, uma forma generalizada aplicada a todas as divisões, nesse caso: $d = Dc + r$, onde *"d"* é o dividendo, *"D"* o divisor, *"c"* o quociente e *"r"* o resto. Toda e qualquer divisão atende a esse algoritmo, denominado, algoritmo de Euclides.

A divisão possui relações singulares com relação ao zero, ele não é divisor de nenhum número, mas é múltiplo de todos. De forma simples, podemos imaginar que ao realizarmos uma divisão estamos dividindo um valor em partes iguais, seja essa parte inteira ou decimal. Se fôssemos dividir qualquer valor por zero, estaríamos dividindo este valor para uma quantidade zero de partes, e assim, não faria qualquer sentido. Quando estamos dividindo um número por outro, buscamos um número que multiplicado pelo divisor, tem como resultado o dividendo (no caso de uma divisão exata). Sendo o zero o divisor, não é possível encontrar um número que satisfaça essa condição, pois qualquer número multiplicado por zero sempre terá como resultado o zero. Vamos para um exemplo: Se $\frac{a}{b} = c$, com $a \neq 0$, multiplicando "b" em ambos os lados, $\frac{ba}{b} = bc$ e dividindo b por b no primeiro membro da equação, $a = bc$. Se b tiver valor zero, teríamos, $a = 0c = 0$, para qualquer valor de c, o que contraria a hipótese $a \neq 0$. Se $\frac{a}{b} = c$, com $a = 0$, e b tiver valor zero, teremos, $a = 0c \rightarrow 0 = 0.c$. Nesse caso, para qualquer valor de c, teríamos $\frac{a}{b} = c$. Mas, pelo algoritmo da divisão c é único. Novamente uma contradição. Assim, não é possível realizar a divisão por zero. Ou, de outro modo, não existe divisão por zero. Este último caso não faz sentido do ponto de vista da divisibilidade, mas, em outros contextos pode ser base para interpretações que se inserem no campo das indeterminações.

Como interpretar o resultado $\frac{0}{0}$? como não sabemos qual o resultado de $\frac{0}{0}$ chamaremos esse resultado de x, obtemos então: $\frac{0}{0} = x$. Sabemos que todo número dividido por um é ele mesmo, a seguinte proporção é encontrada: $\frac{0}{0} = \frac{x}{1}$ Mas, o teorema fundamental da proporção afirma que dada a seguinte proporção: $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, temos que: $ad = bc$. Substituindo pelos valores da expressão que estamos a analisar obtemos: $0 \cdot 1 = 0 \cdot x$. Vimos anteriormente que todo número multiplicado por zero é zero, portanto, $0 \cdot 1 = 0$, substituindo o valor encontrado na expressão acima, temos então: $0 = 0 \cdot x$. Atribuindo o valor dois ao *"x"* encontramos que $0 = 0 \cdot 2$, atribuindo 100 ao *"x"*, encontramos: $0 = 0 \cdot 100$, atribuindo 1000 ao *"x"*: $0 = 0 \cdot 1000$. Qualquer que seja o número atribuído ao *"x"* a resposta sempre será a mesma. Mas, como pode a divisão $\frac{0}{0}$ ter como resultado todos os números? Não pode, sendo assim, temos que $\frac{0}{0}$ é uma indeterminação. "Multiplicar por zero colapsa a reta numérica. Mas dividir por zero destrói toda a estrutura da matemática. Há muito poder neste simples número. Tornar-se-ia a ferramenta mais importante da matemática." (Saife, 2001, p. 27).

Numa potenciação o número posicionado na parte inferior é chamado de base, o posicionado na parte superior de expoente. Uma das ideias associadas a potenciação quando trabalhada com expoentes naturais, é que a potenciação é uma operação que representa a multiplicação de fatores iguais. Na potencia 5^2, o cinco é a base e o dois o expoente. Sendo o expoente natural, dependerá do mesmo, indicar quantas vezes a base será multiplicada por ela mesma. Sendo assim: $a^n = a \times a \times ... \times a$, a definição acima serve para quando "n" é um número natural maior que zero, e quando n = 0? A potenciação possui algumas propriedades, uma delas abrirá espaço para o bom entendimento dessa generalização.

> Sabemos que a potenciação goza da propriedade multiplicativa $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$; se queremos manter essa lei formal a entidade a definir, $X = a^n$ deve vir a ser tal que o produto $X \cdot a^n$ se efectue segundo ela: isto é, deve vir a sertal que $a^0 \cdot a^n = a^{0+n}$; mas $0 + n = n$, logo deve ser $a^0 \cdot a^n = a^n$ e esta igualdade exige que seja $a^0 = 1$ (Caraça, 1951, p. 27)

Portanto, seja *"n"* zero e *"a"* diferente de zero a resposta obtida sempre será um. Sendo tanto base, quanto expoente zeros caímos novamente no campo das indeterminações (0^0).

Concluímos aqui a apresentação das operações básicas e suas relações com o zero, em seguida iremos abordar algumas relações deste número na matemática superior. Quais conexões esse grandioso número possui com o cálculo? Um pequeno gostinho do que vem a seguir: sem o zero não existiria cálculo algum.

3.1. O zero e a matemática dos cursos universitários

O avanço da civilização, que conduz as transformações e o desenvolvimento contínuo do conhecimento, em todas as suas dimensões, nos possibilita adentrar em ideias nunca antes tocadas, experimentadas. As grandes descobertas ocorrem como se estivessem à espera de um momento adequado, como se aguardassem por pessoas certas que as conduzem ao protagonismo da transformação do meio em que vivemos. A descoberta do fogo, da agricultura,da escrita, da eletricidade, dentre inúmeras outras não mudaram apenas o rumo da civilização, (re)moldaram profundamente o mundo em que vivemos.

No desenvolvimento do conhecimento matemático uma das maiores descobertas de todos os tempos foi o cálculo diferencial e integral ou cálculo infinitesimal. Essa descoberta abriu diversas portas para o aprimoramento do conhecimento matemático, possibilitou o surgimento de vários ramos novos de estudo da Matemática, como também a exploração de tantas áreas de outras ciências. No âmbito da Matemática, poderíamos dizer, sem exagero, que quase tudo da matemática avançada, tem alguma relação, direta ou indireta, com o cálculo. Noutras ciências podem-se citar como exemplos os estudos aplicados no campo da economia, da arquitetura, das engenharias, da Física, da Química, da Biologia. Muitas dessas ciências dependem das equações diferenciais que dependem diretamente do cálculo; dependem do estudo de variações, de superfícies, de volumes, de espaços, de movimentos. E tudo isso depende do cálculo. O que seria o estudo da astronomia, no século XXI, o estudo das órbitas, dos “buracos negros”, sem o cálculo? Certamente todos esses desenvolvimentos só ocorreram graças a essa área da Matemática que, para muitos, inaugurou o que se chama a Matemática Moderna.

Para continuar falando do zero teremos que introduzir na história uma figura muito famosa quando se fala em cálculo, o infinito. Não iremos adentrar muito em sua história, (quem sabe em um trabalho futuro...), abordaremos apenas sua relação com zero. Enquanto um representa o nada, o outro representa tudo. Poderíamos chamá-los de opostos? Irmãos? O infinito não é um número, se trata de um conceito matemático abstrato. Imagine o valor mais alto que puder, imaginou? Não está nenhum pouco próximo do infinito. Dá-lhe uma explicação é uma tarefa bastante delicada. Representado pelo símbolo "∞", o infinito expressa a ideia de um valor tão alto que nunca pode ser alcançado, que não possui um limite. Um exemplo simples do que podemos dizer ser infinito: os números. “Durante centenas de anos, os matemáticos foram muito cautelosos em relação ao infinito.” (Stewart, 2016, p. 341). Não se pode realizar cálculos aritméticos corriqueiros utilizando o infinito, porém sua concepção trouxe feitos fundamentais para a construção do cálculo.

Voltando no tempo até meados do século V a.C. conheceremos um importante filósofo que ficou bastante famoso por seus paradoxos, Zenão de Eleia. Um deles em especifico nos levará a conceitos ainda não explorados anteriormente nessa pesquisa e que a partir daqui serão a principal linha de pensamento.

Aquiles e a tartaruga se trata de um famoso e complexo paradoxo criado por Zenão. Muitos filósofos e matemáticos ao longo dos anos tentaram decifra-lo. Nesse paradoxo devemos considerar um cenário hipotético. Aquiles e a tartaruga estão em uma corrida, sendoa tartaruga um animal muito lento e sendo Aquiles um atleta muito rápido, então, para tornar a corrida justa, ele decide dar a tartaruga uma pequena vantagem. Zenão argumenta que antes que Aquiles alcance a tartaruga ele deve primeiramente alcançar o último ponto em que ela esteve. Vamos supor que Aquiles deu a tartaruga uma vantagem de dez metros, primeiro ele precisa percorrer os dez metros, pois foi de onde a tartaruga iniciou, quando ele estiver chegado aos dez metros a tartaruga já terá se deslocado alguns metros, portanto, ele precisa se deslocar até o último ponto estado pela tartaruga. Porém, quando estiver chegado até esse ponto a tartaruga já haveria se movimentado um pouco. Esse processo iria continuar indefinidamente, pois ao se deslocar somente até o último ponto estado pela tartaruga, Aquiles nunca a alcançaria, pois sempre haveria uma distância infinitesimal que a tartaruga haveria andando e que ele teria que percorrer. O paradoxo nos mostra que haveria infinitas etapas a serem completadas.

> A maldição de Zenão pairou sobre a matemática por dois milênios. Aquiles parecia condenado a perseguir a tartaruga para sempre, nunca a alcançando. O infinito espreitava no enigma simples de Zenão. Os gregos ficaram perplexos com os passos infinitos de Aquiles. Eles nunca consideraram somar partes infinitas, mesmo que os passos de Aquiles se aproximassem do tamanhozero; os gregos mal conseguiam somar passos de tamanho zero sem o conceitode zero. No entanto, uma vez que o Ocidente abraçou o zero, os matemáticos começaram a domar o infinito e puseram fim à corrida de Aquiles. (Seife, 2001, p. 92).

A resolução deste paradoxo veio com o desenvolvimento da matemática e da teoria de limites. Mas antes de introduzirmos o conceito de limites para assim explicar como pode ser possível resolver o paradoxo de Aquiles, iremos adentrar na ideia anterior à de limites. Os infinitesimais.

A noção de cálculo é dividida em três tópicos, o limite, a derivada e a integral, cada um deles possuindo extrema importância na construção da perspectiva fundamental da ideia do cálculo. O cálculo que conhecemos foi idealizado de forma individual por dois matemáticos: Newton e Leibniz. "Estes dois matemáticos, aparentemente de forma independente, conceberam algoritmos que foram universalmente usados e que, em parte, são atualmente aplicados" (Ramos, 2016, p. 2). Não podemos dizer que foram os únicos, porque o papel fundamental de ambos foi aperfeiçoar rigorosamente conceitos antes vagos e incompletos. Suas versões também não ficaram perfeitas, tudo que é criado passa por uma série de melhorias para que possa demonstrar sua real capacidade. Nós seres humanos somos a prova viva de que a evolução é real e está acontecendo a todo o momento.

> No cerne da ferramenta matemática mais poderosa do mundo cientifico – o cálculo – havia uma contradição. Os inventores do cálculo, Isaac Newton e Gottfried Wilhelm Leibniz, criaram o método matemático mais poderoso de todos, dividindo por zero e somando um número infinitos de zeros. Ambos os atos eram tão ilógicos quanto somar 1 + 1 para obter 3. O cálculo, em sua essência, desafiava a lógica matemática. Aceitá-lo foi um salto de fé. Os cientistas deram esse salto, pois o cálculo é a linguagem da natureza. Para entender completamente essa linguagem, a ciência teve que conquistar os zeros infinitos. (SEIFE, 2001, p. 91).

A sequência de conteúdos que nos é apresentada é bem diferente da concepção original, até porque "o desenvolvimento do cálculo ocorreu em ordem inversa àquela que se costuma estudar o cálculo nos meios acadêmicos: o cálculo integral surgiu muito antes que o cálculo diferencial." (Melchiors e Soares, 2013, p. 68). Porém, antes dessas ideias, como então era o cálculo no estudo da Matemática? A teoria do cálculo era dada com base na teoria dos infinitesimais. Os infinitesimais pertencem a um conceito matemático já ultrapassado e substituído pela noção de limites, mas que trouxe à tona toda a área definida atualmente como cálculo. Podemos definir "a ideia de infinitésimo, como uma grandeza muito próxima de zero, de forma que às vezes pode ser desprezada, mas ao mesmo tempo, diferente de zero, de forma que possa ser dividida por ela mesma quando for conveniente" (Pasa; Binotto; Moretti, 2021, pag 2) uma definição não pode se dar ao luxo de ser maleável a depender do caso em que se é trabalhada, essas inconsistências pesaram bastante e atraíram muitos olhares curiosos, fato que deu início a um aprimoramento desse recurso. Para (Pasa; Binotto; Moretti, 2021, p. 4) "os infinitésimos, apesar de inconsistentes aos olhos dos matemáticos, ao longo de séculos possibilitaram o desenvolvimento das ideias relacionadas ao entendimento do movimento e da variação de funções, conceitos estes que embasam o Cálculo."

Antes dos infinitesimais darem início a conceituação dos limites eles foram bastante utilizados por Newton e Leibniz no que podemos chamar ser os primórdios do cálculo diferencial. Newton utilizava os infinitesimais para poder encontrar o declive da linha tangente a qualquer ponto de uma curva, o que antes se tratava de uma tarefa quase impossível. Este método trazia consigo algo que concluímos anteriormente ser puramente indeterminado, dividia-se por zero. O método utilizado por Newton era chamado de fluxões. "O método das fluxões de Newton era muito questionável. Ele dependia de uma operação matemática não convencional, mas tinha uma enorme vantagem: funcionava." (Saife, 2001, p. 101)

Supondo a equação $y = x^2 + x + 1$ que representa graficamente uma parábola, segundo Newton, y e x simbolizavam fluentes. Para Newton as duas variáveis fluíam a medidaem que o tempo passava, essas pequenas mudanças eram escritas como $\dot{y}$ e $\dot{x}$. Porém essas mudanças eram muito pequenas, eram infinitesimais. Em um instante y muda para $(y + o\dot{y})$ e
x para $(\dot{x} + o\dot{x})$, o símbolo ao lado do x e do y indica uma passagem de tempo, passagem essa tão pequena que poderia ser zero, mas não chega a ser zero.

Reescrevendo a equação, obtemos:

$$(y + o\dot{y}) = (x + o\dot{x})^2 + (x + o\dot{x}) + 1$$

Expandindo, obtemos:

$$y + o\dot{y} = x^2 + 2x(o\dot{x}) + (o\dot{x})^2 + x + o\dot{x} + 1$$
$$y + o\dot{y} = (x^2 + x + 1) + 2x(o\dot{x}) + 1(o\dot{x}) + (o\dot{x})^2$$

Como incialmente possuíamos $y = x^2 + x + 1$ podemos subtrair o y do primeiro membro e $x^2 + x + 1$do segundo membro, adquirindo então: $o\dot{y} = 2x(o\dot{x}) + 1(o\dot{x}) + (o\dot{x})^2$

Nesse momento Newton utilizou o conceito de infinitesimais e afirmou que $o\dot{x}$ era pequeno e $(o\dot{x})^2$ menor ainda, podendo então, ser ignorado. Chegando, portanto, em: $o\dot{y} = 2x(o\dot{x}) + 1(o\dot{x})$, colocando $(o\dot{x})$ em evidência e em seguida dividindo ambos os membros também por $(o\dot{x})$, obtemos: $\frac{o\dot{y}}{o\dot{x}} = 2x + 1$. Estava enfim encontrada o declive da linha tangente a qualquer ponto x da curva.

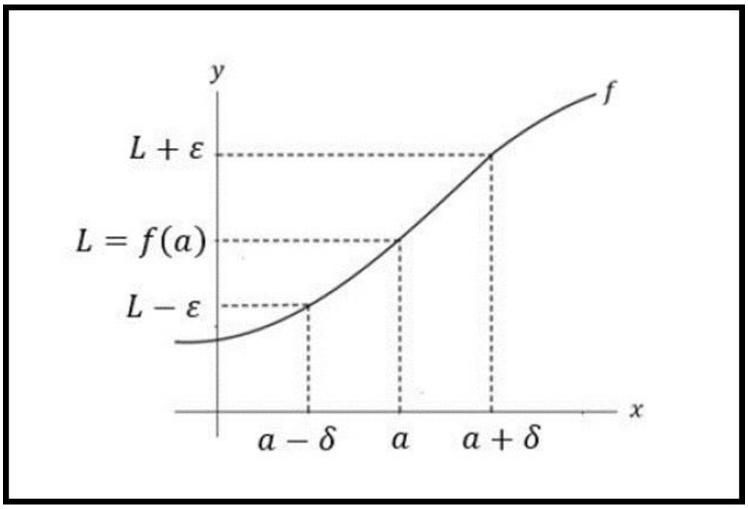
Mas havia um problema, um problema tão pequeno que poderia ser desconsiderado, mas não deixaria de ser um problema. O método criado por Newton sempre resultava na resposta correta, mas se as potencias de $o\dot{x}$ eram iguais a zero então $o\dot{x}$ teria que ser zero. Na matemática temos que se $z^2 = 0$, então $z = 0$. Sendo $o\dot{x}$ zero, um dos passos que tivermos que seguir para obter a resposta certa foi realizar a divisão por $o\dot{x}$, a divisão por zero. Mas dividir por zero é algo problemático. Dividir por zero desfaz toda a lógica matemática.

> Ninguém conseguia explicar como esses infinitesimais desapareciam quando eram elevados ao quadrado; simplesmente aceitavam o fato porque fazê-los desaparecer no momento certo dava a resposta correta. Ninguém se preocupava em dividir por zero quando convenientemente ignorar as regras da matemática explicava tudo [...] Embora desse a resposta certa, usar o cálculo era tanto um ato de fé quanto declarar uma crença em Deus. (Saife, 2001, p. 108)

De acordo com Saife(2001), Newton não gostava de infinitesimais, os pequenos "o"(zeros) em suas equações de fluxo, que às vezes agiam como zeros e às vezes como números não nulos. Possivelmente, Newton buscava algo mais consistente, que não deixasse margem para questionamentos. De certa forma, esses infinitesimais eram infinitamente pequenos, menores do que qualquer número positivo que você pudesse nomear, mas ainda de alguma forma maiores que zero.

A ideia principal que dá sustentação ao cálculo diferencial e integral é o que chamamos de limite. Mas o que podemos dizer sobre limite? Imaginemos um paraquedista saltando de um avião: “a resistência do ar impede que a velocidade do paraquedista aumente indefinidamente. A velocidade tende a uma velocidade limite, chamada de “velocidade terminal”.” (Davis, 2014, p. 67). O limite em Matemática é um conceito fundamental usado para descrever o comportamento de uma função quando a variável independente se aproxima de um valor específico. O limite nos possibilita estudar, de modo profundo, as transformações que ocorrem nos valores $f(x)$ de uma função quando chegamos cada vez mais próximo de um determinado valor de x, mesmo que a função não esteja definida neste valor. Quando falamos em aproximação temos em mente a ideia de que algo está cada vez mais próximo. Para o limite não é diferente, essa é a ideia central.

Figura 8: Representação do limite graficamente



Fonte: Livro Cálculo: volume 1

Os valores de δ (delta) e ε (épsilon) são variações extremamente pequenas para mais ou para menos, respectivamente de L e de a. É aí que começamos a perceber a importância do zero nesse estudo. Analisar o limite significa fazer o valor do δ (delta) tão pequeno quanto se queira, e, assim, os valores $a+\delta$ e $a-\delta$, tanto mais perto de a. Noutras palavras, significa fazer o δ "tender" para zero.

Os limites são usados para descrever o comportamento de uma função quando a variável independente se aproxima de um valor em específico, sendo frequentemente o zero esse número crítico de aproximação. O desenvolvimento do cálculo e do conceito de limite foi uma parte crucial da evolução da matemática, proporcionando ferramentas poderosas para entender e modelar o mundo ao nosso redor.

Ao se calcular os limites de algumas funções nem sempre se é possível determina-lo de forma direta. Isso ocorre quando a expressão que define o limite não possui uma resposta imediata. Ao calcularmos esses limites que não possuem uma resposta direta obtemos as indeterminações, sendo elas: $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$, $0 \cdot \infty$, $\infty - \infty$, 0^0, ∞^0, 1^∞. Quatro delas envolvem o número zero. Vejamos, alguns significados referentes a indeterminação $\frac{0}{0}$.

Esse tipo de indeterminação é a mais comum e, talvez, ainda a mais explorada nos primeiros cursos de cálculo diferencial. Ela tem origem quando se faz uma das variáveis tender para um número específico numa função racional e tanto o denominador quanto o numerador da expressão, tendem para zero. Assim, não se pode anlisar o limite sem que antes se resolva o problemas da indeterminação. E aí, busca-se alguma forma de simplificar a expressão.

Vamos mostrar um exemplo: Qual o limite da funão $f(x) = \frac{x^2-1}{x-1}$, quando x tende para 1? Ora, notamos que se x tende para 1 $(x-1)$ tende para zero. Também notamos que se x tende para 1 (x^2-1) tende para zero. Assim, estamos com uma indeterminação da forma $\frac{0}{0}$. Precisamos então, recorrer a um processo de simplificação (ou transformação) da expressão, de modo que quando x tender para 1 o seu denominador não tenda para zero. Percebemos, que toda a análise é estabelecida tendo-se o número zero como referência.

Fazemos, então:

$$f(x) = \frac{x^2-1}{x-1} = \frac{(x-1).(x+1)}{(x-1)}$$

Agora, certos de que x não é igual a 1, pois f não está definida em 1, podemos dividir $(x-1)$ por $(x-1)$.

$$f(x) = \frac{x^2-1}{x-1} = \frac{(x-1).(x+1)}{(x-1)} = x+1$$

E então, poddemos calcular o limite.

$$\lim_{x\to 1} f(x) = \lim_{x\to 1}\left(\frac{x^2-1}{x-1}\right) = \lim_{x\to 1}\left(\frac{(x-1).(x+1)}{(x-1)}\right) = \lim_{x\to 1}(x+1) = 2$$

O resultado do limite, embora seja escrito com uma igualdade, deve ser interpretado como uma "tendência", ou seja, quanto mais próximo o valor de x estiver de 1, mais próximo estará o valor da função f de 2.

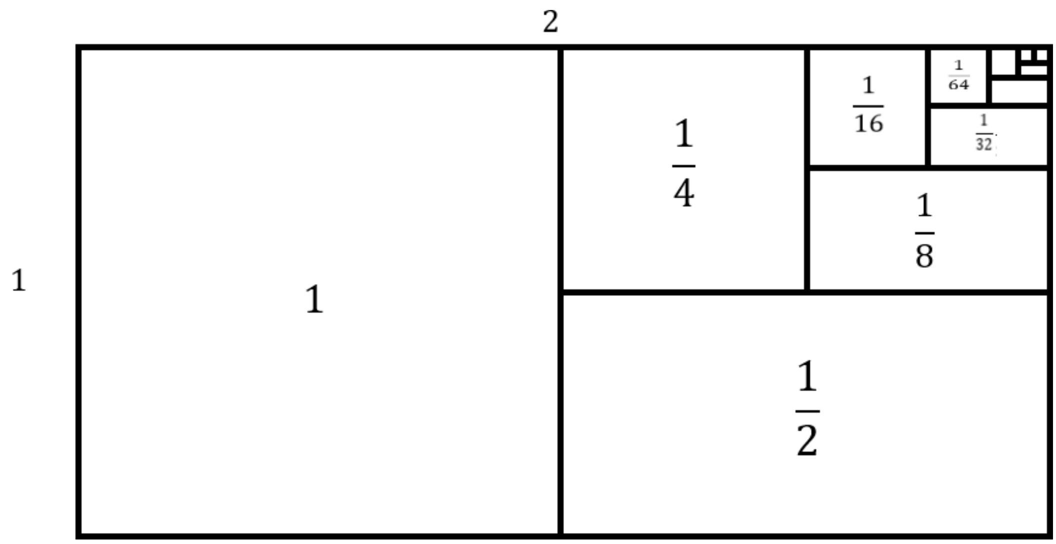
Existem alguns métodos para resolver limites que levam a essas indeterminações, que resolvem limites como estes: $\lim_{x\to 0} x \cdot \frac{1}{x} = 0 \cdot \infty$; $\lim_{x\to 0} x^x = 0^0$; $\lim_{x\to 0} \left(\frac{1}{x}\right)^x = \infty^0$. No entanto, como o intuito dessa pesquisa não é esse, não iremos percorrer esse caminho.

Aprendido o conceito de limite, retomemos o paradoxo antes proposto. O problema se encontra na subdivisão da ação, dividindo o movimento em uma infinidade de ações intermediárias, trazendo à tona o paradoxo. Na realidade isso nunca aconteceria. Porém, supondo que a subdivisão fosse possível, vamos atribuir a Aquiles a velocidade 10m/s, e a tartaruga, como mais lenta sendo metade, ou seja 5m/s, e dando 10m de vantagem para a tartaruga, encontramos a seguinte ideia: Na realidade quando se passassem 2 segundos Aquiles ultrapassaria a tartaruga, mas porquê? Passado um segundo, Aquiles estaria em 10m e a tartaruga em 15m no segundo dois, Aquiles e a tartaruga estaria na mesma posição, sendo ela 20m, daí em diante ele já conseguiria a ultrapassagem.

Agora vamos seguir os argumentos de Zenão. Em $T_1 = 1s$ Aquiles estaria em 10m e a tartaruga em 15m, para Aquiles percorrer os 5m que faltam ele precisa de ½ s, portanto, o$T_2 = \frac{1}{2}s$, no meio segundo a tartaruga andou 2,5m, para percorrer novamente essa distância Aquiles precisaria de ¼ s, então $T_3 = \frac{1}{4}s$, nesse tempo a tartaruga pode andar 1,25m e, para alcançá-la, Aquiles precisaria de $1/8$ segundos,$T_4 = \frac{1}{8}s$ e assim sucessivamente. Essa subdivisão de ações aconteceria de forma cada vez menor, cada vez mais próxima de zero, quanto mais próximo de zero a distância entre os dois for, mais próximo do infinito seriam os passos que Aquiles teria que percorrer.

Agora escrevendo matematicamente o tempo em que Aquiles precisaria para ultrapassar a tartaruga, obtemos: $T_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \cdots \frac{1}{2^n} + \cdots$, esse seria o tempo que Aquiles precisaria. O que encontramos foi nada mais, nada menos que uma série geométrica, uma soma infinita, onde o *"n"* tende ao infinito. Para encontrar uma solução exata desta soma, precisamos utilizar a fórmula da soma de uma série geométrica infinita, que é: $S = \frac{a}{1-q}$, onde "S" é a soma da série, "a" o primeiro termo, sendo ele 1 e "q" a razão, para obter a razão, basta escolher um dos termos e dividir pelo termo anterior. Sendo assim, temos $q = \frac{\frac{1}{2}}{1} = \frac{1}{2}$, substituindo os valores encontrados em S, obtemos: $s = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 1 \cdot \frac{2}{1} = 2$, ou seja, dois segundos seriam necessários para Aquiles ultrapassar a tartaruga, o mesmo valor encontrado no início do parágrafo. Dizemos então que a série converge para 2, ou tem o limite 2.

figura 9: Paradoxo de Zenão geometricamente



Fonte: Autoria própria

Podemos verificar que a área tem o limite 2. As tentativas para resolver os paradoxos de Zenão foram essenciais para a construção de grandes ideias matemáticas.

4. CONSIDERAÇÕES FINAIS

Agora que chegamos ao fim, um ponto muito interessante para se mencionar é o fato de que grande parte das pessoas que me perguntavam sobre qual seria o tema, ao escutar que seria envolvendo o zero, achavam muito estranho: “mas por que o zero?”, era o principal questionamento. E, ao terminarem de ouvir falar sobre, acabavam convencidas e achando fascinante. O simples fato de um número possuir uma grande história de concepção e aceitação tornou a escrita muito mais empolgante. Discorrer sobre o tema acabou se tornando muito trabalhoso com o passar dos capítulos, crescendo em tamanho e conteúdo, e se tornando bastante desafiador, mas chegar até aqui é reconfortante. Nunca mais verei o zero como o via antes de iniciar esta pesquisa e espero que os leitores cheguem a essa mesma conclusão. Realizar a pesquisa me permitiu adquirir inúmeras ideias sobre temas que futuramente podereiexplorar. De fato, o zero é o meu ponto de partida.

A presente pesquisa tentou responder a seguinte questão: Qual a origem do zero, como funciona a sua fantástica ligação com as operações matemáticas e quais as contribuições ele trouxe a essa ciência?

Pelo levantamento bibliográfico realizado, podemos concluir que as civilizações maia e babilônica possuíam sim um zero, inclusive um símbolo que o representasse, mas sua utilização ficou restrita à apenas marcar casa vazia. Já os indianos sim conceberam o zero, de fato, era um algarismo como os demais, além de entender a ideia de quantidade nula e realizar os primeiros cálculos utilizando o zero. Os árabes foram os responsáveis em aceitar e organizar as concepções indianas, constituindo o nosso sistema numérico e compartilhando com o mundo. Após essa generalização, pudemos enfim cantar em um único só tom e celebrar nosso sistema numérico hindu-arábico, composto pela junção dos conceitos desses dois povos, sendo o sistema utilizado até os dias atuais.

Vimos que o zero é frequentemente utilizando nas interações comunicativas, tanto para o bem quanto para o mal. Pode indicar um recomeço, um xingamento, pode ditar se você é ou não uma pessoa rica. É um número que altera drasticamente a quantidade de outro número dependendo de onde seja posicionado. Além de representar inúmeras ideias matemáticas. Posicionando o zero à direita do 1 temos 10, colocando-o na esquerda temos 0,1. O zero faz parte imprescindível dos números binários e consequentemente na criação da grande parte das tecnologias utilizadas atualmente.

Geometricamente está na origem dos planos cartesianos. Com sua utilização é possível representar em forma de notação científica valores extremamente grandes ou pequenos. Além de possuir diversas interações com as operações matemáticas.

Na adição e subtração, não causa alteração. Na multiplicação, uma grande força que transforma tudo em zero. Na divisão uma indeterminação ou uma impossibilidade, na potenciação altamente interessante. Múltiplo de todos os números existentes, mas nunca usado para dividir.

Sem o zero não haveria a compreensão de valores extremamente pequenos, os infinitesimais, precursor do cálculo. E sem cálculo tudo o que pudemos alcançar hoje como civilização moderna poderia nem existir.

O objeto central de estudo da pesquisa pairou principalmente na epistemologia do conceito do número zero. Conhecemos a ideia matemática deste número, sua origem, sua história, sua interação com a matemática e outras ciências e sua utilização nos dias atuais. Com a criação do zero pudemos enfim criar uma notação perfeita, onde todos podem manusear e realizar cálculos com os números de forma sempre precisa. Em resumo, exploramos profundamente de forma reflexiva a natureza dos conhecimentos relacionados ao conceito matemático do número zero, incorporando em algumas ocasiões uma abordagem filosófica para compreender suas origens, justificações e implicações.

Começamos do nada e voltaremos para ele. O zero é o início e o fim.

REFERÊNCIAS

BOYER, Carl B. **História da matemática**. 3. ed. São Paulo: Blucher, 2010.

CARAÇAS, Bento de Jesus. Conceitos fundamentais da matemática. Lisboa: tipografia matemática, 1951.

DAVIS, Anton Bivens. **Cálculo**: volume 1. 10^a Edição. Porto Alegre: Bookman, 2014.

DESANTI, Diego Mathias. **Indeterminações**. 2017. Tese (Mestrado profissional em Matemática) Universidade tecnológica do Paraná - UTFPR - PROFMAT, Curitiba, 2017. Disponível em: file:///C:/Users/adeny/OneDrive/Documentos/Imagens/TCC/CT_PROFMAT_M_Desanti,%20Diego%20Mathias_2017%20(1).pdf Acesso em 05 de jan. 2023.

GUIMARÃES, Fabiane. **Sentidos do zero**. 2008. 112 f. Dissertação de mestrado – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2008.
IFRAH, Georges. **Os números**: a história de uma grande invenção. 4^a Edição. São Paulo: Globo, 1989.

IFRAH, Georges. **História universal dos algarismos,** tomo 1. Rio de Janeiro: Editora nova fronteira, 1985.

MELCHIORS, Angeline; SOARES, Maricélia. História do cálculo diferencial e integral. Centro Universitário Leonardo da Vinci (UNIASSELVI), 2021.

MENDES, Herman do Lago. **Os Números Binários:** do saber escolar ao saber científico. 2015. Tese (Pós-graduação em Educação Matemática e Tecnológica curso de Mestrado) Universidade Federal de Pernambuco, Recife. Disponível em: file:///C:/Users/adeny/Downloads/TCC/Disserta%C3%A7%C3%A3o%20(N%C3%BAmeros%20Binarios).pdf Acesso em: 21 fev. 2023.

MORAIS, Beatriz Rodrigues, et al. **Sobre o que não há**: o zero, o vazio e o vácuo. Porto Alegre: Editora Fi, 2018.

PADRÃO, Darice Lascala. **A origem do zero**. 2008. Tese (Mestre Profissional em Ensino de Matemática). Pontifícia Universidade Católica De São Paulo, São Paulo. Disponível em: https://tede.pucsp.br/bitstream/handle/11332/1/Darice%20Lascala%20Padrao.pdf Acesso em 20 de out. 2022.

PINEDO, Christian José Quintana. História do número zero. Universidade Tecnológica Federal do Paraná (UTFPR), 2004.

PASA**,** Bárbara Cristina; BINOTTO, Daniele; MORETTI, Méricles Thadeu **infinitésimos**: Panorama histórico e possibilidades no ensino. EDUCAÇÃO MATEMÁTICA SEM FRONTEIRAS: Pesquisa em Educação Matemática. V. 3, 2021

SEIFE, Charles. **Zero:** a biologia de uma ideia perigosa. Lisboa: Gradiva, 2001.

STEWART, Ian. **O fantástico mundo dos números**: A matemática do zero ao infinito. 1ª edição. Zahar, 2016.

RAMOS, Pedro Lima. Os primórdios do cálculo infinitesimal. C.Q.D.– Revista Eletrônica Paulista de Matemática. v. 8. 2016.

VAINFAS, R. et al. História 1: ensino médio / Ronaldo Vainfas et. al. 3 ed. São Paulo: Saraiva, 2016

VILLAR, Mauro de Salles. Dicionário Houaiss Conciso da Língua Portuguesa. Rio de Janeiro: Editora Moderna, 2011.

INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA DA PARAÍBA
Campus Campina Grande
R. Tranqüilino Coelho Lemos, 671, Dinamérica, CEP 58432-300, Campina Grande (PB)
CNPJ: 10.783.898/0003-37 - Telefone: (83) 2102.6200

Documento Digitalizado Ostensivo (Público)

Entrega da versão final do TCC

Assunto:	Entrega da versão final do TCC
Assinado por:	Adenilton Barros
Tipo do Documento:	Anexo
Situação:	Finalizado
Nível de Acesso:	Ostensivo (Público)
Tipo do Conferência:	Cópia Simples

Documento assinado eletronicamente por:

- **Jose Adenilton de Barros Sobrinho**, **ALUNO (201811230024) DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA - CAMPINA GRANDE**, em 26/12/2023 14:55:28.

Este documento foi armazenado no SUAP em 26/12/2023. Para comprovar sua integridade, faça a leitura do QRCode ao lado ou acesse https://suap.ifpb.edu.br/verificar-documento-externo/ e forneça os dados abaixo:

Código Verificador: 1038079
Código de Autenticação: 90aeccca0f