INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA DA PARAÍBA

CURSO SUPERIOR DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

DAVYSON ODILON DE MELO

QUATRO MANEIRAS DIFERENTES DE DEMONSTRAR A FÓRMULA DA DISTÂNCIA ENTRE PONTO E RETA NO PLANO CARTESIANO OXY

CAMPINA GRANDE – PB

2023

DAVYSON ODILON DE MELO

QUATRO MANEIRAS DIFERENTES DE DEMONSTRAR A FÓRMULA DA DISTÂNCIA ENTRE PONTO E RETA NO PLANO CARTESIANO OXY

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Curso Superior de Licenciatura em Matemática do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia da Paraíba (IFPB), como requisito parcial para a obtenção do título de Licenciado em Matemática.

Orientador: Prof. Me. Weidson do A. Luna

CAMPINA GRANDE – PB

2023

M528q Melo, Davyson Odilon de.
Quatro maneiras diferentes de demonstrar a fórmula da distância entre ponto e reta no plano cartesiano OXY / Davyson Odilon de Melo. Campina Grande, 2023.
38 f. : il.

Trabalho de Conclusão de Curso (Curso Superior de Licenciatura em Matemática) - Instituto Federal da Paraíba, 2023.
Orientador: Prof. Me. Weidson do Amaral Luna.

1. Teoremas 2. Plano 3. Reta I. Luna, Weidson do Amaral II.Título.

CDU 51

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
SECRETARIA DE EDUCAÇÃO PROFISSIONAL E TECNOLÓGICA
INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA DA PARAÍBA
CAMPUS CAMPINA GRANDE

DAVYSON ODILON DE MELO

QUATRO MANEIRAS DIFERENTES DE DEMONSTRAR A FÓRMULA DA DISTÂNCIA ENTRE PONTO E RETA NO PLANO CARTESIANO OXY

Trabalho de Conclusão de Curso, aprovado como requisito parcial para a obtenção de graduação em Licenciatura em Matemática pelo Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia da Paraíba – Campus Campina Grande.

Habilitação: Licenciatura

Data da aprovação

06 / 12 / 2023.

BANCA EXAMINADORA:

Weidson Amaral Luna

ORIENTADOR: Prof. Me. Weidson do Amaral Luna – IFPB

Rodrigo Moura da Silva

AVALIADOR: Prof. Dr. Rodrigo Moura da Silva – IFPB

Emmanuel de S. F. Falcão

AVALIADOR: Prof. Me. Emmanuel de Sousa Fernandes Falcão – UEPB

“*Dedico esse trabalho primeiramente à Deus, a toda minha família, em especial a minha mãe que não teve a oportunidade de vivenciar esse momento comigo, ao meu orientador que dispôs seu tempo para contribuir nesse trabalho, professores e amigos que me auxiliaram a chegar até a conclusão do curso*”.

AGRADECIMENTOS

À Deus pela minha vida e por ter me guiado até presente o momento, ao meu pai, Severino do Ramo Pereira de Melo, que tenho como referência como pessoa e como docente, especificamente, como professor de matemática.

Aos familiares e amigos que sempre me ajudaram nos momentos difíceis, orando e me incentivando na busca dos meus objetivos.

À minha esposa, Jessyane Dias Travassos, que além de me incentivar nos estudos, esteve comigo durante toda essa caminhada.

Aos meus filhos: Davi Lucas Travassos de Melo e Beatriz Travassos de Melo, mesmo que não entendam muito sobre a vida, pois são ainda crianças, mas é por eles que sempre tenho buscado crescer.

Ao meu orientador, amigo e professor Weidson do Amaral Luna, ao qual tenho admiração por sua personalidade, foi meu professor nas primeiras disciplinas do curso, me auxiliou por toda essa jornada, sempre esteve a disposição para me ajudar, compartilhando seus conhecimentos. Uma pessoa amigável e sincera que tanto me ensinou, que sempre buscava a melhor forma de ensino, que propiciasse o melhor aprendizado. E ainda, por disponibilizar seu tempo para compartilhar ainda mais seus conhecimentos na orientação desse trabalho de conclusão de curso.

Aos professores de licenciatura em matemática do campus, alguns não tive tanta aproximação, alguns auxiliando de forma indireta, mas agradeço por esse corpo técnico do Instituto Federal da Paraíba – IFPB que é recheado de professores bem capacitados.

Não poderia faltar, os meus amigos e colegas de turma que convivi e compartilhamos experiências ao longo desses anos e que sempre estavam à disposição para me auxiliar nas horas mais difíceis.

Aos professores da banca examinadora por disponibilizar seu tempo em ler o meu Trabalho de Conclusão de Curso - TCC e está presente na minha defesa do mesmo.

Por fim, ao IFPB, que abriu as portas para minha graduação. Sempre serei grato pela oportunidade.

"*Vocês sabem que escrevo vagarosamente. Isso se deve principalmente ao fato de que nunca estou satisfeito até poder dizer o máximo possível em poucas palavras, e escrever concisamente toma muito mais tempo do que quando se é prolixo*."

Karl Friedrick Gauss (1777 – 1855).

RESUMO

Este trabalho trata-se de um manual de consulta para Professores de matemática e para alunos do curso de Licenciatura em matemática. Nele apresentamos quatro maneiras diferentes de demonstrar a fórmula da distância entre ponto e reta no Plano Cartesiano OXY. Ao mesmo tempo, este trabalho pode ser considerado, uma proposta de ensino do conteúdo distância entre ponto e reta no Plano Cartesiano OXY, uma vez que foi empregado todo um raciocínio-lógico nas demonstrações, além de todo um detalhamento das mesmas. Apresentamos, ainda, um resgate histórico das contribuições de Euclides e de René Descartes para a Matemática. Acreditamos que o que diferencia essa proposta de ensino de outras encontradas nos livros didáticos matemática é o fato de usarmos uma linguagem que facilitasse a compreensão por parte do leitor, pelo fato de não pularmos etapas nas demonstrações e de termos inseridos um número considerável de figuras, tudo para melhor a compreensão por parte do leitor.

Palavras-chave: Distância, Ponto, Reta, Teoremas, Demonstrações.

ABSTRACT

This work is a reference manual for Mathematics Teachers and Lic. in math. In it, we present four different ways of demonstrating the formula for the distance between two points in the OXY Cartesian Plane. At the same time, this work can also be considered a proposal for teaching the content of the distance between two points in the OXY Cartesian Plane, since a whole logical reasoning was used in the demonstrations, in addition to all their detailing. We also present a historical review of the contributions of Euclides and René Descartes to Mathematics. We believe that what differentiates this teaching proposal from others found in mathematics textbooks is the fact that we use a language that facilitates the understanding of the bed, because we do not skip steps in the demonstrations and we have inserted a considerable number of figures, all for better understanding by the reader.

Keywords: Distance, Point, Line, Theorems, Demonstrations.

SUMÁRIO

1. INTRODUÇÃO

Neste capítulo serão apresentados os aspectos iniciais relacionados a este trabalho, abordando, na sequência, os seguintes tópicos: a *contextualização*; a *justificativa*, os *objetivos*; a *metodologia*; o *público alvo* ao qual está direcionado; os *conhecimentos prévios* para o desenvolvimento desta proposta e a *estruturação* dos capítulos subsequentes.

1.1. CONTEXTUALIZAÇÃO

A palavra ***matemática*** deriva da palavra Grega "*matemathike*". Esta por sua vez é formada pela junção de outras duas palavras, a saber: "*máthema*", que significa: *compreensão*, *explicação*, *ciência*, *conhecimento*, *aprendizagem*; "*thike*", que significa *arte*. Portanto, a matemática é a arte ou técnica da compreensão, de conhecer, de entender os números e as formas geométricas [3].

A palavra ***teorema*** vem do Grego, "*théorema*". A palavra "*théo*" significa *deus* e a palavra "*rema*" significa *afirmação* ou *palavra falada.* Assim, a palavra teorema significa *afirmação de Deus* ou *palavra falada por Deus*. Esse significado é bem propício, uma vez, em algumas versões da história, Thales de Mileto e Pitágoras eram considerados *deuses*. Suas afirmações eram chamadas de teoremas, que significa: afirmação do deus Thales ou afirmação do deus Pitágoras [3].

A palavra ***demonstração*** vem do Latin, "*demonstration*", que significa: mostrar, fazer ver, provar, revelar [3].

A palavra ***prova*** vem do Latin, "*probo*", que significa: *correto*, *honesto*, do verbo "*probare*" que significa *julgar com honestidade* [3].

Na matemática, um teorema é uma propriedade que só deve ser aceita como verdadeira mediante uma demonstração ou uma prova [3].

Demonstrar é um ato de persuasão, de convencimento, baseado em argumentações lógico-dedutivas. As pessoas não devem acreditar num fato matemático, elas devem ser convencidas que o fato é válido ou verdadeiro por meio de uma demonstração. Neste sentido, a forma como está escrita à demonstração e de extrema importância, uma vez que nem sempre o escritor estará por perto para explicar algo do texto que não ficou claro. Foi nesta perspectiva que nos dispusemos a elaborar este material [3].

1.2. JUSTIFICATIVA

Defendemos ser importante a construção de um material que possibilite ao professor se aprofundar na demonstração da fórmula do cálculo da distância entre ponto e reta no Plano Cartesiano OXY. E mais, que apresente múltiplas formas distintas de comprovar a veracidade da fórmula citada, possibilitando ao professor escolher uma delas para exibir aos seus alunos.

1.3. OBJETIVOS

Este trabalho tem por objetivo apresentar quatro maneiras diferentes de demonstrar a fórmula da distância entre ponto e reta no Plano Cartesiano OXY, tornando este material um manual de consulta para Professores de matemática e para alunos do curso de Lic. em matemática.

Acreditamos que o que diferencia essa proposta de ensino de outras encontradas nos livros didáticos matemática é o fato de termos: usado uma linguagem que facilitasse a compreensão por parte do leitor, inserido um número considerável de figuras, tudo para melhorar entendimento por parte do leitor, empregado todo um raciocínio-lógico nas demonstrações, não pulando etapas no processo, além de todo um detalhamento empregado mesmas. Disso, este trabalho pode ser considerado, ainda, uma proposta de ensino do conteúdo distância entre ponto e reta no Plano Cartesiano OXY.

1.4. METODOLOGIA

Para a construção deste material, foi realizada uma pesquisa bibliográfica que permitiu amparar o presente trabalho, assim como propiciar o trajeto do processo de investigação.

1.5. PÚBLICO-ALVO

O presente trabalho é direcionado aos professores de matemática e para alunos de graduação em Lic. em Matemática, como manual de consulta e/ou proposta de ensino da demonstração da fórmula da distância entre ponto e reta no Plano Cartesiano OXY.

1.6. CONHECIMENTOS PRÉVIOS

Admitiremos que o leitor tenha adquirido, por meio da sua intuição, seu cotidiano, sua formação e de sua experiência em sala de aula, conhecimentos de *Geometria Euclidiana*

Plana, de *Geometria Analítica* e de *Álgebra Vetorial*.

1.7. ESTRUTURA DOS CAPÍTULOS SUBSEQUENTES

O segundo capítulo – ***Aspectos Históricos*** – Consta de um resgate histórico acerca das contribuições de Euclides e de René Descartes para a Matemática.

No terceiro – ***Distância Entre Ponto e Reta no Plano Cartesiano*** $\boldsymbol{OXY}$ – Apresenta a definição de distância entre ponto e reta no Plano Cartesiano OXY, o teorema que trata da fórmula do cálculo da distância entre ponto e reta no Plano Cartesiano OXY e quatro demonstrações diferentes para provar a veracidade do referido teorema.

No quarto – ***Considerações Finais*** – Concluímos que é perfeitamente possível demonstrar a fórmula do cálculo da distância entre ponto e reta no Plano Cartesiano $\boldsymbol{OXY}$ de pelo menos quatro maneiras diferentes, deixando a cargo do Professor escolher qual ou quais levar para apresentar em sua sala de aula.

2. ASPECTOS HISTÓRICOS

Neste capítulo faremos um resumo do resgate histórico acerca de Euclides e de René Descartes e suas contribuições para a Matemática.

2.1. ALGUNS ASPECTOS HISTÓRICOS RELACIONADOS À GEOMETRIA

Não podemos dizer ao certo quando e onde surgiu a matemática, pois antes mesmo das civilizações, os seres humanos utilizavam habilidades naturais que envolvessem a matemática para sua sobrevivência, diante disso, seu surgimento fica sem definição, porém com o conhecimento de que os povos antigos utilizavam a matemática, sem saber que aquilo era uma ciência [1].

A geometria, um dos elementos matemáticos que estuda medidas e formas de figuras planas ou espaciais, surgiu da necessidade de o homem efetuar medidas, distâncias e dimensões do meio em que viviam [1].

Tendo sua origem desde a antiguidade, já se vislumbravam algumas utilizações da geometria, povos como os egípcios utilizaram na construção das pirâmides, assírios e babilônicos lidavam com a primeiras figuras geométricas onde eram utilizados para problemas do cotidiano como para medir áreas e construções [1], que segundo Platão, um estudo indispensável para compreensão do mundo natural e das ideias abstratas.

Mesmo sendo utilizada desde a antiguidade, a geometria não era tratada como um campo de estudo. Platão e Euclides com suas concepções, tiveram grande influências para o entendimento da geometria [6].

Assim como outros povos, os gregos tiveram grande influência na matemática moderna e no desenvolvimento da geometria com contribuições que são vistas até os dias atuais [1], [2]. Os gregos, foram os primeiros a tratar por meio de axiomas a geometria de modo formal com definições e modelos básicos como pontos, retas, ângulos e figuras geométricas.

Outro grego muito importante na história da matemática foi Pitágoras, que teve sua influência da geometria na Grécia. Apoiados por seus discípulos, Pitágoras trouxe o estudo e as relações de lados e ângulos dos triângulos, que resultou no Teorema de Pitágoras [6].

Euclides introduz suas contribuições na Geometria, e seus estudos ficaram conhecidos como os mais antigos ao mesmo tempo mais utilizados na área da geometria [1], que a partir de axiomas que mostram proposições, algumas tratadas como verdadeiras que também auxiliaram na construção de teoremas, definições e postulados.

2.2. EUCLIDES E ALGUMAS DE SUAS CONTRIBUIÇÕES PARA GEOMETRIA PLANA

Nascido no Egito, Euclides de Alexandria, intitulado como pai da Geometria, viveu por volta de 300 a.C., estudou em Atenas e deixou uma contribuição importante para geometria. Chamava Geometria Euclidiana Plana em sua homenagem. Escreveu a obra, que se conceitua como uma das principais obras de Euclides, "Os Elementos" que é conhecido como o mais antigo texto da matemática grega e que chega completo nos dias atuais [6]. A obra unifica a álgebra, aritmética e a geometria, trazendo definições que viriam a contribuir com geometria plana. Daí então "*Os Elementos*" de Euclides, tornou-se o livro matemático mais estudado e mais reproduzido do mundo, reproduzido de forma impressa e cópias manuscritas [1], [2].

Figura 2.1 – Euclides

Fonte: UCHÔA, 2018

Euclides estabeleceu as bases para a geometria e influenciou significativamente o desenvolvimento da Matemática na área da geometria. Ao longo dos séculos, ficou conhecido por introduzir o método dedutivo, axiomático na Matemática, um método que é amplamente utilizado até hoje. Porém vale ressaltar que apesar de ser uma das obras mais importantes para desenvolvimento da geometria, *"Os elementos"* de Euclides não abrangia todo conhecimento matemático, como podemos verificar:

> *Os Elementos* como tendo com o resto da matemática o mesmo tipo de relação que as letras do alfabeto com a linguagem. Se *Os Elementos* pretendesse ser uma fonte completa de informações, o autor provavelmente incluiria referências a outros autores, informações sobre pesquisas recentes e explicações informais. Porém, *Os elementos* se limitam austeramente ao seu campo – a exposição em ordem lógica dos assuntos básicos da matemática elementar (Boyer, 2011, p 89).

Euclides preservou sua obra tendo como base um conjunto de axiomas e definições básicas, a partir dos quais constituem uma estrutura lógica para dedução de teoremas. Esse método definiu um padrão para o rigor matemático, enfatizando a importância de provar afirmações a partir de argumentos sólidos e bem fundamentados, e através de reflexões e teorias influenciaram para que a geometria não se baseasse apenas só na forma que é vista, mas também na maneira que é entendida, chegando à abstração idealista geral para além de observações reais. “Os elementos” são separados em 13 livros ou capítulos sendo os seus primeiros capítulos específicos para geometria plana elementar, e os demais incluídos teoria dos números e geometria no espaço [2], [10].

Os primeiros livros ou capítulos da obra de Euclides, são abordadas por tópicos que lidam com a geometria relacionado a figuras planas, retas, ângulos e sólidos que são sempre preservados pelo rigor matemático. Euclides apresentou teoremas e provas que tornando-as a base para a compreensão da geometria, se tornou fundamental para o desenvolvimento da Matemática [10].

Ainda, dividiu a construção da geometria em definições e axiomas divididos por grupos de noções comuns e postulados que a partir deles pouco mais de 400 teoremas são deduzidos. As noções comuns são tratadas como hipóteses aceitáveis, já os postulados são considerados elementos específicos da geometria [1], [10]. São eles:

Noções comuns:

1. Coisas que são iguais a uma mesma coisa são também iguais entre si.
2. Se iguais são adicionados a iguais, os resultados são iguais.
3. Se iguais são subtraídos de iguais, os restos são iguais.
4. Coisas que coincidem com outras coisas são iguais uma à outra.
5. O todo é maior do que qualquer de suas partes.

Postulados:

1. Pode-se traçar uma reta por quaisquer dois pontos.
2. Pode-se continuar uma reta infinitamente.
3. Pode-se descrever uma circunferência com qualquer centro e qualquer raio.

4. Todos os ângulos retos são iguais.

5. Se uma reta cortar duas outras retas formando ângulos colaterais internos cuja soma é menor do que dois retos, então as duas retas, se continuadas infinitamente, encontram-se no lado no qual estão os ângulos cuja soma é menor do que dois retos.

Matemáticos tomavam a obra de Euclides como referência e serviu como principal referência para o ensino de Matemática durante séculos. Antes das descobertas de Euclides, a matemática era demonstrada por fatos. Com vista nisso, Euclides mostrou a matemática, mais especificamente a geometria de uma forma sistemática e axiomática conhecida como “sistema dedutivo” [1].

Obras de Euclides de Alexandria serviram de base e inspiração para muitos matemáticos posteriores, e vários trabalhos importantes foram influenciados por “Os elementos”. Não só matemáticos como também físicos e filósofos tomaram suas obras com base em estudos de Euclides. É importante ressaltar que as contribuições de Euclides são vistas por séculos, moldando muitos campos da matemática e inspirando gerações de matemáticos a explorar novas ideias e desenvolver novos conceitos [1].

Mesmo passando-se os tempos, a geometria euclidiana apresentada por Euclides a partir de suas obras, é estudada mundialmente por sucessores matemáticos, físicos, filósofos, ainda atualmente é vista nas escolas e é utilizada não só envolvendo-se na matemática, mas também outras ciências [10].

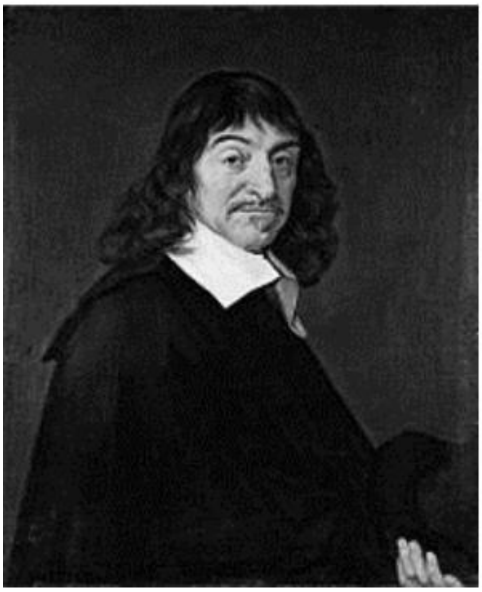
Um ponto relevante a ser dito é que ao longo do tempo foi encontrando falhas na obra de Euclides “Os Elementos”, porém, para a natureza dessa obra, esses pontos são vistos, pontualmente, como irrelevantes, levando em consideração as contribuições trazidas, a importância que se tornou para matemática e outras ciências, porém com um peso maior na matemática especialmente na área da Geometria Plana. Portanto, é fato que a importância da geometria euclidiana passa de estudos matemáticos até o cotidiano das pessoas. Áreas como engenharia, filosofia, matemática dentre outras ciências gerais, utilizam suas obras pois nelas desenvolve o pensamento lógico e métodos rigorosos de investigação e argumentação [9].

2.3. RENÉ DESCARTES E ALGUMAS DE SUAS CONTRIBUIÇÕES PARA GEOMETRIA ANALÍTICA

René Descartes, físico, passou parte de sua vida se dedicando a filosofia, conceituado como matemático do século XVII, francês de La Haye, nasceu em 31 de março de 1596, ficou conhecido como o pai da filosofia moderna e importante contribuinte da geometria analítica [8], [9]. Desempenhou um papel importante na Matemática que revolucionou a disciplina. Sua contribuição mais importante e a mais utilizada até os dias atuais foi a geometria analítica, uma criação que uniu a geometria à álgebra. Fascinado pelo estudo da Matemática, René Descartes transformou a maneira de como problemas geométricos eram abordados e resolvidos.

Estudante da escola Jesuíta La Flèche e mais tarde graduou-se em Direito em Poiteires, René Descartes além de dedicar-se a outras áreas, também reservou uma parte do seu tempo para o estudo da Matemática. Ainda passou alguns anos de sua vida se dedicando ao exército do príncipe Maurício de Orange [8].

Figura 2.2 - René Descartes



Fonte: MARTINS, LOPES E DARSIE, 2023.

Após sua passagem pela carreira militar, Descartes dedicou-se profundamente à matemática, aproveitou o pesado frio do inverno de 1619 para ficar um tempo a mais na cama ao acordar no início do dia, para estudar a matemática [8]. Para Descartes o estudo no início do dia era mais rentável e foi onde descobriu a fórmula dos poliedros, mais conhecida como a fórmula de Euller: $V + F - A = 2$, na qual a sequência de letras representam os vértices, faces e arestas, respectivamente [2]. Vale destacar também o problema de quadratura do círculo o qual foi visto suas primeiras resoluções por Descartes, porém atribuídas a outros geômetras como Euller.

Autor de grandes obras, referente a filosofia, física e matemática, Descartes por onde passava levava seus conhecimentos e deixava os escritos. Por volta de 1628, Descartes começou a introduzir a geometria analítica, que em virtude de seus métodos resolveu o problema de três e quatro retas de Papus que resultou na obra conhecida como *"La géométria"* (o texto mais antigo de estudo da álgebra), ampliando os conhecimentos da geometria analítica [8].

É importante frisar que a obra *"La géométria",* foi apenas mais um apêndice do *Discours de la méthode,* que juntava-se a mais dois, *La dioptrique* e *Les météores,* ambos voltados para física e filosofia [8], [9]. Entretanto, Descartes aproveitou para aproximar a geometria analítica da geometria cartesiana. A ideia era representar os cálculos aritméticos com operações de geometria.

Nessa representação foi utilizado um sistema de pontos no plano usando pares de números, ou coordenadas cartesianas. Esse sistema de coordenadas permitiu que formas geométricas fossem descritas por equações algébricas, e equações algébricas pudessem ser visualizadas como figuras geométricas, assim justificando a introdução de termos aritméticos em geometria. Nessa obra, Descartes utilizou uma linguagem mais formal, aquelas entendidas por leitores que compreenderam obras passadas e que tinham conhecimento de geometria [8].

Com a geometria analítica, Descartes tornou possível resolver problemas geométricos complexos traduzindo-os em problemas algébricos. Ainda, com as contribuições de René Descartes, resoluções envolvendo figuras geométricas e propriedades da geometria se tornaram possíveis. Com isso, possibilitou o avanço na área da geometria [2].

Antes da geometria analítica, a álgebra e a geometria eram tratadas de formas isoladas. A geometria analítica unificou essas duas áreas, permitindo que problemas geométricos fossem abordados usando técnicas algébricas. Por mais que parecessem distintas, as contribuições de Descartes deram espaço a essa unificação, abrindo portas para uma compreensão mais profunda das relações matemáticas [2].

Descartes defendia o método técnico, pois prezava muito a importância da observação, experimentação e raciocínio lógico. Suas contribuições mostravam o compromisso com a Matemática visando a precisão e o rigor. A geometria analítica de

Descartes não apenas proporcionou uma ferramenta poderosa para a resolução de problemas, mas também enfatizou a necessidade de provas sólidas e deduções lógicas [8].

A introdução da geometria analítica por Descartes teve e ainda causa um impacto essencial na Matemática. Logo, o plano cartesiano tomou esse nome em sua homenagem, um sistema matemático que conta com duas retas perpendiculares e são chamados de eixos cartesiano [8]. A abordagem algébrica à geometria revolucionou o campo, influenciando matemáticos posteriores e físicos que usaram conceitos semelhantes para desenvolver o cálculo diferencial e integral.

René Descartes tornou-se um dos grandes nomes significativos na Matemática ao introduzir a geometria analítica, trazer a conexão com a álgebra e promover métodos para resoluções que as envolvesse. Sua abordagem inovadora transformou a forma de lidar com problemas geométricos, a maneira de como eram compreendidos e resolvidos, e sua ênfase e rigor matemático continuou a influenciar a forma como os matemáticos abordam os desafios da área até os dias atuais [2].

3. DISTÂNCIA ENTRE PONTO E RETA

Neste capítulo abordaremos a definição de distância entre ponto e reta no Plano Cartesiano OXY, o teorema que trata da fórmula do cálculo da distância entre ponto e reta no Plano Cartesiano OXY e quatro demonstrações diferentes para provar a veracidade do referido teorema. Na construção desse capítulo foram usadas as referências: [4], [5] e [7].

Definição 3.1. (***Distância Entre Ponto e Reta***) Dado um ponto P não pertencente a uma reta r, chama-se de projeção ortogonal de P sobre r ao ponto, digamos P', de interseção da reta r com a perpendicular a ela conduzida por aquele ponto. O ponto P' também é chamado de pé da perpendicular baixada de P sobre r. O comprimento ou o tamanho do segmento PP' é denominado de distância entre o ponto P e a reta r.

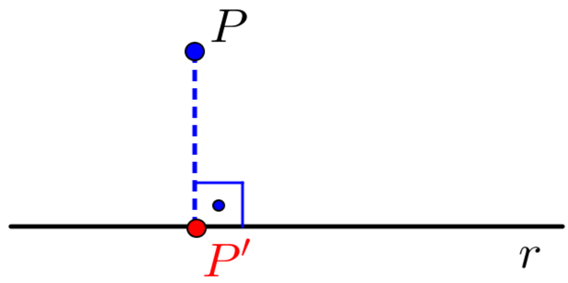


Figura 3.1: Projeção Ortogonal de um Ponto Sobre uma Reta.

Teorema 3.2. (***Distância Entre Ponto e Reta***) *Dados um ponto $P(x_P, y_P)$ e uma reta $r: Ax + By + C = 0$, ambos pertencentes ao Plano Cartesiano OXY, a distância entre eles, denotada por $d(P,r)$, é dada por*:

$$\boxed{\boldsymbol{d(P,r) = \frac{|Ax_P + By_P + c|}{\sqrt{A^2 + B^2}}}.}$$

<u>**Primeira Maneira de Demonstrar o Teorema 3.2.**</u> No Plano Cartesiano OXY, consideremos um ponto $P(x_P, y_P)$ não pertencente a uma reta $r: Ax + By + C = 0$. E mais:

- Seja $Q(x_Q, y_Q)$ o pé da perpendicular baixada de P sobre r;

- Seja $R(x_R, y_R)$ o ponto de interseção da reta que passa por P e é paralela ao eixo OY com a reta r. Note que, por construção, $x_R = x_P$, *Figura* 3.2, e mais:

$$A(x_P) + By_R + C = 0.$$

Assim, isolando y_R, obtemos:

$$y_R = -\frac{Ax_P + C}{B}.$$

Logo:

$$R\left(x_P, -\frac{Ax_P + C}{B}\right).$$

- Seja $T(x_T, y_T)$ um ponto pertencente à r tal que $x_T = x_P + 1$. Assim:

$$A(x_P + 1) + By_T + C = 0.$$

Assim, isolando y_T, obtemos:

$$y_T = -\frac{Ax_P + A + C}{B}.$$

Logo:

$$T\left(x_P + 1, -\frac{Ax_P + A + C}{B}\right).$$

- Seja $S(x_S, y_S)$ o ponto da interseção da reta que passa pelo ponto R e é paralelo ao eixo OX com a reta que passa pelo ponto $T\left(x_P + 1, -\frac{Ax_P + A + C}{B}\right)$ e é paralela ao eixo OY. Note que, por construção, $x_S = x_T$ e $y_S = y_R$. Logo:

$$S\left(x_P + 1, -\frac{Ax_P + C}{B}\right).$$

Note que, são ângulos $S\hat{R}T = \alpha$ e $P\hat{R}Q = \beta$ são complementares, assim como o são ângulos $R\hat{P}Q$ e $P\hat{R}Q = \beta$. Assim:

$$\begin{cases} S\hat{R}T + P\hat{R}Q = 90° \\ R\hat{P}Q + P\hat{R}Q = 90° \end{cases}.$$

Ou seja:

$$\begin{cases} \alpha + \beta = 90° \\ R\hat{P}Q + \beta = 90° \end{cases}.$$

Então:

$$R\hat{P}Q + \beta = \alpha + \beta.$$

Logo:

$$R\hat{P}Q = \alpha.$$

Com isso, comparando os triângulos PQR e RST, percebemos que eles possuem dois ângulos correspondentes congruentes. Por conseguinte, da *Geometria Euclidiana Plana*, sabemos que esses triângulos são semelhantes. Consequentemente, podemos estabelecer a seguinte proporção entre a medida dos lados desses triângulos:

$$\frac{\overline{PQ}}{\overline{RS}} = \frac{\overline{PR}}{\overline{RT}} \tag{3.1}$$

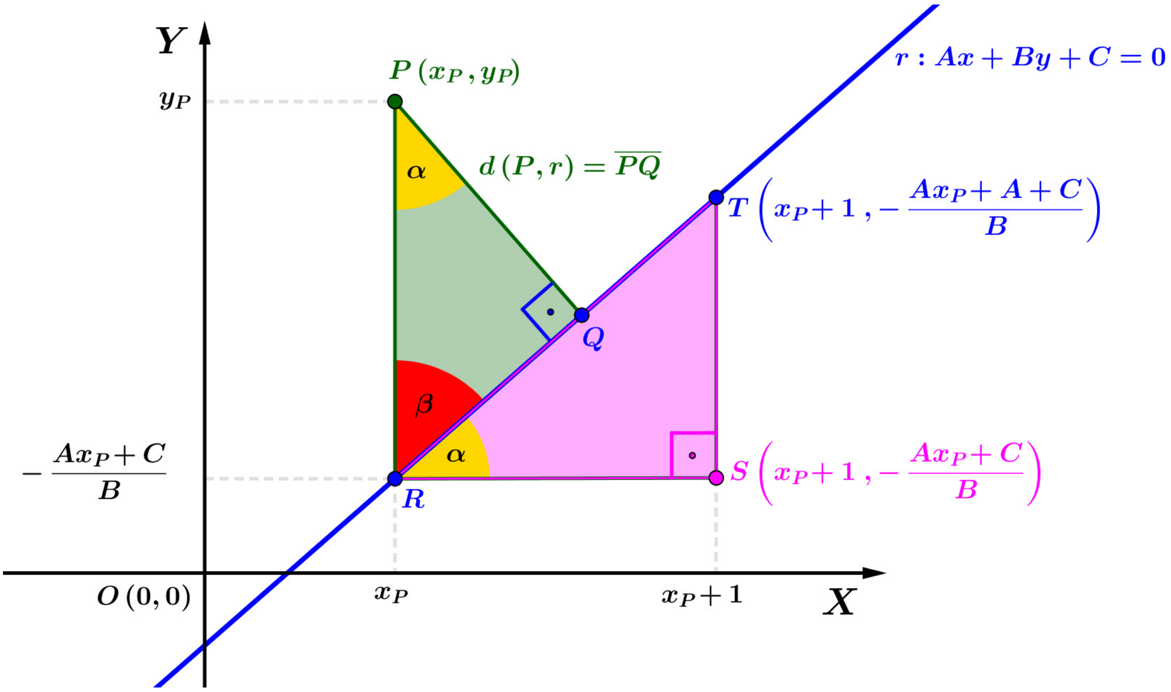


Figura 3.2: Distância Entre o Ponto P e a Reta r.

Da Definição 3.1, sabemos que:

$$\overline{PQ} = d(P,r). \tag{3.2}$$

Sabemos também que:

$$\overline{RS} = x_S - x_R = (x_P + 1) - (x_P) = 1. \tag{3.3}$$

E mais:

$$\overline{PR} = y_P - y_R = \left|y_P + \frac{Ax_P + C}{B}\right| = \left|\frac{Ax_P + By_P + C}{B}\right|. \tag{3.4}$$

Temos também, pelo Teorema de Pitágoras, que:

$$\overline{RT} = \sqrt{(\overline{ST})^2 + (\overline{RS})^2} = \sqrt{\left(\frac{-Ax_P - A - C}{B} + \frac{Ax_P + C}{B}\right)^2 + (1)^2} = \sqrt{\left(-\frac{A}{B}\right)^2 + 1}.$$

Ou ainda:

$$\overline{RT} = \sqrt{\left(-\frac{A}{B}\right)^2 + 1}.$$

Ou seja:

$$\overline{RT} = \sqrt{\frac{A^2 + B^2}{B^2}}. \tag{3.5}$$

Substituindo **(3.2)**, **(3.3)**, **(3.4**) e **(3.5)** em **(3.1)**, obtemos:

$$\frac{d(P,r)}{1} = \frac{\left|\frac{Ax_P + By_P + C}{B}\right|}{\sqrt{\frac{A^2 + B^2}{B^2}}}.$$

Ou ainda:

$$d(P,r) = \frac{\frac{1}{|B|} \cdot |Ax_P + By_P + c|}{\frac{1}{|B|} \cdot \sqrt{A^2 + B^2}}.$$

Logo:

$$\boxed{\boldsymbol{d(P,r) = \frac{|Ax_P + By_P + c|}{\sqrt{A^2 + B^2}}}.}$$

■

<u>Segunda Maneira de Demonstrar o Teorema 3.2.</u> Consideremos uma reta r, $r: Ax + By + C = 0$, ou na forma reduzida $r: y = -\frac{A}{B}x - \frac{C}{B}$, contida no Plano Cartesiano OXY, que não passa pelo ponto $O(0,0)$ e seja s a reta que passa por $O(0,0)$ e é perpendicular à r. Por Teorema da *Geometria Analítica*, sabemos que:

$$r \perp s \Leftrightarrow m_r \cdot m_s = -1.$$

Como $m_r = -\frac{A}{B}$, segue que:

$$\left(-\frac{A}{B}\right) \cdot m_s = -1.$$

Assim:

$$m_s = \frac{B}{A}.$$

Como, por construção, a reta s passa pela origem do Plano Cartesiano, *Figura* 3.3, então $n_s = 0$. Daí, temos:

$$s: y = \frac{B}{A}x.$$

Ou ainda, a reta s tem por equação geral:

$$s: Bx - Ay = 0.$$

Seja $Q(x_Q, y_Q)$ o ponto de interseção da reta r com a reta s. Substituindo as coordenadas de Q na equação geral de r, obtemos:

$$Ax_Q + By_Q = -C. \qquad \textbf{(3.6)}$$

Substituindo as coordenadas de Q na equação geral de s, obtemos:

$$Bx_Q - Ay_Q = 0. \qquad \textbf{(3.7)}$$

Elevando ambos os membros de **(3.6)** e de **(3.7)** ao quadrado, obtemos:

$$\begin{cases} \left(Ax_Q + By_Q\right)^2 = (-C)^2 \\ \left(Bx_Q - Ay_Q\right)^2 = 0^2 \end{cases}.$$

Daí:

$$A^2x_Q^2 + 2 \cdot A \cdot B \cdot x_Q \cdot y_Q + B^2y_Q^2 = C^2. \qquad \textbf{(3.8)}$$

e

$$B^2x_Q^2 - 2 \cdot A \cdot B \cdot x_Q \cdot y_Q + A^2y_Q^2 = 0. \qquad \textbf{(3.9)}$$

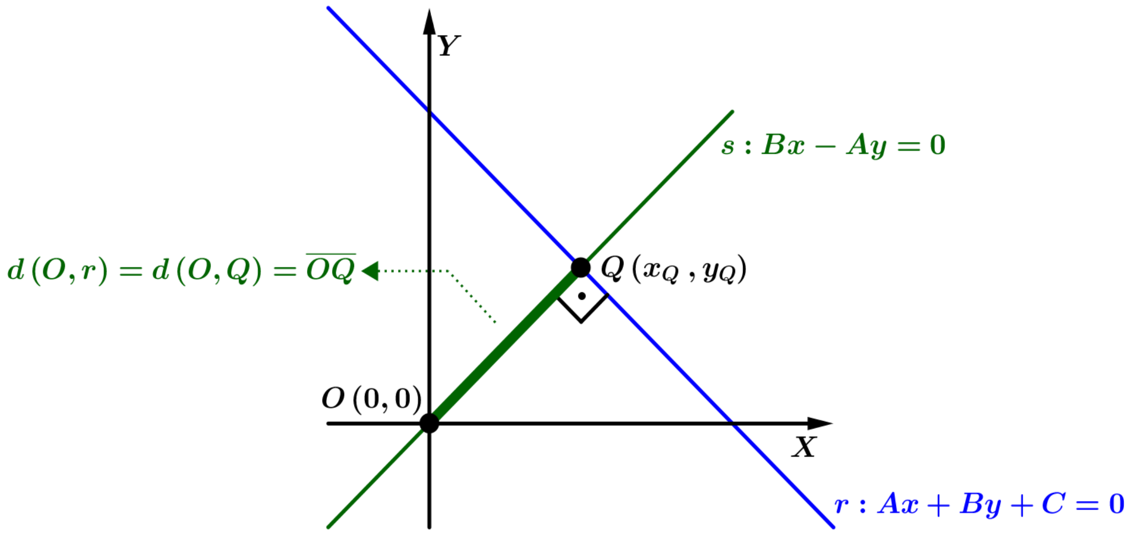


Figura 3.3: Distância Entre os Pontos O e Q.

Somando membro a membro **(3.8)** e **(3.9)**, obtemos:

$$\left(A^2x_Q^2 + A^2y_Q^2\right) + \left(B^2x_Q^2 + B^2y_Q^2\right) = C^2.$$

Ou seja:

$$A^2 \cdot \left(x_Q^2 + y_Q^2\right) + B^2 \cdot \left(x_Q^2 + y_Q^2\right) = C^2.$$

Ou ainda:

$$\left(x_Q^2 + y_Q^2\right) \cdot (A^2 + B^2) = C^2. \qquad \textbf{(3.10)}$$

Note, na *Figura* 4.4, que:

$$x_Q^2 + y_Q^2 = [d(O,Q)]^2, \qquad \textbf{(3.11)}$$

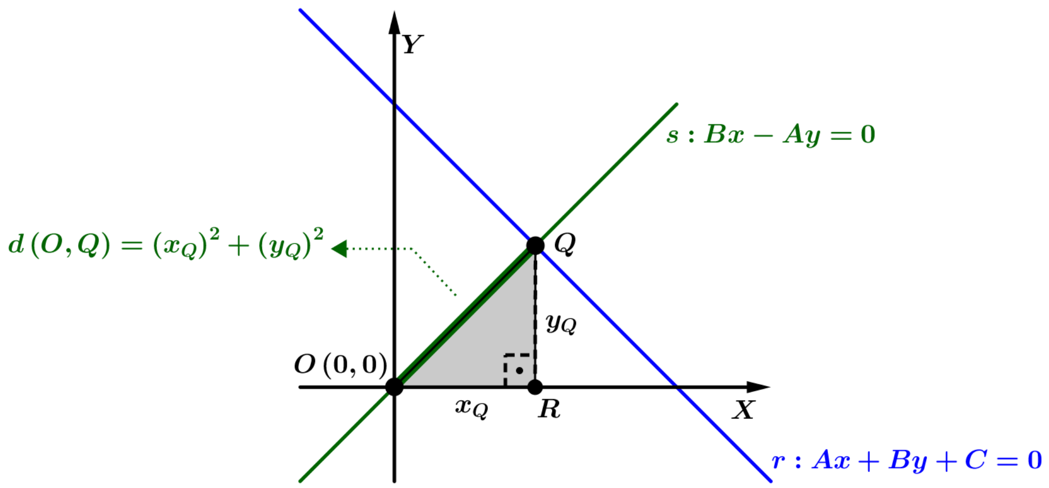


Figura 3.4: Triângulo Retângulo OQR.

então, substituindo **(3.11)** em **(3.10)**, obtemos:

$$[d(O,Q)]^2 \cdot (A^2 + B^2) = C^2.$$

Assim:

$$[d(O,Q)]^2 = \frac{C^2}{A^2 + B^2}.$$

Ou seja:

$$d(O,Q) = \sqrt{\frac{C^2}{A^2 + B^2}}.$$

Ou ainda:

$$d(O,Q) = \frac{|C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}. \qquad \textbf{(3.12)}$$

Agora, consideremos, no Plano Cartesiano OXY, um ponto $P(x_P, y_P)$ não pertencente à reta r, *Figura* 3.5.

$$r: Ax + By + C = 0. \qquad \textbf{(3.13)}$$

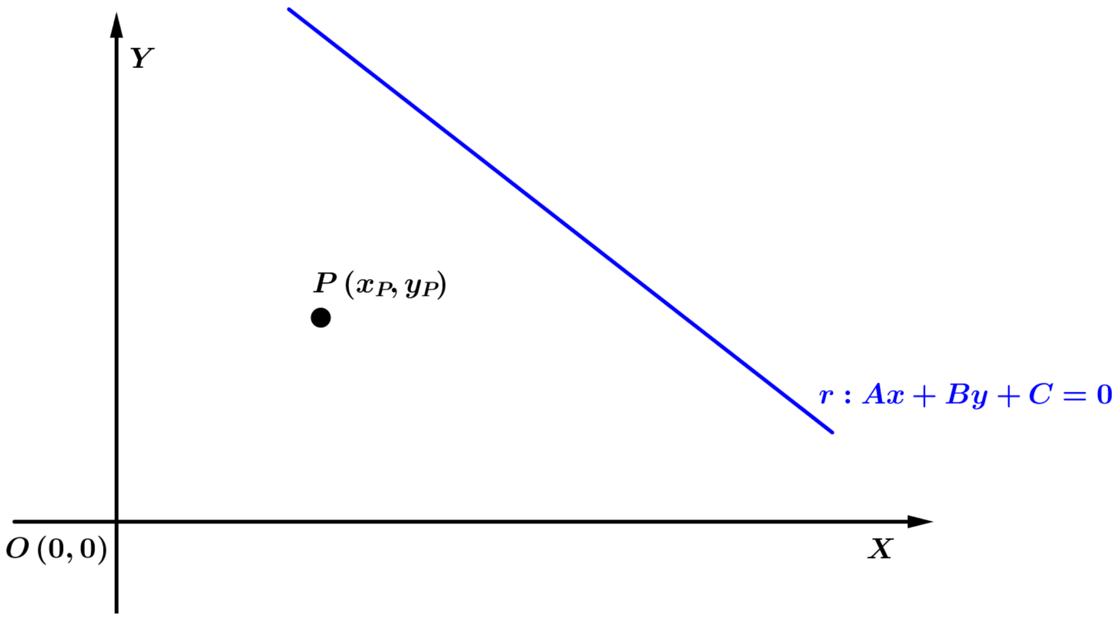


Figura 3.5: Ponto P Não Pertencente à Reta r.

Traçando um novo Plano Cartesiano, digam $O'X'Y'$, cuja origem $O'(0,0)$ coincida com o ponto $P(x_P, y_P)$, neste plano, a equação de r será:

$$r: Ax' + By' + C' = 0. \qquad \textbf{(3.14)}$$

Da translação de figuras, sabemos que:

$$\begin{cases} x = x' + x_P \\ y = y' + y_P \end{cases}. \qquad \textbf{(3.15)}$$

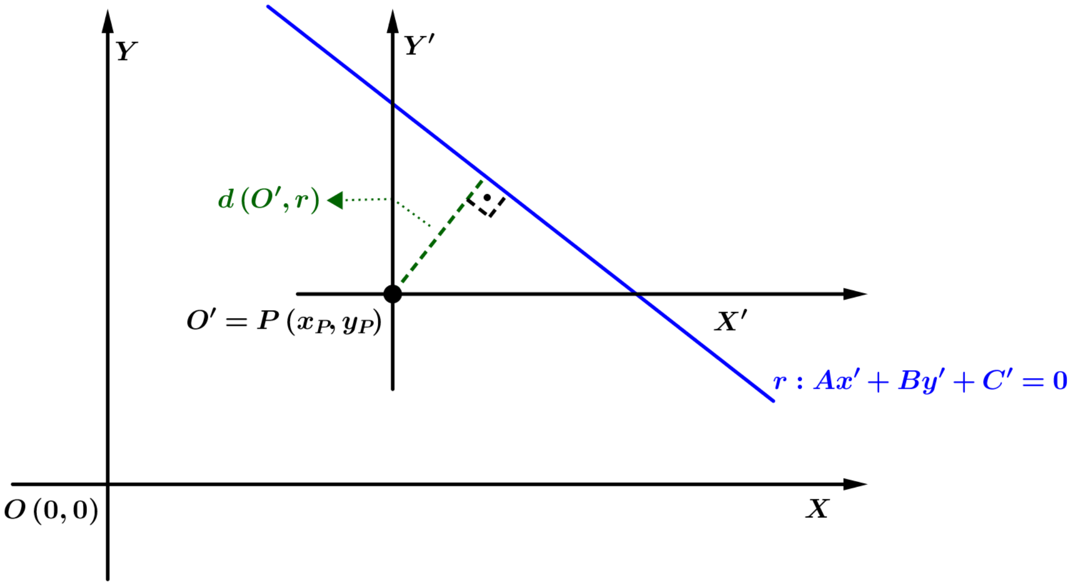


Figura 3.6: Distância Entre o Ponto O' e a Reta r.

Substituindo **(3.15)** em **(3.13)**, obtemos:

$$A(x' + x_P) + B(y' + y_P) + C = 0.$$

Ou seja:

$$Ax' + Ax_P + By' + By_P + C = 0.$$

Ou ainda:

$$Ax' + By' + (\,Ax_P + By_P + C) = 0. \qquad \textbf{(3.16)}$$

Comparando **(3.14)** com **(3.16)**, temos:

$$Ax' + By' + C' = Ax' + By' + (\,Ax_P + By_P + C).$$

Então, cancelando as parcelas iguais situadas em membros opostos, obtemos:

$$C' = Ax_P + By_P + C. \qquad \textbf{(3.17)}$$

De **(3.12)**, sabemos que, no Plano Cartesiano $O'X'Y'$, a distância de O' à r é dado por:

$$d(O', r) = \frac{|C'|}{\sqrt{A^2 + B^2}}. \qquad \textbf{(3.18)}$$

Como, por hipótese:

$$O'(0,0) = P(x_P, y_P), \tag{3.19}$$

Logo, substituindo **(3.17)** e **(3.19)** em **(3.18)**, concluímos que:

$$\boxed{\boldsymbol{d(P,r) = \frac{|Ax_P + By_P + c|}{\sqrt{A^2 + B^2}}}.}$$

■

Terceira Maneira de Demonstrar o Teorema 3.2. Para encontrarmos a fórmula matemática que irá determinar a distância de um ponto a uma reta, num Plano Cartesiano OXY, comecemos com o problema de calcularmos a distância entre duas retas paralelas, para isto, sejam $r: Ax + By + C = 0$ e $s: Ax + By + C' = 0$ as equações gerais dessas retas paralelas, conforme *Figura* 3.5, a seguir:

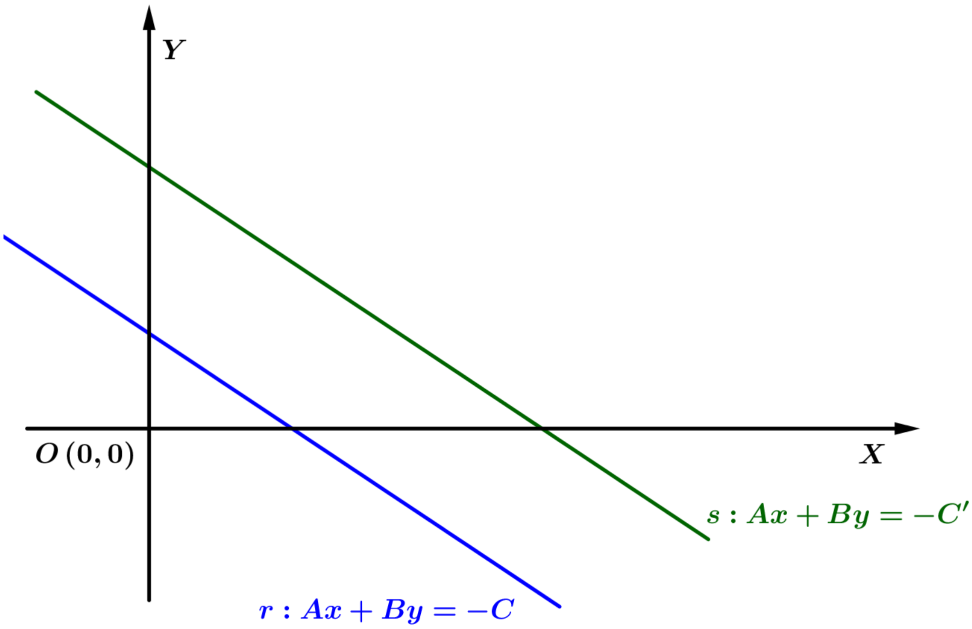


Figura 3.7: Retas Paralelas r e s.

Para facilitar os cálculos, consideremos uma reta t perpendicular às paralelas r e s e que passe pela origem $O(0,0)$ do Plano Cartesiano OXY. Por Teorema da *Geometria Analítica*, sabemos que:

$$r \perp t \Leftrightarrow m_r \cdot m_t = -1.$$

Como, por hipótese, as retas r e s são paralelas, segue que:

$$m_r = m_s = -\frac{A}{B}.$$

Daí:

$$\left(-\frac{A}{B}\right) \cdot m_t = -1.$$

Assim:

$$m_t = \frac{B}{A}.$$

Como, por construção, a reta t passa pela origem do Plano Cartesiano, *Figura* 3.8, então $n_t = 0$. Daí, temos:

$$t: y = \frac{B}{A}x. \quad \textbf{(3.20)}$$

Com isto, o problema de calcularmos a distância entre as retas paralelas r e s se resume ao de calcularmos a distância entre os pontos $P_1(x_1, y_1)$ e $P_2(x_2, y_2)$, originados da interseção da perpendicular t com essas paralelas r e s, respectivamente, ou seja, vamos calcular $d(P_1, P_2)$. Com isso, substituindo as coordenadas de P_1 e P_2 na equação **(3.20)**, temos:

$$P_1\left(x_1, \frac{B}{A}x_1\right) \qquad \text{e} \qquad P_2 = \left(x_2, \frac{B}{A}x_2\right).$$

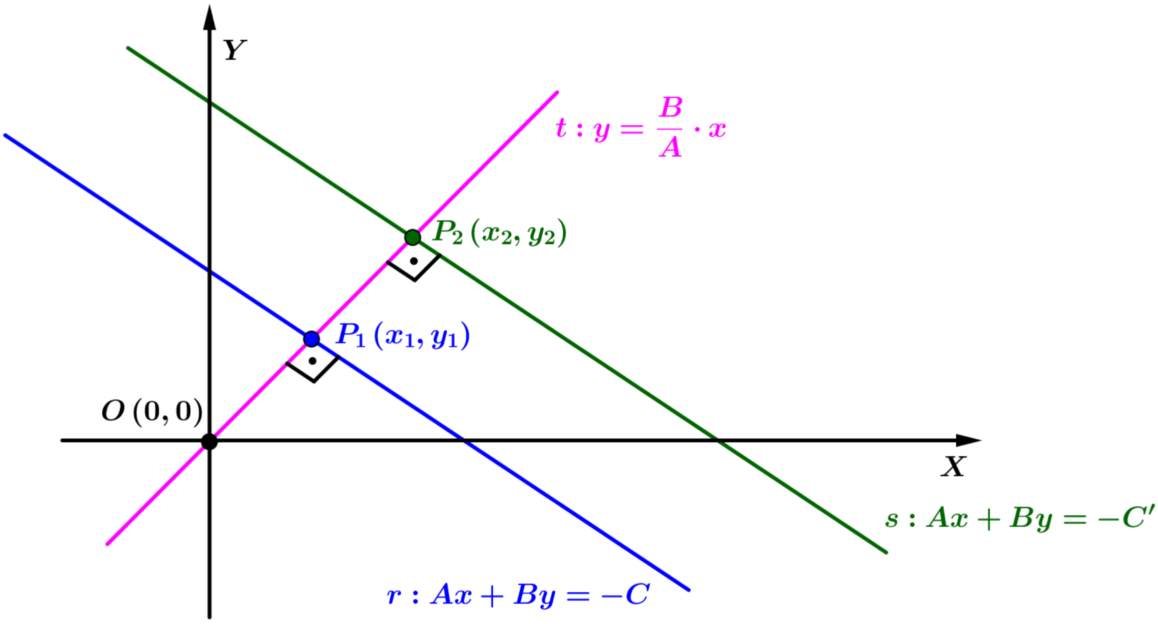


Figura 3.8: Distância Entre os Pontos P_1 e P_2.

Assim, usando a fórmula da distância entre dois pontos no Plano Cartesiano, segue que:

$$d(P_1, P_2) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + \left[\left(\frac{B}{A}\right)x_2 - \left(\frac{B}{A}\right)x_1\right]^2}.$$

Daí:

$$d(P_1, P_2) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + \left[\left(\frac{B}{A}\right)(x_2 - x_1)\right]^2} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + \left(\frac{B}{A}\right)^2 \cdot (x_2 - x_1)^2}.$$

Então:

$$d(P_1, P_2) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 \cdot \left[1 + \left(\frac{B}{A}\right)^2\right]} = |x_2 - x_1| \cdot \sqrt{\frac{A^2 + B^2}{A^2}}.$$

Logo:

$$d(P_1, P_2) = |x_2 - x_1| \cdot \frac{\sqrt{A^2 + B^2}}{|A|}. \tag{3.21}$$

Por outro lado, P_1 pertence à r e P_2 pertence à s, assim, substituindo suas coordenadas nas equações $r: Ax + By + C = 0$ e $s: Ax + By + C' = 0$, respectivamente, teremos que:

$$Ax_1 + B \cdot \left(\frac{B}{A}\right) \cdot x_1 = -C. \tag{3.22}$$

e

$$Ax_2 + B \cdot \left(\frac{B}{A}\right) \cdot x_2 = -C'. \tag{3.23}$$

Com isto, objetivando encontrar o valor de $|x_2 - x_1|$, subtrairemos **(3.22)** de **(3.23)**, membro a membro, obtendo:

$$\left[Ax_2 + B \cdot \left(\frac{B}{A}\right) \cdot x_2\right] - \left[Ax_1 + B \cdot \left(\frac{B}{A}\right) \cdot x_1\right] = (-C') - (-C).$$

Por conseguinte:

$$Ax_2 + \frac{B^2}{A} \cdot x_2 - Ax_1 - \frac{B^2}{A} \cdot x_1 = -C' + C. \tag{3.24}$$

Ou ainda:

$$(Ax_2 - Ax_1) + \left(\frac{B^2}{A} \cdot x_2 - \frac{B^2}{A} \cdot x_1\right) = -C' + C. \tag{3.25}$$

Assim, colocando A em evidência na primeira parcela e (B^2/A) na segunda parcela, ambas pertencentes ao primeiro membro de **(3.25)**, temos:

$$A \cdot (x_2 - x_1) + \frac{B^2}{A} \cdot (x_2 - x_1) = -C' + C. \tag{3.26}$$

Daí, colocando $(x_2 - x_1)$ em evidência no 1º membro **(3.26)**, temos:

$$(x_2 - x_1) \cdot \left(A + \frac{B^2}{A}\right) = -C' + C.$$

Ou ainda:

$$(x_2 - x_1) \cdot \left(\frac{A^2 + B^2}{A}\right) = -C' + C.$$

Por conseguinte:

$$(x_2 - x_1) = \frac{(A) \cdot (-C' + C)}{A^2 + B^2}. \qquad \textbf{(3.27)}$$

Aplicando o módulo em ambos os membros de **(3.27)**, teremos:

$$|x_2 - x_1| = \left|\frac{(A) \cdot (-C' + C)}{A^2 + B^2}\right|.$$

Ou ainda:

$$|x_2 - x_1| = \frac{|A| \cdot |-C' + C|}{A^2 + B^2}. \qquad \textbf{(3.28)}$$

Substituindo **(3.28)** em **(3.21)**, segue que:

$$d(P_1, P_2) = \frac{|A| \cdot |-C' + C|}{A^2 + B^2} \cdot \frac{\sqrt{A^2 + B^2}}{|A|}.$$

Mas, note que:

$$\frac{\sqrt{A^2 + B^2}}{A^2 + B^2} = \frac{(A^2 + B^2)^{1/2}}{(A^2 + B^2)^{1/2} \cdot (A^2 + B^2)^{1/2}} = \frac{1}{(A^2 + B^2)^{1/2}} = \frac{1}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

Logo:

$$d(P_1, P_2) = \frac{|-C' + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}. \qquad \textbf{(3.29)}$$

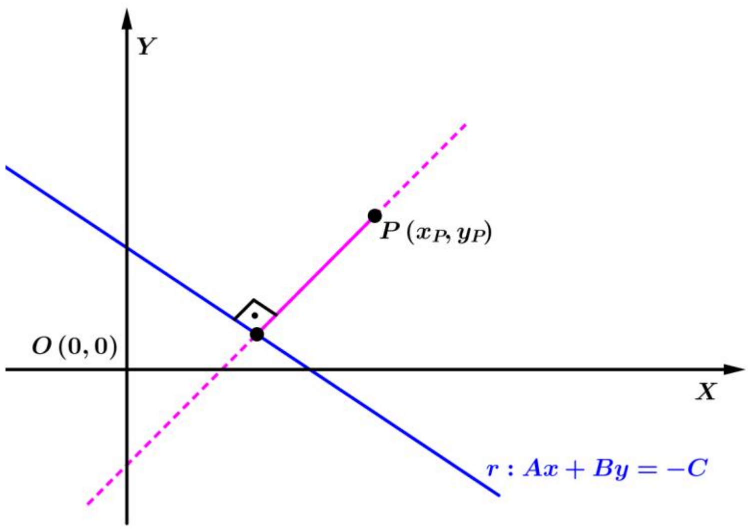


Figura 3.9: Ponto P Não Pertencente à r.

A expressão **(3.29)** nos fornece a distância entre as retas paralelas de equações gerais $r: Ax + By + C = 0$ e $s: Ax + By + C' = 0$. Agora vamos considerar a reta r de equação $r: Ax + By = -C$ e um ponto $P(x_p, y_p)$ que não pertence à r, conforme *Figura* 4.7. Da Geometria Euclidiana, sabemos que existe uma e somente uma reta que passa pelo ponto P, digamos s, e é paralela à reta r. Seja $Ax + By = -C'$ a equação desta reta s. Então, substituindo as coordenadas de $P(x_p, y_p)$ na equação de s, obtemos:

$$Ax_P + By_P = -C'. \qquad \textbf{(3.30)}$$

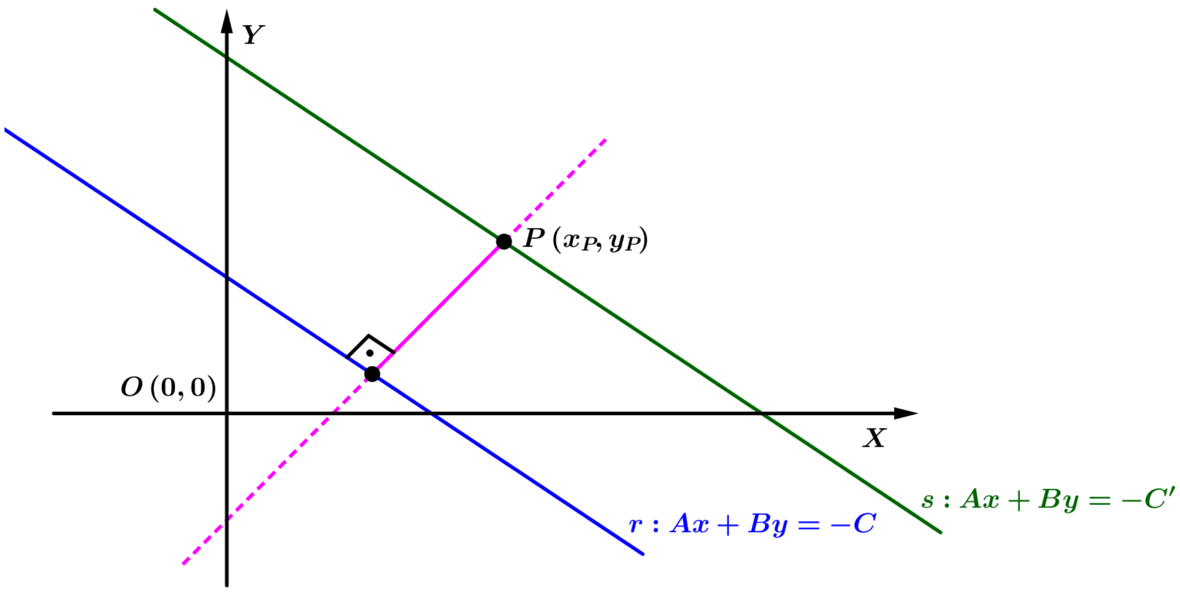


Figura 3.10: Retas Paralelas r e s.

Com tudo, o problema de calcularmos a distância do ponto P à uma reta r é solucionado substituindo **(3.30)** em **(3.29)**. Portanto:

$$\boldsymbol{d(P,r) = \frac{|Ax_P + By_P + c|}{\sqrt{A^2 + B^2}}}.$$

■

Quarta Maneira de Demonstrar o Teorema 3.2. Considere, num mesmo Plano Cartesiano OXY, um ponto $P(x_P, y_P)$ e uma reta $r: Ax + By = -C$, de tal forma que P não pertença à r. Seja $d(P,r)$ a distância entre P e r. Da Álgebra Vetorial, sabemos que o vetor perpendicular à r, indicado por $\vec{n}$, tem coordenadas $\vec{n} = (A, B)$. Chamando de B a projeção ortogonal de P sobre r, conforme *Figura* 3.11, temos:

$$d(P,r) = \left|\overrightarrow{BP}\right| = \left|Proj_{\vec{n}}\ \overrightarrow{AP}\right|.$$

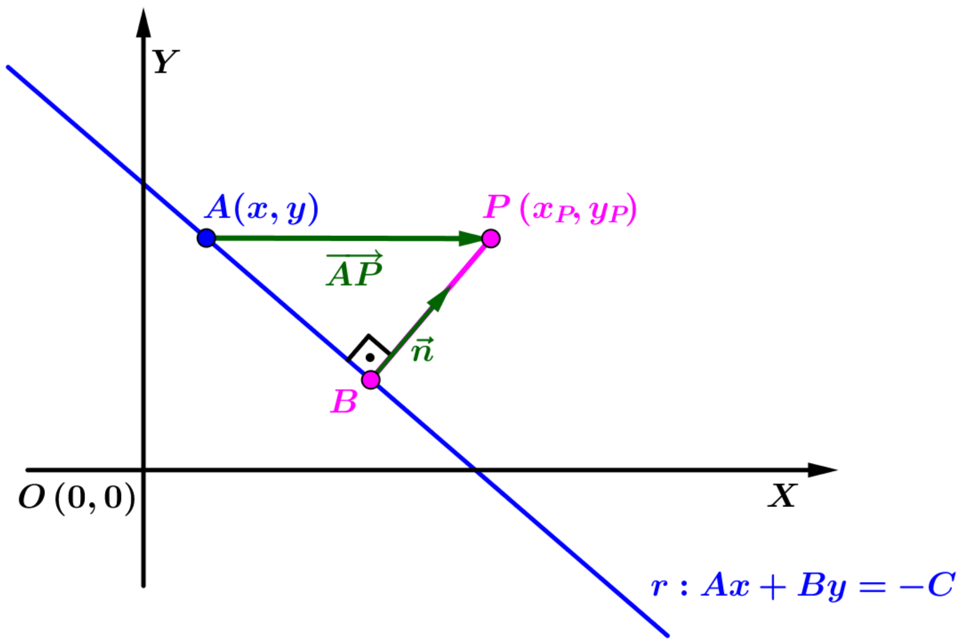


Figura 3.11: Projeção Ortogonal de um Ponto Sobre uma Reta.

Como:

$$Proj_{\vec{u}}\ \vec{v} = \left(\frac{\vec{u} \odot \vec{v}}{|\vec{u}| \cdot |\vec{u}|}\right) \cdot \vec{u},$$

em que:

$$\vec{u} \odot \vec{v} = (x_u, y_u) \odot (x_v, y_v) = x_u x_v + y_u y_v.$$

Daí:

$$d(P,r) = \left|\frac{\vec{n} \odot \overrightarrow{AP}}{|\vec{n}| \cdot |\vec{n}|} \cdot \vec{n}\right|.$$

Ou ainda:

$$d(P,r) = \left|\frac{\vec{n} \odot \overrightarrow{AP}}{|\vec{n}|} \cdot \frac{\vec{n}}{|\vec{n}|}\right|.$$

Assim:

$$d(P,r) = \left|\frac{\vec{n} \odot \overrightarrow{AP}}{|\vec{n}|}\right| \cdot \left|\frac{\vec{n}}{|\vec{n}|}\right|.$$

Como:

$$\left|\frac{\vec{n}}{|\vec{n}|}\right| = 1,$$

pois trata-se do versor de $\vec{n}$, segue que:

$$d(P,r) = \left|\frac{\vec{n} \odot \overrightarrow{AP}}{|\vec{n}|}\right|.$$

Por conseguinte:

$$d(P,r) = \left|\frac{(A,B) \odot (x_P - x, y_P - y)}{\sqrt{A^2 + B^2}}\right|.$$

Ou ainda:

$$d(P,r) = \left|\frac{Ax_P - Ax + By_P - By}{\sqrt{A^2 + B^2}}\right|.$$

Então:

$$d(P,r) = \frac{|Ax_P + By_P - (Ax + By)|}{\sqrt{A^2 + B^2}}. \tag{3.31}$$

Como, sabemos que:

$$Ax + By = -C, \tag{3.32}$$

Logo, substituindo **(3.32)** em **(3.31)**, concluímos que:

$$d(P,r) = \frac{|Ax_P + By_P - (-C)|}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

Portanto:

$$\boxed{\boldsymbol{d(P,r) = \frac{|Ax_P + By_P + c|}{\sqrt{A^2 + B^2}}.}}$$

■

4. CONSIDERAÇÕES FINAIS

Com a criação da BNCC, os livros didáticos de matemática do ensino básico passaram a focar nas aplicações dos conteúdos e deixaram de lado à parte teórica, em particular, as demonstrações foram totalmente abandonadas como se o raciocínio lógico usado nas demonstrações dos teoremas matemáticos não mais contribuísse com a formação do aluno. Entendemos que esse novo formato dos livros não só compromete a qualidade do ensino do ponto de vista do aluno, como também prejudica o professor, pois a teoria abordada nesses livros passou a ser mínima, levando o professor a ter e a ensinar um conhecimento superficial dos conteúdos matemáticos.

Demonstrar é um ato de persuasão, de convencimento, baseado em argumentações lógico-dedutivas. As pessoas não devem acreditar num fato matemático, elas devem ser convencidas que o fato é válido ou verdadeiro por meio de uma demonstração. Neste sentido, a forma como está escrita à demonstração e de extrema importância, uma vez que nem sempre o escritor estará por perto para explicar algo do texto que não ficou claro, [3].

Mesmo as boas ideias, quando expressas de forma incompreensível, perdem seu valor. Quem escreve bem se comunica com facilidade, tem melhores chances solicitar bolsas de estudo ou de pesquisa, pedir financiamento de projetos, publicar artigos, ter êxito em concursos, etc, [3].

Ao escrever demonstrações, melhora-se a convicção dos próprios argumentos, apura-se o raciocínio, neste momento podem surgir novas ideias. Escrever é uma maneira de pensar, de organizar o que se deseja comunicar, [3].

É importante destacar que a compreensão dessas diferentes abordagens da demonstração da fórmula do cálculo da distância entre ponto e reta no plano Cartesiano OXY permite ao professor de matemática analisar e escolher a que melhor se adequa a realidade de seus alunos. Neste sentido, defendemos ser valiosa a obtenção desse material por parte de discentes e docentes, pois nele encontram-se quatro maneiras distintas de demonstrar a fórmula de distância entre ponto e reta com uma linguagem de fácil compreensão. Outro ponto é que à medida que continuamos a explorar o vasto e fascinante mundo da matemática, é vital que apreciemos a beleza das demonstrações matemáticas e seu papel vital na expansão do conhecimento humano.

Por fim, julgamos termos atingido o nosso objetivo, pois, do nosso ponto de vista, este material está pronto para ser usado como consulta por Professores de matemática e/ou por alunos de graduação do curso de Lic. em matemática e, levando em consideração a forma como as demonstrações foram escritas, este trabalho também pode ser considerado como uma proposta de ensino do conteúdo distância entre ponto e reta no Plano Cartesiano OXY.

REFERÊNCIAS

[1] BOYER, C. B.; ***História da Matemática***, Tradução de Helena Castro, 3ª Edição, Ed. Edgar Blucher Ltda, São Paulo - SP, (2012).

[2] EVES, H.; ***Introdução à História da Matemática***, tradução Hygino H. Domingues, 5ª Edição, Ed. Unicamp, Campinas – SP, (2011).

[3] FILHO, D. C. M.; ***Manual de Redação Matemática***, Ed. Fábrica de Ensino, Campina Grande - PB, 1ª Edição, (2010).

[4] IEZZI, G.; ***Fundamentos de Matemática Elementar***, Vol. 7, Geometria Analítica, Ed. Atual, São Paulo - SP, 6ª Edição, (2013).

[5] LIMA, E. L; ***Coordenadas no Plano***, Coleção do Professor de Matemática, Ed. SBM, Rio de Janeiro - RJ, 4ª Edição, (2002).

[6] MARTINS, M. C. F. A.; LOPES, T. B.; DARSIE, M. M. P; ***As Influências de Platão e Euclides Para o Desenvolvimento da Geometria***, Coinspiração - Revista dos Professores que Ensinam Matemática, [S. l.], (2023).

[7] SANTOS, F. J.; FERREIRA, S. F.; ***Geometria Analítica***, Ed. Bookman, Porto Alegre - RS, (2009).

[8] SANTOS, R. L.; CRUZ, F. G.; ***A Matemática de René Descartes***, Boletim Cearense de Educação e História da Matemática, [S. l.], v. 3, n. 8, p. 30–47, (2018).

[9] SOUSA, W. F.; ***A Geometria Analítica Como um Modelo Para a Geometria*** Euclidiana, xiv, 56 f., il. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) - Universidade de Brasília, Brasília, (2017).

[10] UCHÔA, F. J. S.; ***A Geometria Esférica e a Distância Entre Dois Pontos do Globo na Perspectiva do GeoGebra***, 47 f., Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) - Centro de Ciências, Universidade Federal do Ceará, Fortaleza, (2018).

INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA DA PARAÍBA
Campus Campina Grande
R. Tranqüilino Coelho Lemos, 671, Dinamérica, CEP 58432-300, Campina Grande (PB)
CNPJ: 10.783.898/0003-37 - Telefone: (83) 2102.6200

Documento Digitalizado Ostensivo (Público)

Entrega de trabalho de conclusão de curso

Assunto:	Entrega de trabalho de conclusão de curso
Assinado por:	Davyson Odilon
Tipo do Documento:	Ato
Situação:	Finalizado
Nível de Acesso:	Ostensivo (Público)
Tipo do Conferência:	Cópia Simples

Documento assinado eletronicamente por:

- **Davyson Odilon de Melo, ALUNO (201821230047) DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA - CAMPINA GRANDE**, em 26/12/2023 23:35:29.

Este documento foi armazenado no SUAP em 26/12/2023. Para comprovar sua integridade, faça a leitura do QRCode ao lado ou acesse https://suap.ifpb.edu.br/verificar-documento-externo/ e forneça os dados abaixo:

Código Verificador: 1038756
Código de Autenticação: af9690e1a8