INSTITUTO FEDERAL
Paraíba
Campus Campina Grande

INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA DA PARAÍBA

CURSO SUPERIOR DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

DANIEL KENNYD AUGUSTO DE MELO

EXPLORANDO A GEOMETRIA ANALÍTICA NO TERCEIRO ANO DO ENSINO MÉDIO: APRENDENDO COM O GEOGEBRA

CAMPINA GRANDE - PB

2023

DANIEL KENNYD AUGUSTO DE MELO

EXPLORANDO A GEOMETRIA ANALÍTICA NO TERCEIRO ANO DO ENSINO MÉDIO: APRENDENDO COM O GEOGEBRA

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado no Curso Superior de Licenciatura em Matemática do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia da Paraíba (IFPB), como requisito parcial para obtenção do título de Licenciado em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Rodrigo Moura Silva

M528e

Melo, Daniel Kennyd de.

Explorando a geometria analítica no terceiro ano do ensino médio: aprendendo com a geogebra / Daniel Kennyd de Melo. - Campina Grande, 2023.

54 f. : il.

Trabalho de Conclusão de Curso (Curso Superior de Licenciatura em Matemática) - Instituto Federal da Paraíba, 2023.

Orientador: Prof. Dr. Rodrigo Moura Silva.

1. Geogebra 2. Geometria analítica 3. Ensino de matemática I. Silva, Rodrigo Moura III. Título.

CDU 51

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
SECRETARIA DE EDUCAÇÃO PROFISSIONAL E TECNOLÓGICA
INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA DA PARAÍBA
CAMPUS CAMPINA GRANDE

DANIEL KENNYD AUGUSTO DE MELO

EXPLORANDO A GEOMETRIA ANALÍTICA NO TERCEIRO ANO DO ENSINO MÉDIO: APRENDENDO COM O GEOGEBRA

Trabalho de Conclusão de Curso, aprovado como requisito parcial para a obtenção de graduação em Licenciatura em Matemática pelo Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia da Paraíba – Campus Campina Grande.

Habilitação: Licenciatura

Data da aprovação

13 / 12 / 2023.

BANCA EXAMINADORA:

Rodrigo Moura da Silva

ORIENTADOR: Prof. Dr. Rodrigo Moura da Silva – IFPB

Baldoino Sonildo da Nóbrega

AVALIADORA: Prof. Me. Baldoino Sonildo da Nóbrega – IFPB

Misleide Silva Santiago

AVALIADORA: Profa. Ma. Misleide Silva Santiago

AGRADECIMENTOS

Agradeço a Deus por ter me guiado e auxiliado até este momento tão significativo. Expresso minha profunda gratidão à minha mãe, Dijanise, por ser a minha base em todos os momentos da minha vida. Às minhas irmãs, Mirelly e Ynngrith, meu reconhecimento pelo apoio constante. Estendo meus agradecimentos especiais aos amigos que estiveram ao meu lado durante esses quase cinco anos de jornada acadêmica: Paloma, Fernanda, Adenilton, Daliana, Pedro, Alisson e Renan. Suas contribuições foram essenciais para o meu crescimento e sucesso. À minha namorada, Rute, expresso minha sincera gratidão por ser minha fonte constante de inspiração e por me incentivar a seguir em frente, mesmo nos momentos desafiadores. Aos estimados professores em especial, meu orientador Rodrigo, minha profunda gratidão por compartilharem seus conhecimentos e orientações ao longo desta trajetória. Se hoje sou professor, devo isso a cada um de vocês. Obrigado por moldarem meu caminho acadêmico e profissional.

“Se vi mais longe, foi por estar de pé sobre os ombros de gigantes.”

Isaac Newton

RESUMO

O presente trabalho, desenvolveu-se a partir da percepção de que o ensino tradicional de Matemática, sem o apoio das tecnologias da informação e comunicação, se configura num desafio para o professor quando se depara com alunos com dificuldades cumulativas de aprendizagem ao longo dos anos. Percebe-se que as tecnologias têm sido acessíveis aos alunos, e isso pode permitir que ferramentas, como o Geogebra sejam utilizadas nas aulas de Matemática, pois esse software agrega álgebra e geometria de forma dinâmica, pensou-se no desenvolvimento de atividades em sala de aula que pudessem envolver o uso deste *software* e estudar a sua eficácia na melhoria das aulas de geometria analítica para alunos de uma turma do terceiro ano do ensino médio do IFPB-CG. Para isto, foi elaborada uma sequência didática com três aplicações. Estas aplicações envolveram três conteúdo da geometria analítica: Posição Relativa Entre Retas no Plano, Posição Relativa Entre Reta e Circunferência no Plano e Posição Relativa Entre Duas Circunferências no Plano. Em cada aplicação os alunos resolveram questões desenvolvidas e aplicadas no Google Forms. Para se resolver as questões, seguia-se comandos que os levavam ao GeoGebra *on line*, com os alunos manipulando os arquivos .ggb previamente produzidos. Os alunos tinham capacidade de compreender as propriedades de forma mais intuitiva pelo manuseio de controles deslizantes, o que facilitava a solução das questões nos formulários os ajudando a inferir as propriedades envolvidas em cada um dos três conteúdos explorados. Como resultados, observou-se que as práticas desenvolvidas nesta pesquisa, podem proporcionar aos alunos, de qualquer nível escolar, enxergar a Matemática com outros olhos, não como algo difícil, complexo e impossível de aprender, mas sim, didático e extremamente fascinante.

Palavras-chave: GeoGebra. Geometria Analítica. Reta. Circunferência. Ensino de Matemática.

ABSTRACT

The present work developed from the perception that traditional Mathematics teaching, without the support of information and communication technologies, poses a challenge for teachers when faced with students experiencing cumulative learning difficulties over the years. It is noticed that technologies have become accessible to students, and this may allow tools such as Geogebra to be used in Mathematics classes. This software integrates algebra and geometry dynamically. The idea was to develop classroom activities involving the use of this software and to study its effectiveness in improving analytical geometry classes for third-year high school students at IFPB-CG. For this purpose, a didactic sequence with three applications was designed. These applications covered three contents of analytical geometry: Relative Position Between Lines in the Plane, Relative Position Between a Line and a Circle in the Plane, and Relative Position Between Two Circles in the Plane. In each application, students solved questions developed and applied through Google Forms. To answer the questions, they followed commands that led them to the online GeoGebra, manipulating the previously produced .ggb files. The students were able to understand the properties more intuitively by manipulating sliders, facilitating the solution of questions in the forms and helping them infer the properties involved in each of the three explored contents. As a result, it was observed that the practices developed in this research can provide students at any school level with a different perspective on Mathematics. It is not seen as something difficult, complex, and impossible to learn but rather as didactic and extremely fascinating.

Keywords: GeoGebra, Analytic Geometry, Line, Circle, Mathematics Education.

LISTA DE INLUSTRAÇÕES

SUMARIO

1. INTRODUÇÃO

Durante pelo menos 12 anos os alunos vivenciam na escola a construção do conhecimento nas suas mais diversas áreas, e, desde as séries primárias, eles se deparam com o estudo da primeira ciência: a Matemática. Embora sendo esta trabalhada desde cedo, uma grande parte dos estudantes mantêm, durante a jornada da educação básica, uma relação difícil com essa componente escolar.

O ensino de Matemática foi ministrado de forma tradicionalista por muitos anos, e sabe-se que em muitas escolas, especialmente públicas, o ensino ainda é tradicional. Os professores preocupam-se em trabalhar todo o conteúdo curricular, sem levar em consideração o fato da aprendizagem dos alunos, quer dizer, se esses aprendem ou não. Muitas vezes engessados pelo sistema de ensino, que os obrigavam a ensinar desta maneira. Todavia, os alunos são forçados a aprender, por exemplo as quatro operações, e não necessariamente compreende-las matematicamente.

Ao ingressar no Ensino Médio, um novo tema é trabalhado com os estudantes: a Geometria Analítica (G.A.); uma importante dimensão da Matemática, que permite o desenvolvimento de habilidades indispensáveis para a tecnologia e ciência. Esta, por sua vez corresponde a uma área altamente abstrata, que exige um pleno domínio de geometria plana e de álgebra. Para os discentes que acumulam dificuldades nessas duas unidades de estudo isso pode ser um grande entrave. Segundo Barbosa e Sant'Ana (2020):

> A defasagem no estudo da geometria e da álgebra em anos anteriores podem gerar sérias dificuldades no estudo da Geometria Analítica, o que desmotiva o aluno a prosseguir com o estudo e obter uma aprendizagem significativa. (BARBOSA E SANTANA, 2020, p.3)

Além da notável exigência de se ter um bom desenvolvimento do aprendizado algébrico e geométrico por parte dos aprendizes, outras barreiras encontradas no ensino e aprendizagem de G.A. no ensino médio podem ser a dificuldade na compreensão dos conceitos fundamentais, a falta de contextualização e a falta da utilização de recursos didáticos adequados. Sobre este último Alves e Pereira (2016) apontam que:

> O livro didático, que constitui um dos principais instrumentos para o exercício do ofício do professor de Matemática em sala de aula, pode condicionar/afetar hábitos

> inadequados aos aprendizes. Desse modo, uma razoável visão de mediação, não apenas de conteúdo, mas também de transmissão e transposição de um saber específico em sala de aula, pode sugerir caminhos para a superação de determinados entraves. Quando buscamos indicar os elementos que evidenciamos serem preocupantes, relacionados ao ensino de Geometria Analítica, possivelmente, um particular que se destaca se refere ao livro didático. De fato, esse instrumento desempenha o papel principal quando nos atemos aos suportes que apoiam a mediação do professor em sala de aula. O que sabemos, todavia, sobre a sua qualidade? Sendo ele um dos principais instrumentos didáticos do professor, até que ponto sua qualidade pode comprometer a transmissão de saberes pelo docente. (ALVES E PEREIRA, 2016, p.2).

A transição da geometria tradicional para a geometria analítica requer a compreensão dos conceitos básicos abordados na geometria plana e de novos conceitos, como coordenadas cartesianas, equações de retas, equações de cônicas, distâncias entre pontos, dentre outros. É exatamente nesse aspecto que a natureza abstrata desses conceitos pode se tornar um obstáculo para muitos alunos, que podem vir a ter dificuldade em visualizá-los e aplicá-los em problemas práticos, principalmente os estudantes que preferem aprender de forma mais concreta.

Supõe-se que os desafios do ensino de Matemática, voltado ao Ensino Médio, são elevados, pois os conteúdos são mais abstratos, além de que os alunos já não são mais crianças e não será qualquer metodologia de ensino que irá chamar a atenção dos mesmos. É preciso ir além, buscar recursos que façam parte do meio que eles estão inseridos. E nada melhor do que usar a tecnologia, em especial, o *software* GeoGebra no ensino da Geometria Analítica.

O GeoGebra é um *software* de Matemática dinâmica para todos os níveis de ensino que reúne conceitos de geometria e álgebra. Sua distribuição é livre e está disponível em diversas plataformas (Linux, Windows, OS 2, Android, online, etc.). Essa ferramenta é um dos recursos mais inovadores referentes ao estudo da Matemática de forma tecnológica, o mesmo proporciona uma gama de ferramentas que facilitam as construções no ramo da Geometria, Álgebra, Cálculo, estatística, entre outros. Essas ferramentas aumentam o universo da aprendizagem, pois com elas podemos fazer uma série de atividades, em todos os níveis de ensino, desde o fundamental até o superior.

Esta pesquisa buscou de forma prática e aplicada, investigar os efeitos na aprendizagem dos alunos que a utilização do *Software* GeoGebra poderia propiciar. Pensou-se então numa metodologia de ensino a ser aplicada em sala de aula que pudesse conferir uma maior dinâmica, autonomia e protagonismo à aprendizagem dos alunos, permitindo uma maior facilidade do processo de ensino.

Para tal, uma sequência didática envolvendo três importantes conteúdos da Geometria Analítica foi realizada em uma turma do terceiro ano do ensino médio, no Instituto Federal de Ciência, Educação e Tecnologia da Paraíba – IFPB, buscando verificar uma maior eficácia no ensino da Geometria Analítica mediante o uso do *Software* GeoGebra. Nessa sequência didática, os alunos desenvolveram atividades sugeridas com o auxílio do *Software* e posteriormente foi avaliado se a proposta adotada como ferramenta de ensino permitiu uma maior facilidade no processo de aprendizagem desses alunos.

1.1 Justificativa

O ensino de Matemática, em particular da Geometria Analítica, é frequentemente desafiador para os discentes, que muitas vezes se deparam com conceitos abstratos e complexos. Nesse cenário, a incorporação de tecnologias educacionais pode representar uma estratégia eficaz para superar essas barreiras e promover uma compreensão mais profunda e significativa dos conteúdos.

O GeoGebra, sendo um software dinâmico que integra álgebra, geometria e cálculo, apresenta-se como uma ferramenta promissora para enriquecer o processo de ensino da Geometria Analítica. Através de suas funcionalidades interativas, o GeoGebra possibilita uma abordagem mais visual e exploratória, permitindo aos estudantes manipular objetos geométricos e compreender conceitos abstratos de forma concreta.

Esta pesquisa buscará analisar a eficácia do GeoGebra no contexto educacional, destacando sua capacidade de facilitar o aprendizado da Geometria Analítica. Serão investigados aspectos como a motivação dos alunos, o impacto nas taxas de retenção do conhecimento, e a percepção dos educadores em relação ao uso dessa ferramenta.

Os resultados desta pesquisa não apenas contribuirão para a compreensão da eficácia do GeoGebra como ferramenta pedagógica, mas também fornecerão insights valiosos para educadores, gestores e desenvolvedores de currículos, auxiliando na tomada de decisões informadas sobre a integração de tecnologias no ensino da Matemática.

Dessa forma, a pesquisa proposta não apenas atende à necessidade de abordar as dificuldades persistentes no ensino da Geometria Analítica, mas também busca oferecer soluções inovadoras e práticas para aprimorar a qualidade do processo educacional, alinhando-se assim às demandas contemporâneas da educação matemática.

1.2 Objetivos

O objetivo geral desta pesquisa é avaliar a percepção da turma sobre o conteúdo de Geometria Analítica, ministrado com apoio do software.

Referente aos objetivos específicos, são eles:

1) Abordar com os discentes o conteúdo de Geometria Analítica;
2) Apresentar o Software GeoGebra para os discentes;

3) Aplicar o GeoGebra em uma sequência didática com os conteúdos selecionados de Geometria Analítica;

4) Coletar informações precisas dos alunos sobre as questões apresentadas e avaliar seu nível de satisfação ao participar da sequência didática por meio de formulários.

2. FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

2.1 Dificuldades no ensino da Matemática

Dentre os questionamentos dos alunos em sala de aula quanto ao estudo da Matemática um dos mais relatados é: "Qual a utilidade desse assunto em minha vida?". Na verdade, os discentes não compreendem que a Matemática está presente em várias situações do nosso dia a dia, como ao pagar conta de água ou luz, ao comprar um equipamento eletrônico e dividi-lo em 10 vezes, em ir ao supermercado fazer compras, assim como em outras situações.

Relatórios nacionais como o INAF (Indicador Nacional de Alfabetismo Funcional) disponibilizado pelo Instituto Paulo Montenegro, relatórios de programas internacionais como o PISA (Programa Internacional de Avaliação de Estudantes), permitem visualizar como a real compreensão e domínio da Matemática, não faz parte da realidade de uma parcela significativa da população brasileira, situação que reflete no desempenho de estudantes de todo o Brasil.

> [...] os resultados do INAF 2004 indicam que apenas 23% da população jovem e adulta brasileira é capaz de adotar e controlar uma estratégia na resolução de um problema que envolva a execução de uma série de operações. Só essa parcela é também capaz de resolver problemas que envolvam cálculo proporcional. É ainda mais preocupante a revelação de que apenas nesse grupo encontram-se os sujeitos que demonstram certa familiaridade com representações gráficas como mapas, tabelas e gráficos. (Montenegro *et al.*, 2004, p. 8)

O trecho acima foi retirado de um relatório do INAF, específico em habilidades Matemáticas. Existem relatórios mais recentes, porém com uma análise mais geral em termos de alfabetismo funcional, não exclusivo apenas para Matemática. Através do Relatório Brasil no PISA (INEP, 2019), páginas 104 a 110, é possível observar na seção de resultados dos estudantes brasileiros em Matemática sob a perspectiva internacional, que o Brasil tem uma posição no ranking entre o intervalo 69 – 72 dos 79 países participantes da avaliação.

Vários fatores influenciam nos problemas relacionados ao ensino e aprendizagem da Matemática, dentre eles podemos mencionar o fato de ser uma área de estudo claramente cumulativa como dito por Pacheco e Andreis (2018, p. 114). Com isso, os *déficits* de aprendizado não corrigidos ao longo dos estudos propiciam uma enorme dificuldade em aprender e desenvolver novos conhecimentos.

A Matemática possui múltiplas relações e aplicações no cotidiano, e cabe ao educador através de atividades empíricas, favorecer a aprendizagem do educando a referida disciplina. Com uma visão mais tradicionalista, o ensino da Matemática a nível fundamental e médio, é dotado de muitas teorias abstratas e distantes do conhecimento do mundo jovem, tornando-a desinteressante para esse grupo (Ogliari, 2008).

Lima (2001) defende que para se obter um bom ensino de Matemática é necessário levar em conta três componentes indissociáveis: a conceituação, a manipulação e a aplicação. Além dos problemas relativos ao conteúdo dos livros didáticos, não podemos deixar de mencionar outros fatores como: a falta de capacitação por parte de professores, falta de uma sequência de aprendizado efetivo gerada pelo acúmulo de conteúdos trabalhados ao longo dos anos anteriores, falhas na organização de modo geral do Ensino Fundamental e Ensino Médio.

Diante disso, o estudo de geometria está presente desde o início do Ensino Básico, mas somente durante o Ensino Fundamental e Médio são trabalhadas com um certo grau de formalismo, algumas definições, propriedades, construções e demonstrações.

2.2 Histórico da Geometria Analítica

Não há um consenso claro acerca do marco inicial da geometria analítica, mas é de conhecimento universal registros de práticas correlatadas a esta área da Matemática em meados de 400 a.C. Os egípcios e romanos realizavam medições de terras, correlatando as ternas pitagóricas e os gregos confeccionavam mapas, relacionando ao conceito de proporcionalidade e os eixos cartesianos ortogonais. (Oliveira, 2014; Silva, 2018; Nascimento, 2018).

Nos estudos de Pappus de Alexandria, acredita-se que Aristeu (370-300 a.C.) foi o pioneiro sobre o tratado de seções cônicas, prosseguido por Apolônio de Perga, nos anos 262 a 190 a.C. (Boyer e Merzbach, 2019; Sant'Ana, 2019). Oliveira (2014) afirma que o matemático Nicole Oresme foi o criador da Geometria Analítica, com a representação gráfica de algumas equações matemáticas, dando a ele a autoria da primeira manifestação explícita da equação da reta. E autores como Silva (2018) e Nascimento (2018) relatam que Rene Descartes e Pierre de Fermat, a partir do século XVII, foram os primeiros no estudo sistemático de métodos analíticos e algébricos, posteriormente fundidos ficariam conhecidos como Geometria Analítica.

A grande importância de René Descartes e Pierre de Fermat não é discutida entre os estudiosos, e, apesar de trabalharem paralelamente, os dois iniciaram o estudo sobre a Geometria Analítica no mesmo momento (Silva, 2018; Nascimento, 2018). A contribuição de Rene Descartes fundamentou a geometria analítica, mostrando um ponto como um par ordenado de números no plano cartesiano, que formam as retas e figuras geométricas, representadas por equações em “x“ e “y" (Silva, 2015).

Partindo do conceito de que a geometria analítica estabelece conexões entre a álgebra e a geometria, a importância de seu estudo nos dias atuais se dá pelo principal fato de transformar problemas envolvendo figuras geométricas em problemas com equações (Oliveira, 2014). Esta característica além de facilitar o entendimento humano, tornou muito mais acessível diversas áreas do nosso dia a dia.

É sabido que a geometria é dividida em três partes, entre elas a geometria analítica, que é utilizada com frequência em muitos campos de estudos, e considerada por muitos estudiosos como um dos maiores avanços da Matemática. Tem como ideia principal realizar conexões entre a geometria e a álgebra, utilizando um sistema de coordenadas cartesianas (x, y), no qual podemos localizar pontos, retas, curvas ou círculos, ou seja, partindo da ideia primitiva de ponto, pois todas essas figuras são constituídas por pontos.

A geometria analítica é comumente abordada no ensino médio como preparação do aluno para o ensino superior, mesmo que este não venha por optar a uma área que envolva as ciências exatas. Entretanto, é de extrema importância que o docente relacione os conteúdos escolares da geometria analítica com a sua existência fora da sala de aula, para estimular a assimilação e interação do aluno, o que às vezes se constitui num grande desafio.

2.3 Ensino da Geometria Analítica

A Geometria Analítica baseia-se na ideia de representar os pontos da reta por números reais e os pontos do plano por pares ordenados de números reais (Lima, 2005). Sua importância, reside no fato de que podemos representar por meio de equações as linhas do plano (reta, circunferência, parábola, etc.). Assim, é possível representar algebricamente muitas questões geométricas, como também representar de forma geométrica muitas situações algébricas. De acordo com Palaré (2013), a Geometria Analítica, também chamada Geometria de Coordenadas e de Geometria Cartesiana, é o estudo da geometria por meio de um sistema de coordenadas e dos princípios da álgebra e da análise.

Em geral, o sistema de coordenadas cartesianas é usado para manipular equações de retas, curvas e círculos, normalmente em duas dimensões, mas por vezes também em três ou mais dimensões. A Geometria Analítica ensinada nos livros escolares pode ser explicada de forma mais simples: diz respeito à definição e representação de formas geométricas de modo numérico e à extração de informação numérica dessa representação.

O estudo da geometria analítica parece ser uma excelente oportunidade de colocar o aluno diante de um ambiente de intensas relações e de diferentes representações da realidade. Além disso, a geometria analítica compõe-se de uma associação de três fatores: a expressão de uma realidade geométrica por uma relação entre quantidades variáveis, o uso das coordenadas e o princípio da representação gráfica, sendo que cada um destes três fatores surge desde muito cedo no desenvolvimento da geometria e, no entanto, muitas vezes não são encadeados.

Sousa (2014, p.15) deixa claro que ao explorar a geometria analítica no ensino médio, é crucial informar aos alunos sobre o desenvolvimento histórico desse conhecimento e sua relevância nos objetivos contemporâneos. No entanto, é fundamental que os alunos percebam as vantagens do estudo da geometria analítica, pois ela estabelece uma conexão entre diferentes áreas da Matemática, nomeadamente a geometria e a álgebra.

Nesse contexto, a responsabilidade do professor é promover a compreensão de figuras geométricas por meio de equações e a compreensão de equações por meio de figuras geométricas. Isso implica abandonar a mera apresentação de equações sem fundamentos no raciocínio lógico, evitando a memorização excessiva de fórmulas. O objetivo é facilitar a leitura, interpretação e compreensão de diversas linguagens e representações, tanto gráficas quanto algébricas, sempre buscando a articulação e a conversão entre essas abordagens.

Alcançar esse objetivo não é uma tarefa simples, dada a crescente indiferença de alguns alunos em relação à aprendizagem. Muitos deles enfrentam desafios decorrentes de lacunas em conhecimentos básicos essenciais para uma progressão saudável nos estudos. Sentindo-se incapazes diante da Matemática, alguns são mais atraídos pela comodidade da vida contemporânea do que motivados a buscar uma formação sólida.

Pensando na Geometria Analítica, vista na graduação, percebe-se que os alunos chegam nos cursos superiores com uma defasagem relativa dos conhecimentos prévios da disciplina desenvolvidos no Ensino Médio, uma vez que, de acordo com Patrício (2011, p. 17), fora do âmbito acadêmico a disciplina é estudada de uma maneira mais simples, explorando apenas alguns conceitos do espaço de dimensão dois, ou seja, o R^2.

Atualmente, tanto em escolas públicas quanto em escolas privadas, muitos estudantes apresentam dificuldades no processo de aprendizado de Geometria Analítica, o que se deve em parte à dificuldade de visualizar conceitos, propriedades e gráficos. Segundo Santos (2013) estas dificuldades estão relacionadas os caracteres básicos da Matemática elementar, associados ainda às dificuldades de interpretação e representação gráfico-geométrica nos exercícios propostos.

Para mitigá-las, a introdução de softwares específicos tem se mostrado eficaz. Essas ferramentas possibilitam uma abordagem dinâmica, permitindo que os estudantes criem, manipulem e observem figuras e gráficos de maneira interativa. Essa visualização prática facilita a compreensão de conceitos abstratos e fornece feedback imediato, contribuindo para um aprendizado mais eficiente. Além disso, a personalização do ensino e a preparação para habilidades digitais essenciais na era contemporânea são benefícios notáveis. No entanto, é crucial manter um equilíbrio entre métodos tradicionais e tecnológicos, com ênfase na capacitação docente para uma integração eficaz.

Em síntese, a introdução de softwares educacionais no ensino de Geometria Analítica oferece uma abordagem interativa para superar desafios de aprendizado. Essas ferramentas não apenas possibilitam a visualização prática de conceitos, mas também fornecem feedback imediato e promovem a personalização do ensino, preparando os alunos para as demandas da era digital. Contudo, é imperativo integrar essas inovações de forma equilibrada, mantendo a eficácia dos métodos tradicionais e assegurando a formação adequada dos educadores.

2.4 Uso das novas tecnologias aplicadas ao ensino

É notável as mudanças que as Tecnologias Digitais de Informação e Comunicação (TDIC) trazem principalmente para o espaço escolar, pois é uma maneira que o professor tem de inovar suas aulas, tornando-as mais interessantes e atrativas, proporcionando aos alunos um ambiente onde ele terá uma participação ativa na construção do seu conhecimento.

Para Costa (2014), conseguir integrar o uso de novas tecnologias com os saberes, de forma a construir um ambiente de aprendizagem no qual esses recursos sejam potencializadores, e venham a promover uma aprendizagem interessante e significativa, é um grande desafio para os professores.

Contudo, o uso da tecnologia não é suficiente para produzir uma aprendizagem interessante e significativa, é necessário que haja uma interação entre o ensino convencional o uso de ferramentas digitais. Essas ferramentas podem facilitar o processo de ensino e aprendizagem. Para que isso ocorra, é necessário que haja um planejamento bem elaborado, além de uma sequência didática que englobe a ferramenta utilizada. Para Valente (1996), a inserção da tecnologia se faz necessário, pois a mudança na condição de vida ocorreu e a natureza do conhecimento mudou.

A utilização de softwares educacionais, de acordo com Albuquerque e Santos (2009), proporciona um ambiente interativo e dinâmico no ensino de matemática. Essas ferramentas possibilitam que os alunos construam e investiguem propriedades e conceitos matemáticos, manipulando objetos e seus elementos de forma dinâmica na tela do computador. Especial ênfase é dada à identificação das características das figuras geométricas.

Entretanto, os autores alertam que a simples adoção de recursos tecnológicos não assegura melhorias no processo de ensino e aprendizagem. É essencial que o professor faça uma cuidadosa seleção e utilize os softwares de maneira apropriada. Assim como em qualquer outra metodologia, é necessário que o docente pesquise e planeje suas aulas de forma criteriosa, evitando que estas se tornem apenas uma repetição do modelo tradicional.

O estudo da geometria analítica possibilita a análise de propriedades e elementos geométricos por meio de processos algébricos. O aluno do ensino médio tem a oportunidade de pensar algebricamente sobre os problemas geométricos. Além disso, deve perceber que um mesmo problema matemático pode ser abordado com diferentes instrumentos de acordo com as suas características (BRASIL, 2002). Porém a defasagem no estudo da geometria e da álgebra em anos anteriores podem gerar sérias dificuldades no estudo da geometria analítica, o que desmotiva o aluno a prosseguir com o estudo e obter uma aprendizagem significativa. Para Costa (2014, p.17), "O aluno precisa estar motivado para aprender. A motivação é algo intrínseco ao ser humano, já nascemos com essa característica. Agora, para podemos exercitá-la, é necessário determinar estímulos".

A geometria analítica é comumente abordada nos anos finais do Ensino Médio, especificamente no 3º ano. No currículo mínimo, a proposta é apresentar esse conteúdo ao longo do 3º e 4º bimestres do ano letivo. Sabendo que há a existência de uma grande quantidade de programas e vários tipos de *software*s educativos. Temos a possibilidade de explorar vários assuntos e conteúdos matemáticos em ambientes virtuais, deixando nossas aulas dinâmicas e complementando os conteúdos propostos para a sala de aula.

Com isso, por ser um aplicativo gratuito, de fácil manipulação e compreensão e por mostrar a representação algébrica e geométrica de um mesmo elemento, o aplicativo GeoGebra foi escolhido como instrumento facilitador e motivador deste trabalho. Além disso, esse aplicativo não requer o uso de internet após feito o seu download.

2.5 Geogebra

O GeoGebra nasceu de um projeto brilhante, em 2001, através de seu idealizador e criador, Markus Hohenwarter, o defendeu como dissertação de mestrado, na universidade de Salzburg. Desde sua criação, o programa vem inovando e avançando suas representações e ferramentas, tanto geométricas quanto algébricas. O mesmo, já ganhou diversos prêmios no mundo inteiro.

O GeoGebra é um *software* de Matemática dinâmica que reúne conceitos de geometria, álgebra e cálculo, podendo servir para alcançar o objetivo de se entender melhor a Matemática e deixá-la mais atrativa. Seu nome vem da junção de partes das palavras geometria e álgebra. Este *software* é de distribuição livre, escrito em linguagem Java, o que lhe permite estar disponível em várias plataformas podendo ser instalado em computadores com Windows, Linux ou Mac OS. É desenvolvido para auxiliar no ensino de Matemática nos vários níveis de ensino, do básico ao universitário.

O GeoGebra emerge como uma notável ferramenta pedagógica, capaz de realizar construções geométricas mediante a manipulação de pontos, retas, segmentos de retas e polígonos. Ademais, ostenta a habilidade de representar funcionalidades matemáticas diversas, incluindo equações de retas, parábolas, circunferências e cônicas em geral. A integração harmônica de elementos geométricos e algébricos confere ao programa uma considerável amplitude de aplicabilidade, destacando-se em operações envolvendo pontos, vetores e análises matemáticas mais avançadas, como derivação e integração.

Este software oferece uma interface dinâmica que facilita a exploração visual e prática de conceitos matemáticos. A capacidade de realizar construções geométricas interativas, aliada à representação gráfica de funções, contribui significativamente para a compreensão aprofundada de tópicos matemáticos complexos. Adicionalmente, a flexibilidade proporcionada pela edição de comandos previamente executados acrescenta uma camada de adaptabilidade às construções matemáticas.

O GeoGebra é, assim, não apenas uma ferramenta de construção geométrica e algébrica, mas também um instrumento valioso no contexto educacional. Seu emprego facilita a visualização e exploração de conceitos matemáticos, proporcionando aos estudantes uma abordagem interativa e prática no processo de aprendizado.

Sousa (2014) deixa claro que a capacidade do GeoGebra em proporcionar uma experiência envolvente, permitindo a exploração visual e manipulação de conceitos matemáticos, aliada a um layout atrativo e fácil usabilidade, destaca-se como vantajosa para tornar o aprendizado mais acessível aos alunos.

Entretanto, é essencial reconhecer que o GeoGebra não representa uma solução isolada para o ensino da Matemática. A figura do professor permanece indispensável nesse processo. A eficácia do GeoGebra é potencializada quando integrada de forma consciente e planejada nas práticas pedagógicas, com o professor desempenhando um papel fundamental ao guiar os alunos, fornecer contexto teórico, promover discussões e estimular a reflexão sobre os conceitos explorados no software. A utilização colaborativa do GeoGebra em sala de aula pode transformar a dinâmica tradicional de ensino, promovendo uma abordagem mais participativa e cooperativa, onde todos os envolvidos se organizam como parceiros e aprendizes, enriquecendo assim o ambiente de aprendizado.

2.6 Uso do GeoGebra como ferramenta de ensino aprendizagem

O uso de ferramenta de tecnologia em educação na Matemática além de tornar as aulas mais dinâmicas, deve promover mudanças nas formas de ensinar e aprender os conteúdos. De posse de alguns recursos da informática, o professor terá a oportunidade de mudar sua forma de ministrar aula e o alunos poderão desempenhar um papel mais ativo em todo processo de ensino-aprendizagem. E é aqui onde se encaixa perfeitamente o *software* GeoGebra.

Por ser um *software* de acesso livre, o GeoGebra pode vir a ser um importante aliado dos professores como recurso metodológico ao permitir uma abordagem dinâmica para diversos conteúdos trabalhados na Educação Básica, especialmente geometria e funções, bem como na Educação de Ensino Superior com derivadas e integrais.

Por meio da construção interativa de "figuras" e "objetos", pode-se tentar melhorar a compreensão dos alunos através da visualização, percepção dinâmica de propriedades, estímulo heurístico à descoberta e obtenção de conclusões "validadas" durante a experimentação, tendo em vista que o GeoGebra é um sistema de geometria dinâmica que permite fazer muitas construções como pontos, segmentos de reta, retas, polígonos, gráficos de funções etc. Com a vantagem enorme de poder alterar e/ou modificar dinamicamente estas construções, mesmo após ela já está finalizada. Com a ajuda deste *software* pretende-se facilitar a visualização, interpretação e principalmente, a resolução de alguns exercícios que serão propostos em capítulos posteriores.

Dessa forma, corroborando com Jardim e Cecílio (2013) percebe-se que o uso da tecnologia traz vários benefícios. Os alunos se tornam mais participativos, possuem mais iniciativa, sentem mais prazer durante o processo de manipulação das ferramentas do programa de geometria dinâmica ao mesmo tempo em que experimentam outras ferramentas por conta própria, desenvolvendo assim sua autonomia.

O GeoGebra desperta nos alunos uma grande capacidade de investigação, através do uso de suas ferramentas, tornando o estudo de Matemática mais acessível, tangível e até divertido (Silva, 2020, p. 75). No entanto, Araújo e Nóbrega (2010) fazem um alerta quanto a necessidade de articulação do professor no processo e na criação de atividades propostas aos estudantes:

> Apesar do GeoGebra fornecer condições que permitem a elaboração de situações que favorecem a construção de conhecimentos pelo aluno, ele, sozinho, não pode ensinar coisa alguma. Para que haja aprendizagem efetiva com este recurso, é necessário a elaboração de situações de uso. (Araújo e Nóbrega, 2010, p. 11).

Pensando nisso é que surge este trabalho, pois com o uso do *software* GeoGebra nesta abordagem introdutória à geometria analítica para o ensino médio, propõe-se atividades que darão oportunidade ao aluno de observar, construir e manipular objetos a fim de que este se sinta mais motivado a pensar e enfrentar situações que lhes possibilitem obter a compreensão clara das relações fortes existentes entre a álgebra e a geometria, ajudando-o a perceber que a Matemática não se compõe de um conjunto de temas que precisam ser tratados de forma separada.

3. METODOLOGIA

3.1. Do tipo de pesquisa

A pesquisa desenvolvida neste trabalho foi qualitativa e de campo, com o intuito de realizar uma sequência didática no ensino de Geometria Analítica com o auxílio do *software* GeoGebra. Foi aplicada na turma do terceiro ano B do ensino médio do curso técnico integrado em Petróleo e Gás do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia da Paraíba, campus Campina Grande. A aplicação teve como intuito mostrar que é possível e necessário o uso periódico do GeoGebra como ferramenta de ensino-aprendizagem, podendo, sem necessidade de maiores recursos, estar no cotidiano das aulas de Matemática.

Nos primeiros encontros com a turma do 3° ano foi realizado uma apresentação do GeoGebra e do projeto em geral. Logo em seguida, após a turma dominar os conceitos básicos da ferramenta, utilizou-se um dos laboratórios de informática do Campus para desenvolver as atividades planejadas, no qual, ao manusear arquivos feitos com o GeoGebra, os alunos puderam fazer suas próprias descobertas e realizarem as tarefas de forma mais dinâmica podendo dialogar com os colegas acerca das descobertas e sanar as possíveis dúvidas com o professor.

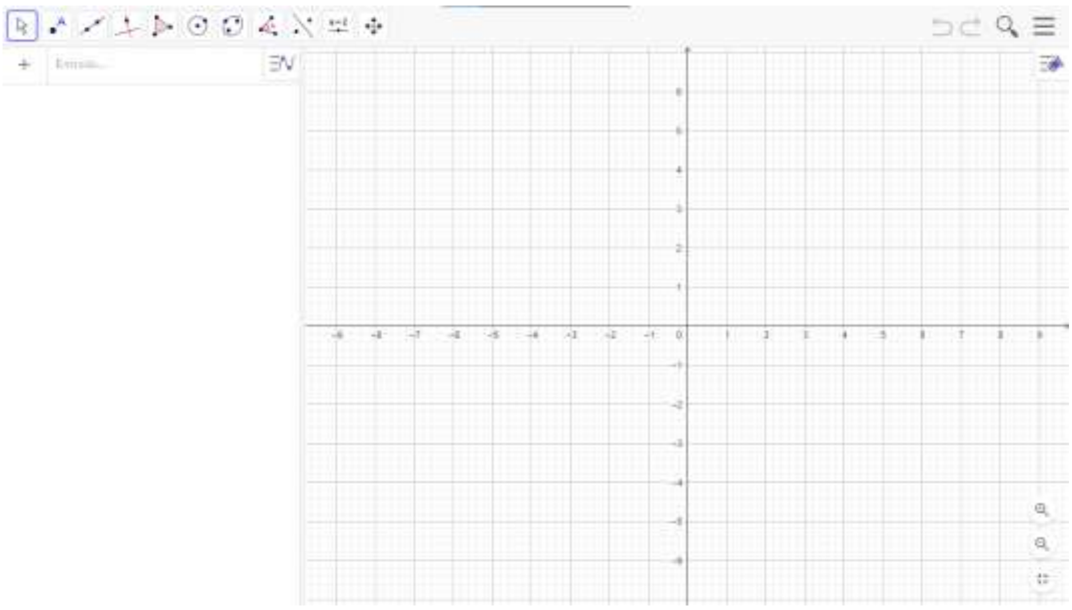
Por fim, após a realização de todas as atividades propostas, os alunos se dispuseram a responder um formulário, dando sua opinião sobre o que acharam da utilização do *software* na aula experimental e se utilizariam em mais atividades fora do projeto de pesquisa desenvolvido. Com este aparato de informações se pôde analisar se os resultados daquela amostra eram favoráveis ou não e se a aplicação do GeoGebra em sala de aula de forma periódica é possível, e se realmente se faz necessário ou se seria apenas mais uma forma de ensinar o mesmo conteúdo de maneira diferente.

3.2. Interfaces do *software* GeoGebra

O *software* GeoGebra possibilita a criação e interação com objetos matemáticos diretamente na tela do computador, permitindo que as atividades matemáticas se desenvolvam de maneira dinâmica e interativa. Ele possui inúmeras funcionalidades, porém, serão ressaltadas as funções e ferramentas, mais importantes para o desenvolvimento da sequência didática trabalhada nesta pesquisa.

Ao ser iniciado, o GeoGebra exibe uma barra de menu, uma de ferramentas, caixa de entrada, janela de álgebra, e de visualização 2D. Esses comandos possibilitam a produção de projetos que possam ser projetados no plano cartesiano. Eles estão organizados na interface do programa conforme ilustrado na Figura 1:

Figura 1 - Interface inicial do GeoGebra Classic



Fonte: Autor (2023)

3.2.1. Menu exibir

A Janela de Visualização é exibida assim que o programa é iniciado. Para selecionar outra Janela, basta ir ao Menu Exibir e escolher a desejada. São elas (Figura 2):

Figura 2 - Menu Exibir

Fonte: Autor (2023)

.

- **Janela CAS**: é uma janela destinada à álgebra computacional;

- **Janela de Visualização 2D**: uma alternativa para a construção de objetos com até duas dimensões;

- **Janela de Visualização 3D**: uma Interface para a construção de objetos com até três dimensões;

- **Planilha de Dados**: uma Ferramenta para construção e organização de dados;

- **Calculadora de probabilidade**: uma Calculadora voltada para análises estatísticas e cálculos de probabilidade;

- **Protocolo de Construção**: uma Janela que fornece dados sobre as construções realizadas no programa.

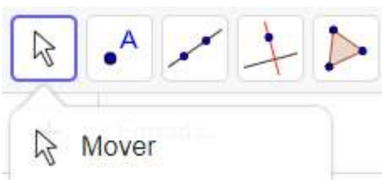
3.2.2. Janela de Visualização 2D

Os projetos desta pesquisa foram desenvolvidos na Janela de Visualização 2D. A janela possui inúmeras ferramentas, as de maior importância para a aplicação são citadas logo abaixo:

1) **Primeira Caixa de ferramentas (Figura 3):** na qual há a presença do comando **Mover.**

- **Mover:** Move o objeto em toda a janela de visualização, para isso, deve-se selecionar o objeto e movê-lo até a posição desejada.

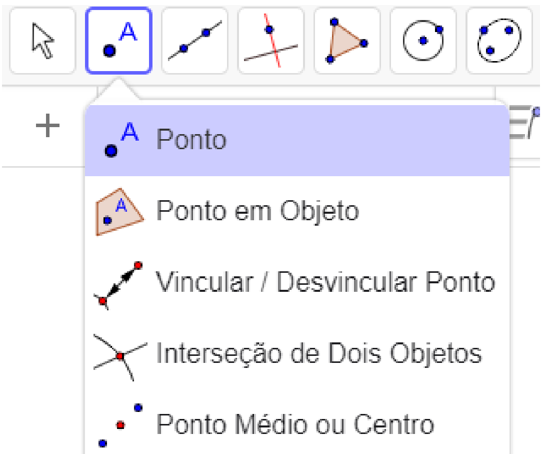
Figura 3 - Primeira Caixa de ferramentas



Fonte: Autor (2023)

2) **Segunda Caixa de ferramentas (Figura 4):** agrega as ferramentas **Ponto, Ponto em Objeto, Vincular / Desvincular Ponto, Intersecção de Dois Objetos, Ponto Médio ou Centro.**

Figura 4 - Segunda Caixa de ferramentas



Fonte: Autor (2023)

- **Ponto:** Para criar um ponto na área de visualização, basta selecionar a posição desejada na janela. Existem três tipos de pontos no GeoGebra: um ponto livre, criado com um clique na área de visualização e que pode se movimentar por toda a janela; um ponto inserido em uma reta ou qualquer outro objeto, com movimento restrito ao objeto, podendo ser deslocado por toda sua extensão; e, por fim, o ponto fixo, formado pela interseção de dois objetos.

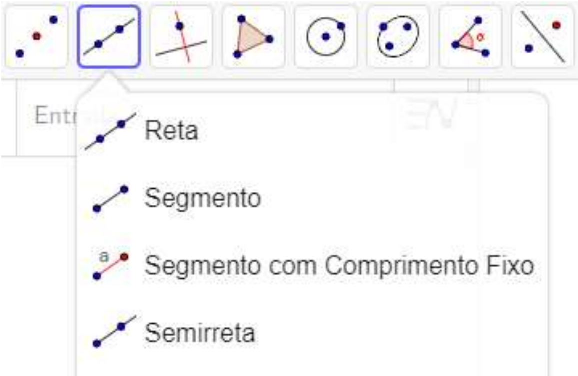
- **Ponto em Objeto:** Associa um ponto livre a um objeto nas proximidades ou desvincula um ponto móvel restrito ou fixo.

- **Vincular / Desvincular Ponto:** Vincula ou desvincula pontos de intersecção em dois objetos.
- **Intersecção de Dois Objetos:** cria um ponto fixo que pertence aos dois objetos.

- **Ponto Médio ou Centro:** Ao clicar em dois pontos ou dois objetos, cria-se um terceiro ponto equidistante dos pontos ou objetos iniciais.

3) **Terceira Caixa de ferramentas (Figura 5):** agrega as ferramentas R**eta, Segmento, Segmento com Comprimento Fixo e Semirreta.**

Figura 5 - Terceira Caixa de ferramentas



Fonte: Autor (2023).

- **Reta:** Ao selecionar dois pontos é possível formar uma reta, que passará pelos dois pontos.

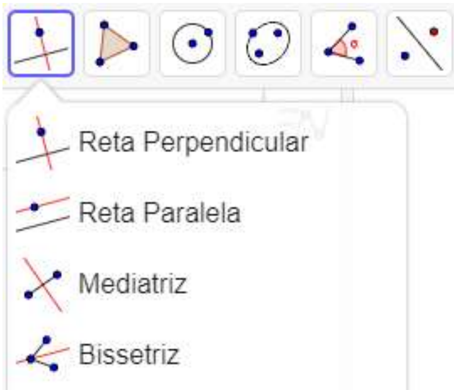
- **Segmento:** Ao selecionar dois pontos é possível formar um seguimento.

- **Segmento com Comprimento Fixo:** A partir de um ponto dado, e um comprimento delimitado é possível criar um seguimento com um ponto móvel.

- **Semirreta:** Ao selecionar dois pontos é possível formar uma semirreta, com origem no ponto inicial.

4) **Quarta Caixa de ferramentas (Figura 6):** agrega as ferramentas **Reta Perpendicular, Reta Paralela, Mediatriz** e **Bissetriz.**

Figura 6 - Quarta caixa de ferramentas



Fonte: Autor (2023)

- **Reta perpendicular:** ao adicionar um ponto em uma reta ou vetor já criado, o *software* cria uma outra reta perpendicular que passa pelo ponto criado.

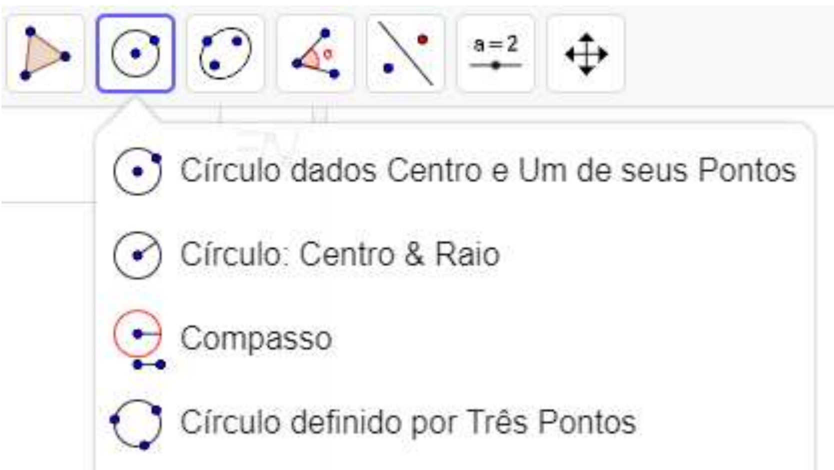
- **Reta Paralela:** ao adicionar um ponto externo a uma reta, o *software* cria uma segunda reta que passa pelo ponto e é paralela à reta inicial.

- **Mediatriz:** ao clicar em dois pontos cria-se uma reta que passa pelo ponto médio dos dois pontos iniciais.

- **Bissetriz:** para criar uma bissetriz basta selecionar as duas retas iniciais, ou três pontos (não colineares), sendo o primeiro pertencente à primeira reta, o terceiro à segunda, e o segundo ponto como interseção delas. Dividindo o ângulo formado pelas duas retas ou os três pontos ao meio.

5) **Quinta caixa de ferramenta (Figura 7):** agrega as ferramentas **Círculo dados Centro e Um de seus Pontos, Círculo: Centro & Raio, Compasso** e **Círculo definido por Três Pontos**

Figura 7 - Quinta caixa de ferramenta



Fonte: Autor (2023)

- **Círculo dados Centro e Um de seus Pontos:** para criar está figura, basta selecionar um ponto referente ao centro do círculo e logo após um segundo ponto que estará contido na borda do círculo e o segmento formado pelos dois pontos será o raio do círculo.

- **Círculo: Centro & Raio:** para criar está figura, deve-se determinar um ponto e logo após a medida do raio.

- **Compasso:** para realizar esta figura, basta selecionar dois pontos e determinar qual dos dois será o raio.

- **Círculo definido por Três Pontos:** para desenvolver esta figura basta selecionar três pontos não colineares que determinarão o novo círculo.

3.3. Sequência didática

A pesquisa desenvolvida neste projeto teve como base uma sequência didática que utilizou como principal ferramenta o *software* GeoGebra.

O conteúdo de Geometria Analítica foi ministrado previamente nas aulas correntes do ano letivo. Os tópicos de Geometria Analítica abordados nesta sequência didática foram três: Posição Relativa Entre Retas, Posição Relativa Entre Duas Circunferências e Posição Relativa Entre Reta e Circunferência. Foram escolhidos por serem essenciais no ensino de Geometria Analítica, bem como sua dificuldade de ser exposto em sala de aula apenas com um quadro branco e réguas.

A sequência didática desenvolvida nesse projeto buscou trazer uma aula mais leve e dinâmica, na qual o aluno pôde interagir com a ferramenta e chegar as suas próprias conclusões por meio do visual, interpretando cada situação proposta no projeto.

A sequência aconteceu em três encontros de 50 minutos, em um dos laboratórios de Matemática do IFPB-CG. A pesquisa foi desenvolvida no terceiro ano do curso técnico integrado ao ensino médio - turma B, que é composta por 25 alunos, e faz parte de um núcleo do Projeto de Residência Pedagógica do IFPB-CG no âmbito da CAPES, coordenada pelo professor Rodrigo Moura da Silva, tendo o executor da sequência didática, autor deste trabalho, como um dos residentes.

3.3.1 Primeiro Encontro - Posição Relativa Entre Retas no Plano

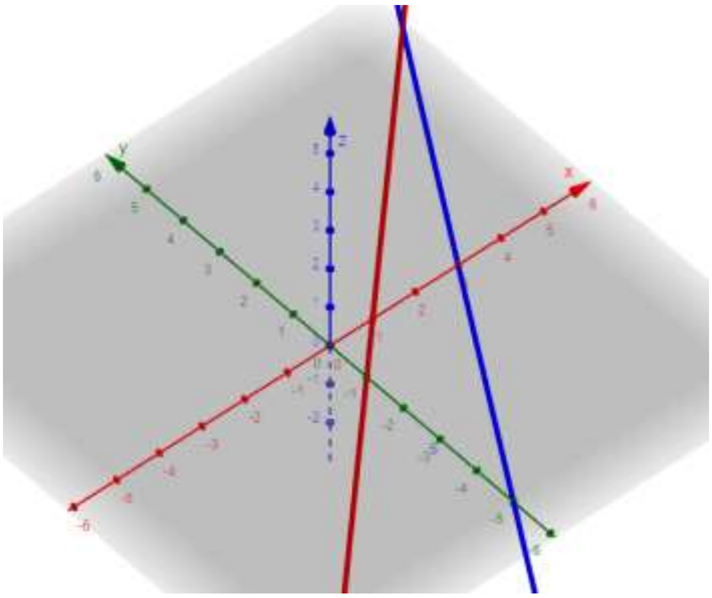
Sabendo que a equação reduzida de uma reta é dada por $y = mx + n$, onde $\boldsymbol{m}$ é o coeficiente angular e $\boldsymbol{n}$ o termo independente, a reta intersecta o eixo das ordenadas na coordenada $(0, n)$.

O coeficiente angular m é a medida da tangente do ângulo que a reta faz com a direção horizontal, sendo chamado também este parâmetro de inclinação da reta.

Em se tratando da posição relativa entre duas retas, esse conceito refere-se à maneira como elas se relacionam no espaço bidimensional. Tal relação é determinada pelos seguintes conceitos principais:

- **Retas coplanares:** duas retas são coplanares quando estão contidas no mesmo plano, como descrito na Figura 8. Sendo então retas do mesmo plano, as mesmas podem ser **concorrentes, paralelas** ou **coincidentes**.

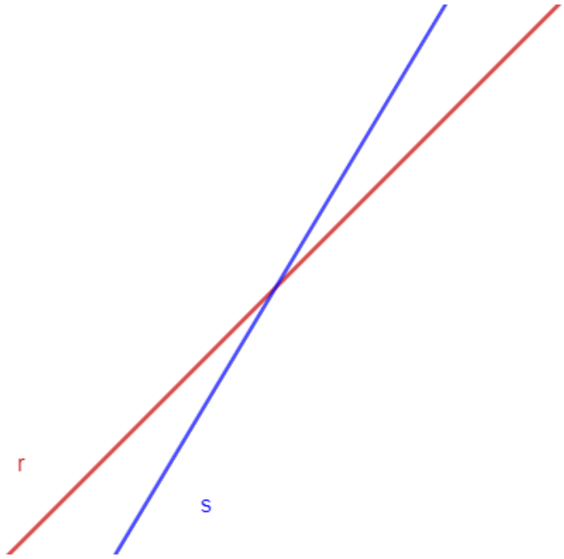
Figura 8 - Retas Coplanares



Fonte: Autor (2023)

- **Retas concorrentes:** duas retas $r_1: y = m_1x + n_1 \quad r_2: y = m_2x + n_2$ são concorrentes quando têm um ponto em comum. Relação que caracteriza este fato é $m_1 \neq m_2$ como e sua ilustração está descrita na Figura 9.

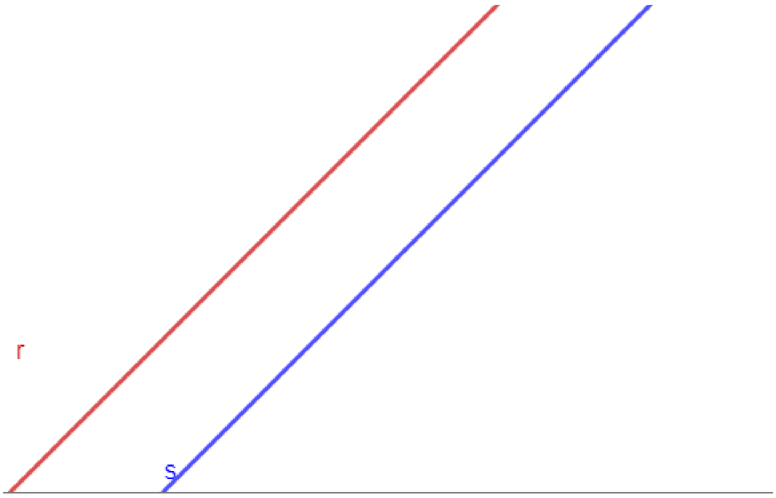
Figura 9 - Retas Concorrentes



Fonte: Autor (2023)

- **Retas paralelas:** duas retas $r_1 \colon y = m_1 x + n_1$ e $r_2 \colon y = m_2 x + n_2$ são paralelas quando não têm pontos em comum e mantêm a mesma inclinação, ou seja $m_1 = m_2$ e $n_1 \neq n_2$, como descrito na Figura 10.

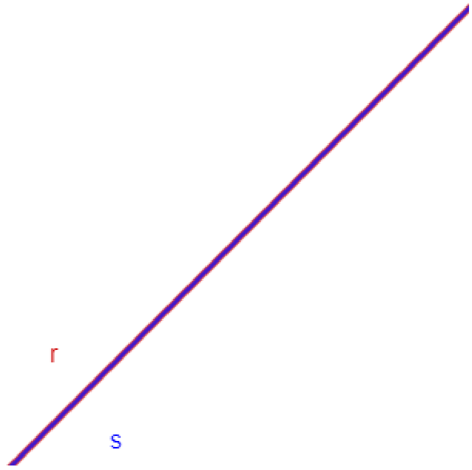
Figura 10 - Retas Paralelas



Fonte: Autor (2023)

- **Retas coincidentes:** duas retas são coincidentes (Figura 11) quando uma está sobreposta à outra, sendo essencialmente a mesma reta . Nesse caso, que é um caso particular de retas paralelas, os parâmetros das retas são iguais entre si, ou seja, ou seja $m_1 = m_2$ e $n_1 = n_2$.

Figura 11 - Retas Coincidentes



Fonte: Autor (2023)

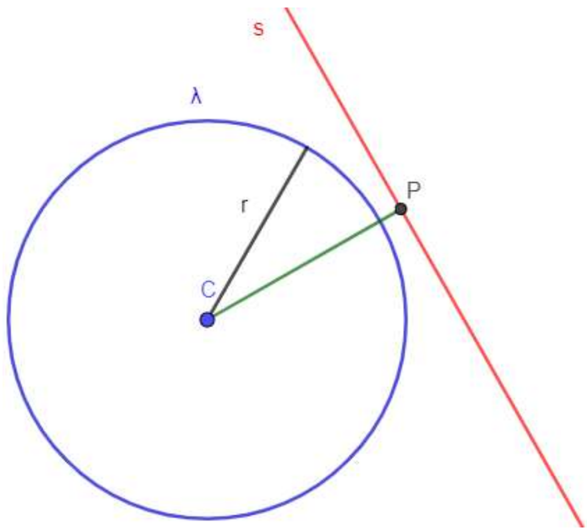
No laboratório, a turma teve acesso ao formulário por meio dos computadores, acessando o Google Classroom (Google sala de aula), e foram instruídos a respondê-lo utilizando o Geogebra (tiveram acesso por meio de um link contido no próprio formulário). As perguntas contidas no formulário tinham comandos que os levavam a atribuir valores aos coeficientes $\boldsymbol{m}$ e $\boldsymbol{n}$ das equações das retas, tanto digitando valores em caixa de entrada , como pelo manuseio de controles deslizantes, fazendo com que cada um pudesse identificar quando as retas eram concorrentes, paralelas ou coincidentes.

3.3.2. Segundo encontro – Posição Relativa Entre Reta e Circunferência no Plano

As posições relativas entre reta e circunferência são três: reta externa à circunferência, reta secante à circunferência e reta tangente à circunferência. Para se determinar os tipos de posição relativa entre reta e circunferência é necessário que se cumpra as seguintes definições:

- **Reta Externa a circunferência:** de acordo com a Figura 12, seja P um ponto contido na reta e está a menor distância entre a reta e o centro da circunferência λ, ou seja, se traçarmos um seguimento que passa no ponto P e no C, ele será perpendicular a reta. Então, para que a reta s seja externa a λ é necessário que: $d(C, P) > r$, ou seja, não há nenhum ponto de interseção entre a reta e a circunferência.

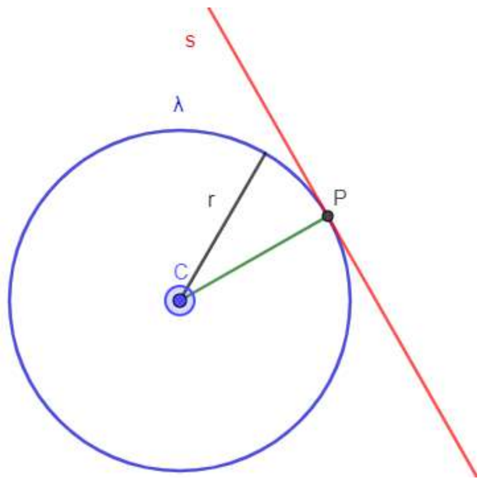
Figura 12 - Reta Externa a Circunferência



Fonte: Autor (2023)

- **Reta tangente a circunferência:** para que a reta seja tangente a circunferência, como descrito na Figura 13, é necessário que a reta a intersecte a circunferência em apenas um ponto, ou seja, condição $d(C,P) = r$, seja cumprida.

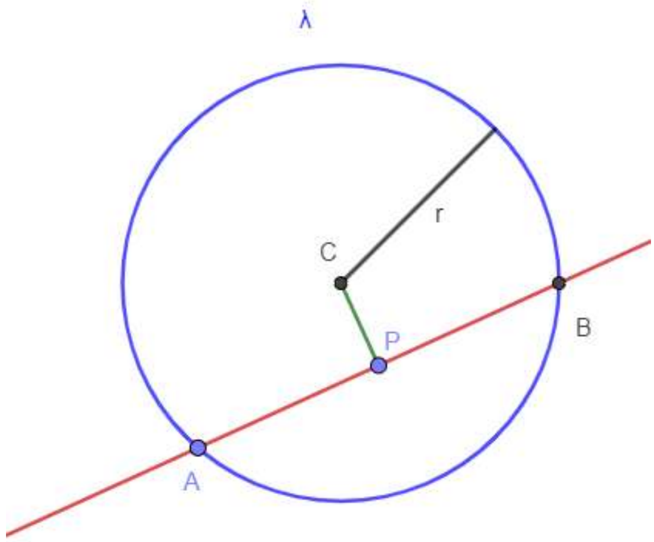
Figura 13 - Reta Tangente a Circunferência



Fonte: Autor (2023)

- **Reta secante a circunferência:** por definição, a reta secante a circunferência deve intersectá-la em dois pontos distintos, (Figura 14). Para isso, deve-se cumprir a seguinte condição: $d(C,P) < r$.

Figura 14 - Reta Secante a Circunferência



Fonte: Autor (2023)

.

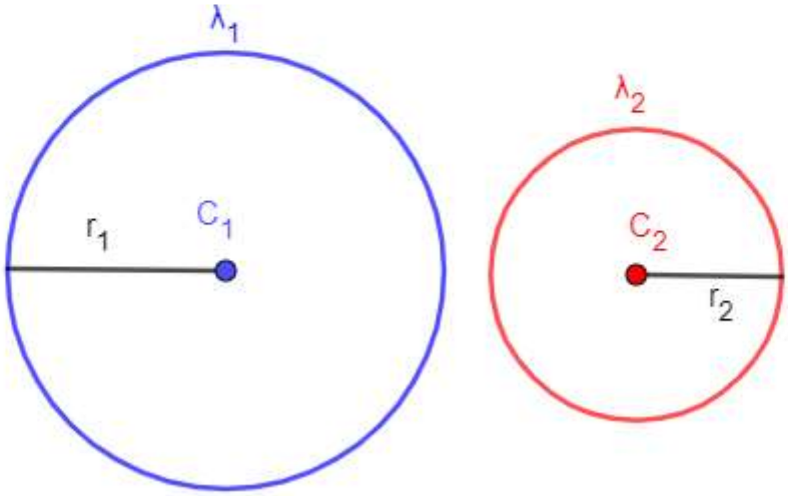
A aplicação seguiu os mesmos moldes das duas aplicações anteriores, ou seja, no laboratório de Matemática, munidos dos computadores, os alunos acessaram o formulário e responderam às perguntas propostas, utilizando o GeoGebra como base para a resolução. Também foi respondido no último formulário o grau de satisfação que a turma obteve ao realizar as tarefas propostas nos três encontros.

3.3.3. Terceiro encontro – Posição Relativa Entre Circunferências no Plano

A equação reduzida da circunferência é dada por $(x - x_c)^2 + (y - y_c)^2 = r^2$, onde$(x_c, y_c)$ é o centro C da circunferência, (x, y) é um ponto qualquer da circunferência e r é o raio da circunferência. Para se determinar a posição relativa entre duas circunferências de centro C_1 e C_2, com raios r_1 e r_2, segue-se as seguintes definições:

- **Circunferências disjuntas exteriores:** Para que duas circunferências sejam disjuntas exteriores é necessário que $d(C_1, C_2) > r_1 + r_2$, ou seja, devem ser externas uma à outra e não possuam nenhum ponto comum, como descrito na Figura 15.

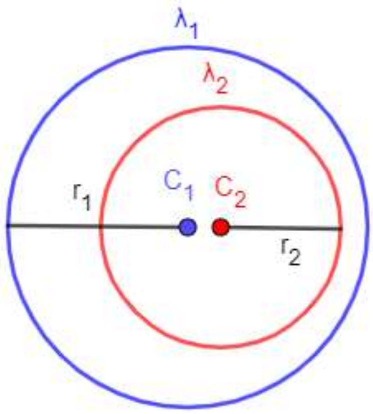
Figura 15 - Circunferências Disjuntas Exteriores



Fonte: Autor (2023)

- **Circunferência disjuntas, uma interna à outra:** neste caso, para que as circunferências sejam disjuntas, uma interna à outra, é necessário que $0 \leq d(C_1, C_2) \leq |r_1 - r_2|$ se cumpra, ou seja, devem ser uma interna à outra e não possuam nenhum ponto comum, como descrito na Figura 16.

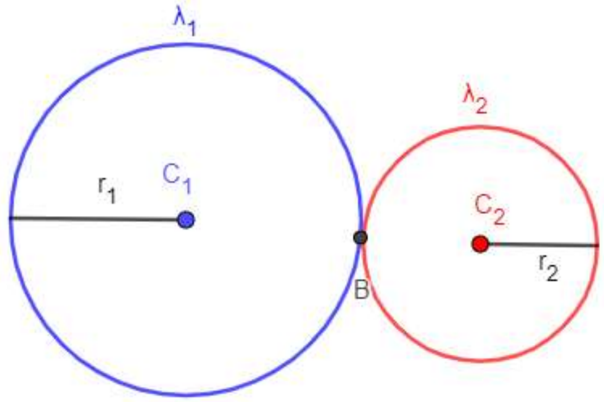
Figura 16 - Circunferência Disjuntas Interiores



Fonte: Autor (2023)

- **Circunferências tangentes externas:** para que duas circunferências sejam tangentes externas é necessário que $d(C_1, C_2) = r_1 + r_2$, ou seja, a distâncias entre os centros deve ser igual à soma dos seus raios, tendo apenas um ponto comum entre as duas circunferências, (Figura 17).

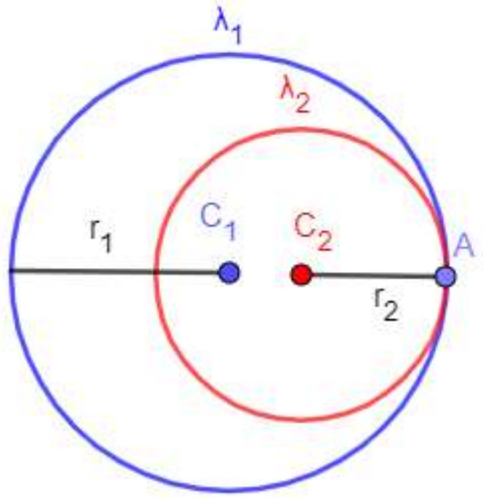
Figura 17 - Circunferências Tangentes Externas



Fonte: Autor (2023)

- **Circunferências tangentes, uma interna à outra:** já para circunferências tangentes uma interna à outra é necessário que $d(C_1, C_2) = |r_1 - r_2|$, ou seja, a distância entre os centros deve ser igual ao modulo da diferença dos raios, fazendo com que as circunferências sejam internas uma à outra, (Figura 18).

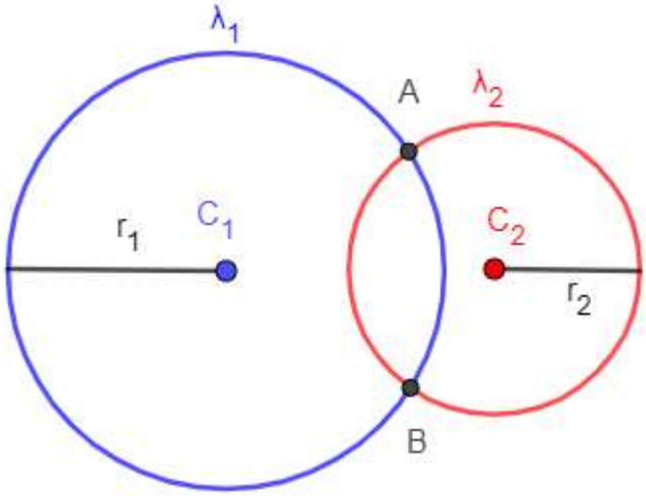
Figura 18 - Circunferências Tangentes Internas



Fonte: Autor (2023)

- **Circunferências Secantes**: Quando se trata das circunferências secantes, é necessário que $|r_1 - r_2| \leq d(C_1, C_2) \leq r_1 + r_2$, ou seja, a distância entre os centros deve ser maior que o modulo da diferença dos raios e menor que a soma dos raios, com isso, as circunferências se intersectam em dois pontos, como mostra a Figura 19.

Figura 19 - Circunferências Secantes



Fonte: Autor (2023)

Os discentes, munidos do conhecimento das definições apresentadas durante o primeiro encontro, foram incumbidos de acessar o formulário no ambiente virtual Google Classroom. Nesse espaço, foram confrontados com questões elaboradas que abrangiam as diversas relações existentes entre duas circunferências e as resolveram com auxílio do GeoGebra, o qual foi acessado através de um link incorporado diretamente no formulário.

Este procedimento visou proporcionar uma abordagem prática e aplicada, permitindo aos alunos aprofundassem sua compreensão sobre as interconexões geométricas entre as circunferências. A utilização do GeoGebra como ferramenta facilitadora objetivou enriquecer a análise e solução das questões propostas, conferindo um caráter dinâmico e visualmente elucidativo ao processo de aprendizagem.

4. APLICAÇÃO

4.1. Primeiro encontro - Posição Relativa Entre Retas no Plano

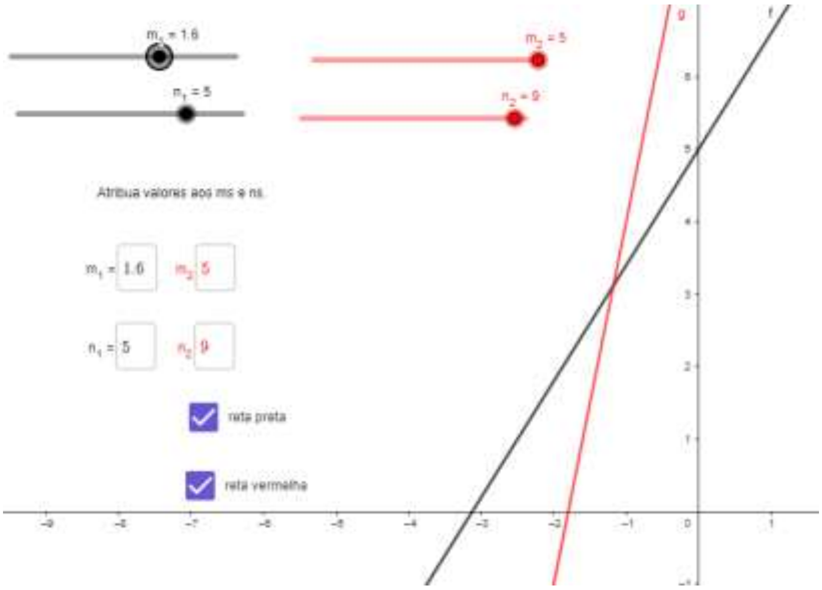
Sequência Didática ocorreu em três encontros de 50 minutos, cada um. No primeiro encontro (APÊNDICE A - Posição Relativa Entre Retas no Plano), os alunos se reuniram no laboratório (Figura 20) e tiveram acesso ao formulário disponibilizado no Google Sala de Aula. Utilizaram os computadores do laboratório para acessá-lo. Estavam presentes na aula 22 alunos, acomodaram-se e seguiram as orientações prestadas. Abriram o Formulário registraram seus e-mails e aceitaram o termo de participação da atividade, o qual os dava garantia de proteção de sua identidade e que apenas os dados da pesquisa seriam utilizados para finalidade de eventuais trabalhos acadêmicos futuros.

Figura 20 - Alunos realizando a primeira aplicação no laboratório de Matemática

Fonte: Autor (2023)

Logo em seguida, havia instruções de clicar no *link* que levaria ao arquivo do GeoGebra na Web, todos acessaram o *software* e observaram cada detalhe do projeto (Figura 21), podendo atribuir valores aos parâmetros m e n de ambas as retas seja por digitação na caixa de entrada, seja pelo ato de mover os controles deslizantes. Os alunos manusearam a construção conforme instruções dadas e logo após isso, voltaram ao formulário e responderam as questões solicitadas, conforme transcrito a seguir:

Figura 21 - Projeto Posição Relativa Entre Duas Retas no Plano



Fonte: Autor (2023)

- **Primeira questão:** "Digite valores iguais para m nas duas retas, ou seja, $m_1 = m_2$. O que acontece com a posição das retas?" Com as seguintes alternativas: "ficam paralelas", "se cruzam" e "se sobrepõem". A intenção desta questão era que eles relacionassem os coeficientes m_1 e m_2 das retas aos seus respectivos coeficientes angulares e vissem que eles têm influência sobre a posição da reta, especificamente sobre sua inclinação.
- **Segunda questão:** "Digite valores diferentes para o $m's$ nas duas retas e veja o que acontece. Qual posição observada entre as duas retas?" Com as seguintes alternativas: "ficam paralelas", "se cruzam" e "se sobrepõem". Já este problema buscava mostrar que duas retas, quando seus coeficientes angulares são diferentes, tornam-se concorrentes, já que suas inclinações em relação ao eixo das abscissas são diferentes.
- **Terceira questão:** A terceira questão que teve por problemática: "Agora digite valores iguais para os parâmetros $m's$ e também iguais para os parâmetros $n's$ e veja o que acontece com a posição das retas. Marque abaixo o que você observou." Com as seguintes alternativas: "ficam paralelas", "se cruzam" e "se sobrepõem". Desta vez, a intenção do problema foi mostrar que quando os $m's$ e os $n's$ são iguais, as retas se sobrepõem, ou seja, são coincidentes.
- **Quarta questão:** a última questão desenvolvida para a primeira tarefa foi: "O que você conclui sobre os parâmetros m_1 e n_1 da reta preta e m_2 e n_2 da reta vermelha?" Com as seguintes alternativas: "Quando os $m's$ são iguais, as retas são paralelas;", "Quando os

$m's$ são diferentes as retas se sobrepõem;", "Quando os $m's$ são diferentes as retas se cruzam;", "Quando os $m's$ são iguais e os $n's$ também, as retas se sobrepõem."

A intenção desta questão era resumir todas as questões anteriores, para que os alunos pudessem associar cada posição relativa entre as retas e seus respectivos parâmetros.

4.2. Segundo Encontro – Posição Relativa Entre Reta e Circunferência no Plano

O segundo encontro (APÊNDICE B - Posição Relativa Entre Reta e Circunferência no Plano) seguiu o mesmo as mesmas configurações do primeiro, ou seja, ocorreu no laboratório de Matemática (Figura 22), com a participação de 22 alunos e utilizaram o GeoGebra para resolver questões propostas em um formulário do Google. Como já mencionado, a temática do segundo encontro foi: Posição Relativa Entre Reta e Circunferência no Plano, distribuída em sete questões.

Figura 22 - Alunos realizando atividade propostas no segundo encontro

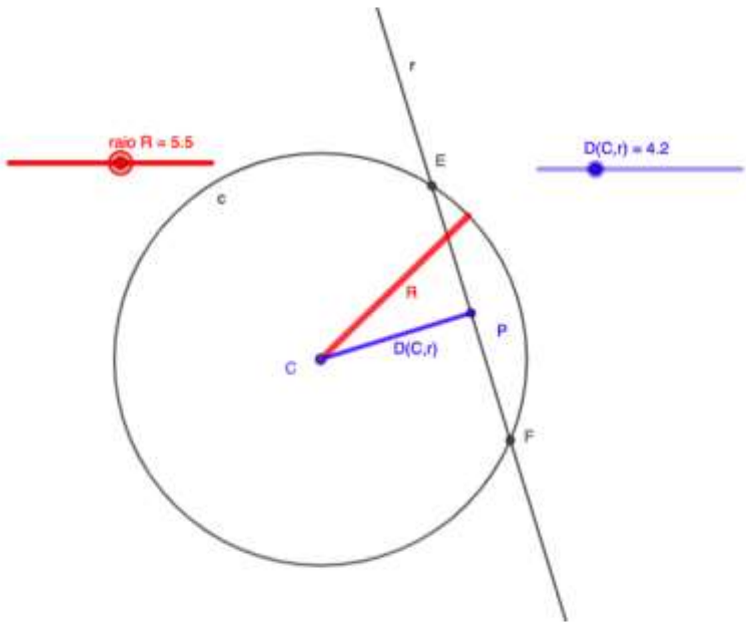
Fonte: Autor (2023)

- **Três primeiras questões:** as três primeiras questões fizeram menção a quantidade de pontos de intersecção entre uma reta e uma circunferência nos três casos possíveis: "A quantidade de pontos de interseção de uma reta externa à circunferência é:", " A quantidade de pontos de interseção de uma reta tangente à uma circunferência é:" e "A quantidade de pontos de interseção de uma reta secante e à uma circunferência é:". E as possíveis respostas eram:

"0", "1" e "2". Os alunos veriam as três situações de forma dinâmica manuseando os controles deslizantes vermelho "raio R" ou no azul $d(C,r)$.

- **Quarta questão: "**Ajuste o controle vermelho do raio para um valor qualquer, em seguida varie o controle azul $d(C,r)$ de forma a evitar que os pontos E e F se encontrem (Figura 23). O que é possível concluir de forma correta observando o tamanho dos segmentos de reta vermelho do raio e azul de $d(C,r)$?" E as possíveis respostas eram: "$d(C,r)\ =\ R$. A reta é externa à circunferência", "$d(C,r)\ =\ R$. A reta é secante à circunferência", "$D(C,r)\ >\ R$. A reta é tangente à circunferência" e " $d(C,r)\ <\ R$. A reta é secante à circunferência". Nesta questão, a intenção era que os alunos percebessem que quando os pontos E e F não se cruzam, por estrem contidos na circunferência e na reta, torna-se então a reta secante a circunferência.

Figura 23 - Representação da quarta questão da segunda aplicação

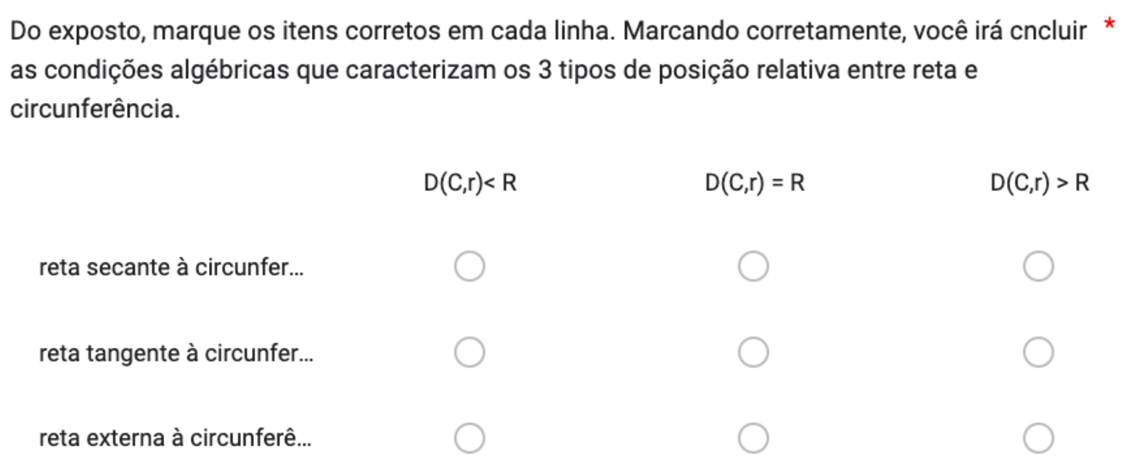


Fonte: Autor (2023)

- **Quinta questão:** "Ajuste o controle vermelho do raio para um valor qualquer (você pode manter o mesmo valor da questão anterior, se desejar), em seguida varie o controle azul $d(C,r)$ de forma a fazer com que os pontos E e F se encontrem (Figura 23). O que é possível concluir de forma correta observando o tamanho dos segmentos de reta vermelho do raio e azul de (C,r)?" Com as possíveis respostas: "$d(C,r)\ =\ R$. A reta é tangente à circunferência", "$d(C,r)\ <\ R$. A reta é tangente à circunferência" e "$d(C,r)\ =\ R$. A reta é secante à circunferência". A intenção da quinta questão era que os alunos conseguissem observar que quando a reta tocava em um único ponto da circunferência - que é quando o ponto E sobrepõe o ponto F e ambos coincidem com P -, a reta era tangente, além de observarem que a distância entre a reta e o centro da circunferência correspondia a medida do raio.

- **Sexta questão: "**Ajuste o controle vermelho do raio para um valor qualquer (você pode manter o mesmo valor das questões anteriores, se desejar), em seguida varie o controle azul $D(C,r)$ de forma a fazer com que os pontos E e F desapareçam. O que é possível concluir de forma correta observando o tamanho dos segmentos de reta vermelho do raio e azul de $D(C,r)$?" Com as alternativas sendo: "$D(C,r) = R$. A reta é externa à circunferência", "$D(C,r) < R$. A reta é secante à circunferência", "$D(C,r) > R$. A reta é externa à circunferência" e "$D(C,r) = R$. A reta é tangente à circunferência". Neste caso, a partir do momento que os pontos E e F desaparecem implica em $D(C,r) > R$, logo, a reta torna-se externa a circunferência.
- **Sétima questão:** " Do exposto, marque os itens corretos em cada linha. Marcando corretamente, você irá concluir as condições algébricas que caracterizam os 3 tipos de posição relativa entre reta e circunferência."(Figura 24). Esta questão fez junção com todas as questões anteriores. Criando um link entre a geometria e a álgebra, já que os alunos deveriam selecionar para cada posição relativa uma representação algébrica, ou seja, quando reta secante à circunferência, então $D(C,r) < R$, quando a reta for tangente a circunferência, então $D(C,r) = R$ e por fim: quando a reta for externa a circunferência, então $D(C,r) > R$.

Figura 24 - Representação da sétima questão da segunda aplicação no google forms



Do exposto, marque os itens corretos em cada linha. Marcando corretamente, você irá cncluir as condições algébricas que caracterizam os 3 tipos de posição relativa entre reta e circunferência. *

	D(C,r)< R	D(C,r) = R	D(C,r) > R
reta secante à circunfer...	○	○	○
reta tangente à circunfer...	○	○	○
reta externa à circunferê...	○	○	○

Fonte: Autor (2023)

4.3. Terceiro encontro – Posição Relativa Entre Duas Circunferências no Plano

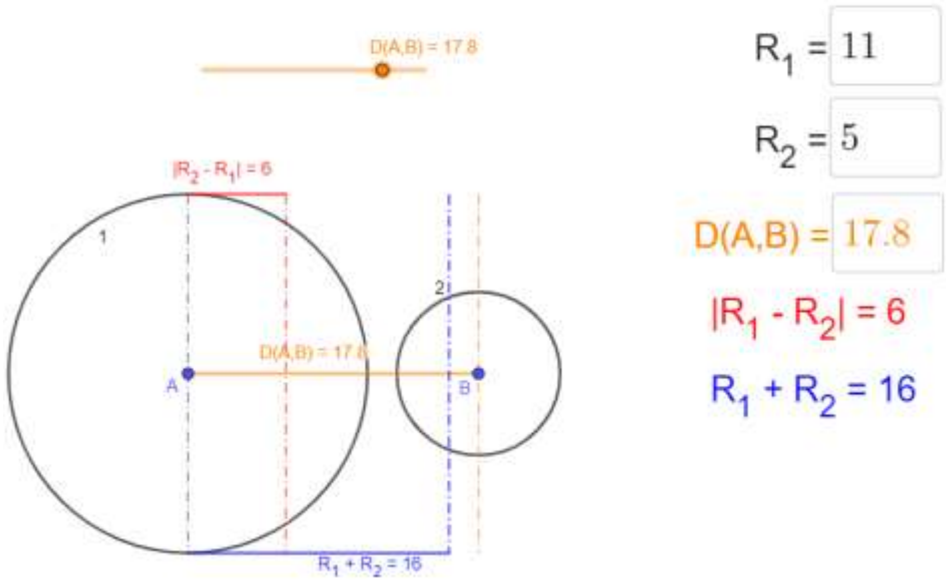
O último encontro (Figura 25), como já mencionado acima, foi realizado com a temática de Posição Relativa Entre Duas Circunferências no Plano. Após uma breve revisão do contudo, mostrando aos alunos os cinco casos de posição relativa entre duas circunferências, foi seguido as mesmas configurações dos encontros anteriores. O formulário (APÊNDICE C - Posição Relativa Entre Duas Circunferências no Plano) referente a este tópico continha nove questões e três *feedbacks de aprendizagem* que serão discutidos posteriormente. A seguir, uma transcrição das questões do terceiro formulário

Figura 25 - Terceiro encontro – Posição Relativa Entre Duas Circunferências no Plano

- Fonte: Autor (2023)

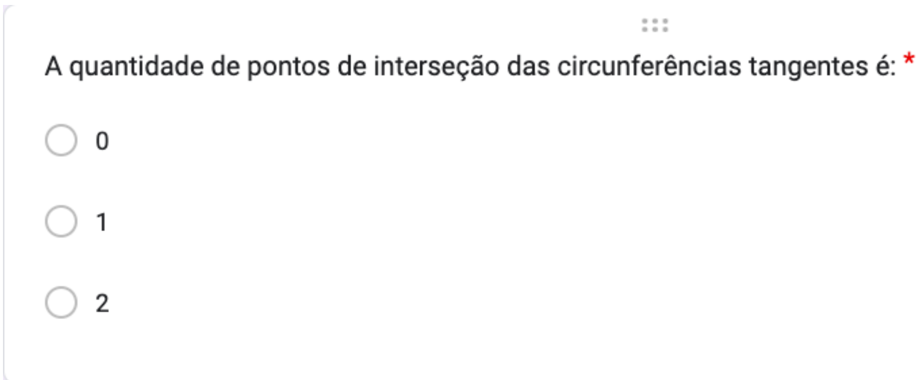
- **Três primeiras questões:** seguindo as mesmas configurações da aplicação anterior, com base no arquivo de GeoGebra (Figura 26) que os alunos tiveram acesso, eles puderam responder às três primeiras questões tratam dos pontos de intersecção entre as duas circunferências, elas estão dispostas da seguinte forma: “A quantidade de pontos de interseção das circunferências externas ou quando uma é interna a outra é:”, “A quantidade de pontos de interseção das circunferências tangentes é:” e “A quantidade de pontos de interseção das circunferências secantes é:”. Com as possíveis alternativas: “0”, “1” e “2”. Na figura 27, vê-se umas das questões do formulário:

Figura 26 - *projeto Posição Relativa Entre Duas Circunferências*



Fonte: Autor (2023)

Figura 27 - Representação da segunda questão da terceira aplicação no google forms


A quantidade de pontos de interseção das circunferências tangentes é: *

- 0
- 1
- 2

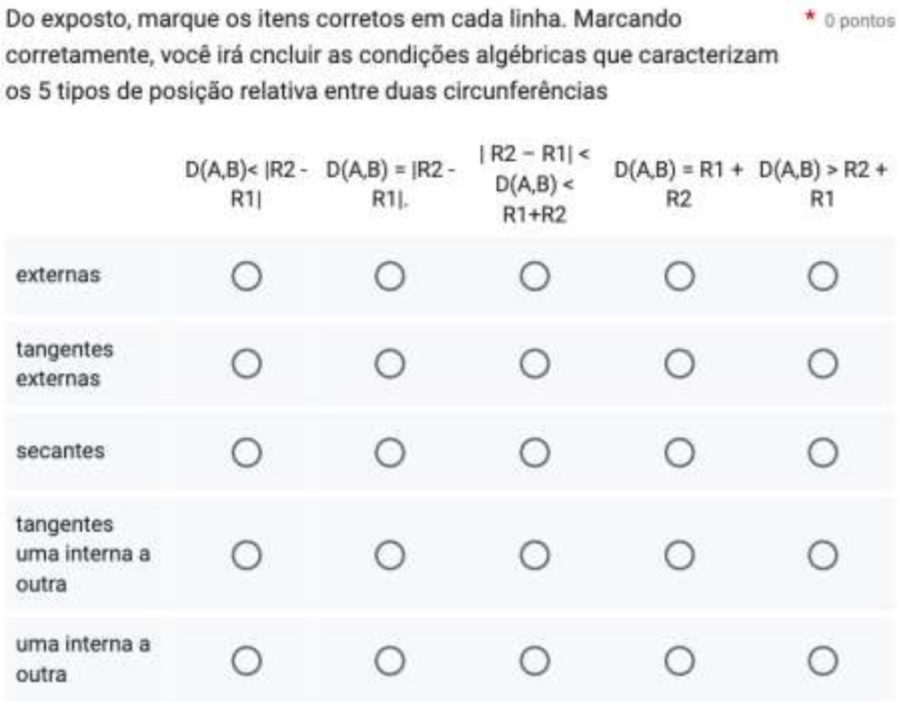
Fonte: Autor (2023)

- **Quarta questão:** "No campo R_1 digite 5, já para R_2 digite 11. Mova o controle deslizante laranja $d(A,B)$ (Figura 26), isso fará com que o centro B da circunferência 2 se desloque para a direita junto com uma linha (laranja) tracejada móvel. Nesse deslocamento, cuide para que a linha (laranja) tracejada móvel não ultrapasse a linha fixa tracejada vermelha. O que se pode concluir a respeito das medidas de $|R_2 - R_1|$ e $d(A,B)$? E sobre a posição relativa das circunferências?" R_1 diz respeito ao raio da circunferência 1; R_2 diz respeito ao raio da circunferência 2 e $d(A,B)$ a distância entre os centros das circunferências 1 e 2. Realizando às modificações pedidas na questão os alunos constataram que às circunferências eram tangentes externas, então esperava-se que eles marcassem a alternativa: " $d(A,B) > |R_1 - R_2|$. As circunferências são tangentes externas".

- **Quinta questão:** "Você pode manter os mesmos valores de R_1 e R_2 da questão anterior, ou variar os valores se quiser. A nova tarefa agora é deslizar o controle laranja $d(A, B)$ de forma que a linha tracejada (laranja) móvel cubra exatamente a linha fixa tracejada vermelha. O que você conclui sobre as medidas de $|R_2 - R_1|$ e $d(A, B)$? E sobre a posição relativa entre as circunferências?". Com as alternativas: "$d(A, B) = |R_1 - R_2|$. As circunferências são tangentes uma interna a outra", "$d(A, B) > |R_1 - R_2|$.As circunferências são secantes", "$d(A, B) < |R_1 - R_2|$As circunferências são tangentes externas" e "$d(A, B) = |R_1 - R_2|$. As circunferências são tangentes externas". Ao realizar o comando da questão, era esperado que os alunos os alunos percebessem que as circunferências eram tangentes, uma interna a outra, ou seja, $d(A, B) = |R_1 - R_2|$.
- **Sexta questão:** "Você pode manter os valores de R_1e R_2ou variá-los se preferir. A tarefa agora é deslizar o controle laranja de forma a fazer com que a linha tracejada (laranja) se mova entre as duas linhas fixas vermelha e azul, sem sobrepô-las. Feito isso, o que você conclui acerca das 3 medidas $d(A, B)$, $R_1 + R_2$ e $|R_2 - R_1|$? E sobre a posição relativa entre as circunferências?". Nesta questão, esperava-se que os alunos inferissem com facilidade a resposta de que se tem $|R_2 - R_1| < d(A, B) < R_1 + R_2$, o que indica que as circunferências eram secantes.
- **Sétima questão:** "Novamente, mantenha os raios com os valores iniciais, ou varie os valores caso desejar. Deslize o controle laranja $d(A, B)$ até que ele se posicione cobrindo exatamente a linha azul. Feito isso, o que você conclui sobre a relação entre $R_1 + R_2$e $d(A, B)$? Qual a posição relativa entre as circunferências?". Já nesta questão, quando $d(A, B) = R_1 + R_2$, logo, as circunferências são tangentes externas.
- **Oitava questão:** "Varie o tamanho dos raios R_1 e R_2 ou mantenha-os como estavam, se desejar. Agora, deslize o controle laranja até que a linha tracejada móvel ultrapasse a linha tracejada azul. O que você conclui sobre a relação entre as medidas de entre $R_1 + R_2$ e $d(A, B)$? Qual a posição relativa entre as circunferências?". No projeto, quando a linha tracejada móvel laranja ultrapassa a linha tracejada azul, temos que $d(A, B) > R_1 + R_2$ então as circunferências são externas.
- **Nona questão:** A Figura 28 mostra como se apresentou a nona questão para os alunos Para cada caso de posições relativas, o aluno deveria marcar sua correspondente algébrica, então: externas: $d(A, B) > R_1 + R_2$; tangentes externas: $d(A, B) = R_1 + R_2$; secantes: $|R_2 - R_1| < d(A, B) < R_1 + R_2$; tangentes uma interna a outra: $d(A, B) = |R_2 - R_1|$; uma interna a outra: $d(A, B) < |R_2 - R_1|$. Realizando a questão assertivamente pôde-se

observar a relação entre todas as posições relativas entre duas circunferências no plano. Essa questão foi concebida de forma que os alunos pudessem sintetizar e sistematizar as repostas dadas às questões anteriores de maneira a se depararem formalmente com todos os critérios algébricos relativos a cada posição relativa entre duas circunferências no plano. Ë uma questão conclusiva acerca da aprendizagem.

Figura 28 - Representação da *segunda* questão da *terceira* aplicação *no google forms*


Do exposto, marque os itens corretos em cada linha. Marcando corretamente, você irá cncluir as condições algébricas que caracterizam os 5 tipos de posição relativa entre duas circunferências * 0 pontos

	D(A,B)< |R2 - R1|	D(A,B) = |R2 - R1|.	| R2 − R1| < D(A,B) < R1+R2	D(A,B) = R1 + R2	D(A,B) > R2 + R1
externas	○	○	○	○	○
tangentes externas	○	○	○	○	○
secantes	○	○	○	○	○
tangentes uma interna a outra	○	○	○	○	○
uma interna a outra	○	○	○	○	○

Fonte: Autor (2023)

5. RESULTADOS E DISCUSSÕES

Diante das questões expostas na aplicação, discutiremos as respostas e os feedbacks dos alunos, referente ao modelo utilizado na pesquisa, suas possíveis dificuldades, que os levaram ao erro e as contribuições do GeoGebra como ferramenta de ensino-aprendizagem, que colaborou para uma aprendizagem significativa diante de tantas dificuldades (algumas mitológicas), no ensino de Matemática.

Na primeira aplicação (APÊNDICE A - Posição Relativa Entre Retas no Plano), provavelmente por haver uma facilidade na interpretação dos dados expostos no GeoGebra e, os três tipos de posições relativas entre retas, serem relativamente simples de identificar, os alunos acertaram todas as questões. Houve relatos por parte deles que os controles deslizantes e caixas de entrada produziram uma atmosfera intuitiva para se inferir as respostas das perguntas feitas no formulário, o que se diferencia de algo como apenas uma mera imagem estática ser apresentada em um livro didático. Os alunos puderam comentar sobre o recurso da animação que se pode fazer com o controle deslizante a fim de dinamizar a construção e promover maior capacidade de visualização dos resultados.

Na segunda aplicação (APÊNDICE B - Posição Relativa Entre Reta e Circunferência no Plano), o nível de acerto foi altíssimo. Com um erro na primeira questão e um erro na segunda questão, as quais tratavam da quantidade de interseções entre reta e circunferência, já na quinta questão, a que tratava da posição tangente entre a reta e a circunferência, houve 19 acertos, e três respostas incorretas, dois alunos afirmaram que este seria um caso de $d(C,r) < R$ e outro aluno marcou que a reta era externa a circunferência. A quarta, que tratava da posição tangente; a sexta, que tratava da posição secante, e a sétima questão que tratava de sistematizar e sintetizar todas as posições relativas nela, tiveram 100% de acerto.

A terceira aplicação (APÊNDICE C - Posição Relativa Entre Duas Circunferências no Plano), foi a mais complexa para os alunos, já que havia cinco casos de posições relativas entre duas circunferências, além de uma maior complexidade algébrica. Nas três primeiras questões talvez pela simplicidade e facilidade na interpretação, os alunos compreenderam bem às definições de intersecção, havendo apenas um erro na primeira questão, a qual tratava da interseção de circunferências tangentes.

A quarta questão, a qual tratava da posição relativa “uma interna à outra” foi acertada por todos os alunos. Ao realizar o comando da quinta questão, 16 alunos acertaram a mesma, marcando a alternativa “$d(A,B) = |R_2 - R_1|$. As circunferências são tangentes, uma interna a outra”, no entanto, cinco alunos marcaram a alternativa “$d(A,B) = |R_2 - R_1|$. As circunferências são tangentes externas", provavelmente só se atentaram para a parte algébrica da alternativa, já que as circunferências eram tangentes internas uma à outra. Houve também um aluno que marcou a alternativa "$d(A,B) < |R_2 - R_1|$. As circunferências são tangentes externas", neste caso, é provável que o aluno não tenha compreendido a parte algébrica e apenas observado que as circunferências eram tangentes.

Na sexta questão, todos os alunos marcaram corretamente a alternativa: "$|R_2 - R_1| < d(A,B) < R_1 + R_2$. As circunferências são secantes." Provavelmente, o motivo de tamanha assertividade seja decorrente da facilidade de visualização e interpretação da figura formada pelas duas circunferências no GeoGebra, o que facilita também a interpretação algébrica presente na alternativa da questão.

Na sétima questão, vinte alunos marcaram assertivamente a alternativa: "$d(A,B) = R_1 + R_2$. As circunferências são tangentes externas". Mas houve dois alunos que marcaram a alternativa que dizia: "$d(A,B) > R_1 + R_2$. As circunferências são externas". Provavelmente não levaram em consideração que além de serem externas também eram tangentes e também não observaram que a soma dos raios era igual a distancias entre os centros. Todavia o número de acertos supera em muito, os erros.

A oitava questão assim como a sétima, vinte alunos marcaram assertivamente a alternativa: "$d(A,B) > R_1 + R_2$. As circunferências são externas." . No entanto, dois alunos marcaram as seguintes respostas erradas: "$d(A,B) > R_1 + R_2$. As circunferências são secantes.", provavelmente, este aluno observou apenas a parte algébrica da alternativa, já o outro aluno marcou: "$d(A,B) = R_1 + R_2$. As circunferências são uma interna a outra. Neste caso, provavelmente foi falta de atenção do mesmo.

Por fim, a nona questão houve quase que uma unanimidade nos acertos destas questões, já que ocorreu apenas um erro no caso das circunferências secantes, os demais acertaram e compreenderam cada caso de posições relativas. Acredita-se aqui que as linhas verticais coloridas tracejadas e os segmentos de reta coloridos horizontais cujos comprimentos eram associados às medidas $|R_2 - R_1|$, $R_1 + R_2$, $d(A,B)$ (Figura 26) ajudaram os alunos na interpretação das 5 posições relativas entre duas circunferências, uma vez que a linha laranja que representava a distância entre os centros (A,B) deslizava entre as outras linhas preta, azul e vermelha, revelando gradativamente, ao se mover para a direita arrastando a circunferência da direita pelo seu centro B, as cinco posições relativas entre duas circunferências. Por exemplo, ao se digitar o valor 0 para $d(A,B)$ o aluno constatou duas circunferências concêntricas. Ao digitar um valor para $d(A,B)$ igual a $|R_2 - R_1|$, os alunos não tiveram trabalho em ver que a linha laranja sobrepunha a vermelha e as circunferências eram tangentes, uma interna à outra. Já quando os mesmos digitaram um valor para $d(A,B)$ igualando ao de $R_1 + R_2$, puderam perceber que a linha laranja sobrepunha a linha azul e as circunferências assumiam a posição relativa de tangentes externas. Também puderam perceber que ao deslizar o controle $d(A,B)$ ou digitar na caixa de entrada um valor para $d(A,B)$ maior que $R_1 + R_2$, obtinham a imagem da linha laranja ultrapassando a linha azul revelando a imagem de duas circunferências externas. O uso das cores, das linhas e segmentos de reta contribuíram fortemente para a interpretação das figuras e do que se queria na resolução dos formulários.

No final da terceira aplicação, haviam três perguntas direcionadas a satisfação dos alunos em utilizar o *software* GeoGebra, como ferramenta de ensino-aprendizagem. Estes questionamentos garantiu uma melhor análise dos dados, já que podemos visualizar a satisfação dos alunos ao utilizar a ferramenta.

A primeira indagação foi "Você acha que esse estilo de avaliação pode surtir melhor efeito na aprendizagem. Atribua uma nota de 0 a 10.". Onde 68% dos alunos atribuíram valor máximo ao modelo de ensino. Já 9% atribuíram nota 9 e 23% atribuíram nota 8. Como pode-se observar, a satisfação dos alunos em utilizar o GeoGebra como ferramenta de aprendizagem foi excelente, já que todos afirmaram por meio de suas avaliações que possivelmente utilizariam o *software* em outras situações.

A segunda indagação diz: "Marque um score de 0 a 10 o quanto que você gostaria de usar mais o GeoGebra durante as aulas". Do total, 54,5% dos alunos atribuíram nota máxima, afirmando que gostaria muito de mais aulas utilizando o GeoGebra, 36,5% marcaram 9, 4,5% (um aluno) marcou 8 e 4,5% (um aluno) votou no score 2. Pode-se observar que 95,5% dos alunos tem bastante interesse continuar utilizando o *software* como ferramenta de ensino em outras situações da sua vida acadêmica.

Por fim, a última indagação diz: "Todas as condições algébricas vistas aqui para determinar posição relativa entre duas circunferências podem ser demonstradas matematicamente. Você se dá por satisfeito em entendê-las apenas manipulando o GeoGebra sem precisar que o professor realize a demonstração matemática?", já nesta pergunta, 91% afirmaram que se davam por satisfeitos em entendê-las apenas manipulando o GeoGebra. No entanto 9% (2 alunos) afirmaram que há necessidade de haver além do GeoGebra, uma demonstração dos conteúdos matemáticos que estejam sendo estudados. Esta afirmação é bem interessante, já que é de extrema importância que, mesmo utilizando *software*s matemáticos, o professor mantenha o rigor matemático nas demonstrações e no ensino de Matemática em geral. A ferramenta deve ser uma aliada do professor e não o substituir ou deixá-lo em segundo plano, como também relegar a menor importância o rigor matemático que determinados alunos anseiam nas aulas.

6. CONSIDERAÇÕES FINAIS

Ao longo desta pesquisa, a metodologia implementada, que integrou o GeoGebra no ensino de Matemática, recebeu uma receptividade positiva por parte dos discentes. A aceitação expressa pelos alunos reforça a eficácia da abordagem, indicando que o uso do GeoGebra nas aulas de Matemática foi bem recebido e apreciado.

Além disso, é notável o desejo manifestado pelos discentes de que as futuras aulas de Matemática continuem a incorporar o suporte do GeoGebra. Essa expressão de interesse destaca não apenas a eficácia percebida, mas também a preferência dos alunos por uma abordagem que envolva essa ferramenta tecnológica.

Uma constatação relevante é a amplitude de aplicabilidade da metodologia. Não se restringindo apenas a temas específicos da Geometria Analítica, a pesquisa aponta para a versatilidade dessa abordagem, sugerindo que pode ser estendida a diversos outros conteúdos matemáticos. Essa flexibilidade representa uma contribuição significativa para a diversificação das práticas pedagógicas.

Por muitos, a Matemática é tratada como um “bicho papão” que faz todos parecerem crianças assustadas, procurando por suas mães, tentando fugir da abstração desta ciência. Todavia, quando ensinada com paixão, dedicação, entusiasmo, boa didática e paciência, a Matemática revela-se algo diferente do monstro que muitos descrevem. É possível notar a satisfação dos alunos ao participarem das aplicações desta pesquisa, a facilidade em manipular o software, e as instigações geradas no decorrer do processo. Ensinar os conteúdos abordados nesta pesquisa de modo convencional não é uma tarefa fácil, mas tornou-se bem mais didático e dinâmico, com o software.

Ao considerar o futuro, a pesquisa sugere perspectivas interessantes. A possibilidade de desenvolver atividades que prescindam de ferramentas externas, como o Google Forms, abre caminho para uma integração mais direta e exclusiva do GeoGebra no processo de ensino-aprendizagem. Essa proposta não apenas simplifica o uso de tecnologias, mas também destaca a viabilidade de uma abordagem mais imersiva e integralmente centrada no GeoGebra.

Ademais, destaca-se a necessidade da formação continuada para professores, assegurando que os educadores estejam preparados para integrar efetivamente o GeoGebra em suas aulas, quando necessário, maximizando os benefícios para os alunos.

Em resumo, a implementação bem-sucedida do GeoGebra não apenas enriqueceu a experiência de aprendizagem atual, mas também aponta para perspectivas promissoras que podem aprimorar continuamente o ensino de Matemática.

REFERÊNCIAS

ALBUQUERQUE, L.; Santos, C. H. O programa Geogebra: relato de experiência no ensino de geometria plana de 5ª a 8ª séries e na socialização com professores da rede de ensino estadual. (2009). Disponível em: <https://www.educacao.pr.gov.br/desvio.html>.

ALVES, F. R. V.; PEREIRA, A. C. C. Ensino de geometria analítica: alguns pressupostos da sequência Fedathi no contexto da formação de professor de matemática. **Revista Eletrônica Debates em Educação Científica e Tecnológica**, Vila Velha - ES. V. 6, N. 2, p. 26 - 45, junho, 2016.

ARAÚJO, L. C. L. de.; NÓBREGA, J. C. C. Aprendendo matemática com o GeoGebra. São Paulo: Editora Exato, 2010.

BARBOSA, N. M.; SANT'ANA, E. da C. Experimentação didática visando o ensino de Geometria Analítica utilizando smartphones: uma adaptação do Projeto Reforço Escolar com o aplicativo GeoGebra. REMAT: **Revista Eletrônica da Matemática**, Bento Gonçalves, RS, v. 6, n. 2, p. e2007, 16 out. 2020.

BOYER, C. B.; MERZBACH, U. C. História da matemática. São Paulo: Editora Blucher, 2019.

BRASIL, P. Orientações educacionais complementares aos parâmetros curriculares nacionais: Ciências da natureza, matemática e suas tecnologias. MEC–SEMTEC, Brasília, 2002.

BRASIL. **Ministério da Educação. Relatório Brasil no PISA 2018: Versão Preliminar. Brasília**, DF: INEP, MEC, 2019. Disponível em: https://download.inep.gov.br/acoes_internacionais/pisa/documentos/2019/relatorio_PISA_2018_preliminar.pdf . Acesso em: 10 out. 2023.

COSTA, I. Novas tecnologias e aprendizagem. [S.l.: s.n.], 2014.

JARDIM, L. A.; CECÍLIO, W. A. G. Tecnologias educacionais: aspectos positivos e negativos em sala de aula. XI Congresso Nacional de Educação – EDUCERE. Pontifícia Universidade Católica do Paraná. Curitiba, set. 2013.

LIMA, E. L. **Exame de textos: análise de livros de matemática para o ensino médio**. Rio de Janeiro: SBM, 2001.

LIMA, E. L. **Coordenadas no Plano**. 5. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2005.

MONTENEGRO, F.; NUNES, M. C.; RIBEIRO, V. M.; FONSECA, M. C. F. Indicador nacional de alfabetismo funcional, 4º: um diagnóstico para a inclusão social pela educação: avaliação de habilidades matemáticas. [S.l.], 2004.

NASCIMENTO, A. S. do. **Uma proposta didática para utilizar o Geogebra no ensino da disciplina de geometria analítica.** 2018. 130 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática). Universidade Estadual de Santa Cruz, Ilhéus, 2018.

OGLIARI, Lucas Nunes. **A matemática no cotidiano e na sociedade: perspectivas do aluno do ensino médio**. 2008. 146 f. Dissertação (Mestrado em Educação em Ciências e Matemática). Universidade Católica do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2008.

OLIVEIRA, F. D. M. de. **O *software* Geogebra como ferramenta para o ensino da geometria analítica.** 2014. 62 f. Dissertação (Mestrado profissional em Matemática). Universidade Federal Rural do Semiárido, Mossoró, 2014.

PACHECO, M. B.; ANDREIS, G. d. S. L. Causas das dificuldades de aprendizagem em matemática: percepção de professores e estudantes do 3º ano do ensino médio. **Revista Principia**, João Pessoa, v. 38, p. 105–119, 2018.

PALARÉ, O. R. **Geometria Descritiva: História e didática – novas perspectivas.** Tese de Doutorado pela Universidade de Lisboa (U Lisboa). 2013.

PATRÍCIO, R. S. As dificuldades relacionadas à aprendizagem do conceito de vetor à luz da teoria dos registros de representação semiótica. 2011. Dissertação (Mestrado em Ciências em Educação e Matemática) - Instituto de Educação Matemática e Científica da Universidade Federal do Pará, 2011.

SANT'ANA, E. da. C. **Estratégia Didática para o Ensino de Geometria Analítica com o auxílio do Aplicativo GeoGebra.** 2019. 161 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática). Centro de Ciências e Tecnologias, Universidade Estadual do Norte Fluminense Darcy Ribeiro, Campos de Goytacazes, 2019.

SANTOS, M. P. **Dificuldades de aprendizagem em matemática.** Artigo do Doutorando pela Universidade Estadual de Ponta Grossa (UEPG/PR). Disponível em http://www.nota10.com.br/Artigos-detalhes- Nota10_Publicacoes, 2013.

SILVA, S. F. **Geometria Analítica: caminhos para a aprendizagem**. 2015. 81 f. Dissertação (Mestrado profissional em Matemática). Departamento de Matemática, Pontifica Universidade Católica do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2015.

SILVA, N. C. da. **Geometria Analítica: ensino e aprendizagem de tópicos elementares com apoio de malha quadriculada, Geogebra e Geoplano**. 2018. 169 f. Tese (Doutorado em Educação Matemática). Instituto de Ciências Exatas, Universidade de Brasília, Brasília, 2018.

SILVA, W. F. de. O Ponto de Fermat e o problema de Steiner Euclidiano: Uma sequência didática com o uso do *software* GeoGebra. 2020.

SOUSA, A. C. de. Atividades interativas com o GeoGebra: uma abordagem introdutória ao estudo de geometria analítica. 2014. 118 f. Dissertação (Mestrado em Matemática em Rede Nacional) - Centro de Ciências, Universidade Federal do Ceará, Juazeiro do Norte, 2014. Disponível em: < http://repositorio.ufc.br/handle/riufc/8957>.

VALENTE, J. A. O professor no ambiente logo: formação e atuação. Campinas, Gráfica da UNICAMP, 1996.

APÊNDICE A – Formulário - Posição Relativa Entre Retas no Plano

Link referente a primeira aplicação - Posição Relativa Entre Retas no Plano: https://forms.gle/Fa9vDuXZzLpwoahz9.

APÊNDICE B – Formulário - Posição Relativa Entre Reta e Circunferência no Plano

Link referente a segunda aplicação - Posição Relativa Entre Reta e Circunferência no Plano: https://forms.gle/JWjU9WJoHjG859P78.

APÊNDICE C – Formulário - Posição Relativa entre Duas Circunferências no Plano

Link referente a terceira aplicação - Posição Relativa entre Duas Circunferências no Plano: https://forms.gle/jcPUPULkrUSBMnhu5.

INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA DA PARAÍBA
Campus Campina Grande
R. Tranqüilino Coelho Lemos, 671, Dinamérica, CEP 58432-300, Campina Grande (PB)
CNPJ: 10.783.898/0003-37 - Telefone: (83) 2102.6200

Documento Digitalizado Ostensivo (Público)

Trabalho de Conclusão de Curso - TCC

Assunto:	Trabalho de Conclusão de Curso - TCC
Assinado por:	Daniel Kennyd
Tipo do Documento:	Anexo
Situação:	Finalizado
Nível de Acesso:	Ostensivo (Público)
Tipo do Conferência:	Cópia Simples

Documento assinado eletronicamente por:

- **Daniel Kennyd Augusto de Melo**, **ALUNO (201911230035) DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA - CAMPINA GRANDE**, em 28/12/2023 17:01:41.

Este documento foi armazenado no SUAP em 28/12/2023. Para comprovar sua integridade, faça a leitura do QRCode ao lado ou acesse https://suap.ifpb.edu.br/verificar-documento-externo/ e forneça os dados abaixo:

Código Verificador: 1041447
Código de Autenticação: 2e91be5e45