INSTITUTO FEDERAL
Paraíba
Campus Campina Grande

INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA DA PARAÍBA
CURSO SUPERIOR DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

PALOMA DE CÁSSIA ARAÚJO GONÇALVES

RAZÃO ÁUREA: UMA PROPOSTA COLABORATIVA NO PROCESSO DE ENSINO E APRENDIZAGEM DE GEOMETRIA

CAMPINA GRANDE - PB
2023

PALOMA DE CÁSSIA ARAÚJO GONÇALVES

RAZÃO ÁUREA: UMA PROPOSTA COLABORATIVA NO PROCESSO DE ENSINO E APRENDIZAGEM DE GEOMETRIA

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado no Curso Superior de Licenciatura em Matemática do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia da Paraíba (IFPB), como requisito parcial para para obtenção do título de Licenciado em Matemática.

Orientador: Prof. Me. Joab dos Santos Silva

G635r

Gonçalves, Paloma de Cássia Araújo.

Razão áurea : uma proposta colaborativa no processo de ensino e aprendizagem de geometria / Paloma de Cássia Araújo Gonçalves. - Campina Grande, 2023.

60 f. : il.

Trabalho de Conclusão de Curso (Curso Superior de Licenciatura em Matemática) - Instituto Federal da Paraíba, 2023.

Orientador: Prof. Me. Joab dos Santos Silva.

1. Matemática - razão áurea 2. Matemática - geometria 3. Matemática - ensino - Contexto histórico I. Silva, Joab dos Santos II. Título.

CDU 514

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
SECRETARIA DE EDUCAÇÃO PROFISSIONAL E TECNOLÓGICA
INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA DA PARAÍBA
CAMPUS CAMPINA GRANDE

PALOMA DE CÁSSIA ARAÚJO GONÇALVES

RAZÃO ÁUREA: UMA PROPOSTA COLABORATIVA NO PROCESSO DE ENSINO E APRENDIZAGEM DE GEOMETRIA

Trabalho de Conclusão de Curso, aprovado como requisito parcial para a obtenção de graduação em Licenciatura em Matemática pelo Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia da Paraíba – Campus Campina Grande.

Habilitação: Licenciatura

Data da aprovação

13 / 12 / 2023.

BANCA EXAMINADORA:

ORIENTADOR: Prof. Me. Joab dos Santos Silva – IFPB

AVALIADOR: Prof. Me. Bruno Formiga Guimarães – IFPB

AVALIADOR: Prof. Dr. Jonathas Jerônimo Barbosa – IFPB

AGRADECIMENTOS

A Deus, por sua eterna bondade, que me sustentou durante toda esta jornada. Sem sua graça e amor incondicional não teria chegado até aqui.

A minha família, quero dedicar palavras de apreço. A minha mainha, minha vozinha e meu vozinho por sempre me apoiarem e que sempre me incentivaram a persistir em meus sonhos.

A Allan, por todo apoio, esforço e companheirismo. Aos meus amigos da graduação, que compartilharam comigo risadas e desafios, quero expressar minha sincera gratidão a vocês: Daniel, Fernanda, Adenilton, Jacqueline, Pedro, Rennan, Jessyane, Lanny, Davyson, Allisson e tantos outros. Construímos memórias que quero levar por toda minha vida.

Aos meus professores do Instituto Federal, que foram verdadeiros mentores, cujo conhecimento e orientação moldaram minha aprendizagem, minha paixão por lecionar matemática e crescimento acadêmico.

Por fim, não posso deixar de expressar minha profunda gratidão ao meu orientador, Joab S. Silva. Por suas orientações e paciência que foram essenciais para a realização deste trabalho.

Este trabalho é o resultado de anos de esforço e apoio coletivo, e sou grata por cada pessoa que fez parte dele.

Muito obrigada a todos.

“Entrega o teu caminho ao SENHOR; confia nele, e ele tudo fará”.
Salmos 37:5

"Não há ramo da matemática, por mais abstrato que seja, que não possa um dia vir a ser aplicado aos fenômenos da vida real."

(Lobachevsky)

RESUMO

O presente trabalho destaca a importância da matemática em várias áreas da vida e como a razão áurea, representada pela constante matemática φ (aproximadamente 1,618033), desempenha um papel fascinante e enigmático em diversos contextos, como arquitetura, arte e estética. Propõe-se a utilização da razão áurea como ferramenta colaborativa no ensino de geometria, visando tornar as aulas mais dinâmicas e envolventes para os alunos, estimulando o interesse e a compreensão de alguns conceitos geométricos, mencionando alguns desafios no ensino da geometria e a importância de despertar o interesse dos alunos, evitando abordagens desprovidas de significado. Destaca-se que o estudo da geometria vai além da matemática, contribuindo para o desenvolvimento cognitivo e intelectual, sendo uma parte crucial da formação dos indivíduos. A proposta do trabalho foi criar um minicurso sobre a razão áurea e sua aplicação no ensino de geometria, destinado aos alunos do 3º ano do Ensino Médio, identificando abordagens na literatura que utilizam essa constante como ferramenta didática. Isso envolve a exploração de construções geométricas que apresentam a proporção áurea, bem como a identificação de padrões em diferentes áreas, colaborando com o processo de ensino-aprendizagem de geometria, envolvendo os alunos e trazendo maior relevância para os assuntos estudados, ao mesmo tempo em que promove uma compreensão da matemática de forma interdisciplinar.

Palavras-chave: Razão Áurea. Ensino. Contexto Histórico. Geometria.

ABSTRACT

This work highlights the importance of mathematics in various areas of life and how the golden ratio, represented by the mathematical constant φ (approximately 1.618033), plays a fascinating and enigmatic role in various contexts, such as architecture, art and aesthetics. It is proposed to use the golden ratio as a collaborative tool in teaching geometry, planning to make classes more dynamic and engaging for students, stimulating interest and understanding of some geometric concepts, mentioning some challenges in teaching geometry and the importance of arouse students' interest, avoiding approaches devoid of meaning. It is noteworthy that the study of geometry goes beyond mathematics, contributing to cognitive and intellectual development, being a crucial part of individuals' training. The purpose of the work was to create a mini-course on the golden ratio and its application in teaching geometry, aimed at 3rd year high school students, identifying approaches in the literature that use this constant as a teaching tool. This involves an exploration of geometric constructions that present a golden ratio, as well as the identification of patterns in different areas, collaborating with the geometry teaching-learning process, involving students and bringing greater relevance to the subjects studied, at the same time as which promotes an understanding of mathematics in an interdisciplinary way.
Keywords: Golden Ratio. Teaching. Historical Context. Geometry.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

LISTA DE TABELAS

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

A matemática é fundamental em todos os aspectos da vida, impulsionando avanços significativos em diversas áreas. De acordo com Carraro (2021), a matemática está presente em diversas situações do dia a dia e seus conceitos são essenciais no processo de formação do cidadão. Desde o início da civilização, conceitos geométricos, processos de contagem e proporção, dentre outros, fazem parte da vida do homem. O estudo da matemática nos permite desvendar os segredos da natureza por meio da linguagem universal dos números, e ao explorar a razão áurea, descobrimos a harmonia matemática que conecta a beleza do mundo natural à capacidade da mente humana.

A razão áurea é uma constante matemática representada pela letra grega φ, aproximadamente 1,618033, considerada por muitos como um número enigmático e fascinante, sendo encontrada em diversas áreas de nosso meio como na arquitetura, na arte, na beleza estética, entre outros. De forma geral, a “proporção áurea” ou “divina proporção” como também é conhecida, traz consigo muitos mistérios envolvendo a harmonia e os padrões estéticos que a ela são atribuídos.

Neste trabalho buscaremos relacionar a razão áurea com uma proposta colaborativa no processo de ensino e aprendizagem de geometria, como identificar os padrões do número de ouro de forma didática, apresentando cenários do cotidiano, fomentando aulas mais dinâmicas, podendo estimular a aprendizagem do aluno. A proposta de atividade colaborativa tem o potencial de aprimorar a compreensão de tópicos como retas, construções geométricas, semelhança de figuras e simetria. Além de demonstrar como foi descoberto o Número de Ouro (ou razão áurea) por meios de conceitos geométricos e algébricos, relacionar a história à arte e à natureza são maneiras de manter o interesse e incentivar a busca pela Razão Áurea e, consequentemente, obter melhores resultados no processo de ensino-aprendizagem.

Um problema relacionado ao ensino da geometria é que existem muitos desafios no processo de aprendizagem sobre suas propriedades, seja pelo uso de práticas metodológicas utilizadas pelos professores, seja pela falta de interesse dos alunos ou outros motivos. Assim, optamos por uma abordagem mais lúdica, com o intuito de despertar a curiosidade do aluno.

> Esta prática de ensino concebida no âmbito desse modelo formal é uma das principais causas da dificuldade do aluno aprender Matemática, em especial nas séries iniciais. É difícil despertar o interesse das crianças quando se faz uma apresentação de conteúdos desprovidos de significados para elas, quando se prioriza a reprodução e não a construção do conhecimento (HIRATSUKA, 2006, p. 58).

A importância de estudar esse tema é que ele tem grande relevância em nossa atualidade pelo fato de a geometria contribuir para além do âmbito matemático, colaborando para um melhor aproveitamento na aprendizagem em outras áreas do conhecimento, que vão desde o desenvolvimento cognitivo e intelectual à engenharias e artes. Assim, o ensino de matemática é uma ação social indispensável para a formação do indivíduo, podendo relacionar os assuntos matemáticos com a vivência dos alunos, proporcionando uma aprendizagem mais eficaz. Para D'Ambrosio (1999), "Um dos maiores erros que se pratica na educação, em particular na Educação Matemática, é desvincular a Matemática das outras atividades humanas".

Dessa maneira, o objetivo desse trabalho é relatar a elaboração e a execução da atividade colaborativa, bem como seus resultados, identificando abordagens na literatura que empreguem as propriedades da razão áurea como ferramenta didática no ensino da geometria.

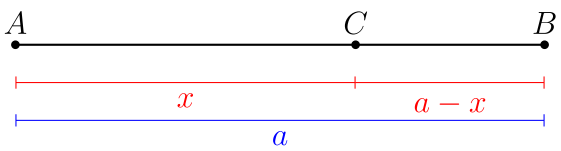
2 REVISÃO DE LITERATURA

2.1 EXPLORANDO O CONTEXTO HISTÓRICO DA RAZÃO ÁUREA

A razão áurea, também conhecida como "divina proporção", recebe este nome pelo fato de que na antiguidade o ouro era visto como algo de muito valor, e por a razão áurea ser considerada por muitos como uma proporção que representa algo relacionado a beleza, sendo esteticamente agradável e harmonioso aos olhos, ficou assim conhecida, levando a alguns acreditarem que esta está diretamente ligada a ideia de perfeição matemática. "Esta razão é considerada por muitos pesquisadores uma oferta de Deus ao mundo" (LILK, 2017, p. 13).

A razão áurea foi descrita inicialmente por Euclides de Alexandria em seu IV livro, *Os Elementos*, como a divisão de um segmento AC em média e extrema razão, ou seja, de forma que a divisão entre a medida do segmento maior AC e a medida do segmento menor BC seja igual a divisão da soma das medidas dos dois segmentos AB e a medida do segmento AC (Figura 1),

Figura 1 – Segmento áureo



Fonte: Autora

ou seja, a constante

$$\frac{\overline{AC}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{AC}}$$

A partir da representação geométrica na Figura 1, usando a notação $\overline{AC} = x$ e $\overline{CB} = a - x$, obtemos:

$$\frac{x}{a-x} = \frac{a}{x}$$

Tomando $a = 1$ e realizando os cálculos, obtemos

$$\frac{x}{1-x} = \frac{1}{x} \iff x^2 = 1 - x \iff x^2 + x - 1 = 0$$

Calculando as raízes dessa última equação quadrática chegamos a

$$x = \frac{-1-\sqrt{5}}{2} \quad \text{ou} \quad x = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$$

Pela natureza geométrica do problema, consideramos apenas a raiz positiva, ou seja, $x = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$. Com isso, a constante obtida da razão áurea é denotada por φ e dada por

$$\begin{aligned}\varphi &= \frac{x}{1-x} = \frac{1}{x} = \frac{1}{\frac{-1+\sqrt{5}}{2}} = \frac{2}{-1+\sqrt{5}} \\ &= \frac{2}{-1+\sqrt{5}} \cdot \frac{-1-\sqrt{5}}{-1-\sqrt{5}} = \frac{-2\cdot(1+\sqrt{5})}{1-5} \\ &= \frac{1+\sqrt{5}}{2}\end{aligned}$$

O número φ é chamado **número de ouro**.

Também encontramos na literatura a seguinte definição para o número de ouro (FERREIRA, 2015): O número de ouro é definido como sendo a raiz real positiva da equação quadrática $x^2 - x - 1 = 0$ e é expresso por

$$\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1,618033988749\ldots$$

Destacamos que essa definição desconsidera a construção geométrica, que é a abordagem desejada nesse trabalho.

Além de Euclides, outros matemáticos contribuíram muito para o que conhecemos como razão áurea em nossa atualidade. Ressaltando algumas contribuições dos Pitagóricos, (LIVIO, 2015, p. 14) relata que:

> Diz uma história que quando o matemático grego Hipasos de Metaponto descobriu, no século V a.C., que a Razão Áurea é um número que não é nem inteiro (como os familiares l, 2, 3 ...) nem razão de dois números inteiros (como as frações 1/2, 2/3, 3/4, ..., conhecidos coletivamente como números racionais), isso deixou totalmente chocados os outros seguidores do famoso matemático Pitágoras (os pitagóricos).

Através da análise da divisão de segmento de retas e a proporção encontrada, contribuíram de forma significativa ao explorarem esta razão tão enigmática. Embora os Pitagóricos não tenham sido os fundadores do conceito, suas explorações desempenharam um importante papel ao se depararem com a incomensurabilidade presente na razão áurea, pois de acordo com Livio (2015), a descoberta de que a razão áurea é um número irracional é também a descoberta da incomensurabilidade, pois isso significa que sua razão não pode ser expressa como uma fração.

Podemos citar ainda o matemático Mark Barr, que usou a letra grega *phi* (φ) para representar o número de ouro em homenagem a Fídias, que foi um renomado escultor grego, frequentemente associado à utilização da razão áurea em suas criações, conforme a crença de muitos historiadores. Além disso Martim Ohm, matemático e físico conhecido por suas contribuições para a teoria dos circuitos elétricos e a Lei de Ohm, foi o primeiro a mencionar a expressão "seção áurea", assim como Lívio descreve em seu livro:

> Ohm escreve em uma nota de rodapé: "Essa divisão de uma linha arbitrária em duas partes também costuma ser chamada de seção áurea." A

> linguagem de Ohm claramente nos deixa com a impressão de que não foi ele quem inventou a expressão, mas que, em vez disso, usou um nome comumente aceito. Porém, o fato de que ele não a utilizou na primeira edição do livro (publicada em 1826) pelo menos sugere que o nome "Razão Áurea (ou, em alemão, "Goldene Schnitt") só ganhou popularidade por volta de 1830. A expressão pode ter sido usada oralmente antes disso, talvez em círculos não-matemáticos. Mas não há dúvida de que, após o livro de Ohm, a expressão "Seção Áurea" começou a aparecer frequente e repetidamente na literatura alemã sobre matemática e história da arte. (LIVIO, 2015, p. 17)

Grandes foram as contribuições feitas por todos ao longo do tempo. Suas pesquisas e descobertas foram fundamentais para que hoje possamos entender e aplicar esse conceito matemático e estético em diversas áreas do conhecimento. Estudá-la é crucial para a construção do conhecimento, pois nos permite compreender sua influência nos mais diversos contextos de nosso meio.

Diversos estudiosos contribuíram para a formação do conceito atual da razão áurea, sendo Leonardo Fibonacci um dos nomes de extrema importância nesse contexto através de seu estudo de uma sequência numérica específica que recebe seu nome (Sequência Fibonacci), a qual faz relação direta com o número de ouro.

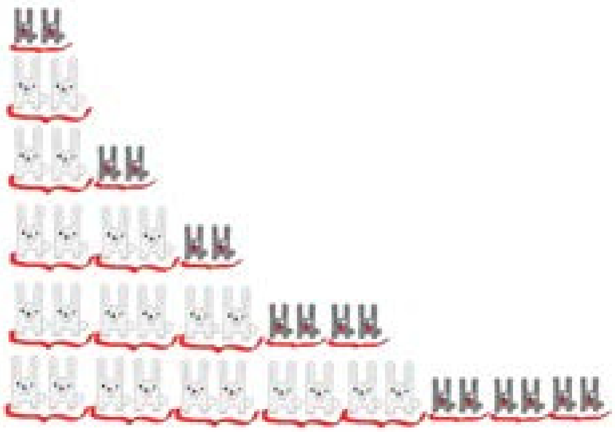
2.2 RELAÇÃO ENTRE A RAZÃO ÁUREA E A SEQUÊNCIA DE FIBONACCI

Leonardo de Pisa, mais conhecido como Fibonacci, foi um matemático italiano do século XIII, nascido por volta de 1170 em Pisa, Itália. Durante sua infância, teve a oportunidade de viajar pelo Medierrâneo acompanhando seu pai, o que lhe permitiu entrar em contato com diversas culturas e observar diferentes sistemas numéricos e métodos matemáticos. Fascinado pelo sistema decimal indiano e suas vantagens em relação aos números romanos, Fibonacci aprofundou seus estudos sobre os algarismos indo-arábicos e os difundiu em seu livro "Liber Abaci" (Livro do Ábaco), publicado em 1202.

Figura de grande destaque na história da matemática devido às suas significativas contribuições, entre elas destaca-se a famosa Sequência de Fibonacci, que ele identificou ao analisar o processo de procriação de uma população de coelhos. Fibonacci discerniu a existência de um padrão consistente que governa a progressiva reprodução desses animais. Como podemos observar na Figura 2.

Ao analisar, verificou-se a partir de um par de recém-nascidos desses animais, que ao final do primeiro mês, esse par produziria um outro par de coelhos, e a sequência de procriação continuaria, com cada par gerando um novo par no final de cada mês subsequente, em que cada mês era composto por dois grupos: os coelhos adultos e os coelhos recém nascidos, que eram resultantes do acasalamento do mês anterior da seguinte forma:

Figura 2 – Procriação de Coelhos



Fonte: ALCG. Disponivel em: <https://algamecode.blogspot.com/2017/05/a-sequencia-de-fibonacci.html>

1º mês: 1 par de coelhos recém-nascidos;

2º mês: 1 par de coelhos adultos;

3º mês: 1 par de coelhos adultos e 1 par de coelhos recém-nascidos;

4º mês: 2 pares de coelhos adultos e 1 par de coelhos recém-nascidos;

5º mês: 3 pares de coelhos adultos e 2 pares de coelhos recém-nascidos;

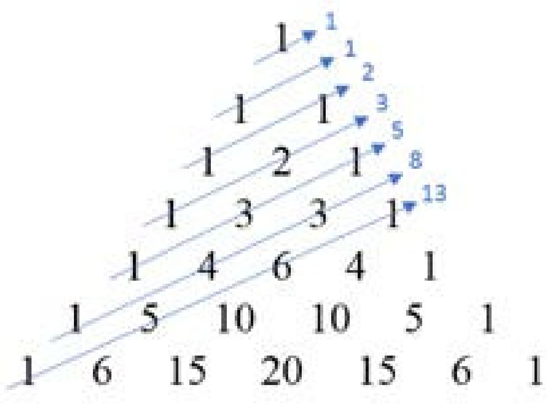
6º mês: 5 pares de coelhos adultos e 3 pares de coelhos recém-nascidos.

E assim por diante.

Dessa forma, Fibonacci conseguiu descrever a ordem com que os coelhos iam procriando, e através dessa análise criou uma das sequências mais conhecidas do mundo, a Sequência Fibonacci, que se trata da sequência numérica $(1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, \ldots)$.

Além disso, essa sequência também é encontrada no triângulo de Pascal conforme a Figura 3 apresenta:

Figura 3 – Triângulo de Pascal



Fonte: Autora

Na Figura 3, percebe-se que a soma dos números que compõem as diagonais resultam nos valores da Sequência de Fibonacci. Assim, conseguimos visualizar mais uma das conexões entre esta sequência e outros ramos da matemática. De acordo com Cruz Junior (2014) , "Essa sequência se tornou ainda mais fascinante devido a importantes características, sendo a principal delas a obtenção de um número próximo ao de ouro através da divisão de qualquer termo da sequência de Fibonacci pelo seu antecessor".

Observe que quanto maiores os valores tomados dessa sequência, mais próximo o quociente se aproxima do valor numérico φ, conforme exposto na Tabela 1.

Tabela 1 – Aproximação para φ.

1º	1/1	1,000000
2º	1/2	0,500000
3º	3/2	1,500000
4º	5/3	1,666667
5º	8/5	1,600000
6º	13/8	1,625000
7º	21/13	1,615384
8º	34/21	1,619048
9º	55/34	1,617647
10º	89/55	1,618182
11º	144/89	1,679775
12º	233/144	1,681555
13º	377/233	1,618026
15º	610/377	1,618037
15º	987/610	1,618033

Fonte: Autora

A sequência de Fibonacci, portanto, atrelada ao número de ouro, tem desempenhado papéis fundamentais na matemática e em diversos outros campos. Para (CRUZ JUNIOR, 2014):

> "Trata-se de um número que encanta e surpreende facilmente aqueles que com ele se deparam: encantou Pitágoras, Platão, Euclides e muitos outros estudiosos e leigos que se dividem entre o racional e o divino ao tentar explicar esta improvável coincidência".

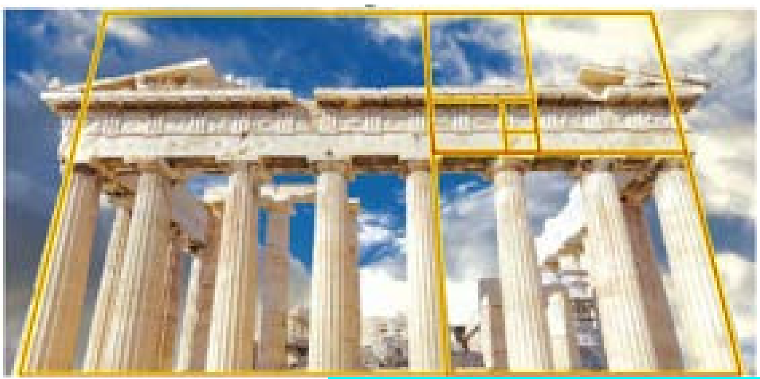
Essas estruturas numéricas, servem como bases para observação de fenômenos naturais, artísticos e estruturais, contribuindo significativamente para a compreensão do mundo e na capacidade de criar e inovar em diversas áreas.

2.2.1 Razão Áurea: Identificando padrões além do âmbito matemático

Intrigante e misteriosa, a razão áurea, fascina não só matemáticos, mas também artistas, arquitetos, designers e cientistas. Embora inicialmente associada à matemática, sua influência transcende esses limites, encontrando aplicações surpreendentes na arte, arquitetura, biologia e na busca pela beleza e harmonia.

Representado na Figura 4 está o Partenon, um dos mais famosos e icônicos templos da Grécia Antiga:

Figura 4 – Partenon



Fonte: Folha de São Paulo Disponível em: <https://m.folha.uol.com.br/ciencia/2015/12/1718418-hominideos-primitivos-ja-tinham-preferencias-esteticas-renascentistas.shtml>

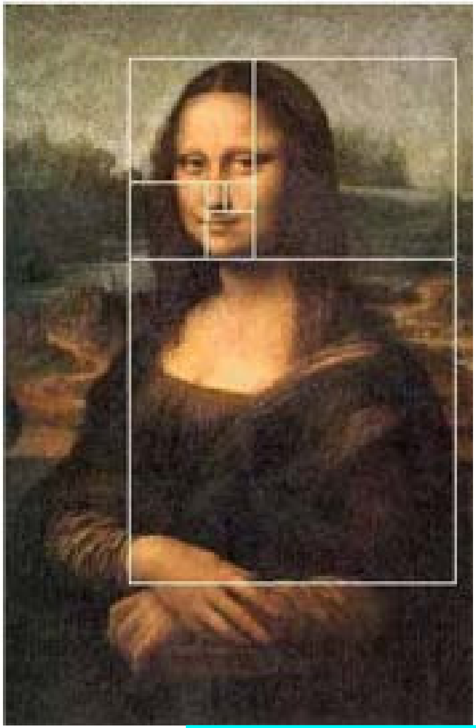
Também conhecido como o templo da deusa Atena, o Partenon é considerado uma obra-prima da arquitetura clássica e um símbolo da civilização grega, construído pelo famoso arquiteto e escultor Fídias. De acordo com Carraro (2021) "Para que a obra, projetada em homenagem a Deusa Atena, fosse considerada bela e harmônica, Fídias utilizou-se de uma proporção específica entre várias de suas partes". Nele, em seu frontispício, é possível observar um quase retângulo áureo.

A "Mona Lisa" (Figura 5) é uma famosa obra de arte do Renascimento, pintada pelo artista italiano Leonardo da Vinci por volta de 1503 a 1506. A pintura é considerada uma das obras de arte mais conhecidas e valiosas do mundo.

O retângulo áureo é dividido em proporções áureas, e muitos acreditam que Leonardo da Vinci utilizou essa proporção em sua pintura para criar uma composição visualmente agradável. Para Lopes (2022), "As obras de Leonardo da Vinci contam com a proporção divina e por isso são tão harmônicas". A posição da cabeça, ombros e mãos da Mona Lisa parecem estar alinhadas com as linhas divisórias do retângulo áureo, contribuindo para a harmonia e equilíbrio da composição.

O Nautilus (Figura 6) é um cefalópode marinho que possui uma concha em forma de espiral logarítmica. Essa concha é construída de forma que cada câmara sucessiva cresce em proporção à anterior. E ao serem analisados suas proporções é possível perceber o valor aproximado da constante matemática de 1,618. . . . A espiral áurea é uma das formas mais perfeitas encontradas na natureza, e a razão áurea está intimamente relacionada com a sua formação.

Figura 5 – Mona Lisa



Fonte: Folha de São Paulo Disponível em: <https://m.folha.uol.com.br/ciencia/2015/12/1718418-hominideos-primitivos-ja-tinham-preferencias-esteticas-renascentistas.shtml>

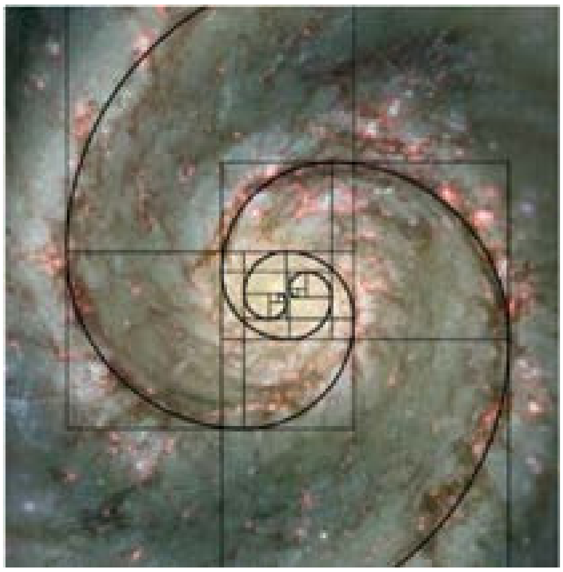
Figura 6 – Concha do Nautilus

Fonte: Pinterest

À medida que o Nautilus cresce e adiciona novas câmaras à sua concha, a concha segue uma sequência de proporções áureas entre o tamanho de cada câmara. Assim, como afirma Lopes (2022), "[. . .] a espiral também atribui um padrão matemático para o crescimento das conchas: o tamanho aumenta, mas o formato não se altera". Isso resulta em uma espiral que parece harmoniosa, equilibrada e esteticamente agradável aos nossos olhos.

Ao observarmos a formação de algumas galáxias é possível percebermos espirais, o que nos permite identificarmos alguns padrões geométricos, dentre eles é possível verificar padrões alinhados a razão áurea, verificando as proporções da espiral logarítmica, mostrando de forma concreta que a evolução do universo segue os padrões descritos por Fibonacci (Figura 7).

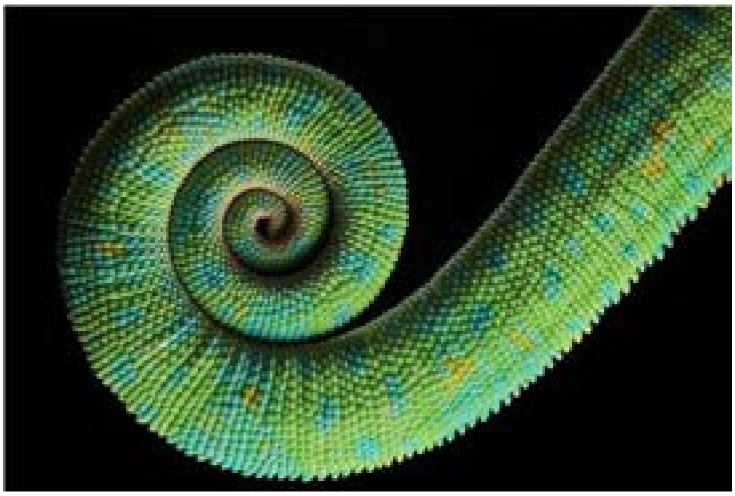
Figura 7 – Galáxia



Fonte: Pinterest

A disposição das escamas contidas na cauda do camaleão e a sua estrutura se assemelham à espiral áurea, sendo um fascinante exemplo da conexão entre a matemática e a natureza, revelando como podemos observar a matemática no desenvolvimento dos seres vivos, moldando suas características (Figura 8).

Figura 8 – Cauda do Camaleão



Fonte: Pinterest

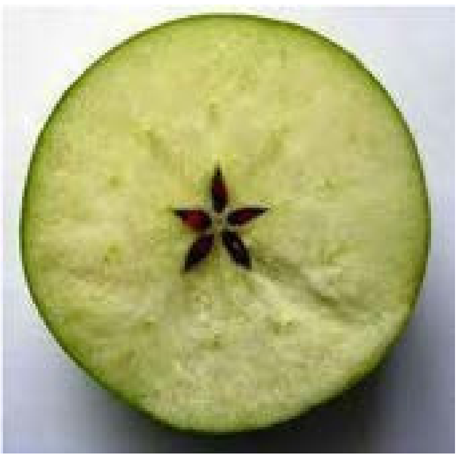
Pelas propriedades estéticas de simetria e proporcionalidade encontradas no pentagrama, podemos vê-lo em diversos casos na arquitetura. Um desses casos é o mostrado na Figura 9, onde podemos perceber dois pentagramas circunscritos. De acordo com Lauro (2005), a razão áurea fascinou os antigos gregos devido a sua beleza estética, e artistas e arquitetos a incorporaram amplamente em suas obras. sendo descoberta no pentagrama regular, onde a divisão de seus segmentos representam a razão áurea. Este tipo de janela geralmente é encontrada em construções mais antigas e de estilos rústicos, principalmente em templos religiosos.

Figura 9 – Janela Pentagrama Rose

Fonte: iStock

Também é possível observar o formato de pentagrama em alguns casos na própria natureza. Nesse caso trazemos a relação da formação das sementes da maçã. Quando cortamos a maçã ao meio conseguimos observar que a posição em que as sementes se posicionam nos remetem aos triângulos isósceles que compõem as extremidades do pentagrama que possuem as características da razão áurea (Figura 10).

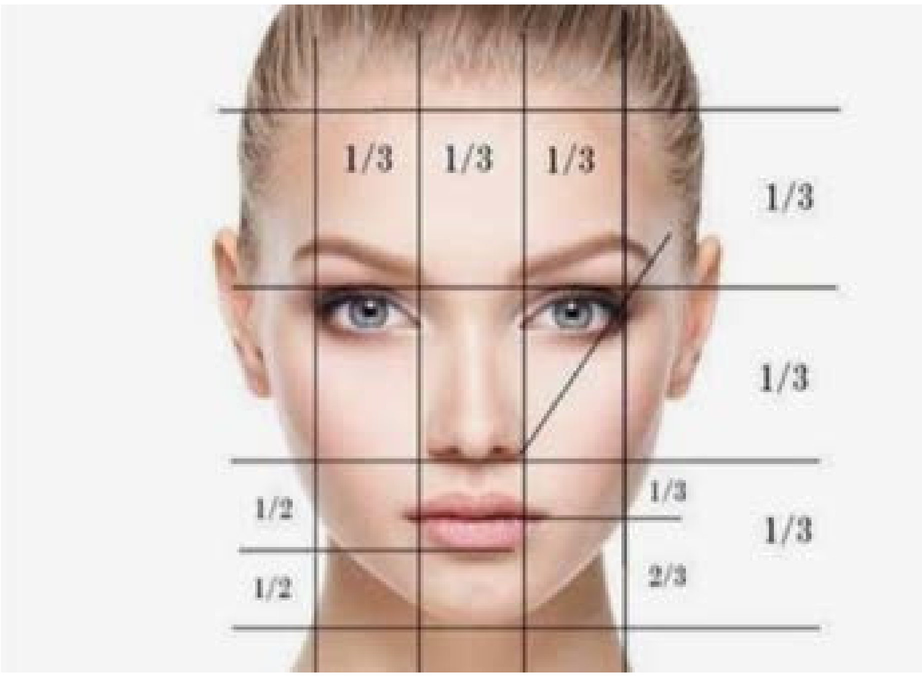
Figura 10 – O Pentagrama na Maça



Fonte: Pinterest

Por a razão áurea ser frequentemente associada a beleza e estética, é geralmente mencionada na análise de proporções faciais, e quando as proporções faciais apresentam resultados que se aproximam da razão áurea resultam em características faciais consideradas atraentes. Assim, como cita Carraro (2021), "Rostos e corpos harmoniosos, que parecem agradáveis aos nossos olhos, normalmente apresentam proporções que se aproximam do Número de ouro". Apesar de a razão áurea ser usada como guia na análise de proporções faciais, a percepção da beleza é subjetiva e varia de pessoa para pessoa. Portanto, não podemos atribuir à beleza facial apenas uma única proporção matemática (Figura 11).

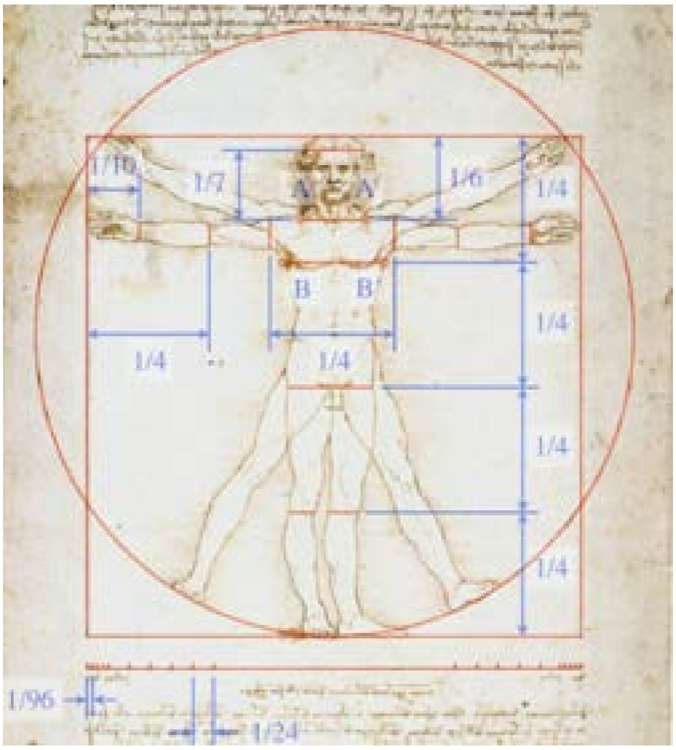
Figura 11 – Razão Áurea encontrada no rosto humano



Fonte: Pinterest

O Homem Vitruviano é uma famosa criação de Leonardo da Vinci, representando um homem nu em duas posições sobrepostas, inscritas em um quadrado e um círculo, assim como mostra Lopes (2022) que para ser inscrito no quadrado e no círculo, o corpo humano deve obedecer à divina proporção, incluindo a altura do chão até o umbigo e a divisão do braço pelo cotovelo em segmentos de média e extrema razão, mostrando como que o corpo humano pode ser inscrito em ambas as figuras geométricas. Criada por volta de 1490, mostra uma representação clássica pela busca da proporção harmônica (Figura 12).

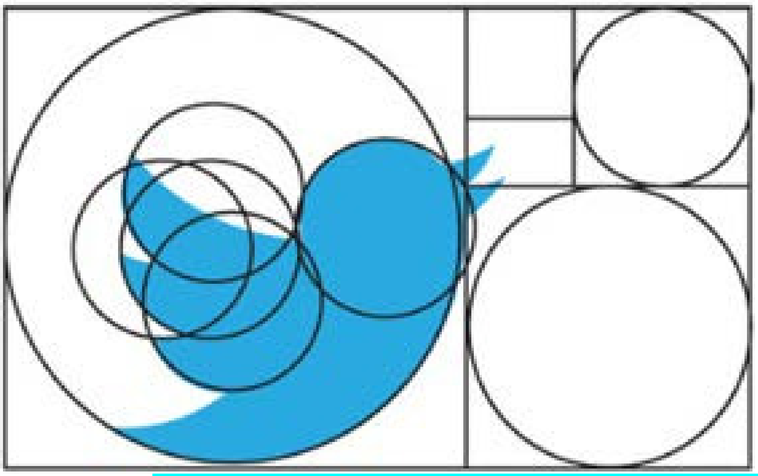
Figura 12 – Homem Vitruviano



Fonte: Pinterest

Pela harmonia visual, muitos designers usam a razão áurea em busca de criarem seus projetos que tragam a ideia de equilíbrio, ajudando na criação de composições esteticamente equilibradas e atraentes (Figura 13).

Figura 13 – Logo do Twitter



Fonte: I9ME. Disponível em: <https://i9me.com.br/a-proporcao-aurea-em-web-design/twitter-logo-proporcao-aurea-2/>

Através das análises citadas neste tópico, é possível perceber que a razão áurea tem sido empregada em diversos contextos ao longo da história, não se limitando apenas à estética visual. Além de ser encontrada na natureza, em construções, arte e design, essa proporção também encontra relevância nas construções geométricas. A presença da razão áurea na geometria indica como os princípios matemáticos transcendem disciplinas e desempenham um papel fundamental na criação de estruturas e formas que agradam aos olhos e à mente.

2.2.2 A razão áurea na geometria

Ao longo da história, diversas construções geométricas notáveis e icônicas têm meticulosamente incorporado as propriedades matemáticas da razão áurea, com o objetivo de alcançar uma estética que não apenas agrada aos olhos, mas que também reflete uma harmonia. Essas estruturas geométricas que possuem a proporção áurea transcendem a mera abordagem quantitativa, pois encontram-se inteiramente ligadas à busca pela materialização da beleza e do equilíbrio ideal em cada uma de suas construções. De acordo com Lopes (2022):

> A proporção áurea descreve a relação especial encontrada na natureza entre duas partes de um todo. Pode ser descrita em termos de número, comprimento, área, volume e, em até certo ponto, em termos de beleza e consciência, estando presente na estrutura espiral das conchas de alguns seres vivos marinhos, no crescimento das plantas, nas proporções do corpo humano e dos animais, nas pinturas do período renascentistas, nas obras arquitetônicas da antiguidade clássica, da idade média, era moderna e na geometria plana e espacial, como no segmento, no retângulo, em triângulos no pentagrama e nos sólidos de Platão.

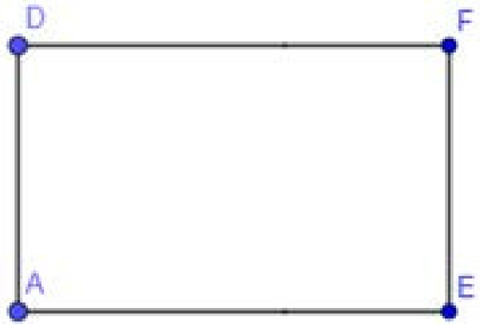
Dentre as muitas construções geométricas que abraçam a razão áurea, podemos destacar o Retângulo Áureo, a Espiral Áurea e o Pentagrama Regular. Eles se destacam não apenas por sua beleza, mas também pela diversidade de aplicações em campos além da matemática. Sua presença nas formas naturais acrescenta à sua influência duradoura, enquanto o estudo interdisciplinar os torna um ponto de convergência onde a arte, a ciência e a natureza se entrelaçam em sintonia.

Exploramos brevemente cada um desses elementos e seu papel na geometria, temos que:

Retângulo Áureo

Retângulo Áureo, ou Retângulo de Ouro, como também é conhecido, foi nomeado pelo grego Endoxus, descobrindo que a Razão Áurea desempenhava um papel fundamental na estética ao estudar a teoria das proporções. Ele nomeou o retângulo que exibe essa notável harmonia de "Retângulo Áureo". Um retângulo é considerado áureo quando suas medidas estão na razão áurea, criado por meio de um processo simples da geometria que faz menção a razão áurea (SANTOS, 2020). O seu processo de construção se inicia a partir da formação de um quadrado. Em seguida, dividindo um de seus lados de forma que a razão entre o segmento original e novo segmento obtido resulte no número de ouro, o que implicará na obtenção de um retângulo cuja relação de proporção entre seus lados resultará na proporção áurea (Figura 14).

Figura 14 – Retângulo Áureo



$$\frac{\overline{AE}}{\overline{EF}} = 1,618\ldots$$

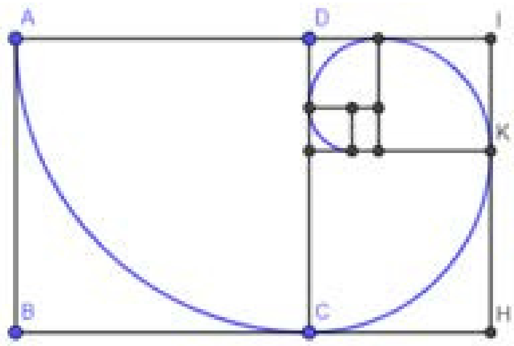
Fonte: Autora

Exibe não apenas as propriedades aplicadas a qualquer retângulo, mas também compartilha das características intrínsecas da Razão Áurea, conferindo a esse polígono uma identidade rica e única.

Espiral Áurea

A espiral Áurea é uma construção geométrica de intrigante beleza, que tem cativado a mente de inúmeros estudiosos, ultrapassando as fronteiras do domínio matemático. Sua concepção emerge da geometria do retângulo áureo, onde a construção na criação de retângulos menores cada um com base no anterior, gera arcos que se conectam nos vértices opostos do retângulo. O resultado é a formação de uma espiral cujas proporções harmonizam com a proporção áurea. Assim, como descreve Lopes (2022), "Ao girar em ângulos iguais aumenta a distância da origem e cada espiral em proporções iguais [...]". o que lhe confere a distinção de ser conhecida como a Espiral Áurea, ou também, a Espiral de Fibonacci (Figura 15).

Figura 15 – Espiral Áurea



Fonte: Autora

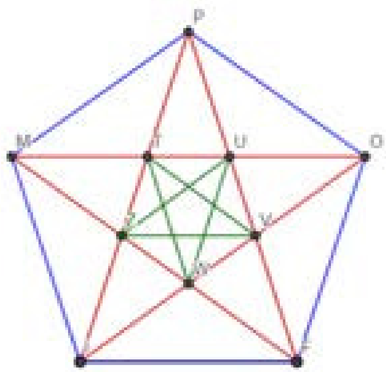
Esta construção geométrica não apenas envolve a criação do Retângulo Áureo, que em si apresenta um conjunto notável de propriedades, mas também incorpora a formação de arcos. Além disso, o Retângulo Áureo é uma figura enigmática de beleza singular, sendo encontrada em uma ampla gama de contextos que se estendem muito além do campo da matemática, abrangendo a natureza, a arquitetura e diversas outras áreas.

Pentagrama Regular

O pentagrama regular carrega consigo uma história rica e repleta de significados em várias culturas, unindo simbolismo a uma figura geométrica. Suas características na geometria revelam uma figura fascinante composta por cinco segmentos de reta que se interligam para formar uma estrela de cinco pontas, exibindo propriedades matemáticas verdadeiramente únicas incluindo as propriedades da razão áurea, que é possível ser observado por meio das relações entre os comprimentos dos segmentos que o constituem. Assim, como afirma Santos (2020):

> "[...] após obter o pentagrama através do pentágono regular, em seu centro, obtemos outro pentagrama regular. Traçando agora as diagonais do novo pentágono, teremos mais um pentágono e um pentagrama. Esse processo pode ser continuado infinitamente, obtendo pentágonos e pentagramas cada vez menores. Esse processo é conhecido como auto propagação".

Figura 16 – Pentagrama Regular



Fonte: Autora

Ao medir um lado do pentágono e dividir pelo comprimento de um dos lados do pentagrama, obtemos uma proporção que se aproxima da Razão Áurea. Além disso, a diagonal menor de um pentagrama regular é aproximadamente φ vezes o comprimento do lado.

2.2.3 As dificuldades encontradas ao ensinar geometria

O ensino da matemática desempenha um importante papel no âmbito educacional e na sociedade, sendo não apenas uma disciplina isolada, mas uma ferramenta essencial para o processo de construção do conhecimento do indivíduo, contribuindo para a sua participação de forma ativa na sociedade. A BNCC (BRASIL, 2018, p. 275) destaca a importância de desenvolver habilidades essenciais, como formular, aplicar, interpretar e avaliar conceitos matemáticos em diferentes contextos. Em outras palavras, o ensino se trata de compreender e aplicar os princípios matemáticos de forma mais ampla, criando conexões significativas entre os conceitos e o mundo real.

O tema geometria por muitas vezes é temido tanto por professores quanto pelos alunos, vários são os desafios encontrados para se obter um ensino e aprendizagem de qualidade, onde podemos citar: falta de contexto prático, falta de conexão com outras áreas, dificuldades em visualização e abstração dos conceitos. O que nos relaciona ao que é esperado acerca da aprendizagem, pois se é tido como um dos principais propósitos do ensino escolar, é que por meio dele, o aluno desenvolva habilidades para o seu desenvolvimento pessoal e profissional, e para isso se é esperado que o professor consiga prepará-los para a sociedade com capacidade ativa, crítica e criativa.

Segundo Tashima e Silva (2015), a resolução de problemas e investigação em sala de aula que envolvem os alunos em processos matemáticos relevantes, como observação, formulação de conjecturas, argumentação e reflexão promove uma atitude positiva em relação à matemática, incentivando a autonomia, criatividade e exploração. De acordo com a BNCC:

> ... aprendizagem em Matemática está intrinsecamente relacionada à compreensão, ou seja, à apreensão de significados dos objetos matemáticos, sem deixar de lado suas aplicações. Os significados desses objetos resultam das conexões que os alunos estabelecem entre eles e os demais componentes, entre eles e seu cotidiano e entre os diferentes temas matemáticos (BRASIL, 2018, p. 276).

Sabemos que no ensino de geometria são estudadas propriedades de formas planas e espaciais, e trabalhar com estes assuntos nem sempre é algo fácil de se fazer. A forma como se é ensinada pode ser um empecilho no processo de ensino e aprendizagem, visto que, em muitos casos, existe uma fenda entre o que o professor quer expressar e o que os alunos entendem. Diante desta problemática pode-se afirmar que:

> O fraco desempenho em geometria por parte dos alunos é resultado, muitas vezes, da utilização de práticas que não atendem às suas expectativas, dentre outras coisas, do abismo existente entre o modo como os professores e os alunos percebem a matemática. O professor imagina que seus alunos terão o mesmo prazer que ele tem ao lidar com a matemática. No entanto, o aluno não consegue vê-la do mesmo modo, e por isso não a compreende (TASHIMA; SILVA, 2015, p. 6).

Diante do exposto, é perceptível que para um melhor desenvolvimento da aprendizagem devemos rever as condições e ofertas de ensino ao aluno, assim como a preparação para o professor em ministrar tal disciplina, visto que o professor deve dedicar-se para entregar um conteúdo de qualidade, com clareza na explanação do assunto estudado e ter um engajamento ativo, buscando sempre a participação dos alunos para o seu desenvolvimento.

Como a geometria nos oferece uma grande disponibilidade de situações onde se pode associar o abstrato e o concreto no processo de ensino e aprendizagem. Ao ser lecionada, é proposto que a curiosidade do aluno seja estimulada, que o aluno consiga interagir com as propriedades do objeto estudado através de sua criatividade, contribuindo assim para a construção do seu conhecimento de forma eficaz através do ensino lúdico. E para isso é importante destacar o contexto histórico ao abordar esta disciplina.

2.2.4 A utilização da história da matemática como abordagem pedagógica

A incorporação da história da matemática como uma abordagem pedagógica pode contribuir de forma significativa para o ensino de geometria. Ao explorar os contextos históricos em que os conceitos matemáticos foram desenvolvidos, os estudantes podem compreender melhor a origem e a evolução dessas ideias, bem como sua relevância e aplicação no mundo real, seguindo a ideia de que: "A História da Matemática pode levar à contextualização. Essa é uma maneira de aproximar o mundo matemático ao universo do aluno e a realidade que o cerca" (SANTOS, 2020).

Ao conectar a matemática com narrativas históricas, os alunos são incentivados a desenvolver uma visão mais ampla e contextualizada do conhecimento matemático. Isso estimula o pensamento crítico, a curiosidade e a investigação, além de promover uma maior compreensão dos conceitos abstratos. Através da história da matemática, os alunos são convidados a refletir sobre os desafios enfrentados pelos matemáticos do passado, suas soluções criativas e suas contribuições para o desenvolvimento da aprendizagem.

Além disso, a história da matemática oferece a oportunidade de explorar a diversidade cultural e a multiplicidade de perspectivas na construção do conhecimento matemático. Ao examinar as contribuições de diferentes pontos de vista ao longo do tempo, possibilitando que os estudantes desenvolvam uma apreciação pela riqueza e universalidade da matemática, bem como pela veracidade de abordagens e soluções encontradas nos diferentes contextos. Pois, de acordo com Santos (2020, p. 11):

> Estudar e repensar as dificuldades que os antigos matemáticos enfrentaram, quando, por meio de tentativas e erros, chegaram a relações potencialmente valiosas, pode ser uma maneira de entendermos e identificarmos as dificuldades de nossos alunos atualmente e vislumbrar maneiras de sanar essa dificuldade.

Portanto, identificamos que a história integrada ao ensino matemático possibilita que os alunos se engajem e se motivem mais, pois percebem a relevância e a aplicabilidade dos conceitos matemáticos em diferentes contextos históricos e contemporâneos. Essa abordagem pedagógica pode contribuir na superação de que a matemática é uma disciplina abstrata e distante da realidade, contribuindo diretamente no ensino de geometria, assim, tornando-a mais acessível, envolvente e significativa.

3 METODOLOGIA

Inicialmente, na elaboração do minicurso, foi realizada uma busca sobre aplicações da razão áurea vinculadas ao ensino de geometria, utilizando artigos, livros, dissertações e teses nas bases de dados do Google Acadêmico e BDTD[1]. As buscas se iniciaram no mês de setembro de 2022 e seguiram até novembro de 2023, tendo como palavras-chave: razão, áurea, ensino, história e geometria.

Como critério de inclusão dos materiais literários neste estudo, priorizamos o período de publicação de 20 anos pela possibilidade de poder ser encontrado um maior quantitativo de trabalhos produzidos sobre o tema. Além disso, incluíram-se apenas trabalhos disponibilizados em português. Como critérios de exclusão, foram rejeitados os materiais literários que não tinham relação direta com o tema proposto pelo trabalho.

Esse levantamento bibliográfico fundamentou nosso recorte histórico discutido anteriormente e serviu de base para a construção do minicurso que ofertamos.

Com isso, foi realizado um minicurso voltado para o ensino e aprendizagem dos alunos sobre a temática Razão Áurea no ensino da geometria, com o propósito de promover uma compreensão mais profunda e significativa dos conteúdos geométricos pelos estudantes. Como objetivos do minicurso, temos:

1. Apresentar a história e fundamentos matemáticos da Razão Áurea;

2. Mostrar a relação da Razão Áurea com as proporções e formas geométricas;

3. Analisar a Razão Áurea em situações reais de geometria;

4. Estimular o pensamento crítico, a criatividade e o raciocínio lógico dos estudantes.

O público alvo ao qual se destinou o minicurso são alunos do ensino médio, preferencialmente aos alunos do 3º ano, visto que, estes já possuem os conhecimentos básicos de geometria euclidiana.

As tarefas sugeridas no minicurso foram concebidas tomando como referência as atividades apresentadas no estudo de Lilk (2017) em sua dissertação de mestrado, que se apoiam em recursos iniciais, como vídeo e textos históricos que exploram de alguma forma a história da proporção áurea no ensino da Geometria.

Para a construção desse material, o assunto discutido em sala de aula foi dividido em tópicos que são apresentados a seguir.

[1] Biblioteca Digital Brasileira de Teses e Dissertações.

3.1 APRESENTANDO O CONTEXTO HISTÓRICO

Inicialmente, foi feita uma apresentação com a distribuição de panfletos, sobre o contexto histórico da razão áurea, utilizando como base o livro: RAZÃO ÁUREA - A HISTÓRIA DE FI, escrito por Mario Livio, como pode ser visto no Apêndice A.1.

Nesse início, explanamos sobre o contexto histórico da Razão Áurea e na constante capacidade que ela possui de instigar a curiosidade. Destacamos algumas contribuições de diversos estudiosos ao longo do tempo e examinaremos por que esse número é tão enigmático, persistindo em despertar nossa fascinação até os dias atuais.

3.2 APRESENTAÇÃO DO VÍDEO: DONALD NO PAÍS DA MATEMÁGICA

Foi apresentado um trecho de "Donald no País da Matemágica"[2] que compreende o período 07:20 à 13:53 minutos do vídeo que faz menção da razão áurea no pentagrama, no retângulo áureo e em obras de arte. "Donald no País da Matemágica" é um curta-metragem de animação com duração de 27 minutos, tendo o Pato Donald como protagonista. A animação foi lançada em 26 de junho de 1959 nos Estados Unidos e foi dirigida por Hamilton Luske. O filme teve um grande reconhecimento como produção educativa da Disney, se tornando um dos mais populares e sendo utilizado em escolas. Em 1959, o curta foi indicado ao Oscar na categoria de Melhor Curta-Documentário.

> Animação em que o curioso Pato Donald aprende matemática ao se aventurar por um mundo onde as árvores têm raízes quadradas e os rios estão repletos de números. No decorrer da aventura Donald compreende a importância da matemática com os gregos da Antiguidade. Sucessivamente, esses princípios são relacionados à música, escultura, pintura, arquitetura, mecânica e esportes e outras atividades humanas. Disponível em: <http://www.matematica.seed.pr.gov.br/modules/video/showVideo.php?video=12059>

Após a exibição do vídeo, fizemos uma série de perguntas informais a fim de instigar a curiosidade dos alunos e ativar o pensamento crítico dos mesmos.

Estas perguntas foram:

- Quais conceitos matemáticos podemos identificar no vídeo?
- Vocês tiveram contato com o conceito de razão áurea nas aulas de matemática? E no cotidiano? Se sim, como?
- Além dos exemplos citados no vídeo, poderiam citar outros exemplos de onde podemos identificar o número de ouro?

[2] Disponível em: <https://youtu.be/wbftu093Yqk?si=w3YmCMa_PKe7vllN>

3.3 FERRAMENTAS UTILIZADAS NO GEOGEBRA

Após a exibição do vídeo, foi solicitado aos alunos que fizessem algumas construções que contém as propriedades da Razão Áurea. Para isso, foi utilizado a plataforma GeoGebra, que nos disponibiliza diversas ferramentas para construções geométricas.

O GeoGebra destaca-se como uma plataforma de matemática dinâmica e versátil, proporcionando um ambiente abrangente e gratuito que se estende por todos os níveis educacionais, desde o fundamental até o universitário. Nos possibilita aliar a álgebra e a geometria de forma interativa, trazendo os conceitos matemáticos de forma visual, proporcionando agilidade nas construções aliado a exploração de propriedades de formas mais objetivas.

Sua vantagem didática distintiva reside na capacidade de apresentar representações diversas de um objeto, permitindo interações entre elas, proporcionando uma experiência educacional enriquecedora. Apresentamos no Apêndice A.2 os elementos da plataforma que foram utilizados nas construções geométricas.

O GeoGebra é amplamente utilizado como uma ferramenta indispensável em ambientes educacionais devido à sua versatilidade e eficácia. Nascimento (2012) destaca a popularidade do GeoGebra:

> O GeoGebra está rapidamente ganhando popularidade no ensino e aprendizagem da matemática em todo o mundo. Atualmente, o GeoGebra é traduzido para 58 idiomas, utilizado em 190 países e baixado por aproximadamente 300.000 usuários em cada mês. Esta utilização crescente obrigou o estabelecimento do Internacional GeoGebra Insitute (IGI), que serve como uma organização virtual para apoiar GeoGebra locais iniciativas e institutos.

A utilização desse software contribuiu para uma compreensão mais profunda e holística dos conceitos matemáticos, tornando o GeoGebra uma ferramenta valiosa para educadores e estudantes

Nas próximas seções apontamos as construções realizadas no minicurso com o auxilio do Geogebra.

3.4 CONSTRUINDO UM RETÂNGULO ÁUREO

Objetivos pedagógicos

- Explicação sobre o retângulo áureo;
- Construir o retângulo de forma diferente da tradicional apresentada nos livros didáticos;
- Construir um retângulo áureo utilizando as ferramentas disponibilizadas pelo GeoGebra;

- O aluno poderá investigar e analisar as propriedades do retângulo áureo, incluindo suas medidas de lados;
- Desenvolvimento do raciocínio lógico: A construção do retângulo áureo requer o uso de conceitos matemáticos e habilidades geométricas, incentivando os alunos a aplicá-las na resolução de problemas;
- Criatividade e apreciação estética: Ao explorá-lo os alunos podem desenvolver um senso estético e apreciação pela beleza matemática através da harmonia presente em seus padrões.

Conceito

Pode-se descrever o retângulo áureo como sendo um retângulo cuja a razão entre o seu comprimento maior e o comprimento menor se aproxima do valor de φ.

Construção

Conforme está exposto o passo a passo no Apêndice A.3.

Figura 17 – Retângulo Áureo 2

Fonte: Autora

O retângulo áureo é considerado esteticamente agradável, pois traz sensação de harmonia e equilíbrio visual. Por esse motivo, ele tem sido usado em arquitetura, arte e design ao longo da história.

3.5 CONSTRUINDO A ESPIRAL ÁUREA

Objetivos Pedagógicos

- Explicação sobre espiral áurea.
- A construção da Espiral Áurea envolve medição e cálculo para determinar os pontos da espiral, observando a razão que existe entre os arcos que compõem a espiral;

- Estimular a observação nas proporções dos quadrados formados;
- Estudar razões e proporções nos retângulos formados.

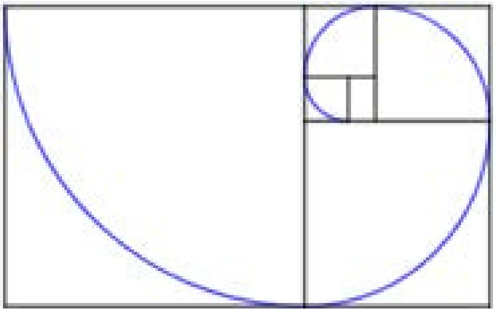
Conceito

Pode-se descrever a espiral áurea como uma curva em que, à medida que aumentamos o raio no sentido horário, o formato da curva permanece inalterada e a razão entre o raio e o comprimento da espiral se aproxima do valor do número de ouro.

Construção

Conforme está exposto o passo a passo no Apêndice A.4.

Figura 18 – Espiral Áurea 2



Fonte: Autora

A Espiral Áurea na aula de geometria pode ser uma oportunidade valiosa para abordar conceitos matemáticos de forma criativa e significativa, conectando a matemática com a natureza, arte e outras áreas do conhecimento.

3.6 CONSTRUÇÃO PENTAGRAMA REGULAR

Objetivos Pedagógicos

- Explicação sobre pentagrama regular.
- A partir da construção analisaremos as medidas envolvidas na construção, observando a relação entre os segmentos do pentagrama e a proporção áurea;
- Observação entre as semelhanças dos segmentos de um segundo pentagrama criado a partir do primeiro e como isso nos relaciona a sequência Fibonacci;
- Enfatizar sobre a simetria encontrada entre os seus segmentos;
- Contextualização em diferentes meios onde podemos encontrá-lo.

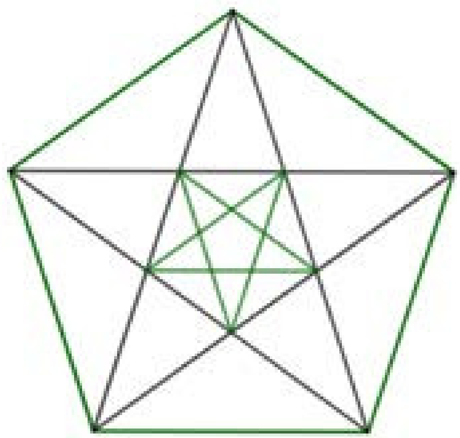
Conceito

O pentagrama regular pode ser obtido a partir das diagonais de um pentágono regular sendo formado por cinco segmentos de reta de igual comprimento, e razão entre o comprimento de cada segmento e o comprimento da diagonal do pentagrama se aproxima do número de ouro.

Construção

Conforme está exposto o passo a passo no Apêndice A.5.

Figura 19 – Pentágono Regular 2



Fonte: Autora

A construção do pentagrama pode contribuir de maneira significativa na aprendizagem de figuras geométricas, incluindo a visualização semelhança de figuras planas, posição entre retas e proporcionalidade. Além disso, o pentagrama pode ser visualizado em diversos outros meios além do ensino específico da matemática.

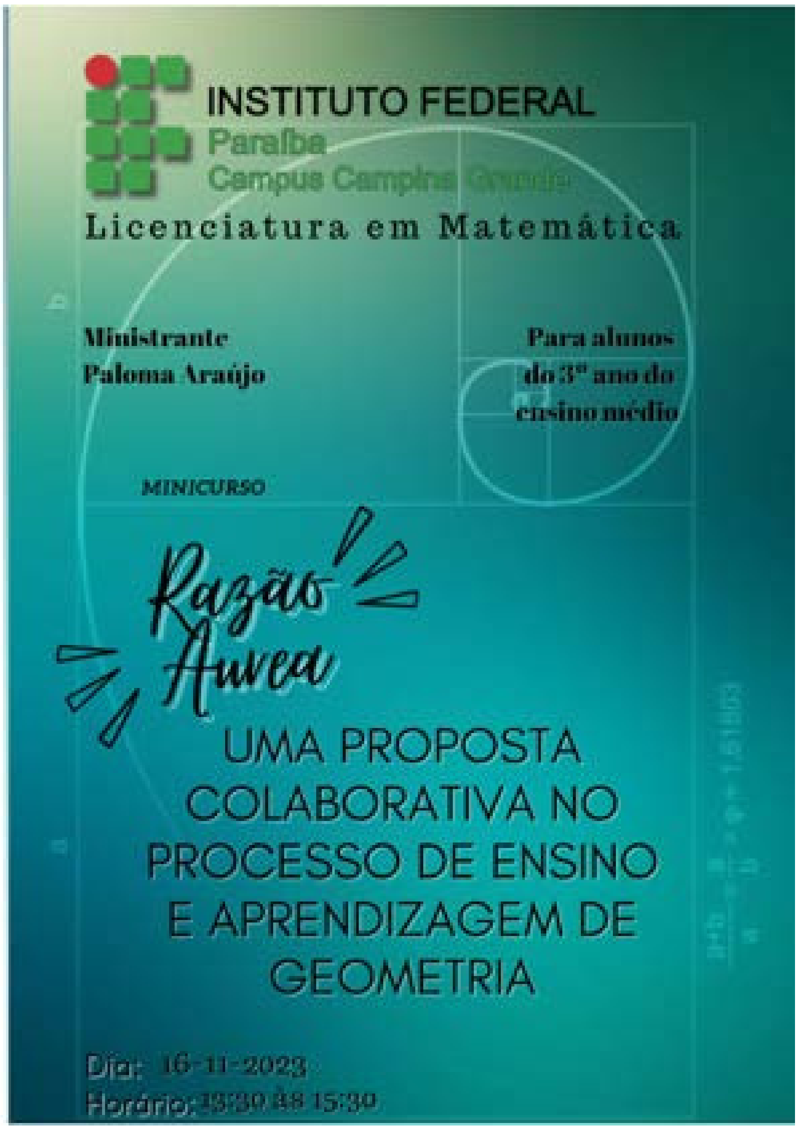
3.7 QUESTIONÁRIO DISPONIBILIZADO AOS ALUNOS

Ao final do curso foi disponibilizado aos alunos um questionário impresso com abordagem qualitativa, permitindo obter uma visão abrangente do impacto do curso, tanto em termos de aprendizagem específica quanto de experiência geral dos participantes (Apêndice C).

4 ANÁLISE E DISCUSSÃO DOS RESULTADOS

Ao longo deste capítulo, serão expostos os resultados da aplicação do minicurso "Razão Áurea: Uma Proposta Colaborativa no Processo de Ensino e Aprendizagem de Geometria" (Figura 20), explorando como a introdução da Razão Áurea contribuiu no processo de aprendizagem dos alunos. Essa iniciativa procurou instigar a curiosidade dos alunos e promover uma compreensão mais profunda, interconectada e dinâmica dos conceitos geométricos.

Figura 20 – Cartaz do Minicurso



Fonte: Autora

O minicurso dispunha de 20 vagas e foi ofertado a turma de 3º ano da turma do Curso Técnico em Informática Integrado do Instituto Federal da Paraíba, campus Campina Grande. A turma tem 42 alunos. Alguns alunos demonstraram interesse voluntário em participar, preenchendo integralmente as vagas oferecidas. A oficina foi realizada no dia 16 de novembro de 2023 iniciando às 13:30 com duração de 2 horas.

O minicurso foi conduzido no Laboratório de Matemática 2, que conta com 20 computadores, proporcionando aos alunos maior conforto, o que garantiu a cada aluno a oportunidade de utilizar um computador individualmente. Contamos também com a presença do professor de matemática da disciplina, que acompanhou todo o desenrolar do minicurso, oferecendo auxílio quando necessário.

Para melhor compreensão o minicurso, discutimos as etapas a seguir.

Etapa 1: Apresentando o minicurso aos alunos

Ao adentrarmos o laboratório, os alunos ocuparam individualmente os computadores. Em seguida iniciamos as apresentações e foi solicitado que os estudantes ligassem as máquinas e deixassem aberto o software GeoGebra, que seria utilizado posteriormente. Após essa introdução, foi realizado uma breve explanação do que seria abordado durante a oficina.

Etapa 2: Leitura do contexto histórico

A oficina teve início com a leitura de um Panfleto distribuído a cada aluno, o qual abordava o contexto histórico da razão áurea, destacando de forma concisa pontos relevantes. Antes de começarmos a leitura, foi esclarecido aos alunos que eu a conduziria em voz alta, encorajando-os a acompanhar atentamente. Além disso, foi comunicado que, caso surgissem dúvidas ou se desejassem compartilhar algo, estavam convidados a interromper, promovendo um ambiente propício para a troca de conhecimento

Realizamos a leitura completa do panfleto, onde não houve interrupções dos alunos para esclarecer dúvidas ou compartilhar informações. Ao término da leitura, foi perguntado se restava alguma dúvida. Nesse momento, um dos alunos questionou a conexão entre o segmento áureo e a sequência de Fibonacci. Em resposta, foi explicado que as proporções examinadas no segmento áureo nos conduzem à razão áurea, da mesma maneira que, ao dividirmos um número subsequente da sequência de Fibonacci pelo seu antecessor, nos aproximamos do número de ouro.

Logo em seguida, outro aluno questionou por que a sequência de Fibonacci não começava a partir do zero. Nesse momento, foi explicado que, por se tratar de uma análise da procriação de coelhos, não fazia sentido iniciar a contagem a partir de zero casais de coelhos.

Por fim, foi questionado aos alunos se eles não haviam se perguntado sobre como o número de ouro, que não pode ser obtido pela divisão de dois números inteiros, poderia ser observado na sequência de Fibonacci, composta por números inteiros. Um dos alunos respondeu que a razão gerada pelos números da sequência de Fibonacci se aproxima, mas nunca atinge exatamente o número de ouro. Nesse momento exploramos um pouco sobre a incomensurabilidade e finalizamos essa etapa do minicurso.

Etapa 3: Vídeo - Donald no País da matemágica

Neste instante, abri o slide exibindo uma imagem do vídeo, e imediatamente percebi o entusiasmo dos alunos ao saberem que assistiríamos a uma parte dele. Foi explicado que o vídeo completo tinha aproximadamente 27 minutos, mas naquele momento concentramos nossa atenção em um trecho de 6 minutos que explorava especificamente a razão áurea na geometria. Durante o vídeo, todos os alunos mantiveram sua atenção, como pode ser observado na Figura 21.

Figura 21 – Registros Fotográficos do Minicurso - 1

Fonte: Autora

Após a exibição, foram feitos alguns questionamentos aos alunos, a fim de instigar a curiosidade deles. Esses questionamentos foram:

Quais conceitos matemáticos podemos identificar no vídeo?

As respostas foram: Sequência de Fibonacci, Geometria Plana, Número de Ouro e Segmentos de retas.

Vocês tinham contato com o conceito de razão áurea nas aulas de matemática? E no cotidiano? Se sim, como?

À pergunta, todos os alunos responderam negativamente. Entretanto, uma aluna complementou dizendo que reconheceu algumas das imagens exibidas no vídeo, embora não soubesse que envolviam conceitos matemáticos. A partir daquele momento, ela expressou a intenção de olhar para essas imagens de uma maneira diferente, agora percebendo a "presença da matemática nelas".

> *Além dos exemplos citados no vídeo, poderiam citar outros exemplos de onde podemos identificar o número?*

Neste momento, os alunos questionaram se era possível identificar a razão áurea no corpo humano. Eu respondi afirmativamente, utilizando como exemplo o Homem Vitruviano e suas proporções que se alinham à constante áurea.

Além dessa pergunta, eles também questionaram se a harmonização facial fazia uso da proporção áurea na realização do procedimento estético, e foi confirmado que sim. A razão áurea é empregada nesses contextos, pois representa a beleza e a harmonia diante da simetria.

Por fim, um aluno perguntou se poderíamos observar a razão áurea lá mesmo no laboratório de matemática, e eu solicitei que eles analisassem. Os alunos usaram o próprio esquadro do professor para realizar as medições.

- Medidas da janela: Comprimento da altura - 100cm, Comprimento da base - 53cm.

$$\frac{100}{53} = 1,886\ldots$$

- - Medidas do quadro: Comprimento da altura - 303cm, Comprimento da base - 120cm.

$$\frac{303}{102} = 2,970\ldots$$

- - Medidas do monitor do computador: Comprimento da altura - 46cm, Comprimento da base - 28cm.

$$\frac{46}{28} = 1,642\ldots$$

- - Medidas de um cartão de crédito: Comprimento da altura - 8,2cm, Comprimento da base - 6cm.

$$\frac{8,2}{6} = 1,64$$

- - Celular Iphone 11: Comprimento da altura - 15cm, Comprimento da base - 7cm.

$$\frac{15}{7} = 2,14\ldots$$

Esse momento foi bastante gratificante, pois testemunhamos o entusiasmo dos alunos ao analisarem diversos elementos, como observado na Figura 22, participando ativamente da pesquisa. Ao concluir as análises, observamos que, entre os elementos, a tela do monitor e o cartão de crédito foram os que apresentaram proporções mais próximas da razão áurea.

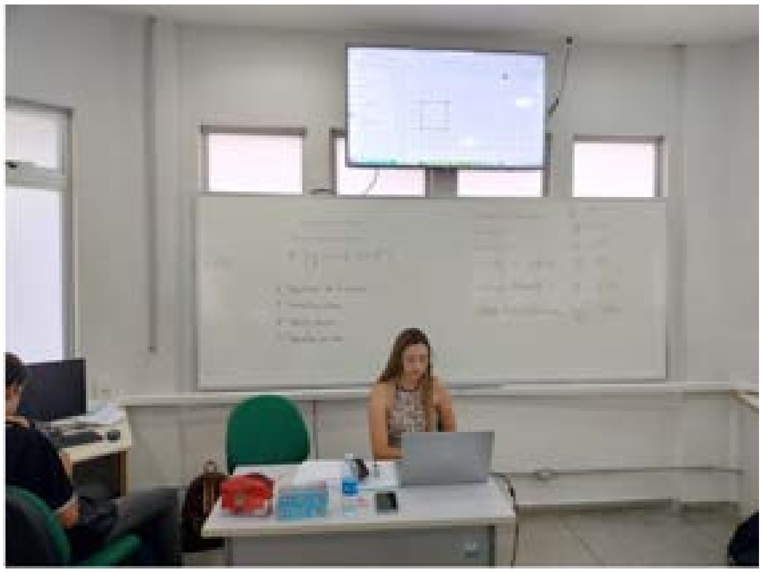
Figura 22 – Registros Fotográficos do Minicurso - 2

Fonte: Autora

Etapa 4: Construção Retângulo Áureo

Neste momento, demos início à construção do retângulo áureo, no qual conduzimos a construção exibindo na tela da TV, como mostra a Figura 23, enquanto os alunos replicavam em seus computadores. Em caso de dúvidas durante a construção, foi oferecido suporte aos alunos. A maioria deles demonstravam bom domínio sobre o uso do software GeoGebra, o que foi de grande valia para a realização da atividade.

Figura 23 – Registros Fotográficos do Minicurso - 3



Fonte: Autora

Ao concluir a construção, foi solicitado que os alunos utilizassem a ferramenta “comprimento” do GeoGebra para tornar mais evidentes na tela as medidas do retângulo áureo. Em seguida, foi pedido que observassem a construção e compartilhassem suas percepções.

Foi nesse momento que um dos alunos destacou que, ao dividir o comprimento da base pela altura do retângulo, o resultado se aproximava da razão áurea.

Depois disso, foi questionado se eles tinham observado alguma outra peculiaridade. Nesse momento, houve silêncio, então foi proposto a questão: e se retirássemos o quadrado que inicialmente criamos, o que aconteceria? Os alunos responderam prontamente que restaria um novo retângulo. Em seguida, foi indagado se os estudantes achavam que esse novo retângulo também possuía a propriedade da razão áurea. Os alunos, então, começaram a realizar os cálculos e concluíram afirmativamente: esse novo retângulo também apresentava a propriedade da razão áurea. Por fim, foi perguntado o que isso representava, e um dos alunos explicou que ambos os retângulos possuem dimensões proporcionais, sendo que as do primeiro eram maiores.

Concluídas as análises, foram apresentados dois exemplos que ilustram a presença do retângulo áureo para além do contexto matemático. Assim, foi ilustrado a imagem do Partenon e o quadro da Mona Lisa, estabelecendo correlações com o vídeo anteriormente exibido e o texto lido no início do minicurso. E foi destacado onde a razão áurea foi observada em cada um desses casos, ressaltando que há muitos outros meios nos quais podemos identificar o retângulo áureo.

Etapa 5: Construção Espiral Áurea

Nesse instante, foi apresentado aos alunos uma breve imagem da espiral áurea e foi explicado que realizaríamos a sua construção a partir do retângulo áureo que acabáramos de criar. Foi mostrado que, para começar a espiral, era necessário construir novos retângulos dentro do já existente.

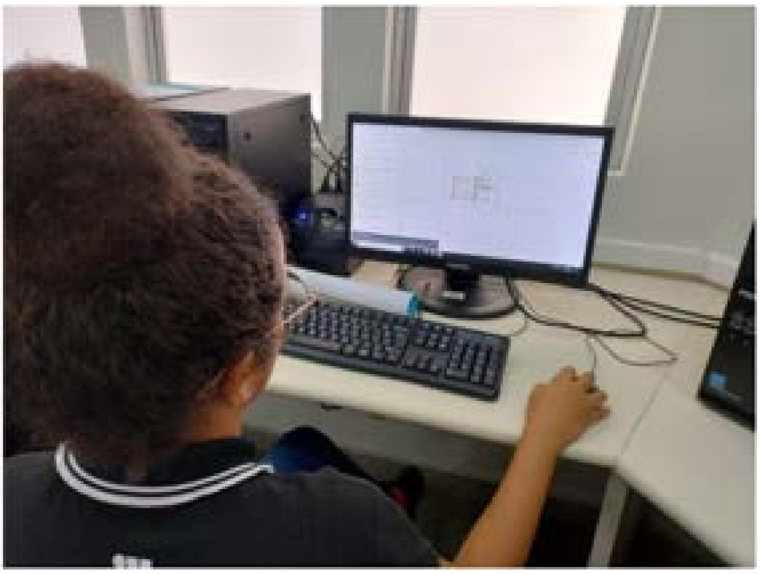
Nesse ponto, foi dado liberdade para que os alunos tentassem identificar como poderíamos determinar as medidas desses novos retângulos. Diante da dificuldade inicial, fornecemos orientações aos alunos, até que chegaram à conclusão de que poderíamos traçar o novo retângulo a partir do ponto de interseção formado ao criar uma circunferência com raio igual à medida do quadrado anterior.

Então os alunos começaram a realizar as construções, como observado na Figura 24. Alguns alunos demonstraram ter dificuldade nesse passo, então foi oferecido auxilio até realizarem a construção completa.

Ao término da construção, foi solicitado novamente aos alunos que utilizassem a ferramenta de comprimento para exibir na tela as medidas de cada arco que compunha a espiral construída. Após esse procedimento, foi questionado os alunos sobre onde poderíamos identificar a razão áurea. Realizando divisões entre as medidas dos arcos, do maior para o menor, observaram que a razão se aproximava do número de ouro. Um dos alunos levantou uma questão interessante:

> *"Meu arco maior mede 4,71 e o menor 2,91. Ao dividir o maior pelo me-*

Figura 24 – Registros Fotográficos do Minicurso - 4



Fonte: Autora

nor, obtenho aproximadamente 1,618, e ao dividir o menor pelo maior, tenho aproximadamente 0,618. O que isso significa?"

Foi explicado que ele havia encontrado o valor inverso, uma abordagem que muitos autores também consideram como a razão áurea.

Ao concluir a análise da espiral áurea, foi apresentado três exemplos que ilustram onde podemos identificar os padrões dessa espiral para além do contexto matemático. Foram mostradas as imagens da formação de galáxias, da cauda de um camaleão e da concha do molusco Nautilus, evidenciando que a proporção encontrada em seus padrões de crescimento se aproximava do número de ouro.

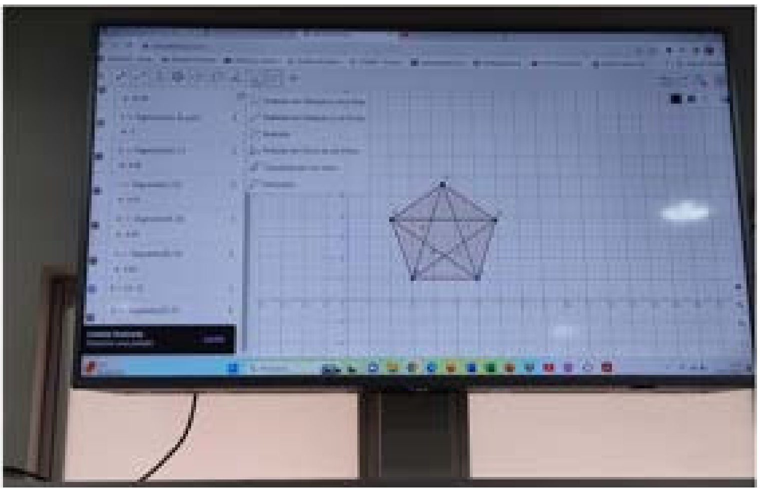
Neste ponto do minicurso, os alunos já demonstravam certo cansaço, mas ainda restava uma construção a ser realizada.

Etapa 6: Construção do Pentagrama Regular

Como os alunos já apresentavam uma certa inquietação e a construção do pentagrama seria bem mais simples, concordamos que a construção seria realizada e apresentada na tela da TV, como observado na Figura 25, e os alunos iam acompanhando. A construção se deu a partir das diagonais do pentágono. Ao final da construção foi mostrado aos alunos que se tomarmos o valor da diagonal do pentágono que compõem o pentagrama e dividirmos pelo lado do pentágono chegaremos a aproximadamente o valor da razão áurea.

Além disso, também foi apresentado aos alunos onde podemos identificar os padrões do pentagrama regular além do âmbito matemático. Foi mostrado a imagem de janela de uma catedral antiga e o posicionamento das sementes de uma maçã verde.

Figura 25 – Registros Fotográficos do Minicurso - 5



Fonte: Autora

À medida que nos aproximávamos do desfecho do minicurso, foi compartilhado com os alunos a fascinação em torno do número de ouro, pois ele emerge nos lugares mais inesperados. Observamos sua presença em várias criações humanas, atravessando contextos diversos, mas o mais incrível é testemunhar sua manifestação na própria natureza, tornando essa conexão ainda mais misteriosa e bela.

Antes de finalizarmos a oficina, foi entregue a cada aluno um questionário que continha quatro questões de natureza pessoal, destinadas a uma análise qualitativa para avaliarmos se o minicurso atendeu aos objetivos propostos e como poderíamos aprimorá-lo para futuras aplicações como está exposto no Apêndice C.

Depois de distribuir os questionários, foi solicitado que os alunos os levassem para casa, respondessem e os trouxessem na próxima semana, entregando-os ao professor. Em seguida, foi perguntado aos alunos sobre o que acharam do minicurso, e todos expressaram grande satisfação com o resultado final. Comentaram que aprenderam bastante, elogiaram a explicação e destacaram que esse momento foi extremamente enriquecedor.

Para concluir, foi presenteado cada aluno um doce como gesto de agradecimento e nos despedimos.

Etapa 7: Análise do questionário

Após uma semana, os estudantes que foram incumbidos da importante tarefa de refletir sobre as perguntas, retornaram com o questionário, compartilhando suas respostas que capturam as nuances individuais de suas experiências acadêmicas. Trazemos então um compilado das respostas dos alunos a cada questão, visando uma compreensão holística das perspectivas apresentadas.

Questão 1: Quais conceitos geométricos puderam ou podem ser abordados a partir dessa introdução da razão áurea?

> ***Resposta:*** *Proporção, semelhança de figuras planas, ponto médio, elementos da circunferência e espiral logarítmica.*

Alguns alunos indicaram que também tiveram contato com o Teorema de Pitágoras durante o curso, embora este não tenha sido abordado durante a oficina. Acreditamos que por conter no minicurso o termo "pitagóricos", isso tenha levado a esse equívoco.

Questão 2: Discorra sobre a possibilidade dessa introdução potencializar a compreensão desses conceitos geométricos?

> ***Resposta:*** *Contribui para a exploração de relações proporcionais e simétricas, além de observar padrões presentes na natureza e na arte. Proporciona uma nova perspectiva sobre as figuras geométricas, e a conexão prática dos conceitos permite aos alunos uma compreensão mais aprofundada. A dinâmica da aula, bastante interativa, permite um aprendizado envolvente e participativo.*

Questão 3: Buscando contribuir como a avaliação e futuras atualizações desse minicurso, destaque as construções ou aplicações práticas que mais prenderam a sua atenção e possibilitaram a exploração de conceitos geométricos a partir do software GeoGebra.

> ***Resposta:*** *Inicialmente, destacou-se a capacidade de relacionar o conceito da razão áurea a objetos do nosso cotidiano, nos quais os alunos observaram itens presentes na sala de aula. Essa abordagem proporcionou aos estudantes identificar, na prática, as propriedades do número de ouro. No que diz respeito ao software GeoGebra, o que mais cativou os alunos foi a exploração das propriedades do número de ouro na construção da espiral áurea, permitindo a identificação de seus padrões em vários elementos dessa construção.*

Questão 4: Em uma perspectiva, como a introdução e o desenvolvimento de conceitos algébricos e geométricos via utilização do GeoGebra podem auxiliar no processo de ensino e aprendizagem de matemática?

> ***Resposta:*** *O GeoGebra proporciona aos alunos uma visualização mais precisa e rápida dos conceitos abordados em sala de aula. A associação da teoria à prática, realizada pelos estudantes, é fundamental para consolidar uma compreensão mais concreta desses conceitos.*

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Ao redigir este Trabalho mergulhei em uma experiência prazerosa de pesquisa. Com a exploração de trabalhos sobre a razão áurea, esse assunto me proporcionou uma jornada interdisciplinar, desvelando as múltiplas dimensões dessa proporção. Além de seu impacto histórico e contribuições culturais, a Razão Áurea transcende o campo matemático, manifestando-se na arte, na natureza e, notavelmente, no ensino da geometria. A pesquisa não apenas enriqueceu meu entendimento matemático, mas também destacou a importância de conectar conceitos aparentemente distintos para uma compreensão mais profunda e holística do mundo ao nosso redor.

Explorar o contexto histórico da Razão Áurea revelou-se ser uma abordagem valiosa, marcado pelas significativas contribuições de estudiosos ao longo do tempo. A decisão de integrar esse conceito como recurso didático em um minicurso foi reveladora. Tornou-se evidente como a conexão entre (re)descobertas, teoria e prática na sala de aula é fundamental.

Ao trazer a Razão Áurea para o ambiente educacional, proporcionou aos alunos uma oportunidade de mergulhar em um tema muitas vezes negligenciado. A aplicação prática desses conceitos enigmáticos não apenas enriqueceu a compreensão dos alunos, mas também despertou o fascínio por uma parte da matemática que frequentemente permanece nas sombras. Essa experiência ressalta a importância de desvelar o potencial educacional de conceitos historicamente ricos, conectando passado e presente de maneira envolvente e impactante.

A decisão de incorporar o vídeo “Donald no País da Matemágica” ao estudo da Razão Áurea, aliada à leitura do contexto histórico, revelou-se uma abordagem enriquecedora. Ao proporcionar uma experiência visual e narrativa através do vídeo, os alunos foram guiados por uma jornada lúdica e cativante no mundo da matemática. A narrativa do vídeo, combinada à exploração histórica da Razão Áurea, permitiu aos estudantes conectar-se de maneira mais profunda com o conteúdo. Ao testemunhar as aplicações práticas e os desafios enfrentados pelos personagens, os conceitos abstratos tornaram-se tangíveis, despertando o interesse e a curiosidade.

Ao imergir primeiro na narrativa envolvente do vídeo e as contribuições históricas à Razão Áurea, os estudantes foram preparados para contextualizar os conceitos de forma mais conectada.

Entrando na fase de construções no Geogebra, após essa preparação cuidadosa, a ferramenta mostrou-se essencial. Sua capacidade de traduzir conceitos complexos em representações visuais claras e manipuláveis facilitou a materialização das ideias discutidas, garantindo clareza nos dados e agilidade no processo construtivo.

As construções guiaram os alunos por uma atenta exploração das propriedades da Razão Áurea em figuras geométricas, proporcionando-lhes a capacidade de perceber diferentes nuances da geometria. Essa abordagem singular permitiu que atribuíssem significado aos elementos, enriquecendo consideravelmente sua compreensão. Todo esse processo, contribuiu de forma significativa para suavizar alguns dos desafios enfrentados no processo de aprendizagem sobre propriedades geométricas.

Ao realizar uma análise crítica das respostas fornecidas pelos alunos no questionário disponibilizado, ficou evidente que a abordagem da Razão Áurea desempenhou um papel crucial na ampliação e enriquecimento da visão dos alunos sobre alguns elementos da geometria. Os resultados revelaram não apenas uma compreensão mais contextualizada, mas também a capacidade dos alunos de atribuir significado a cada elemento explorado.

A aplicação desse minicurso serviu como uma lente que proporcionou uma visão mais aguçada, permitindo que cada elemento fosse não apenas identificado, mas compreendido em seu contexto. Essa capacidade de atribuir significado a cada peça do quebra-cabeça geométrico demonstrou não apenas o sucesso da abordagem metodológica proposta, mas também a profunda conexão estabelecida entre os conceitos matemáticos e o entendimento dos alunos.

Os alunos não apenas viram, mas verdadeiramente compreenderam, evidenciando que a incorporação dessa proporção na metodologia educacional pode ser uma ferramenta valiosa para ampliar horizontes e promover uma compreensão mais profunda dos conceitos matemáticos.

O desempenho do minicurso superou as expectativas, proporcionando uma experiência enriquecedora para todos os envolvidos. No entanto, identificamos oportunidades de aprimoramento que podem elevar ainda mais a qualidade do curso.

Uma iniciativa espontânea dos alunos, ao sugerirem a busca por elementos na sala de aula que possuíssem a Razão Áurea, revelou-se uma atividade extremamente valiosa. Essa interação promoveu uma troca mútua de experiências, enriquecendo a compreensão coletiva sobre o tema proposto. Considerando esse aspecto enriquecedor, a inclusão dessa prática como parte integrante do minicurso pode fortalecer ainda mais a conexão dos alunos com a aplicação prática da Razão Áurea em seu ambiente cotidiano.

Além disso, observamos que, ao se aproximar das duas horas de curso, os alunos apresentaram sinais de exaustão, o que impactou a conclusão da última construção planejada. Nesse sentido, ponderamos a viabilidade de estender o curso para dois dias. Essa extensão permitiria uma distribuição mais equilibrada do conteúdo, evitando sobrecarga. Acreditamos que essa alteração não apenas evitará a exaustão precoce, mas também fomentará um ambiente mais propício para o entusiasmo dos alunos, promovendo uma participação ativa durante todo o curso.

Assim, ao incorporar essas sugestões de melhoria, buscamos não apenas manter a qualidade já alcançada, mas também elevar o minicurso a um patamar onde a aprendizagem seja ainda mais efetiva e envolvente para todos os participantes.

A Geometria desempenha um papel essencial no cotidiano dos alunos, servindo como uma ferramenta fundamental para resolver situações práticas, compreender o entorno e comunicar ideias, contribuindo para uma compreensão mais profunda de diversas áreas de estudo. Nesse contexto, acredita-se que este trabalho possa servir como estímulo para os profissionais da educação. Ao adotar essa abordagem colaborativa no ensino da geometria, espera-se não apenas a ampliação da busca por pesquisas, mas também um aumento do interesse em aprimorar os conhecimentos geométricos, especialmente em relação à Razão Áurea. Dessa forma, busca-se o desenvolvimento de novos trabalhos e aprofundamentos temáticos que enriqueçam o campo educacional.

REFERÊNCIAS

BRASIL, MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO. *Base Nacional Comum Curricular*. Brasília, 2018. 26

CARRARO, J. *Razão áurea como facilitador no processo de ensino-aprendizagem*. 73 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) — Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Pato Branco, 2021. Disponível em: <https://repositorio.utfpr.edu.br/jspui/bitstream/1/26116/1/razaoaureaensinoaprendizagem.pdf>. Acesso em: 04 set. 2023. 17, 21

CRUZ JUNIOR, J. M. D. *A Matemática por trás de um Número*: razão áurea. 48 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) — Universidade Federal de Juiz de Fora, Juiz de Fora, 2014. Disponível em: <https://repositorio.ufjf.br/jspui/bitstream/ufjf/702/1/jorgemagestedacruzjunior.pdf>. Acesso em: 17 set. 2023. 16

D'AMBROSIO, U. A história da matemática: questões metodológicas e políticas e reflexos na educação matemática. In: BICUDO, M. A. V. E. (Ed.). *Pesquisa em educação matemática*: concepções e perspectivas. São Paulo: UNESP, 1999. p. 97–115. 11

FERREIRA, R. *Números Mórficos*. João Pessoa: Imprell Gráfica e Editora, 2015. 13

HIRATSUKA, P. I. O lúdico na superação de dificuldades no ensino de geometria. *Educação em Revista*, v. 7, n. 1-2, p. 55–66, 2006. 10

LAURO, M. M. A razão áurea e os padrões harmônicos na natureza, artes e arquitetura. *Exacta*, Universidade Nove de Julho, n. 3, p. 35–48, 2005. Disponível em: <https://www.redalyc.org/pdf/810/81000304.pdf>. Acesso em: 27 set. 2023. 20

LILK, L. A. *A história da matemática no ensino da geometria*: uma contextualização pela razão áurea. 83 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) — Centro de Ciências Exatas e de Tecnologia, Universidade Federal de São Carlos, Sorocaba, 2017. Disponível em: <https://repositorio.ufscar.br/bitstream/handle/ufscar/9295/Disserta%C3%A7%C3%A3o%20LEANDRO%20ALEX%20LINCK.pdf?sequence=1>. Acesso em: 06 jul. 2023. 12, 28

LIVIO, M. *Razão Áurea: a história de Fi, um número surpreendente*. 2. ed. Rio de Janeiro-São Paulo: Record, 2015. 13, 14

LOPES, E. P. *Razão áurea*: uma proposta para o ensino de geometria. 104 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) — Universidade Federal de Mato Grosso, Instituto de Ciências Exatas e da Terra, Barra do Garças, 2022. Disponível em: <https://sca.profmat-sbm.org.br/profmat_tcc.php?id1=6874&id2=171054114>. Acesso em: 11 set. 2023. 17, 18, 21, 23, 24

NASCIMENTO, E. G. A. d. Avaliação do uso do software geogebra no ensino de geometria: reflexão da prática na escola. In: *Acta de la Conferencia Latinoamericana de Geogebra. Uruguay. ISSN*. [S.l.: s.n.], 2012. p. 2301–0185. 30

SANTOS, L. M. d. *Razão áurea*: abordagem histórica, aplicações e sua relação com fibonacci. 84 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) — Departamento de Matemática da Universidade Federal do Ceará, Fortaleza, 2020. Disponível em: <https://repositorio.ufc.br/bitstream/riufc/62464/9/2020_dis_lmsantos.pdf>. Acesso em: 06 out. 2023. 23, 25, 27

TASHIMA, M. M.; SILVA, A. L. d. As lacunas no ensino-aprendizagem da geometria. *Retirado em*, Londrina, v. 18, 2015. 26

APÊNDICE A – ELEMENTOS DA OFICINA

A.1 RAZÃO ÁUREA - CONTEXTO HISTÓRICO (PANFLETO)

Razão Áurea - Contexto Histórico

Euclides de Alexandria, por volta de 300 a.C., foi o primeiro a definir a Razão Áurea, um conceito fundamental na geometria. Ele a descreveu como a proporção resultante da divisão de uma linha em sua "razão extrema e média", onde a linha inteira se relaciona com o maior segmento da mesma forma que o maior segmento se relaciona com o menor.

Na representação, a linha AB é maior que AC, e AC é maior que CB. Se a proporção entre AC e CB for igual à proporção entre AB e AC, então isso representa a divisão da linha na Razão Áurea, ou seja, na razão extrema e média.

No século V a.C., o matemático grego Hipasos de Metaponto chocou os seguidores de Pitágoras ao descobrir a Razão Áurea, um número que não é inteiro nem uma fração simples de dois números inteiros (números racionais).

Os pitagóricos acreditavam que tais números eram inaceitáveis, como se fossem erros cósmicos a serem mantidos em segredo. A Razão Áurea, por não ser expressa como uma fração simples, implica que a proporção entre os comprimentos AC e CB não pode ser representada como uma fração.

. A descoberta de que a Razão Áurea é um número irracional revela a incomensurabilidade. O filósofo Iâmblico, no livro "Sobre a vida pitagórica," descreve a reação violenta dos pitagóricos a quem divulgasse essa descoberta, afirmando que essa pessoa era banida e até seu túmulo era separado da sociedade pitagórica.

No início do século XX, o matemático americano Mark Barr nomeou a Razão Áurea de "Fi" em homenagem ao escultor grego Fídias, que viveu entre 490 e 430 a.C. Fídias é conhecido por suas obras notáveis, como o "Partenon de Atenas" e o "Zeus" no templo de Olímpia. A escolha desse nome foi em reconhecimento à crença de alguns historiadores da arte de que Fídias usava a Razão Áurea de forma frequente e meticulosa em suas esculturas.

A expressão "Seção Áurea" foi usada pela primeira vez pelo matemático alemão Martin Ohm em 1835, na segunda edição de seu livro "Die Reine Elementar-Mathematik." Ele a mencionou em uma nota de rodapé, indicando que a divisão de uma linha em duas partes também era conhecida como "Seção Áurea". Embora pareça que Ohm não tenha inventado a expressão, seu uso sugere que ela se tornou popular por volta de 1830, possivelmente já sendo usada oralmente em círculos não-matemáticos. Após o livro de Ohm, a expressão "Seção Áurea" passou a aparecer com frequência na literatura alemã sobre matemática e história da arte.

Outro ponto a ser destacado é sobre Leonardo de Pisa, popularmente conhecido como Fibonacci, que notou a presença de um padrão consistente que dita o aumento gradual da população de coelhos, dando origem à sequência (1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, ...), onde cada número representa a quantidade de casais de coelhos a cada mês. Uma das características marcantes dessa sequência é a notável propriedade de que, ao dividir qualquer número dessa série por seu antecessor, nos aproximamos do valor fascinante conhecido como número de ouro (1,61803398875...).

Mas por que tanto alvoroço em torno disso? O que faz desse número, ou proporção geométrica, algo tão interessante que deva merecer toda essa atenção?

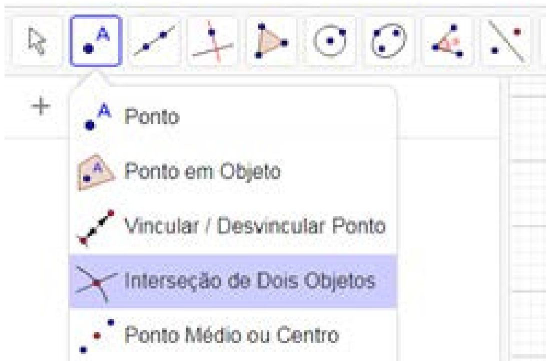
A atratividade do "Número Áureo" origina-se, antes de mais nada, do fato de que ele tem um jeito quase sobrenatural de surgir onde menos se espera.

LÍVIO, Mário. Razão áurea, a história de fi, um número surpreendente. 2a edição, Rio de Janeiro-São Paulo: Record, 2015.

A.2 FERRAMENTAS DO GEOGEBRA

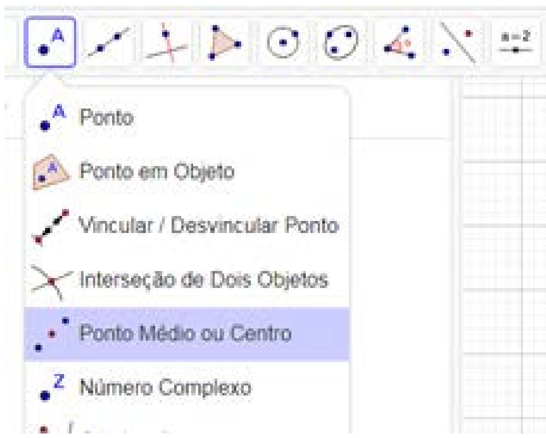
Ponto:

A ferramenta “Ponto” no GeoGebra nos permite criar pontos no plano cartesiano.



Ponto de intersecção entre dois objetos:

A ferramenta “Ponto de intersecção entre dois objetos” nos permite localizar o ponto específico onde objetos se intersectam.



Ponto Médio:

A ferramenta “Ponto médio” possibilita a localização exata do ponto médio que é equidistante entre dois pontos previamente definidos.

Reta:

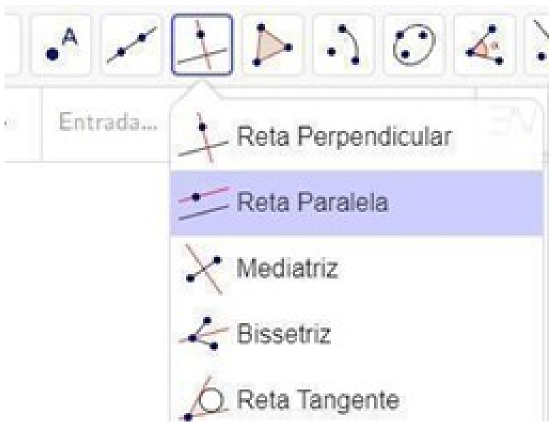
A ferramenta “Reta” permite criar retas a partir de dois pontos selecionados.

Segmento de reta:

A ferramenta “Segmento de reta” permite criar um segmento de reta definido por dois pontos em suas extremidades previamente definidos.

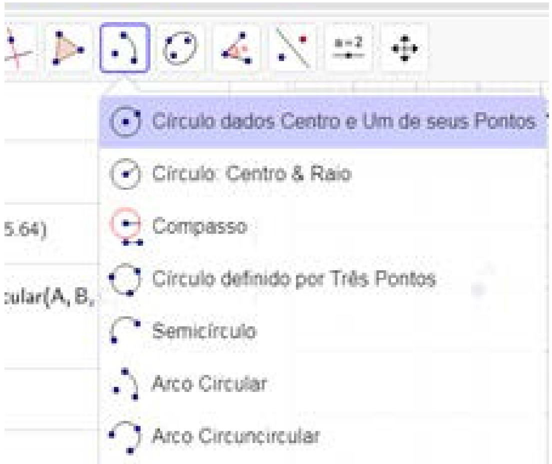
Reta Paralela:

A ferramenta “Reta Paralela” nos possibilita realizar a construção de uma reta paralela a outra já existente. Para sua construção selecionamos a reta a qual nos referenciamos e um ponto que pertencerá à nova reta criada.



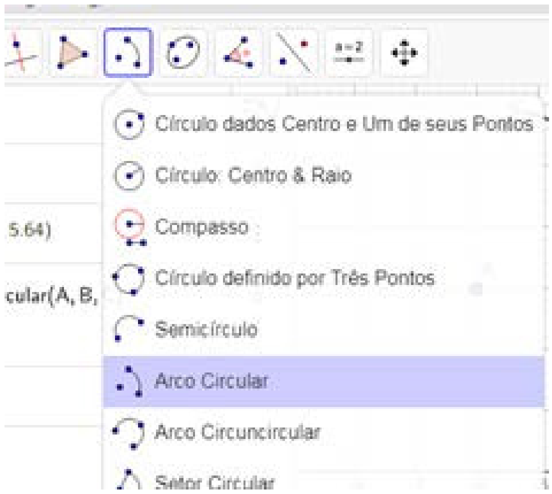
Círculo a partir de dois pontos:

A ferramenta “Círculo” permite criar a partir de um ponto localizado o qual será definido como o centro de uma circunferência.



Arco Circular:

A ferramenta “Arco Circular” permite criar arcos a partir de 2 pontos previamente definidos e um terceiro ponto que definirá a extremidade final do arco.



Polígono Regular:

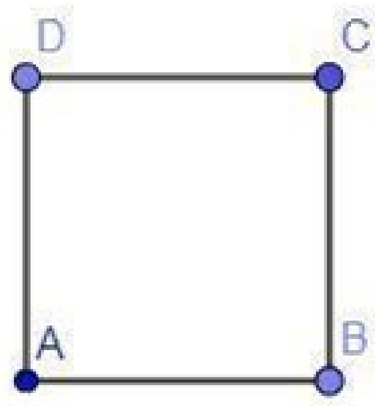
A ferramenta “Polígono Regular” permite realizar a construção de polígonos regulares, ou seja, polígonos que possuem as medidas de seus lados e ângulos congruentes.

Distância, comprimento ou perímetro:

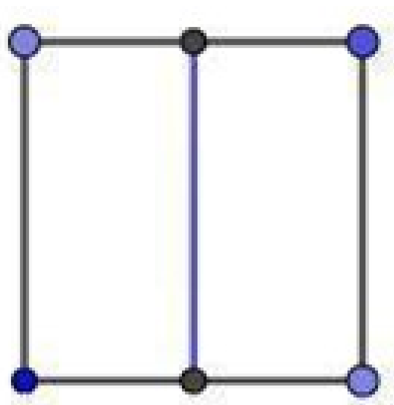
A Ferramenta utilizada para calcular distâncias, comprimento ou perímetro de uma figura. Realizando medidas precisas.

A.3 CONSTRUÇÃO - RETÂNGULO ÁUREO

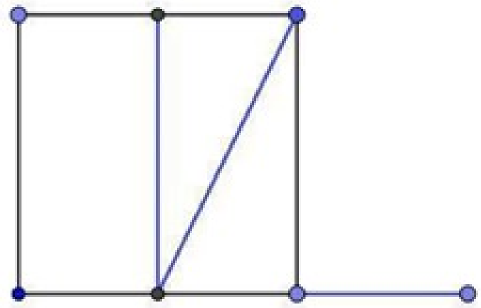
1º Passo: Construir um quadrado com um lado medindo uma unidade de comprimento;



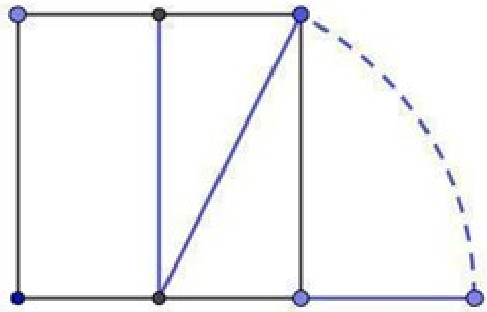
2º Passo: Ao conectarmos o ponto médio de AB ao ponto médio de DC, conseguimos formar dois retângulos congruentes;



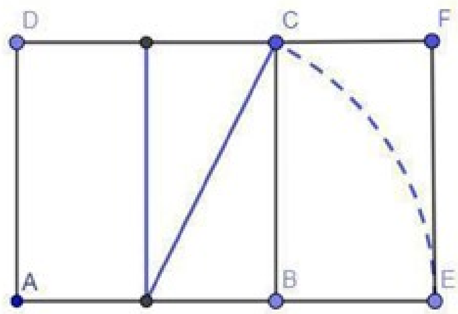
3º Passo: Estendemos o lado AB do quadrado e desenhamos uma das diagonais do segundo retângulo, seguindo o exemplo apresentado na figura ao lado;



4º Passo: Usando a ferramenta arco circular com o ponto de partida no vértice inferior esquerdo do segundo retângulo e com a abertura igual ao comprimento da diagonal, desenhamos um arco do vértice superior direito do retângulo até a extensão do lado AB do quadrado;

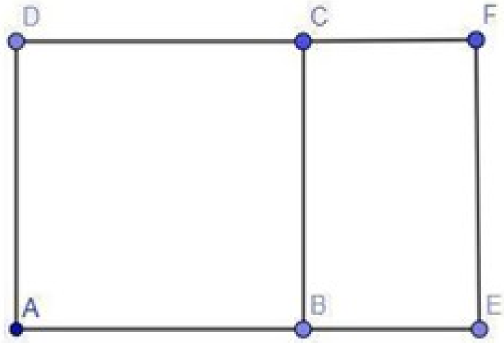


5º Passo: A partir do ponto onde o arco intercepta o segmento da base, desenhamos um novo segmento de reta EF que é paralela ao lado AD do quadrado. Estendemos o lado CD do quadrado até encontrar a linha EF, formando assim um retângulo.

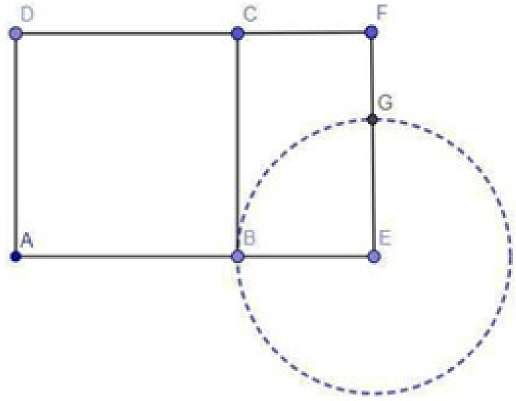


A.4 CONSTRUÇÃO - ESPIRAL ÁUREA

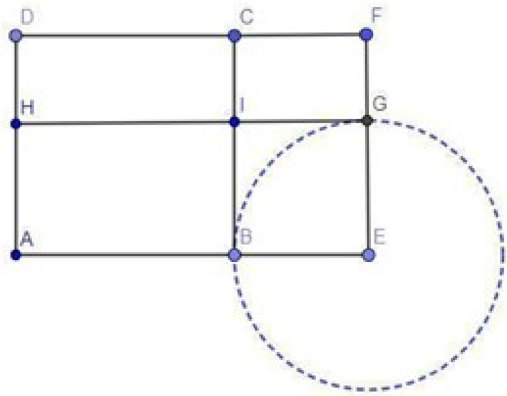
1º Passo: Iremos construir um retângulo áureo como feito na atividade anterior;



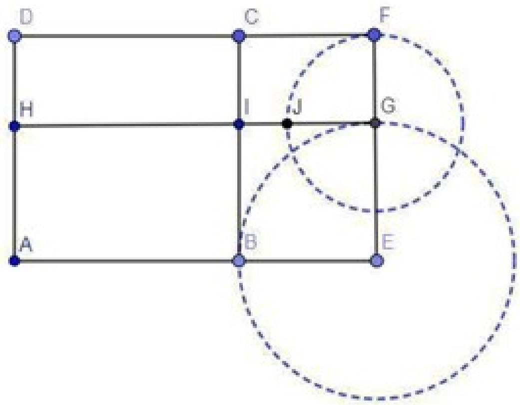
2º Passo: Com a ferramenta círculo a partir de dois pontos traçar uma circunferência de centro em E e abertura EB, para a identificação do ponto de intersecção entre a circunferência e o segmento EF;



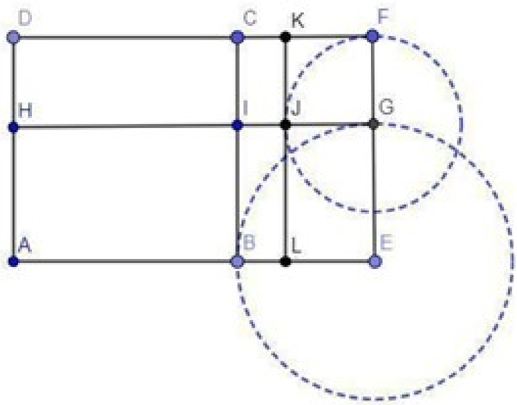
3º Passo: Traçando um segmento de reta passando pelo ponto G e paralelo ao segmento DF, obtemos um novo retângulo CFGI;



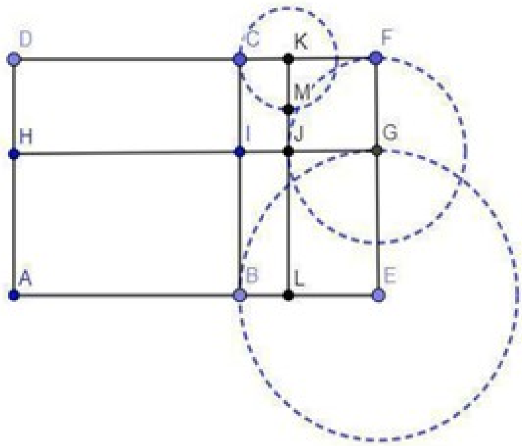
4º Passo: Com o uso da ferramenta círculo a partir de dois pontos, traçaremos uma nova circunferência de centro em G e de abertura FG, e logo em seguida identificando o ponto de intersecção entre a circunferência e o segmento IG;



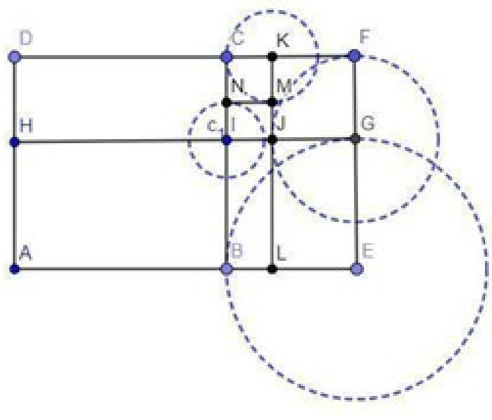
5º Passo: Traçando um novo segmento de reta passando pelo ponto J e paralelo ao segmento DA obtemos um novo retângulo CKJI;



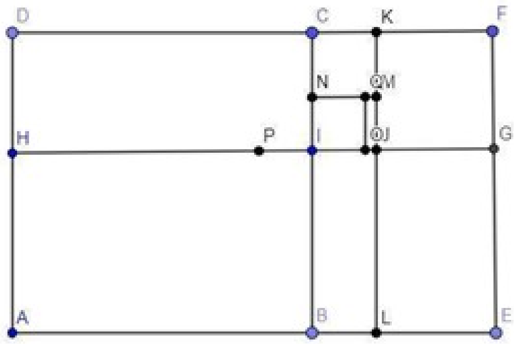
6º Passo: Com o uso da ferramenta círculo a partir de dois pontos circunferência de centro K de abertura igual ao segmento KC, em seguida identificando o ponto de intersecção entre a nova circunferência e o segmento KJ;



7º Passo: Traçando um novo segmento de reta passando pelo ponto M e paralelo ao segmento JI obtemos um novo retângulo IJMN. E logo em seguida traçando uma circunferência de centro em I com abertura igual a IN;

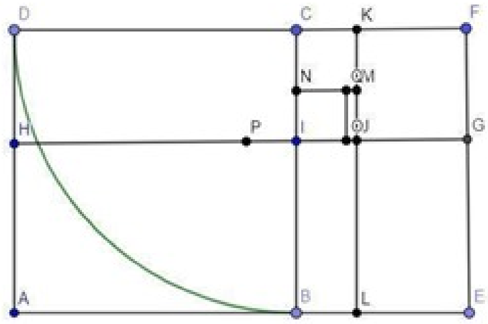


8º Passo: Identificando o ponto de intersecção da nova circunferência com o segmento IJ e em seguida traçando um segmento de reta passando pelo ponto de intersecção e paralelo ao segmento JM. E em seguida retiraremos as circunferências auxiliares, ficando apenas com os retângulos e seus pontos;

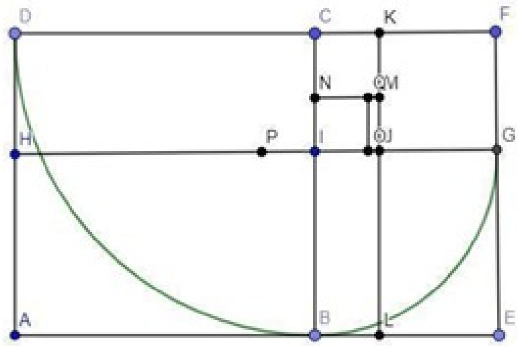


Até este momento estávamos criando os retângulos áureos, a partir de agora iniciaremos o processo de criar a espiral áurea inscrita no retângulo ADEF.

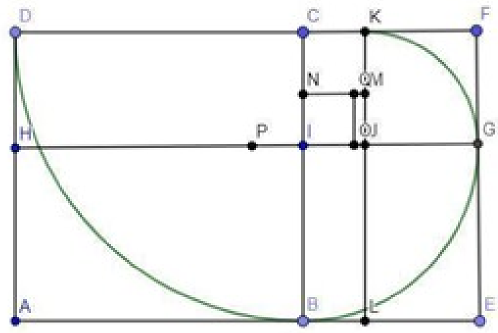
9º Passo: Com o uso da ferramenta arco circular, com ponto inicial em C e com abertura CD iremos traçar um arco partindo do ponto D até o ponto B;



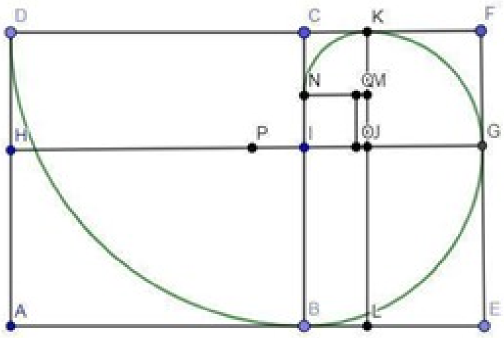
10º Passo: Repetindo o processo, agora com ponto inicial em I e com abertura IB iremos traçar um arco partindo do ponto B até o ponto G;



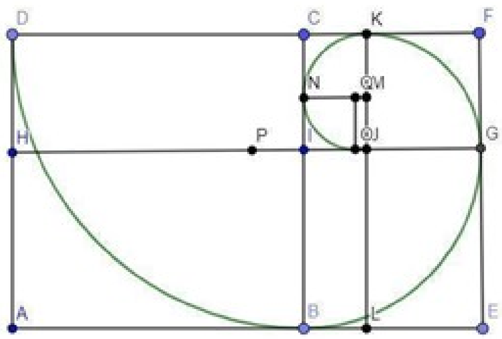
11º Passo: Com ponto inicial em J e com abertura JG traçaremos um arco partindo do ponto G até o ponto K;



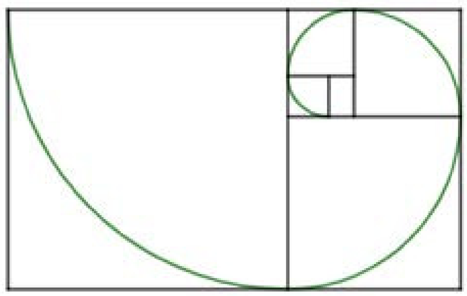
12º Passo: Com o ponto inicial em M e com abertura MK traçamos um arco do ponto K até o ponto N;



13º Passo: Com ponto inicial em Q e com abertura QN traçamos um arco partindo do ponto N até o ponto O;



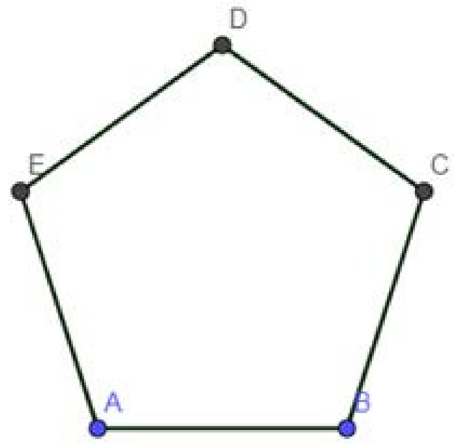
Assim, finalizamos a construção da espiral áurea. Vale ressaltar que poderíamos dar continuidade na construção dos arcos, porém como as proporções ficariam muito pequenas, foi decidido fazermos até este ponto.



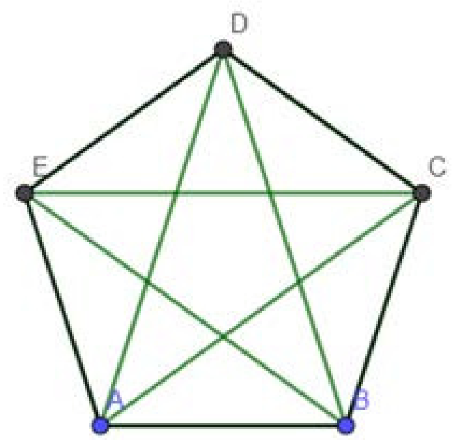
A.5 CONSTRUÇÃO - PENTAGRAMA REGULAR

1º Passo: Selecionar a ferramenta "Polígono regular" e vamos traçar um segmento que determinará o comprimento que os lados do nosso polígono irão ter;

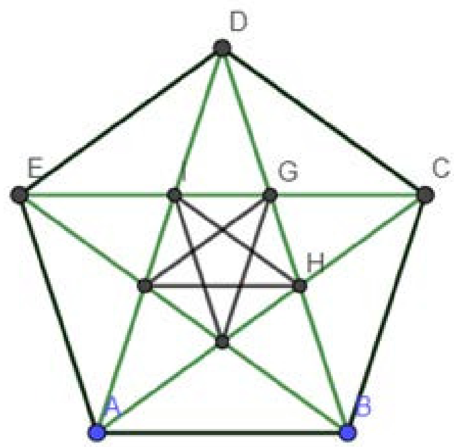
2º Passo: A ferramenta nos direcionará a indicar a quantidade de vértices que o nosso polígono irá ter, nesse momento indicaremos que serão 5 vértices. Com isso formamos o nosso pentágono regular;



3º Passo: Ligar as diagonais do pentágono usando a ferramenta segmento de retas;



4º Passo: Podemos perceber que em seu interior formamos um novo pentágono, o que nos permite criarmos um novo pentagrama, novamente unido suas diagonais.



APÊNDICE B – CONTEXTO HISTÓRICO: RAZÃO ÁUREA

Euclides de Alexandria, por volta de 300 a.C., foi o primeiro a definir a Razão Áurea, um conceito fundamental na geometria. Ele a descreveu como a proporção resultante da divisão de uma linha em sua "razão extrema e média", onde a linha inteira se relaciona com o maior segmento da mesma forma que o maior segmento se relaciona com o menor.

Na representação, a linha AB é maior que AC, e AC é maior que CB. Se a proporção entre AC e CB for igual à proporção entre AB e AC, então isso representa a divisão da linha na Razão Áurea, ou seja, na razão extrema e média.

No século V a.C., o matemático grego Hipasos de Metaponto chocou os seguidores de Pitágoras ao descobrir a Razão Áurea, um número que não é inteiro nem uma fração simples de dois números inteiros (números racionais).

Os pitagóricos acreditavam que tais números eram inaceitáveis, como se fossem erros cósmicos a serem mantidos em segredo. A Razão Áurea, por não ser expressa como uma fração simples, implica que a proporção entre os comprimentos AC e CB não pode ser representada como uma fração.

. A descoberta de que a Razão Áurea é um número irracional revela a incomensurabilidade. O filósofo Iâmblico, no livro "Sobre a vida pitagórica," descreve a reação violenta dos pitagóricos a quem divulgasse essa descoberta, afirmando que essa pessoa era banida e até seu túmulo era separado da sociedade pitagórica.

No início do século XX, o matemático americano Mark Barr nomeou a Razão Áurea de "Fi" em homenagem ao escultor grego Fídias, que viveu entre 490 e 430 a.C. Fídias é conhecido por suas obras notáveis, como o "Partenon de Atenas" e o "Zeus" no templo de Olímpia. A escolha desse nome foi em reconhecimento à crença de alguns historiadores da arte de que Fídias usava a Razão Áurea de forma frequente e meticulosa em suas esculturas.

A expressão "Seção Áurea" foi usada pela primeira vez pelo matemático alemão Martin Ohm em 1835, na segunda edição de seu livro "Die Reine Elementar-Mathematik." Ele a mencionou em uma nota de rodapé, indicando que a divisão de uma linha em duas partes também era conhecida como "Seção Áurea". Embora pareça que Ohm não tenha inventado a expressão, seu uso sugere que ela se tornou popular por volta de 1830, possivelmente já sendo usada oralmente em círculos não-matemáticos. Após o livro de Ohm, a expressão "Seção Áurea" passou a aparecer com frequência na literatura alemã sobre matemática e história da arte.

Outro ponto a ser destacado é sobre Leonardo de Pisa, popularmente conhecido como Fibonacci, que notou a presença de um padrão consistente que dita o aumento gradual da população de coelhos, dando origem à sequência (1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, ...), onde cada número representa a quantidade de casais de coelhos a cada mês. Uma das características marcantes dessa sequência é a notável propriedade de que, ao dividir qualquer número dessa série por seu antecessor, nos aproximamos do valor fascinante conhecido como número de ouro (1,61803398875...).

Mas por que tanto alvoroço em torno disso? O que faz desse número, ou proporção geométrica, algo tão interessante que deva merecer toda essa atenção?

A atratividade do "Número Áureo" origina-se, antes de mais nada, do fato de que ele tem um jeito quase sobrenatural de surgir onde menos se espera.

APÊNDICE C – QUESTIONÁRIO

QUESTIONÁRIO

Aluno (a): ______________________________________

01. Quais conceitos geométricos puderam ou podem ser abordados a partir dessa introdução da razão áurea?

____

____

____

02. Discorra sobre a possibilidade dessa introdução potencializar a compreensão desses conceitos geométricos?

____

____

____

____

03. Buscando contribuir coma avaliação e futuras atualizações desse minicurso, destaque as construções ou aplicações práticas que mais prenderam a sua atenção e possibilitaram a exploração de conceitos geométricos a partir do software GeoGebra.

____

____

____

____

04. Em sua perspectiva, como a introdução e o desenvolvimento de conceitos algébricos e geométricos via utilização do GeoGebra podem auxiliar no processo de ensino e aprendizagem de matemática?

____

____

____

____

INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA DA PARAÍBA
Campus Campina Grande
R. Tranqüilino Coelho Lemos, 671, Dinamérica, CEP 58432-300, Campina Grande (PB)
CNPJ: 10.783.898/0003-37 - Telefone: (83) 2102.6200

Documento Digitalizado Ostensivo (Público)

Entrega de trabalho de conclusão de curso

Assunto:	Entrega de trabalho de conclusão de curso
Assinado por:	Paloma Gonçalves
Tipo do Documento:	Anexo
Situação:	Finalizado
Nível de Acesso:	Ostensivo (Público)
Tipo do Conferência:	Cópia Simples

Documento assinado eletronicamente por:

- **Paloma de Cássia Araújo Gonçalves, ALUNO (201911230020) DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA - CAMPINA GRANDE**, em 02/01/2024 20:48:57.

Este documento foi armazenado no SUAP em 02/01/2024. Para comprovar sua integridade, faça a leitura do QRCode ao lado ou acesse https://suap.ifpb.edu.br/verificar-documento-externo/ e forneça os dados abaixo:

Código Verificador: 1044426
Código de Autenticação: 373c9d1364