INSTITUTO FEDERAL DA PARAÍBA
CAMPUS CAJAZEIRAS
CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

MATHEUS DE OLIVEIRA SILVA

SÉRIE DE POTÊNCIA PARA RESOLVER EQUAÇÕES DIFERENCIAIS: UMA APLICAÇÃO COM OSCILADOR HARMÔNICO SIMPLES

CAJAZEIRAS
2024

MATHEUS DE OLIVEIRA SILVA

SÉRIE DE POTÊNCIA PARA RESOLVER EQUAÇÕES DIFERENCIAIS: UMA APLICAÇÃO COM OSCILADOR HARMÔNICO SIMPLES

Monografia apresentada junto ao **Curso de Licenciatura em Matemática** do **Instituto Federal da Paraíba**, como requisito parcial à obtenção do título de **Licenciado em Matemática**.

Orientadora:

Profa. Me. Kíssia Carvalho.

Cajazeiras

2024

MATHEUS DE OLIVEIRA SILVA

SÉRIE DE POTÊNCIA PARA RESOLVER EQUAÇÕES DIFERENCIAIS: UMA APLICAÇÃO COM OSCILADOR HARMÔNICO SIMPLES

Monografia apresentada ao programa de **Curso de Licenciatura em Matemática** do **Instituto Federal da Paraíba**, como requisito à obtenção do título de **Licenciado em Matemática**.

Data de aprovação: 20/02/2024

Banca Examinadora:

Documento assinado digitalmente
KISSIA CARVALHO
Data: 07/03/2024 15:15:35-0300
Verifique em https://validar.iti.gov.br

Profª. Me. Kíssia Carvalho
Instituto Federal da Paraíba - IFPB

Documento assinado digitalmente
LILIA SANTOS GONCALVES
Data: 07/03/2024 13:30:58-0300
Verifique em https://validar.iti.gov.br

Profª. Me. Lilia Santos Gonçalves
Instituto Federal da Paraíba - IFPB

Documento assinado digitalmente
PATRICIO LUIZ DE ANDRADE
Data: 06/03/2024 10:13:17-0300
Verifique em https://validar.iti.gov.br

Prof. Me. Patrício Luiz de Andrade
Instituto Federal da Paraíba - IFPB

IFPB / Campus Cajazeiras
Coordenação de Biblioteca
Biblioteca Prof. Ribamar da Silva
Catalogação na fonte: Cícero Luciano Félix CRB-15/750

S586s Silva, Matheus de Oliveira.
Série de potência para resolver equações diferenciais : uma aplicação com oscilador harmônico simples / Matheus de Oliveira Silva.– 2024.

80f. : il.

Trabalho de Conclusão de Curso (Licenciatura em Matemática) - Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia da Paraíba, Cajazeiras, 2024.

Orientador(a): Profª. Me. Kíssia Carvalho.

1. Equações diferenciais. 2. Cálculo diferencial e integral. 3. Série de potência. 4. Oscilador harmônico simples. I. Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia da Paraíba. II. Título.

IFPB/CZ CDU: 517.9(043.2)

Dedico esse trabalho a todas as pessoas que de alguma forma contribuíram na minha caminhada.

AGRADECIMENTOS

A conclusão dessa etapa se tornou possível devido a colaboração de muitas pessoas que contribuíram para que tudo ocorresse bem.

Primeiramente agradeço a Deus, que sempre me amparou, me deu energia, paciência e discernimento para chegar até aqui.

Aos meus familiares, aqueles que são o motivo da inalação do ar que eu respiro, em especial minha mãe Raimunda Oliveira Araújo, que me apoiou e me apoia em todos os momentos, meu pai Renato José da Silva que sempre esteve comigo, agradeço as minhas avós e meu avó materno que tiveram grande contribuição na formação do meu ser e caráter, todos meus tios e tias, primos e primas que de alguma forma me incentivaram e ajudaram nesse percusso e ao meu irmão Renato de Alencar Silva que sempre tira meu sorriso nos momentos mais oportunos.

A minha orientadora Profª. Me. Kíssia Carvalho, que foi muito mais que uma orientadora, professora, foi uma amiga, uma madrinha, uma mãe para mim durante todo o período da graduação, que me aconselhou e orientou em diversas situação do curso e da vida.

Aos professores da banca examinadora Prof. Me. Patrício Luiz de Andrade e Profª. Me. Lilia Santos Gonçalves, professores do curso por quem tenho um enorme respeito e carinho e , máximo respeito. Agradeço por terem aceito o convite de participar e contribuírem com meu trabalho.

A minha amiga e irmã de curso Ingryd Iane Lira de Souza, por tudo que a gente viveu juntos no curso, pelo auxilio e carinho mútuo e apoio dado durante toda essa jornada estando sempre ao meu lado em todos os momentos.

Aos meus colegas de curso, Abner Simon, Alexandre Gonçalves, Maria Armoniele Lins, Amabel Trajano, Beatriz Marim, Camilla Deborah de Oliveira, Cleverton Duarte, Delanio Sousa, Daniel Faustino, Fabrício Limeira, Francisco Bezerra, Francisco Marcolino, Igor Andrade, Maria Izabel da Silva, José Jéferson Pereira, João Marcos da Silva, José Djailson Dias, José Nathan Alves, José Jorge de Souza, Larissa Soares, Luciene do Carmo, Lucas Batista, Mylena Vale, Randal Ferreira, Reinaldo Estevam, Vitor Silva e demais outros que foram importantes tanto nos momentos de aula e estudos quanto nos momentos de desopilação.

Aos meus professores que sempre me incentivaram e que sempre foram dispostos a ajudar no que fosse preciso. Em especial: Thiago Andrade, Reginaldo Cordeiro, Adriana Azevedo, Aureliano Vidal, Ramon Formiga, Ana Paula, William Souza, Doval Martins, José Nunes Aquino, Geraldo Herbetet e entre outros.

Por último, mas não menos importante, agradeço ao Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia – Campus Cajazeiras e todos os seus servidores por terem me acolhido tão bem, fazendo-me sentir em casa.

" A Matemática pura é, à sua maneira, a poesia das ideias lógicas."

Albert Einstein, Obra

RESUMO

Este trabalho tem como objetivo é compreender como se dá a solução de Equações diferenciais por meio de série de potência. Para isso foi feito uma pesquisa qualitativa de caráter básico, apoiada na literatura clássica de História da Matemática, Calculo Diferencial e Integral e Equações Diferenciais e artigos científicos para ser feita uma revisão bibliográfica apresentando a história das séries e das equações diferenciais bem como do arcabouço teórico necessário ao entendimento dos conceitos algébricos das séries de potência bem como das equações diferenciais. Apresentamos também uma aplicação clássica: Osciladores Harmônicos Simples, que é modelado por uma equação diferencial a qual resolvemos utilizando séries de potência. Ao final do estudo, concluímos que foi possível construir um material adequado à consulta do tema soluções de equações diferenciais por meio de série de potência. Destacando que este material poderá ser utilizado como base para outras aplicações.

Palavras-chave: Equações Diferenciais Ordinárias, Séries de Potência, Oscilador Harmônico Simples.

ABSTRACT

This work aims to organize algebraic concepts necessary to understand how power series can be used to solve differential equations. To this end, qualitative research of a basic nature was carried out, improved on the classical literature on the history of mathematics, Differential and Integral Calculus and Differential Equations, as well as scientific articles to carry out a bibliographical review presenting the history of series and differential equations, as well as the theoretical framework necessary to understand the algebraic concepts of power series and differential equations. We also present a classic application: Simple Harmonic Oscillators, which is modeled by a differential search that we solve using power series. At the end of the study, we concluded that it was possible to create material suitable for consulting the topic of solutions of differential equations through power series. Highlighting that this material can be used as a basis for other applications.

Keywords: Ordinary Differential Equations, Power Series, Simple Harmonic Oscillator.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

EDOs	Equações Diferenciais Ordinárias
OHS	Oscilador Harmônico Simples
IFPB	Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia da Paraíba

LISTA DE SÍMBOLOS

$\in$	Pertence
ϵ	Épsilon
$\forall$	Para todo
r	Razão
R	Raio de convergência
$\mathbb{R}$	Conjunto dos Reais
∂	Partial
Δ	Delta
I	Fator integrante
W	Wronskiano
$\vec{F}$	Força resultante
$\vec{p}$	Posição
$\vec{v}$	Velocidade
$\vec{a}$	Aceleração
$\propto$	Proporção
w	Frequência natural de oscilação
$\mathbb{N}$	Conjunto dos naturais

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

A resolução de Equações diferenciais utilizando séries de potência é um meio tradicional de solucionar equações diferenciais ordinárias difundido em diversos campos do conhecimento, como física, matemática, química e entre outras áreas. Isso se dá devido a grande relevância que as equações diferenciais ordinárias representam nesses campos do conhecimento.

Durante o ensino das disciplinas de Cálculo Diferencial e Integral e as disciplinas de Equações Diferencias, são apresentados diversos métodos para solucionar equações diferenciais. O método para resolver equações diferenciais por séries de potência pode ser explorado tanto, como uma aplicação dentro do Cálculo, quando são ministrados os conceitos de Série e Sequência, bem como durante o ensino da disciplina de Equações Diferenciais, ou ainda em disciplinas aplicadas em que equações diferenciais são utilizadas para modelar exemplos práticos, como por exemplo Física, Cálculo Numérico, Química, Resistência dos Materias, Modelagem Matemática, etc.

A ausência de trabalhos que abordassem tanto a parte histórica como a algébrica e apresentando um exemplo prático do uso de séries de potência para resolver equações diferenciais, fez surgir a ideia de organizar um trabalho que auxilie a compreensão do tema. O que nos leva a questão: É possível organizar os conhecimentos históricos e algébricos a fim de compreender como se da a solução de Equações diferenciais por meio de série de potência ?

Sendo assim, nosso objetivo com esse estudo é compreender como é realizada a solução de equações diferenciais ordinárias por meio de séries de potências. Para isso, buscamos fazer uma breve contextualização histórica do que levou ao desenvolvimento das séries, bem como das equações diferencias, estudar os conceitos fundamentais de séries e equações diferenciais ordinárias, no qual abreviaremos para a sigla EDOs. E aplicar esses conceitos em uma situação prática.

Diante do objetivo citado, nossa hipótese é que é possível compreender como a solução de EDOs podem ser desenvolvidas a partir das séries de potência.

Essa pesquisa tem um caráter qualitativo e de natureza básica pois busca o aprofundamento em um determinado conteúdo para serem então difundidos não apenas na comunidade científica, mas para a comunidade em geral (PRODANOV; FREITAS, 2013). Para isso foi realizada uma pesquisa bibliográfica exploratória utilizando livros clássicos da área de Historia da Matemática, Cálculo Diferencial e Integral e Equações Diferencias, bem como artigos disponíveis em base de dados como o SciELO e Google Acadêmico, todos em Português. Como utilizamos livros clássicos o intervalo de tempo de escrita do acervo pesquisado não foi um critério importante para nossa pesquisa.

Destarte, em nossa metodologia, em um primeiro momento, foi feito um levantamento bibliográfico sobre os principais tópicos de séries numéricas e séries de potências, equações diferenciais ordinárias, com o objetivo de introduzir conceitos básicos necessários para o trabalho. Alguns dos manuscritos utilizados foram de James Stewart (STEWART, 2006), George B. Thomas (THOMAS et al., 2009), Kleber Daum Machado (MACHADO, 2019).

Estes conceitos foram relacionados ao exemplo prático - Oscilador Harmônico Simples, selecionado do conteúdo livro de Kleber Daum Machado (MACHADO, 2019). Para aprofundarmos no entendimento do exemplo pesquisamos artigos relacionados ao tema na base do Google Acadêmico e do SciELO.

A pesquisa histórica foi baseada em livros disponíveis na biblioteca do IFPB - Campus Cajazeiras e artigos da base de dados Google Acadêmico e do SciELO e sites de referências acadêmicas.

Assim o conteúdo do Trabalho de Conclusão de Curso foi organizado em cinco capítulos, introdução, um relacionado a séries de potência, outro a equações diferenciais ordinárias, osciladores harmônicos e por último as considerações finais.

Primeiramente iniciamos falando um pouco sobre a história, desde o primeiro registro do estudo de série na Grécia com Zenão e seus paradoxos até Joseph Fourier que auxiliou o processo de comunicação através das Equações Diferenciais (EDOs). Falamos também de conceitos algébricos básicos de sequências, séries, testes de convergências específicos, séries de potências e por fim das séries de Taylor e Maclaurin.

Em seguida abordamos Equações Diferenciais Ordinárias, mais especificamente do seu alavancamento com Sir Isaac Newton e Gottfried Wilhelm Leibniz para a formalização do cálculo diferencial e integral. Ambos contribuíram enormemente para estudo que se perpetuam até hoje. No mesmo capítulo é mostrado elementos algébricos sobre Equações Diferenciais tanto de primeira quanto de segunda ordem, métodos de soluções, incluindo soluções por série de potência.

A aplicação é apresentada no capítulo seguinte, onde veremos alguns conceitos físicos básicos sobre mecânica clássica necessários para obtenção da equação diferencial que define o problema e posteriormente a solução utilizando séries de potencia. Concluímos o trabalho com as considerações finais.

2 SÉRIES DE POTÊNCIA

Este capítulo se dedica ao estudo das séries, considerando a história do desenvolvimento do estudo de séries, definições e conceitos fundamentais, séries de potência incluído exemplos de série de Taylor e Maclaurin.

2.1 HISTÓRIA DAS SÉRIES

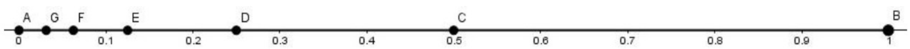
De acordo com (SCHICKLING et al., 2019) o primeiro registro que se tem de séries são dados por meio dos paradoxos de Zenão de Eleia, que viveu por volta de 450 A.C. Ele postulou pensamento para provar a inconsistência na multiplicidade e na divisibilidade. Os gregos estudavam a continuidade e o infinito, eles tinham muita dificuldade no estudo em particular em dois tipos de quantidade, tempo e espaço. Nessas duas quantidades existe uma propriedade bem fácil de intuir, mas difícil de provar que é a continuidade, Zenão utilizou dessas quantidades para criar seus paradoxos, afirmava que ambas as quantidades eram infinitamente divisíveis, ou existe um elemento menor indivisível do que o espaço e o tempo.

Com isso Zenão postulou seus quatro paradoxos, o da Dicotomia, de Aquiles, da Flecha e do Estádio. Nos dois primeiros ele os fundamentava pelo pretexto que o movimento é impossível pela hipótese de subdivisibilidade do tempo e espaço. Nos demais ele argumenta que a subdivisibilidade do tempo e espaço acaba em indivisíveis, deixando de lado a possibilidade de dividir algo em infinitas partes, com isso os dois primeiros serão abordados detalhadamente.

O paradoxo da Dicotomia afirma que antes de percorrer uma distância AB deve primeiro percorrer a primeira metade dessa distância, antes disso um quarto, antes disso um oitavo e assim sucessivamente, por essa infinidade de subdivisões o objeto que se coloca em movimento terá que fazer infinitas conexões e um espaço finito de tempo, nessa linha de raciocínio é impossível se iniciar o movimento (REAIS, , p. 3).

Zenão desafiava a visão dos gregos sobre continuidade, tornando um movimento simples e possível em aparentemente impossível subdividindo infinitas vezes. Com isso os seus paradoxos foram se popularizando por conta dessa incoerência.

Figura 2.1 – Dicotomia



Fonte: Disponível em (SCHICKLING et al., 2019, p. 14)

Na figura 2.1 é dado a interpretação geométrica do paradoxo da Dicotomia, , no qual AB=1. Antes de percorrer a distância total, deve-se percorrer a primeira metade da distância: AC=$\frac{1}{2}$; antes disso a metade de AC: AD=$\frac{1}{4}$ e assim indefinidamente, obtendo infinitos termos e cada termo finito. Logo o paradoxo conclui que é impossível percorrer tal distancia, pois seria impossível andar em um espaço infinito de termos em um tempo finito, na visão dos gregos, se juntássemos todos os infinitos termos teríamos algo infinito e não a distância AB=1.

No paradoxo de Aquiles fala que ele aposta corrida com uma tartaruga que sai com vantagem, é dito que por mais veloz que Aquiles corra ele jamais irá alcançar a tartaruga, por mais devagar que ela ande. Quando Aquiles chegar em P_0 já estará em P_1, quando ele chegar em P_1 a tartaruga estará em P_2 e assim infinitamente e com isso Aquiles jamais á alcançará.

Figura 2.2 – Aquiles e a Tartaruga

Fonte: Disponível em (SCHICKLING et al., 2019, p. 15)

Na figura 2.2 podemos ver a interpretação do paradoxo de Aquiles, P_0 é onde o movimento se inicia e de P_0 até P_1 é a distância de vantagem da tartaruga em relação a Aquiles, quando Aquiles chega em P_1 a tartaruga já se encontrará em P_2 e assim sucessivamente, obtendo uma sequência de pontos, P_0,P_1,P_2,$\cdots$,P$_n$,$\cdots$

Suponhamos que de P_0 até P_1 seja 10 metro de distância, o tempo que Aquiles leva para fazer esse deslocamento a tartaruga anda 1 metro e já se encontra em p_2, pós isso, Aquiles sai de P_1 até P_2, mas a tartaruga não está mais lá, se encontra em P_3 e andou $\frac{1}{10}$ de metro, quando nosso velocista sai de P_2 para P_3, a tartaruga já se encontra em P_4, e andou $\frac{1}{100}$ metros, e assim sucessivamente. Como o espaço é infinitamente divisível, sempre haverá um ponto que aquiles deve atingir antes de prosseguir em seu encalço à tartaruga.

Conforme a distância entre Aquiles e a tartaruga diminui a quantidade de intervalos aumenta infinitamente, dessa forma a tartaruga sempre terá uma vantagem em relação a Aquiles. Com ambos os paradoxos notamos que na concepção grega a soma de infinitos termos positivos resultaria em um resultado infinito.

Ainda de acordo (SCHICKLING et al., 2019), outro nome importante a salientar é o de Eudoxo de Cnido (408 – 355 A.C.) que contribuiu no conceito de razão, com isso era possível agora demonstrar os teoremas de proporções de formas adequadas, como existe infinito números racionais os gregos se confrontavam com conceito de conjunto infinito, coisa que desejavam evitar. Segundo Eudoxo, basta reduzir ao absurdo para provar uma proposição que forma a base do método da exaustão dos gregos, da seguinte maneira:

> Se, de uma grandeza qualquer, subtrairmos uma parte não menor que sua metade e, do resto novamente subtrai-se não menos que sua metade e se esse processo de subtração for continuado, finalmente restará uma grandeza menor que qualquer grandeza de mesma espécie prefixada.(BOYER; MERZBACH, 2019, p.81).

No qual essa grandeza é comprimento, área e volume, o axioma é verdadeiro para quando subtrairmos a metade, um terço, um quarto, um quinto ou qualquer fração própria.

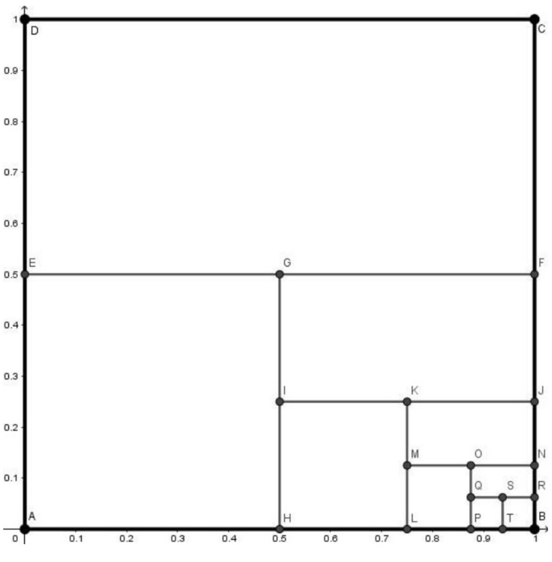
Em uma escrita moderna essa preposição que denotaremos "propriedade de exaustão" fica da seguinte forma:

"Se M é uma grandeza dada, ε uma grandeza prefixada de mesma espécie e r é uma razão tal que $\frac{1}{2} \leq r < 1$, então podemos achar um inteiro N tal que $M(1-r)^n < \varepsilon$ para todo inteiro $n > N$ ou $\lim_{n\to\infty} M(1-r)^n = 0$".

Segundo (SCHICKLING et al., 2019) os gregos utilizaram essa propriedade para provar teoremas sobre áreas e volumes de figuras curvilíneas.

Um exemplo de aplicação de tal propriedade é sob o quadrado de lado 1. Se dividimos o quadrado ao meio e em seguida uma das metades em duas partes e assim indefinidamente teremos a figura 2.3.

Figura 2.3 – Quadrado de lado 1



Fonte: Disponível em (SCHICKLING et al., 2019, p. 19)

Se somarmos todas as partes desse quadrado de lado 1, teremos $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{36}+\cdots$, com isso teremos uma soma de infinitos termos usando a propriedade da exaustão. A partir disso os gregos provaram que uma soma infinita pode resultar em um resultado finito, que no caso era 1 (SCHICKLING et al., 2019). Essa soma estava implícita no paradoxo da dicotomia, na época efetuar essa soma era impossível por conta da concepção de infinito dos gregos.

Durante os anos 200 A.C. romanos e egípcios aumentaram o poder político na Grécia, o que consequentemente interferiu na matemática. Após praticamente seis séculos de domínio grego na matemática começou o declínio do saber matemático nesta civilização. Durante o declínio poucos estudos foram feitos, pequenos avanços em geometria e trigonometria foram feitos com intuito de aprimorar a construção civil da época (BOYER; MERZBACH, 2019).

Conteúdos como séries e sequências ficaram jogadas ao léu, esquecidas, o povo estava mais preocupado com a busca da então salvação do que conceitos matemáticos. Em 529 D.C é considerado o término do desenvolvimento matemático na Europa na antiguidade. Escolas de filosofia foram fechadas, pois elas apresentavam risco ao catolicismo instaurado. A matemática não acabou e nem sumiu, ela só adormeceu durante 600 anos no ocidente[1] (SCHICKLING et al., 2019).

Posterior ao domínio grego na matemática e o seu declínio por conta do cristianismo ortodoxo, foi a vez dos asiáticos ascenderem no estudo matemático, no entanto levou bastante tempo para ter avanços consideráveis no estudo de séries e sequências.

Segundo (BOYER; MERZBACH, 2019), Yang Hui (1238-1298) estudou quadrados mágicos, o que ficou conhecido posteriormente como teorema binomial. Algumas de suas obras foram preservadas no livro Espelho Precioso de Chu Shin-Chien (1249-1314), como alguns resultados de soma de séries. O povo chinês tinha interesse na soma de sequências, encontrando até a fórmula do termo geral.

Depois dos asiáticos as atenções foram voltadas para a Europa novamente, só que agora a França foi o centro das atenções. O expoente francês mais notório durante o período de 1323-1382 foi Nicolas Oresme, seus trabalhos mais notórios foram com séries infinitas. Oresme foi o primeiro a provar que a série harmônica diverge. O italiano Pietro Mengoli (1625-1686) estudava indivisíveis e áreas sob a hipérbole, durante o processo, foi evidente o uso de séries infinitas, Mengoli redescobriu a divergência da série harmônica de Oresme. (OLIVERO, 2010).

Isaac Newton (1642-1727) começou estudando obras de outros matemáticos, até 1664. Após isso começou a fazer suas próprias contribuições. Uma de suas descobertas iniciais foi exprimir funções em termos de série. Depois ligou séries infinitas com taxa de variação. (SCHICKLING et al., 2019).

Como Newton, as primeiras descobertas Leibniz foram com série infinitas, ele se

[1] Em outras regiões do globo a matemática continuou a ser desenvolvida, como no oriente, na Europa ocorreu desenvolvimento, mas com a atuação da igreja as descobertas eram ocultadas.

fascinou pelo triângulo harmônico que era semelhante ao triângulo de Pascal e novamente começou a somar séries infinitas. Leibniz influenciou outros matemáticos para que se fosse dado continuidade a seus trabalhos, os mais notórios deles foram os irmãos Jacques (1654-1705) e Jean Bernoulli (1667-1748), dois suíços de uma das famílias mais importantes na matemática.(BOYER; MERZBACH, 2019).

Jacques se interessou por séries infinitas e por volta de 1689 escreveu o seu primeiro trabalho apresentou a desigualdade de Bernoulli. Jean redescobriu a divergência da série harmônica, Jacques não conhecia os trabalhos de Oresme e Mengoli, ele achava que o irmão tinha sido o primeiro a ver tal fato. Jacques estudou a série dos recíprocos dos números figurados, ele sabia que a série dos recíprocos quadrados perfeitos convergia, mas não conseguiu encontrar a soma. (OLIVERO, 2010).

Interessante citar o nome de Brook Taylor (1685-1731), também do Reino Unido como Newton, e seu admirador, além disso fez parte da *Royal Society* aonde foi secretário e membro da mesma, tendo em vista tudo isso não seria novidade que Taylor foi influenciado por Newton, seu principal trabalho que foi sobre expansão de série infinitas teve como embrião estudos de Sir Isaac Newton.

Outro nome que é atrelado ao de Taylor é de Collins Maclaurin (1698-1746), que teve resultados visíveis na geometria, mas um resultado em análise fez ser lembrado até hoje com sua série de Maclaurin, que nada mais é um caso especial da série de Taylor, quando $x = 0$. (SILVA et al., 2021).

Também formado em Cambridg em 1757 Edward Waring (1734 – 1793), publicou obras de fundamental importância, como o critério de razão para a convergência de séries, no entanto, este leva o nome de outro matemático, o matemático francês Augustin-Louis Cauchy (1789 - 1857) e ficou conhecido como critério de Cauchy. Cauchy escreveu muitos livros, perdendo em quantidade apenas para Euler, ele era bem rigoroso em suas notações e criterioso. Por conta disso ele foi o primeiro a introduzir com rigor o conceito de limite de d'Alambert, também produziu sobre infinitésimos, derivada, continuidade e convergência. (SCHICKLING et al., 2019).

Outro matemático que contribuiu para o estudo de séries foi Joseph Fourier (1768 - 1830), este observou que qualquer função pode ser representada por uma série. Com isso, as funções não precisavam mais ter a forma bem-comportada com que os matemáticos estavam acostumados. Tal descoberta foi feita a partir dos escritos de outros matemáticos, como Cauchy. O uso das séries de Fourier na sociedade é feita de maneira ampla, como no processamento digital de sinais, na teoria da comunicação, na física-médica e nas EDOs.(PUPIN et al., 2011).

2.2 CONCEITOS FUNDAMENTAIS DE SÉRIES

Nessa seção iremos apresentar conceitos necessários para a solução do problema dos osciladores harmônicos. Apenas citaremos os teoremas, sem demonstrá-los, quem desejar as provas dos teoremas deverá consultar as referências. Para isso usaremos como base os livros de (STEWART, 2006), (MUNEM; FOULIS, 1982).

Podemos pensar uma sequência numérica como uma lista de números escritos em uma ordem definida.

$$a_1, a_2, a_3, a_4, ..., a_n, \cdots$$

O número a_1 é chamado de primeiro termo, a_2 de segundo termo e, em geral, a_n é o n-ésimo termo. Trataremos exclusivamente de sequências infinitas, de modo que cada termo a_n terá seu sucessor a_{n+1}.

Veja que para cada inteiro positivo n existe um número correspondente a_n e, dessa maneira, uma sequência pode ser definida como uma função cujo o domínio é o conjunto dos inteiros positivos. Mas, geralmente, escrevemos a_n em vez de $f(n)$ para o valor da função em n.

A sequência $\{a_1, a_2, a_3, a_4, \cdots\}$ é também indicada por

$$\{a_n\} \qquad \text{ou} \qquad \{a_n\}_{n=1}^{\infty}$$

Uma soma de todos os termos de uma sequência infinita $\{a_n\}$, tal como:

$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + ... + a_n + \cdots \tag{1}$$

É dita série infinita. Fazendo o uso do símbolo de somatório podemos denotar da seguinte forma $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Os números a_1, a_2, a_3 e assim sucessivamente tem o nome de termos da série, e a_n, é nomeado como n-ésimo termo ou termo geral da série.

Para determinar se uma série geral (1) tem uma soma parcial ou não. Consideramos as somas parciais.

$s_1 = a_1$

$s_2 = a_1 + a_2$

$s_3 = a_1 + a_2 + a_3$

$s_4 = a_1 + a_2 + a_3 + a_4$

De maneira geral, temos,

$$s_n = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + ... + a_n = \sum_{i=1}^{n} a_i.$$

Essas somas parciais formam uma outra sequência s_n, que pode ou não ter um limite, se o $\lim_{n\to\infty} s_n = s$ existir como um número finito, então, chamamos de soma da série infinita $\sum a_n$.

Dada uma série $\sum a_n = a_1 + a_2 + a_3 + ...$, denote por s_n sua n-ésima soma parcial:

$$s_n = \sum_{i=1}^{n} a_i = a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n$$

Se a sequência s_n for convergente e $\lim_{n\to\infty} s_n = s$ existir como um número real, logo a série $\sum a_n$ é dita convergente, escrevemos

$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + ... + a_n = s \text{ ou } \textstyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n = s$$

O número s é chamado de soma da série. Se a sequência s_n é divergente, logo a série é chamada de divergente. Com isso vemos que a soma de uma série é o limite da sequência de somas parciais. Quando escrevemos $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = s$, estamos dizendo que, somando uma quantidade suficiente de termos da série, podemos se aproximar quanto queremos do número s. Vemos que

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} a_i$$

2.2.1 Séries Geométricas

Um caso importante de séries infinitas é a série geométrica

$$a + ar + ar^2 + ar^3 + ... + ar^{n-1} + ... = \textstyle\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1}, \text{ com } a \neq 0,$$

cada termo é obtido a partir do anterior pela multiplicação dele por uma razão r.

Se $r = 1$, então $S_n = a + a + ... + a = na \to \pm\infty$. Como o $\lim_{n\to\infty} S_n$ não exite, a série geométrica é divergente.

Se $r \neq 1$, temos

$$S_n = a + ar + ar^2 + ... + ar^{n-1}, \tag{2}$$

multiplicando a equação (2) por r em ambos os lados da igualdade, temos:

$$rS_n = ar + ar^2 + ... + ar^{n-1} + ar^n \tag{3}$$

Subtraindo a expressão (2) da expressão (3)

$$S_n - rS_n = a - ar^n$$

$$S_n = \frac{a(1-r^n)}{1-r} \tag{4}$$

Se $-1 < r < 1$, sabemos que $r^n \to 0$ quando $n \to \infty$; assim:

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \frac{a(1-r^n)}{1-r} = \frac{a}{1-r}$$

Se $r \leq -1$ ou $r > 1$, a sequência r^n é divergente, pois seu termo geral não tende a zero. Pela equação (4), $\lim_{n\to\infty} S_n$ não existe, logo a série geométrica é divergente naqueles casos.

Resumindo, temos que a série geométrica

$$\textstyle\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1} = a + ar + ar^2 + ...$$

é convergente se $|r| < 1$ e sua soma é

$$\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1} = \frac{a}{1-r}$$

Se $|r| > 1$, a série geométrica é divergente.

Exemplo 2.1: Sendo $x \in \mathbb{R}$ calcule a soma da série,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \Big(-\frac{1}{2}\Big)^{n-1} sen^n(x) = sen(x) - \frac{1}{2}sen^2(x) + \frac{1}{4}sen^3(x) - \frac{1}{8}sen^4(x) + \cdots$$

O termo geral da série é

$$a_n = \Big(-\frac{1}{2}\Big)^{n-1} sen^{n-1}(x)sen(x) = sen(x)\Big(-\frac{sen(x)}{2}\Big)^{n-1}$$

Logo vemos que se trata de uma série geométrica de $r = -\frac{sen(x)}{2}$, e que $|r| = \frac{|senx|}{2} \leq \frac{1}{2} < 1$. Como $r < 1$ a série converge e sua soma é dada por

$$S = \frac{a}{1-r} = \frac{sen(x)}{1-\left(-\frac{sen(x)}{2}\right)} = \frac{sen(x)}{(2+sen(x))/2} = \frac{2sen(x)}{2+sen(x)} \quad \square$$

2.2.2 Convergência Absoluta e o Teste da Razão

Dada uma série $\sum a_n$ podemos considerar a série correspondente

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = |a_1| + |a_2| + |a_3| + \cdots$$

cujos os termos são valores absolutos da série original.

Uma série $\sum a_n$ é dita absolutamente convergente se a série de valores absolutos $\sum |a_n|$ for convergente.

Veja que, se $\sum a_n$ for uma série com termos positivos, então $|a_n| = a_n$ e, assim, a convergência absoluta é a mesma coisa que a convergência nesse caso.

A série $\sum a_n$ é chamada condicionalmente convergente se ela for convergente, mas não for absolutamente convergente.

Se uma série $\sum a_n$ for absolutamente convergente, então ela é convergente.

O teste da razão, a priori, é um teste para séries de termos positivos, podendo ser utilizado para séries em geral.

Considere uma série infinita,

$$A = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

Para testar se A é convergente, se $a_n > 0$ o teste da razão calcula o limite quando n vai para o infinito da razão entre a_{n+1} e a_n, daí o nome teste da razão.

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_n + 1}{a_n} \right| = L \tag{5}$$

(i) Se $L < 1$, então A converge

(ii) Se $L > 1$, então A diverge

(iii) Se $L = 1$, então nada pode ser dito sobre a convergência de A

Exemplo 2.2: Veja se a série $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n^3}{3^n}$ converge ou diverge pelo teste da razão.

Usando o teste da razão com $a_n = (-1)^n \frac{n^3}{3^n}$, temos:

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| &= \lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{(-1)^{n+1}(n+1)^3}{3^{n+1}}}{\frac{(-1)^n n^3}{3^n}}\right| \\
&= \lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^3}{3^{n+1}}\cdot\frac{3^n}{n^3} \\
&= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{3}\left(\frac{n+1}{n}\right)^3 \\
&= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{3}\left(1+\frac{1}{n}\right)^3 \\
&= \frac{1}{3} < 1
\end{aligned}$$

□

Vemos que pelo teste da razão, a série nos dada é absolutamente convergente.

2.2.3 Séries Alternadas

Outra série particular e importante no nosso trabalho é a série alternada. Uma série alternada é aquela que os termos são alternadamente positivos e negativos ou vice e versa . Como nos casos abaixo.

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \cdots = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}$$

Ou da forma

$$-\frac{1}{2} + \frac{2}{3} - \frac{3}{4} + \frac{4}{5} - \cdots = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n}{n+1}$$

Olhando para esses dois exemplos de séries alternadas vemos que o n-ésimo termo de tal série pode ser de duas formas

$$a_n = (-1)^{n-1}b_n \text{ ou } a_n = (-1)^n b_n$$

Onde b_n é um número positivo.

O teste da série alternada ou série alterante ou, ainda, teste de Leibniz ou critério de Leibniz, diz que se os termos da série decrescerem para 0 em valor absoluto, então a série converge.

Então, dada uma série alternada

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}b_n = b_1 - b_2 + b_3 - b_4 + b_5 - \cdots, \text{ com } b_n > 0.$$

Se a série alternada satisfizer:

(i) $b_{n+1} \leq b_n$, para todo n

(ii) $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$,

a série é convergente.

Exemplo 2.3: Determine se a série alternada converge ou diverge.

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\cos(n\pi)}{n} = \frac{\cos(2\pi)}{2} + \frac{\cos(3\pi)}{3} + \frac{\cos(4\pi)}{4} + \frac{\cos(5)}{5} + \cdots = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \cdots$$

Podemos notar que a sequência dos $|b_n| = |\cos(n\pi)/n|$ é decrescente, já que o numerador $|\cos(n\pi)| = 1$ e o denominador cresce, verificando a condição (i). Agora, considerando a forma geral $|b_n| = |1/n|$, sabemos que o limite fundamental

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0,$$

o que verifica a condição (ii). Sendo assim a série alternada $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\cos(n\pi)}{n}$, converge.

O teste da razão apresentado na seção 2.2.2 pode ser utilizado para series alternada utilizando o módulo da razão, para afirmar se uma serie alternada é absolutamente convergente.

(i) Se $\lim_{n\to\infty} |\frac{a_n+1}{a_n}| = L < 1$, então $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é absolutamente convergente.

2.3 CONCEITOS FUNDAMENTAIS DE SÉRIES DE POTÊNCIAS

Uma série de potência é da forma

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3 + \cdots \tag{6}$$

Onde x é uma variável e cada c_n representa um coeficiente da série, que é um valor constante para cada n.

Uma série de potencia pode divergir ou convergir, dependendo dos valores associados a variável x. A soma da série apresentada na expressão (6) é uma função

$$f(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3 + ...$$

No qual o domínio é o intervalo de todos os valores de x que tornam a série convergente. A função se assemelha a um polinômio, a diferença é que a função tem infinitos termos. Se tomamos $c_n = 1$ para todo n a série de potência se torna uma série geométrica

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + ... + x^n + \cdots$$

Que converge quando $-1 < x < 1$ e diverge quando $|x| \geq 1$. Em geral, a série da forma

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n = c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 + \cdots \tag{7}$$

A expressão (7) é chamada de série de potência em $(x-a)$ ou série de potência centrada em a. Ao escrever o termo correspondente a $n = 0$, adotamos a conversão de que $(x-a)^0 = 1$, mesmo quando $x = a$. Veja que quando $x = a$ todos os termos são 0 para $n \geq 1$, dessa forma a série de potência sempre converge quando $x = a$. Para uma série de potência $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n$, existe três possibilidades:

(i) A série converge quando $x = a$.

(ii) A série converge para todo x.

(iii) Existe um número positivo R tal que a série converge se $|x-a| < R$ e diverge se $|x-a| > R$.

O número R no caso (iii) é chamado de raio de convergência da série de potências.

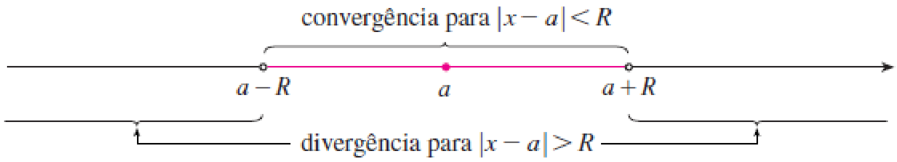
No caso (i) o raio de convergência é R=0 e R=∞ no caso (ii). O intervalo de convergência é o espaço que todos os valores de x para os quais as série converge. No caso (i) o intervalo é apenas um único ponto a. No caso (ii) o intervalo é $(+\infty, -\infty)$.

No caso (iii) observe que podemos escrever a desigualdade $|x-a| < R$ da forma $a - R < x < a + R$. Quando o valor de x é extremidade do intervalo, isto é $x = a$, qualquer coisa pode acontecer, pode convergir ou não na extremidade do intervalo, a série pode convergir em ambas as extremidades, divergir em ambas, convergir em uma e divergir em outra. Podem ocorrer quatro opções para o intervalo de convergência:

$$(a-R, a+R), (a-R, a+R], [a-R, a+R), [a-R, a+R]$$

Como ilustrado na figura 2.4.

Figura 2.4 – Intervalo de convergência



Fonte: Disponível em (STEWART, 2006, p. 671)

Exemplo 2.4: Analise o raio de convergência da série

$$sen(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

Usando o teste da razão, temos:

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| &= \lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{(-1)^{n+1}x^{2(n+1)+1}}{(2(n+1)+1)!}}{\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}}\right| \\
&= \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(-1)^{n+1}x^{2(n+1)+1}}{(2(n+1)+1)!}\cdot\frac{(2n+1)!}{(-1)^n x^{2n+1}}\right| \\
&= \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(-1)x^2(2n+1)!}{(2(n+1)+1)!}\right| \\
&= \lim_{n\to\infty}\left|\frac{-x^2}{2(n+1)(2n+3)}\right| \\
&= \lim_{n\to\infty}\left|\frac{-x^2}{2}\right|\cdot\lim_{n\to\infty}\left|\frac{1}{(2n+3)(2n+1)}\right| \\
&= \lim_{n\to\infty}\left|\frac{-x^2}{2}\right|\cdot 0
\end{aligned}$$

Assim como $|L| < 1$ a série converge, com intervalo de convergência $-\infty < x < +\infty$

Exemplo 2.5: Analise o raio de convergência da série

$$cos(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

Usando o teste da razão

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| &= \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(-1)^{n+1}\frac{x^{2(n+1)}}{(2n+2)!}}{(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}}\right| \\
&= \lim_{n\to\infty}\left|\frac{-x^2}{2(n+1)(2n+1)}\right| \\
&= \lim_{n\to\infty}\left|\frac{-x^2}{2}\right|\cdot\lim_{n\to\infty}\left|\frac{1}{(n+1)(2n+1)}\right| \\
&= \lim_{n\to\infty}\left|\frac{-x^2}{2}\right|\cdot 0 = 0
\end{aligned}$$

Logo, como já visto anteriormente, se o $|L| < 1$ a série converge. O intervalo de convergência $-\infty < x < +\infty$

Dada uma função $f(x)$ que pode ser representada (aproximada) por uma série de potencia $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n$, tem-se que o seu domínio é o intervalo de convergência da série. É possível obter a derivada e integral dessas funções, aplicando a derivação ou a integração, respectivamente, de forma individual a cada termo da série, assim como faríamos em um polinômio. Esse processo é conhecido como derivação e integração termo a termo.

Assim, se a série de potência $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n$ tiver raio de convergência $R > 0$, então a função f definida por

$$f(x) = c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 + ... = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n$$

é diferenciável e contínua no intervalo $(a-R, a+R)$ e

$$(i) f'(x) = c_1 + 2c_2(x-a) + 3c_3(x-a)^2 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} nc_n(x-a)^{n-1}$$

$$(ii) \int f(x)dx = C + c_0(x-a) + c_1\frac{(x-a)^2}{2} + c_2\frac{(x-a)^3}{3} + \cdots = C + \sum_{n=0}^{\infty} c_n\frac{(x-a)^{n+1}}{n+1},$$

Em que C é a constante de integração. Então os raios de convergência das séries de potências nas equações (i) e (ii) são ambos R.

2.4 SÉRIES DE TAYLOR E DE MACLAURIN

Conforme discutido na seção 2.3 soma de uma série de potências é um valor que depende de x, para um x pertencente ao seu intervalo de convergência. Dessa forma, a série de potências pode ser entendida como uma função em x, cujo domínio dessa função é exatamente o intervalo de convergência da série.

Supondo que f seja qualquer função que pode ser representada por uma série de potência centrada em a, temos:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n = c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 + c_3(x-a)^3 + c_4(x-a)^4 + \cdots \quad (8)$$

Fazendo $x = a$ nessa série, temos:

$$f(a) = c_0 + c_1 \cdot 0 + c_2 \cdot 0 + c_3 \cdot 0 + c_4 \cdot 0 + \cdots = c_0 \Rightarrow c_0 = f(a)$$

Derivando a série de potências de tal foma, a obter: $f'(x), f''(x), f'''(x), \cdots$, temos;

$$f'(x) = c_1 + 2c_2(x-a) + 3c_3(x-a)^2 + 4c_4(x-a)^3 + 5c_5(x-a)^4 + 6c_6(x-a)^5 + \cdots$$

$$f''(x) = 2c_2 + 3 \cdot 2c_3(x-a) + 4 \cdot 3c_4(x-a)^2 + 5 \cdot 4c_5(x-a)^3 + 6 \cdot 5c_6(x-a)^4 + \cdots$$

$$f'''(x) = 3 \cdot 2c_3 + 4 \cdot 3 \cdot 2c_4(x-a) + 5 \cdot 4 \cdot 3c_5(x-a)^2 + 6 \cdot 5 \cdot 4c_6(x-a)^3 + \cdots$$

$$f^{(4)}(x) = 4 \cdot 3 \cdot 2c_4 + 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2c_5(x-a) + 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3c_6(x-a)^2 + \cdots$$

$$f^{(5)}(x) = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2c_5 + 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2c_6(x-a) + \cdots$$

Substituindo $x = a$ nas derivadas anteriores, temos.

$$f'(a) = c_1 + 0 + 0 + 0 + 0 + 0 + \cdots \Rightarrow f'(a) = c_1$$

$$f''(a) = 2c_2 + 0 + 0 + 0 + 0 + \cdots \Rightarrow f''(a) = 2!c_2$$

$$f'''(a) = 3 \cdot 2c_3 + 0 + 0 + 0 + \cdots \Rightarrow f'''(a) = 3!c_3$$

$$f^{(4)}(a) = 4 \cdot 3 \cdot 2c_4 + 0 + 0 + \cdots \Rightarrow f^{(4)}(a) = 4!c_4$$

$$f^{(5)}(a) = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2c_5 + 0 + \cdots \Rightarrow f^{(5)}(a) = 5!c_5$$

Do qual vem $c_1 = f'(a) = \frac{f'(a)}{1!}$, $c_2 = f''(a) = \frac{f''(a)}{2!}$, $c_3 = f'''(a) = \frac{f'''(a)}{3!}$, $c_4 = \frac{f^4(a)}{4!}$, $c_5 = \frac{f^5(a)}{5!}$. Logo de maneira geral.

$$f^n(a) = 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdots nc_n = n!c_n$$

Isolando c_n, temos:

$$f^n(a) = n!c_n \Rightarrow c_n = \frac{f^n(a)}{n!}$$

Essa equação permanecerá valida mesmo que $n = 0$ se adotarmos a conversão que $0! = 1$ e $f^0 = f$. Logo essa igualdade pode ser escrita $c_0 = \frac{f^0(a)}{0!}$. Substituindo c_n de volta na série, vemos se f tiver uma expansão em série de potência em a, ela deve ser da seguinte forma.

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^n(a)}{n!}(x-a)^n = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \frac{f'''(a)}{3!}(x-a)^3 + \cdots \quad (9)$$

A série apresentada na equação (9) é denominada série de Taylor da função f em a, ou centrada em a ou em torno de a. Para o caso especial quando $a = 0$, a série se de Taylor se torna

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^n(0)}{n!}x^n = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \cdots \quad (10)$$

O caso apresentado na equação (10) aparece com frequência e foi dado um nome especial de série de Maclaurin.

Exemplo 2.6: Encontre a série de Maclaurin da função $f(x) = e^x$ e seu raio de convergência.

Sol: As derivadas de $f(x) = e^x$ são dadas por $f'(x) = f''(x) = f'''(x) = f^4(x) = \cdots = f^n(x) = e^x$. Substituindo $x = 0$, temos $f^n(0) = e^0 = 1$, $\forall\ n \in N$. Disso tiramos $c_n = \frac{f^n(0)}{n!} = \frac{1}{n!}$ e que a série procurada é $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$=$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$, ou seja,

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^6}{6!} + \cdots \quad (11)$$

Se fizermos $x = 1$,temos

$$e^1 = 1 + 1 + \tfrac{1^2}{2!} + \tfrac{1^3}{3!} + \tfrac{1^4}{4!} + \tfrac{1^5}{5!} + \tfrac{1^6}{6!} + \cdots$$

Usando essa série podemos calcular a soma de e com diversas casas decimais. Por exemplo se somarmos os oito primeiros termos da série $e \approx 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^6}{6!}$=$\frac{1970}{720}$=2,71805.

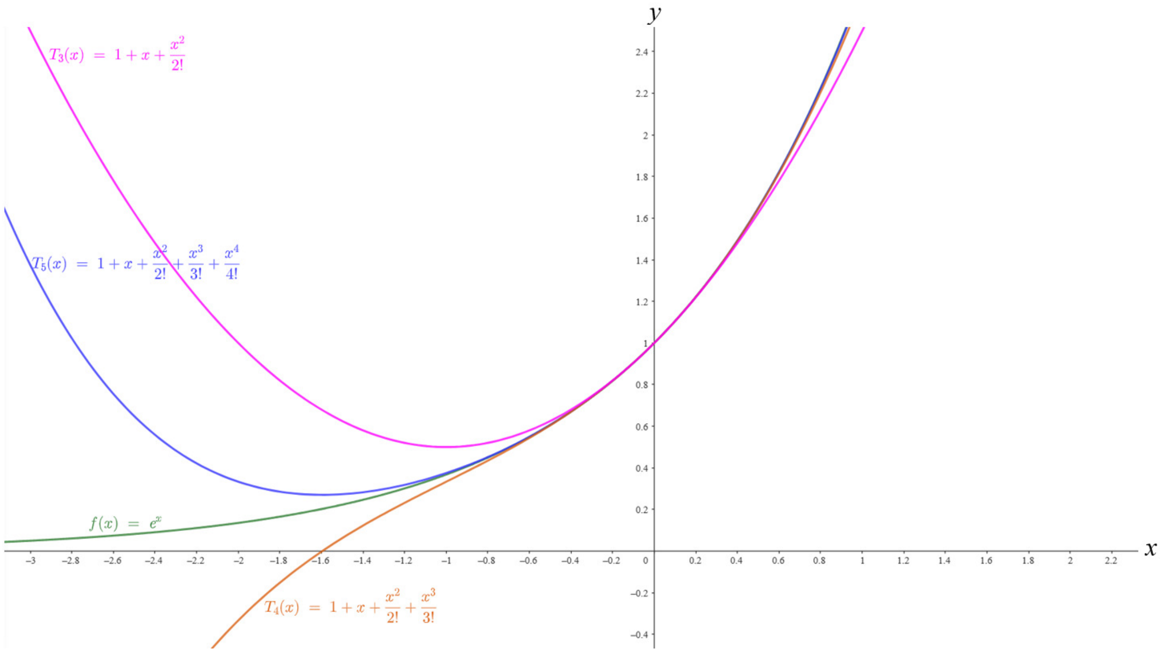
Calculando o raio de convergência da série e^x. Calculando o limite:

$$R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_n}{c_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{x^n}{n!}}{\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}} = \lim_{n\to\infty}\frac{x^n(n+1)!}{n!x^{n+1}} = \lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)!}{xn!} = \lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)}{x} = +\infty$$

Acabamos de ver que o valor de convergência é infinito, a série converge para qualquer valor de $x \in R$.

Na figura 2.5 construímos o gráfico da função $f(x) = e^x$, e dos polinômios aproximadores $T_5(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!}$, $T_4(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!}$, $T_3(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!}$.

Figura 2.5 – Intervalo de convergência



Fonte: Autor (2023)

Observe que quanto mais x se aproxima do centro $a = 0$ e mais termos são somados, mais os gráfico de $T_n(x)$ fica próximo de e^x. Veja que T_n é um polinômio de grau n chamado polinômio de Taylor de grau n de f em a.

3 EQUAÇÕES DIFERENCIAIS ORDINÁRIAS

Nesta seção, recapitularemos um pouco da história das equações diferenciais e suas ralações com as séries. Apresentaremos conceitos algébricos das Equações Diferenciais, alguns métodos de solução, destacando a solução por séries de potência.

3.1 HISTÓRIA DAS EQUAÇÕES DIFERENCIAIS ORDINÁRIAS

O ponto de partida para as equações diferenciais se inicia com os estudos de diversos matemáticos como o longo do tempo. Mas foi somente Isaac Newton (1642-1727), e Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716) que chegaram, de maneira independente a resultados importantes no campo do cálculo, por conta disso são considerados pais do cálculo.

> Para a ciência, a invenção do cálculo diferencial foi um passo gigantesco. Pela primeira vez na história humana, a concepção de infinito, que tinha intrigado filósofos e poetas desde tempos imemoriais, tinha recebido uma definição matemática precisa, que abria inúmeras possibilidades novas para a análise dos fenômenos naturais. (CAPRA, 1996)

Isaac Newton nasceu em uma pequena localidade na inglaterra chamada de Woolsthorpe[1] em 1642. Filho de agricultor, a sua família tinha planos que ele continuasse no campo e sucedesse seu pai que tinha falecido antes mesmo de seu nascimento. Contrariando sua família Newton iniciou seus estudos com 18 anos no Trinity College, em Cambridge. Desde de sua chegada se voltou para a matemática e suas pequisas relacionadas a mecânica.

Durante os anos de 1665 e 1667 Cambridge esteve fechada devido ao forte surto de peste bubônica, no entanto esse período não foi ruim para Newton do ponto de vista produtivo, inclusive a invenção do cálculo. Segundo (BOYCE; DIPRIMA, 2006) "Suas descobertas sobre o cálculo e as leis da mecânica datam de 1665". Newton divulgava suas descobertas para seus colegas primeiramente, ele tinha problemas por ser sensível a criticas, apenas em 1687 começou a publicar seus estudos.

Newton se apoiando sobre a mecânica teve subsídios para aplicar as equações diferenciais no século XVIII. Ele classificou as equações diferenciais de primeira ordem da forma $\frac{dy}{dx} = f(x)$, $\frac{dy}{dx} = f(y)$ e $\frac{dy}{dx} = f(x,y)$. Foi o responsável por elaborar uma resolução para ultima expressão, na qual $f(x,y)$ é um polinômio em x e y, fez isso utilizando séries infinitas.

[1] É uma aldeia localizada em Lincolnshire, Inglaterra. É famosa por ter sido o local de nascimento de Isaac Newton.

Gottfried Wilhelm Leibniz nasceu em Leibzig em 1646 na Alemanha, Leibniz sempre foi muito precoce, criança ele aprendeu latim e grego sozinho, durante o período da puberdade ele já dominava todo conteúdo corrente em matemática filosofia e teologia e leis da época segundo (EVES, 1995), “aos quinze anos entrou na universidade e aos dezessete obteve o grau de bacharel”(BOYER, 1996). Com vinte anos ele terminou seu doutorado, no entanto o título lhe foi negado na universidade de Leibzig por conta de sua pouca idade, com isso foi para a Universidade de Altdorf em Nuremberg aonde o titulo lhe foi concedido.

Tempos depois chegou a resultados fundamentais do cálculo, de maneira independente e um pouco depois de Newton. Entretanto foi ele o primeiro a publicar e expor suas novas descobertas em 1684. Ele compreendia a necessidade de uma notação unificada, mais geral e rigorosa. Notações como a de derivada $\frac{dy}{dx}$ e o simbolo de integral ($\int$). Direcionado a equações diferenciais, Leibzig “descobriu o método de separação de variáveis, a redução de equações homogêneas a equações separáveis em 1691 e o procedimento para resolver equações lineares de primeira ordem em 1694” (BOYCE; DIPRIMA, 2006).

Leibniz influenciou diversos trabalhos e matemáticos ao passar do tempo, como já foi citado, os mais notórios foram os irmão Bernoulli, Jacques e Jean, ambos nasceram na Basiléia[2]. Os dois contribuíram bastante no que diz respeito as equações diferenciais. Segundo (TEIXEIRA, 2012) Jacques resolveu a equação diferencial $y' = [\frac{a^3}{b^2y-a^3}]^{\frac{1}{2}}$, no mesmo arquivo que tinha essa resolução foi feito o primeiro uso do termo integral no sentido atual, isso em 1690. Em 1694 Jean resolveu a equação diferencial $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{ax}$ e o problema da catenária[3]. Um problema que ambos os irmão contribuíram foi braquistócrona[4], foi resolvido por Leibniz, Newton e por Guillaume François Antonie Marquis de L’Hôpital (1661 - 1704).

A família Bernoulli é muito famosa no ramo da matemática, não só por Jacques e Jean, outros familiares tiveram êxito na carreira, mas fora eles o que chamou mais atenção foi Daniel Bernoulli (1700- 1782), filho de Jean. Nasceu em Groningen, nos Países Baixos, Daniel sempre foi muito prodígio, aos 16 anos já era mestre, posterior ao seu doutorado publicou seu primeiro trabalho, que foi *Mathematical Exercise* em 1724. Por conta de seu trabalho no ano anterior ele foi convidado a lecionar na recém fundada academia de São Petersburgo na Rússia a partir de 1725, aonde ficou até 1733 quando retornou para Basel (O’Connor, J.J and Robertson, E. F, 1998). Tinha interesse nas aplicações de equações diferencias, foi ele quem desenvolveu a equação de Bernoulli, muito famosa em mecânica dos fluidos (BOYCE; DIPRIMA, 2006).

[2] É uma cidade no rio Reno, na zona noroeste da Suíça, próxima das fronteiras do país com a França e a Alemanha.
[3] Curva descrita por uma corda apoiada em suas extremidades sob o efeito de seu próprio peso.
[4] Trajetória de uma partícula que, sob a ação de seu peso, passa de um ponto inicial a um ponto final, num intervalo mínimo de tempo.

Um grande amigo de Daniel e um dos matemáticos mais renomados de todos os tempos, considerado como o mais relevante do século XVIII é Leonhard Euler (1707-1783). Euler nasceu em Basel na Suíça, assim como Daniel, logo ele tinha proximidade com a família Bernoulli. Euler, assim como Daniel era um prodigio, se tornou mestre aos 16 anos, eles foram colegas de universidade em Basel e o pai de Daniel, Jean Bernoulli foi seu professor, na verdade ele era o pupilo preferido de Jean segundo (D'AMBROSIO, 2009).

Quando completou 20 anos ele foi convidado lecionar na academia de São Petersburgo, assim como seu amigo Daniel, esse convite foi por intermédio dos Bernoullis. Com a chegada de Euler na academia, Daniel teria alguém para expor seus pensamento e trabalhos, a ida de Euler para São Petersburgo impulsionou a produção acadêmica de Daniel, durante os anos de 1727 (chegada de Euler) até o ano de 1733 (ano que regressou a Basiléia) foi o período mais produtivo de sua vida conforme (O'Connor, J.J and Robertson, E. F, 1998). Com a saída de Daniel de São Petersburgo Euler se tornou o principal matemático da academia aos 26 anos até sua saída para academia de Berlim em 1741 aonde ficou até 1766 e depois regressou a São Petersburgo como dito por (BOYCE; DIPRIMA, 2006).

Euler foi eleito como o matemático que mais produziu em sua época, e muito possivelmente o mais prolífico de todos os tempos. Em vida publicou cerca de 560 livros e artigos, um número que chega aos 800 se levamos em consideração o que foi publicado de maneira póstuma conforme afirmado por (MOL, 2013). De acordo com (BOYER; MERZBACH, 2019), tendo em vista o numero de produções de Euler o acadêmico francês François Arago (1786-1853) disse que ele podia calcular sem esforço aparente "do mesmo modo como os homens respiram, como as águias se sustentam no ar".

De acordo com (BOYCE; DIPRIMA, 2006), as contribuições de Euler para o ramo especifico das equações diferencias foram a indentificação de condições para que equações diferenciais de primeira ordem fossem exatas por volta de 1734-1735, criou a teoria de fatores integrantes e encontrou solução geral para equações lineares homogêneas com coeficientes constantes em 1743. Em 1750-1751 ampliou último resultado para equações lineares não homogêneas, usando com assiduidade séries de potências para resolver equações diferenciais. Em 1768-1769, Euler desenvolveu um método numérico e fez contribuições importantes em equações diferenciais parciais, além de ter sido o pioneiro no tratamento sistemático do cálculo de variações.

Segundo (BOYER; MERZBACH, 2019)

> Euler foi, sem dúvida, o maior responsável pelos métodos de resolução usados hoje nos cursos introdutórios sobre equações diferenciais, e até muito problemas específicos que aparecem em livros texto de hoje remontam aos grandes tratados que Euler escreveu sobre o Cálculo - *Institutiones calculi differentialis* (Petersburgo, 1755) e *Institutiones calculi integralis* (Petersburgo, 1768-1770, 3 volumes).

A equação diferencial

$$x^n y^{(n)} + a_1 x^{n-1} y^{(n-1)} + \cdots + a_n y^{(0)} = f(x)$$

No qual os expoentes entre parênteses indicam a ordem da derivada, hoje é conhecida como equação diferencial de Euler.

Também foi o primeiro a notar que conhecida uma solução especifica $v = f(x)$ para equação de Riccati (1676-1754) $y' = p(x)y^2 + q(x)y + r(x)$, a substituição $y = v + 1/z$ a transforma numa equação diferencial linear em z. Outros grandes estudiosos já tinham estudado a equação de Jacopo Riccati, no entanto Euler foi o primeiro a enxergar tal fato (EVES, 1995).

Outro grande matemático do século XVIII foi Joseph Louis Lagrange (1736-1813), nasceu em Turim na Itália, foi o único de 11 irmãos a atingir a idade adulta. Se formou na universidade de Turim e começou a lecionar muito cedo em sua cidade, anos depois em 1766, quando Euler se retirou da academia de Berlim foi chamado para ocupar o seu lugar, Lagrange ficou até 1787, quando se mudou para acdemia de Paris (EVES, 1995).

Reconhecido pela sua obra *Mécanique analytique* em 1788, Lagrange provou, entre 1762-1765 que a solução geral de uma equação diferencial linear homogênea de ordem n é uma combinação linear de n soluções independentes. Posteriormente entre 1774- 1775 desenvolveu completamente o método de variação dos parâmetros. Lagrange também é conhecido pelo seu trabalho fundamental em equações diferenciais parciais e cálculo de variações (BOYCE; DIPRIMA, 2006).

> Seu trabalho em equações diferenciais (por exemplo, o método de variação de parâmetros), particularmente em equações diferenciais parciais, é extraordinário, e suas contribuições ao cálculo de variações impulsionaram muito o desenvolvimento desse campo (EVES, 1995).

Lagrange era bastante conhecido pela sua preocupação como o rigor. No entanto esse fato não pode ser dito sobre outro matemático da época, estamos falando de Pierre-Simon Laplace (1749-1827), apenas 13 anos mais novo que Lagrange, os dois eram bem contrastantes como afirmou W. W. Rouse Bali em (EVES, 1995):

> “Lagrange é perfeito tanto na forma como no conteúdo; explica seus procedimentos cuidadosamente e, embora seus argumentos sejam gerais, são fáceis de acompanhar. Laplace, por outro lado, não explica nada, não liga para o estilo; se satisfeito com a correção dos resultados, não se importa em deixá-los sem demonstração ou com alguma deficiência” (EVES, 1995).

Laplace nasceu na Normandia, região no norte da França, depois se mudou para Paris em 1768, onde logo chamou atenção como sua marca e foi eleito para Academia de

Ciência em 1773. Se destacou pelo seu trabalho no campo da mecânica celeste. A equação de Laplace $\Delta f = 0$ é fundamental em diversos ramos da física matemática, estudou intensamente em conexão com atração gravitacional. Seu método de transformada de Laplace possibilita a resolução de uma equação diferencial ordinária com coeficientes constantes através de uma equação algébrica.

No fim do século XVIII, diversos métodos elementares de soluções para EDOs já tinham sido descobertos. No século XIX se deu inicio-se a busca por questões interligadas a teoria da unicidade dos problemas, além de métodos menos elementares, com base em série de potencias. Carl Friedrich Gauss (1777-1855) alemão e Algustin-Louis Cauchy (1789-1857) francês, contribuíram na teoria e conceitos sobre funções com variáveis complexas. Durante o mesmo período as equações diferenciais parciais foram bastante exploradas conforme foi notado sua importância em física matemática. muitas funções, soluções de determinas EDOs começaram a aparecer comumente e consequentemente estudadas. Conhecidas, coletivamente, como funções transcendentais, muitas estão ligadas a nomes de matemáticos, incluindo Bessel, Legendre, Hermite, Chebyshev e Hankel, entre outros.

Considerando o exposto, notamos que o cálculo diferencial e integral - incluindo equações diferenciais - é o resultado de um extenso caminho de pesquisa, descobertas e falhas. Inúmeros matemáticos, reconhecidos ou não, estiveram envolvidos na criação da Matemática que hoje conhecemos e estudamos. Assim, entendemos que, embora seja um tema bastante pesquisado, as equações diferenciais, ainda hoje, representam um campo vasto. A área é muito produtiva, pois ainda possui muitos problemas não resolvidos.

3.2 CONCEITOS FUNDAMENTAIS DE EQUAÇÕES DIFERENCIAIS ORDINÁRIAS

Iniciaremos o estudo de Equações Diferenciais tomando como referência os escritos de (MACHADO, 2019), primeiramente estudaremos aquelas que só envolvem derivadas de primeira ordem e uma única variável independente, ou seja, com equações diferenciais ordinárias de primeira ordem. De maneira geral são dadas por

$$F(x, y, \frac{dy}{dx}) = 0 \tag{12}$$

A função representada na equação (12) envolve a variável independente x, a variável dependente $y(x)$ e a derivada $\frac{dy}{dx}$. Segue alguns exemplos de equações no formato da equação (12).

$$\frac{dy}{dx} + x = 0$$
$$\frac{dy}{dx} - 3xy = 4$$
$$\frac{dy}{dx} - sen(xy) = x^2$$
$$y\frac{dy}{dx} + xy^3 - 4 = 0$$
$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \frac{dy}{dx} - y + x = 0$$
$$\frac{d\vec{y}}{dx} + 3\vec{y} = 0$$

As equações podem ser lineares ou não, escalares ou vetoriais. A equação apresentada em (12) é chamada de forma implícita de uma equação diferencial ordinária.

Em varias oportunidades é possível escrever a equação diferencial de forma explícita.

$$\frac{dy}{dx} = f(x,y). \tag{13}$$

Onde, a função $f(x,y)$ pode ser escrita como uma razão entre outras funções, $M(x,y)$ e $N(x,y)$, com isso

$$f(x,y) = -\frac{M(x,y)}{N(x,y)}. \tag{14}$$

Substituindo a equação (13) na equação (14), temos:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{M(x,y)}{N(x,y)},$$

manipulando,

$$N(x,y)dy = -M(x,y)dx$$

ou ainda,

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0. \tag{15}$$

Por exemplo, a equação:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x^3 - 3y}{x},$$

pode ser reescrita como

$$(x^3 - 3y)dx = xdy$$

ou também

$$(x^3 - 3y)dx - xdy = 0.$$

No exemplo temos que $M(x,y) = x^3 - 3y$ e $N(x,y) = -x$. Na equação (13) está implícito que y é entendido como uma função de x, já na equação (15) é possível duas compreensões, $y = y(x)$ ou $x = x(y)$. Em determinadas ocasiões uma forma irá convir melhor que a outra, por meio de sua interpretação para a solução da equação diferencial.

3.2.1 Equações Diferencias Ordinárias de Primeira Ordem Separáveis

Considere a equação diferencial,

$$\frac{dy}{dx} + 2xy^2 = 0 \tag{16}$$

A equação 16 é não-linear pelo fator xy^2. Podemos reescreve-la como:

$$\frac{dy}{dx} = -2xy^2,$$

considerando $f(x,y) = -2xy^2$. Reescrevendo

$$dy = -2xy^2 dx \text{ ou } \frac{dy}{y^2} = -2xdx$$

Observamos que do lado esquerdo temos apenas a variável y, e no lado direito somente a variável x. As variáveis x e y se encontram separadas. Integrando ambos os lados com uma integral indefinida, temos:

$$\int \frac{1}{y^2} dy = \int -2xdx$$
$$\frac{1}{y} + c_1 = -x^2 + c_2$$

em que c_1 e c_2 são constantes de integração, manipulando

$$\frac{1}{y} = x^2 + c_1 - c_2,$$

e fazendo $c = c_1 - c_2$, temos

$$\frac{1}{y} = x^2 + c.$$

Podendo escrever ainda como,

$$y = \frac{1}{x^2 + c}.$$

Formalizando, consideramos a equação diferencial que tem a forma geral

$$\frac{dy}{dx} = f(x,y) = g(x)h(y) \tag{17}$$

A função (17) pode ser escrita como produto de duas funções, uma em função de x, $(g(x))$, e outra em função de y, $(h(y))$. Como isso ocorre a equação pode ser chamada de separável, com isso, reescrevendo

$$\frac{dy}{h(y)} = g(x)dx, \tag{18}$$

a equação (18) pode ser integrada e fornecer a solução da equação diferencial. Desta forma, generalizando para

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0.$$

Supondo que $M(x,y)$ e $N(x,y)$ podem ser escritas na forma

$$M(x,y) = g(x)h(y) \text{ e } N(x,y) = G(x)H(y),$$

cada função pode ser escrita como produto de duas outras, uma de cada variável.

$$g(x)h(y)dx + G(x)H(y)dy = 0 \text{ ou } g(x)h(y)dx = -G(x)H(y)dy,$$

dividindo ambos os lados por $G(x)h(y)$,

$$\frac{g(x)}{G(x)}dx = -\frac{H(y)}{h(y)}dy.$$

Mostrando que, dadas as formas

$$\frac{dy}{dx} = f(x,y) = g(x)h(y) \text{ e } g(x)h(y)dx + G(x)H(y)dy = 0$$

de uma equação diferencial, ambas podem ser separadas e integradas, sendo possível chegar a solução da equação diferencial

Exemplo 3.2: Considere a equação diferencial,

$$xcos(y)dx + (2x^2 - 3)sen(y)dy = 0, \tag{19}$$

manipulando para escrever na forma de uma equação separável como em (15), e dividindo ambos os lados por $(2x^2 + 3)cos(y)$:

$$\frac{xcos(y)}{(2x^2 - 3)cos(y)}dx = -\frac{(2x^2 - 3)sen(y)dy}{(2x^2 + 3)cos(y)}dy$$

$$\frac{x}{(2x^2 - 3)}dx = -\frac{sen(y)}{cos(y)}dy$$

Integrando os dois lados por substituição de variável,

$$\int \frac{x}{(2x^2 - 3)}dx = -\int \frac{sen(y)}{cos(y)}dy \tag{20}$$

Logo a equação (20) fica

$$\int \frac{du}{4u} = \int \frac{dv}{v},$$

com isso temos:

$$\frac{1}{4}\ln|u| = \ln|v| + c$$

que é o mesmo que,

$$\frac{1}{4}\ln|2x^2 - 3| = \ln|\cos(y)| + c \text{ ou } \ln|2x^2 - 3|^{\frac{1}{4}} - \ln|\cos(y)| = c,$$

manipulando algebricamente,

$$ln\left|\frac{(2x^2-3)^{\frac{1}{4}}}{cos(y)}\right| = c,$$

que é a solução da equação $xcos(y)dx + (2x^2-3)sen(y)dy = 0$. $\square$

3.2.2 Equações Diferencias Ordinárias de Primeira Ordem Homogêneas

O próximo tipo de equação diferencial é uma equação de primeira ordem que contém equações diferenciais homogêneas. Assim a equação de primeira ordem

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$$

é conhecida como equação homogênea, quando escrita da forma

$$\frac{dy}{dx} = f(x,y) \tag{21}$$

existe uma função g tal que $f(x,y)$ pode ser escrita na forma

$$f(x,y) = g\left(\frac{y}{x}\right), \tag{22}$$

igualando a equação (21) a equação (22), a equação diferencial fica

$$\frac{dy}{dx} = g\left(\frac{y}{x}\right), \tag{23}$$

Outra maneira de averiguar se a equação é homogênea é pela ideia de função homogênea. Uma função $F(x,y)$ é dita homogênea de grau n se ocorrer

$$F(tx,ty) = t^n F(x,y), \tag{24}$$

ou seja, quando em $F(x,y)^3$ trocamos x por tx e y por ty e posteriormente fatoramos t, se a expressão resultante for da forma (24). Por exemplo, se $F(x,y) = x^3 + x^2y$, temos

$$F(tx,ty) = (tx)^3 + (tx)^2(ty) = t^3x^3 + t^2x^2ty$$

ou

$$F(tx,ty) = t^3x^3 + t^2x^2ty = t^3(x^3 + x^2y),$$

de maneira que

$$F(tx,ty) = t^3F(x,y),$$

como isso, $F(x,y) = x^3 + x^2y$ seja homogênea de grau 3.

Levando em consideração a definição colocada em , temos que a equação diferencial

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0.$$

Equação (15) é homogênea se $M(x,y)$ e $N(x,y)$ forem homogêneas de mesmo grau.

Exemplo 3.3: Considere a equação diferencial,

$$xydx + (x^2 + y^2)dy = 0 \tag{25}$$

Reescrevendo a equação (25) notamos que ela é homogênea,

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{xy}{x^2 + y^2} \tag{26}$$

também podemos reescrever como:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{xy}{x^2\left(1 + \frac{y^2}{x^2}\right)} = -\frac{\frac{y}{x}}{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2},$$

nesse caso existe uma função g dada por

$$g\left(\frac{y}{x}\right) = -\frac{\frac{y}{x}}{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2},$$

essa equação diferencial é homogênea. Analisando pelo método que consiste em substituir $M(x,y)$ trocando x por tx e y por ty e posteriormente fatoramos t.

Temos que $M(x,y) = xy$ e $N(x,y) = x^2 + y^2$. Logo

$$M(tx,ty) = (tx)(ty) = t^2xy = t^2M(x,y),$$

o que nos mostra que $M(x,y)$ é homogênea de grau 2. Para o que diz respeito a $N(x,y)$, termos

$$N(tx,ty) = (tx)^2 + (ty)^2 = t^2x^2 + t^2y^2 = t^2(x^2+y^2),$$

com isso,

$$N(x,y) = t^2N(x,y),$$

vemos que $N(x,y)$ é homogênea de grau 2. Portanto a equação $xydx + (x^2+y^2)dy = 0$ é homogênea. Agora que sabemos identificar uma equação homogênea, vamos ver o método de resolução, para a isso teremos que transformar a equação homogênea em uma equação de variáveis separáveis.

Seja a equação (15)

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$$

que é homogênea, fazendo mudança de variáveis

$$y = vx,$$

onde $v = v(x)$

$$v = \frac{y}{x},$$

transformaremos a equação $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$ em uma equação separável nas variáveis x e v. Como é homogênea, podemos escrevê-la

$$\frac{dy}{dx} = g\left(\frac{y}{x}\right).$$

Fazendo $y = vx$ e lembrando que $v = v(x)$ é uma função em x.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(vx) = x\frac{dv}{dx} + v\frac{dx}{dx} = x\frac{dv}{dx} + v, \tag{27}$$

a equação resulta em

$$x\frac{dv}{dx} + v = g\left(\frac{y}{x}\right),$$

como $v = \left(\frac{y}{x}\right)$, temos

$$x\frac{dv}{dx} = g(v) - v \text{ ou } xdv = [g(v) - v]\,dx,$$

separando em v e x temos

$$\frac{dv}{v - g(v)} = -\frac{dx}{x}.$$

Aplicando integrais de ambos os lados, temos:

$$\int \frac{dv}{v - g(v)} = -\int \frac{dx}{x} + c, \tag{28}$$

onde c é uma constante de integração. Multiplicando a equação (28) por -1, teremos a solução geral como sendo

$$ln|x| = \int \frac{dv}{g(v) - v} + c$$

posteriormente a resolução das integrais deveremos substituir $v = \frac{y}{x}$ para voltarmos as variáveis iniciais.

Analisando a equação (25). Sabemos que

$$xydx + (x^2 + y^2)dy = 0$$

é homogênea, reescrevendo

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{y}{x}}{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2}.$$

Usando $y = vx$. Temos

$$\frac{d}{dx}(vx) = -\frac{v}{1 + v^2}$$

ou

$$v + x\frac{dv}{dx} = -\frac{v}{1 + v^2}$$

ou, ainda,

$$x\frac{dv}{dx} = -\frac{v}{1 + v^2} - v,$$

logo,

$$x\frac{dv}{dx} = -\frac{v(2+v^2)}{1+v^2},$$

podendo ser reescrita como:

$$\frac{1+v^2}{v(2+v^2)}dv = -\frac{dx}{x}. \tag{29}$$

Acabamos de transformar a equação homogênea em separável. Integrando a equação (29) em ambos os lados,

$$\int \left[\frac{1+v^2}{v(2+v^2)}\right] dv = -\int \frac{dx}{x}. \tag{30}$$

Resolvendo a integral do lado direito da equação (30), temos:

$$\int \left[\frac{1+v^2}{v(2+v^2)}\right] dv = -ln|x| + c$$

onde c é a constante de integração. Para resolver a integral do lado esquerdo da equação (30) iremos utilizar frações parciais.

$$\begin{aligned}
\frac{1+v^2}{v(2+v^2)} &= \frac{A}{v} + \frac{Bv+C}{v^2+2} \\
&= \frac{Av^2+2A+Bv^2+Cv}{v(v^2+2)} \\
&= \frac{2A+Cv+(A+B)v^2}{v(v^2+2)}
\end{aligned}$$

Igualando os polinômios para a solução do sistema linear temos:

$$\begin{gathered}
2A = 1 \Rightarrow A = \tfrac{1}{2} \\
C = 0 \\
A+B = 1 \Rightarrow B = \tfrac{1}{2}.
\end{gathered}$$

Com isso,

$$\frac{1+v^2}{v(2+v^2)} = \frac{1}{2}\frac{1}{v} + \frac{1}{2}\frac{v}{v^2+2}.$$

E a integral da esquerda da equação (30) fica

$$\int \left[\frac{1+v^2}{v(2+v^2)}\right] dv = \frac{1}{2}\int \frac{dv}{v} + \frac{1}{2}\int \frac{vdv}{v^2+2} = \frac{1}{2}ln|v| + \frac{1}{4}ln|v^2+2|.$$

Agora como já temos os resultados das duas integrais, temos:

$$\tfrac{1}{2}ln|v| + \tfrac{1}{4}ln|v^2+2| = -ln|x| + c.$$

Fazendo $c = ln|c_1|$, com isso

$$\tfrac{1}{2}ln|v| + \tfrac{1}{4}ln|v^2+2| = ln|c_1| - ln|x|$$
$$\tfrac{1}{2}ln|v| + \tfrac{1}{4}ln|v^2+2| = ln\left|\tfrac{c_1}{x}\right|.$$

multiplicando ambos os membros por 4

$$ln\left[v^2(v^2+2)\right] = ln\left(\tfrac{c_1}{x}\right)^4$$

ou

$$\left[v^2(v^2+2)\right] = \left(\tfrac{c_1}{x}\right)^4$$

como $v = \frac{y}{x}$, temos

$$\left(\tfrac{y}{x}\right)^2\left[\left(\tfrac{y}{x}^2+2\right)\right] = \left(\tfrac{c_1}{x}\right)^4,$$

manipulando

$$y^4 + 2x^2y^2 = c_1^4,$$

definindo a constante $c_1^4 = d$, temos por fim

$$y^4 + 2x^2y^2 = d$$

que é a solução da equação diferencial (25) inicial. A seguir será visto outro tipo de equação diferencial de primeira ordem.

3.2.3 Equações Diferencias Ordinárias de Primeira Ordem Exatas

O próximo tipo de equações diferenciais de primeira ordem que ocorre com frequência envolve equações da forma

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0,$$

dada a equação, considere que ocorra a seguinte igualdade:

$$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial N(x,y)}{\partial x} \tag{31}$$

Nesse caso a equação diferencial é chamada de exata. Assim uma equação exata é aquela que quando escrita $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$, respeita a condição (31).

Caso $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$ seja exata, existe uma função $f(x,y)$, tal que

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy = Mdx + Ndy,$$

falamos que a equação $f(x,y) = c$, c é uma constante, que define implicitamente y como função de x, é uma solução da equação. Se (x_0, y_0) for um ponto qualquer no domínio comum as funções, definimos

$$f(x,y) = \int_{x_0}^{x} M(x,y_0)\,dx + \int_{y_0}^{y} N(x,y)\,dy.$$

Calculando as derivadas parciais de f, temos

$$\bullet \frac{\partial f}{dy} = \frac{\partial}{dy}\left(\int_{x_0}^{x} M(x,y_0)\,dx\right) + \frac{\partial}{dy}\left(\int_{y_0}^{y} N(x,y)\,dy\right) = 0 + N(x,y)$$
$$\bullet \frac{\partial f}{dx} = \frac{\partial}{dx}\left(\int_{x_0}^{x} M(x,y_0)\,dx\right) + \frac{\partial}{dx}\left(\int_{y_0}^{y} N(x,y)\,dy\right) = M(x,y_0) + \int_{y_0}^{y} \frac{\partial N}{\partial x}dy \Rightarrow$$
$$\Rightarrow M(x,y_0) + \frac{\partial M}{\partial y}dy = M(x,y_0) + M(x,y)|_{y_0}^{y} = M(x,y_0) + M(x,y) - M(x,y_0) = M(x,y)$$

Agora resolveremos um exemplo: $y' = -\frac{2xseny + e^x cosy}{x^2 cosy - e^x seny}$

temos $\frac{dy}{dx} = -\frac{2xseny + e^x cosy}{x^2 cosy - e^x seny}$, que é o mesmo que

$$(2xseny + e^x cosy)dx + (x^2 cosy - e^x seny)dy = 0,$$

no qual nos deparamos que $M(x,y) = 2xseny + e^x cosy)$ e $N(x,y) = (x^2 cosy - e^x seny)$, como vemos $\frac{\partial M}{\partial y} = 2xcosy - e^x seny = \frac{\partial N}{\partial x}$, o que nos mostra que a equação é exata. Usando $(x_0, y_0) = (0,0)$, temos que a solução é dada pela equação $f(x,y) = c$ de forma implícita, em que c é uma constante, onde

$$f(x,y) = \int_0^x M(x,0)\,dx + \int_0^y N(x,y)\,dy$$
$$f(x,y) = \int_0^x e^x\,dx + \int_0^y x^2 cosy - e^x seny\,dy$$
$$f(x,y) = [e^x]|_0^x + [x^2 seny + e^x cosy]|_0^y$$
$$f(x,y) = (e^x - 1) + (x^2 seny + e^x cosy - 0 - e^x)$$
$$f(x,y) = x^2 seny + e^x cosy - 1.$$

Uma função $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$ que não é exata pode ser transformada em uma, basta ser multiplicada por uma função I de duas variáveis, tal que

$$I(x,y)M(x,y)dx + I(x,y)N(x,y)dy = 0.$$

Desse modo falamos que I é um *fator integrante* da equação. A expressão acima é exata por definição, satisfazendo tais condições

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = I(x,y)M(x,y) \quad \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = I(x,y)N(x,y)$$

e

$$\frac{\partial}{\partial y}[I(x,y)M(x,y)] = \frac{\partial}{\partial x}[I(x,y)N(x,y)].$$

Se uma equação diferencial inexata tem um fator integrante, então ela tem na verdade infinitos fatores integrantes que tornam a equação exata. Como vimos

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy,$$

é inexata, mas também por hipótese sabemos que podemos torna-la exata através do fator integrante $I_0(x,y)$, de modo

$$I_0(x,y)M(x,y)dx + I_0(x,y)N(x,y)dy = df(x,y),$$

df é exata e $f(x,y)$ satisfaz a equação

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = I(x,y)M(x,y) \quad \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = I(x,y)N(x,y).$$

Sendo $f(x,y)$, diferenciável, dada por $g(f)$, nesse caso

$$I = \frac{dg}{df} x_0$$

é fator integrante $M(x,y)dx + N(x,y)dy$ também. Note que

$$I(x,y)M(x,y)dx + I(x,y)N(x,y)dy = \frac{dg}{df}I_0(x,y)M(x,y)dx + \frac{dg}{df}I_0(x,y)N(x,y)dy$$
$$I(x,y)M(x,y)dx + I(x,y)N(x,y)dy = \frac{dg}{df}\left[I_0(x,y)M(x,y)dx + I_0(x,y)N(x,y)dy\right]$$
$$I(x,y)M(x,y)dx + I(x,y)N(x,y)dy = \frac{dg}{df}df,$$

a partir disso

$$I(x,y)M(x,y)dx + I(x,y)N(x,y)dy = dg,$$

a equação se tornou exata por meio do fato integrante $\frac{dg}{df}I_0$. É relevante determinar pelo menos um dos fatores integrantes de uma equação diferencial, com ele podemos transformar a equação em exata e resolver.

Não tem formulas ou regras para calcular o fator integrante em todos os casos, ou seja a função I, ele pode ser calculado em apenas alguns e não tem uma receita de bolo para isso. Vamos citar apenas dois casos.

$\bullet Se \frac{1}{N}\left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right) = f(x)$, é uma função de x, logo o fator integrante será $I(x,y) = e^{\int f(x)dx}$.

$\bullet Se \frac{1}{M}\left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right) = g(y)$, é uma função de y, logo o fator integrante será $I(x,y) = e^{-\int g(y)dy}$.

Exemplo: Resolva $y^2dx + xydy = 0$

Se $M = y^2$ e $N = xy$. Logo, $\frac{\partial M}{\partial y} = 2y$ e $\frac{\partial N}{\partial x} = y$. Com isso vimos que $\frac{\partial M}{\partial y} \neq \frac{\partial N}{\partial x}$, a equação não é exata.

Só que, $\frac{1}{N}\left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right) = \frac{1}{xy}(2y - y) = \frac{1}{x} = f(x)$. Logo $I = e^{\int f(x)dx} = e^{\int \frac{1}{x}dx} = e^{lnx} = x$ é um fator integrante.

Multiplicando a equação dada anteriormente por I, temos $xy^2dx + x^2ydy = 0$. Ou seja, $M_2 = xy^2$ e $N_2 = x^2y$. Portanto, $\frac{\partial M_2}{\partial y} = 2xy = \frac{\partial N_2}{\partial x}$. Agora a equação anterior é exata. Sua solução é dada implicitamente pela equação $F(x,y) = C$, onde C é um valor constante qualquer. Escolhendo $(x_0, y_0) = (0,0)$

$$f(x,y) = \int_0^x M(x,y_0)\,dx + \int_0^y N(x,y)\,dy = \int_0^x 0dx + \int_0^y x^2ydy = \frac{x^2y^2}{2}.$$

Temos que a solução é $\frac{x^2y^2}{2} = C$, que o mesmo que $xy = \sqrt{2C}$, ou seja, $xy = K$, onde k é uma constante. Com isso damos por fim equações diferencias exatas e continuaremos a seguir com outro tipo de equação.

3.2.4 Equações Diferencias Ordinárias de Primeira Ordem Lineares

Uma equação linear de ordem n tem a forma dada pela expressão

$$a_n(x)\frac{d^n y}{dx^n}+a_{n-1}(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}+\cdots+a_1(x)\frac{dy}{dx}+a_0(x)y=b(x),$$

onde $a_n(x)\neq 0$, por hipótese. De forma particular, quando tivermos $n=1$, teremos as equações diferenciais de primeira ordem, ou seja

$$a_1(x)\frac{dy}{dx}+a_0(x)y=b(x),$$

sempre que possível escrever uma equação diferencial de primeira ordem da forma acima podemos dizer que a equação diferencial é linear de primeira ordem. Outra forma bem comum é

$$\frac{dy}{dx}+P(x)y=Q(x) \tag{32}$$

onde

$$P(x)=\frac{a_0(x)}{a_1(x)} \quad Q(x)=\frac{b(x)}{a_1(x)},$$

lembrando que $a_1(x)$ não é identicamente nulo.

Por exemplo:

$$x^2\frac{dy}{dx}+(x^4-2x+1)y=\frac{1}{x},$$

por se encontrar na forma $a_1(x)\frac{dy}{dx}+a_0(x)y=b(x)$, logo é linear. Podendo ser escrita da forma

$$\frac{dy}{dx}+\left(\frac{x^4-2x+1}{x^2}\right)y=\frac{1}{x^3}.$$

É importante salientar que em geral uma equação diferencial linear como a (32) não é exata, já que pode ser reescrita na forma

$$[P(x)y-Q(x)]dx+dy=0,$$

que é uma equação do tipo $M(x,y)dx+N(x,y)dy=0$, onde

$$M(x,y)=P(x)y-Q(x) \quad N(x,y)=1$$

Quando $P(x)=0$, está equação não é exata, pois

$$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y}=P(x) \quad \frac{\partial N(x,y)}{\partial x}=0$$

vemos que o critério $\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial N(x,y)}{\partial x}$ não é satisfeito, logo não é exata. Portanto, de acordo com as expressões $\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = M(x,y)$ e $\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = N(x,y)$, não existe função $f(x,y)$ que verifique

$$df(x,y) = \frac{\partial f(x,y)}{\partial x}dx + \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}dy = M(x,y)dx + N(x,y)dy.$$

No entanto vimos anteriormente o uso do fato integrante I e podemos transformar em

$$I(x,y)[P(x)y - Q(x)]dx + I(x,y)dy = 0,$$

que por hipótese é exata, se o fator existir.

A equação diferencial linear de primeira ordem

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)$$

tem um fator integrante $I(x,y)$ na forma

$$I(x) = I(x,y) = exp[\int P(x)dx],$$

sua solução é expressa por

$$y(x) = \frac{1}{I(x)}[\int I(x)Q(x)dx + c],$$

onde c é uma constante de integração.

Vejamos agora um exemplo. Considere a a equação diferencial

$$x\frac{dy}{dx} - 2y = x^3 sen(x),$$

dividindo todo a expressão por x, temos

$$\frac{dy}{dx} - \frac{2}{x}y = x^2 sen(x).$$

Calculando o fator integrante

$$I(x) = I(x,y) = e^{\left[\int P(x)dx\right]}$$
$$I(x) = I(x,y) = e^{\left[\int \frac{-2}{x}dx\right]}$$
$$I(x) = I(x,y) = e^{\left[-2\int \frac{1}{x}dx\right]}$$
$$I(x) = I(x,y) = e^{[-2ln(x)]} = e^{ln(x)^{-2}} = x^{-2}.$$

Como o fator integrante podemos

$$\begin{gathered} y(x) = \frac{1}{I(x)}\left[\int I(x)Q(x)dx + c\right] \\ y(x) = \frac{1}{x^{-2}}\left[\int x^{-2}\cdot x^2 sen(x)dx + c\right] \\ y(x) = \frac{1}{x^{-2}}\left[\int sen(x)dx + c\right] \\ y(x) = x^2\left[-cos(x) + c\right] \\ y(x) = -x^2cos(x) - x^2c. \end{gathered}$$

Com isso terminamos um breve resumo sobre equações diferenciais de primeira ordem, as citadas serão abordadas futuramente em resoluções.

3.3 EQUAÇÕES DIFERENCIAIS ORDINÁRIAS LINEARES DE ORDEM SUPERIOR

Anteriormente discursamos sobre diversos tipos e métodos de resoluções de equações diferenciais de primeira ordem. No entanto, agora nosso foco será equação diferenciais de segunda ordem, pelo fato de sua abrangente aplicação no ramo da física. Tendo como base o que vimos anteriormente, iremos desenvolver novas ideias.

Equações diferenciais ordinárias de ordem n são aquelas que tem sua forma dada por,

$$a_n(x)\frac{d^ny}{dx^n} + a_{n-1}(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \cdots + a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0(x)y = b(x),$$

relembrando que $a_x(x)$ não deve ser identicamente nulo, podendo assim ser nulo para alguns valores de x, mas não para todos. separando dois casos, dependendo do valor de $b(x)$. Temos assim que equações diferencias ordinárias homogêneas de ordem n podem ser colocadas na forma geral,

$$a_n(x)\frac{d^ny}{dx^n} + a_{n-1}(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \cdots + a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0(x)y = 0.$$

Já equações diferencias ordinárias não-homogêneas de ordem n podem ser escritas como

$$a_n(x)\frac{d^ny}{dx^n} + a_{n-1}(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \cdots + a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0(x)y = b(x),$$

agora, obrigatoriamente $b(x) \neq 0$.

Um caso especifico das equações colocadas acima é quando $n = 2$. Com isso temos uma equação diferencial linear de ordem 2. Se ela for homogênea, tem a seguinte estrutura

$$a_2(x)\frac{d^2y}{dx^2} + a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0(x)y = 0,$$

caso seja não-homogênea, a forma é

$$a_2(x)\frac{d^2y}{dx^2} + a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0(x)y = b(x).$$

Podemos ver alguns exemplos de equações diferenciais não-homogênea abaixo, no qual vemos que $b(x) \neq 0$, como

$$\frac{d^4x}{dt^4} - t^3\frac{d^2x}{dt^2} + 5t\frac{dx}{dt} - xt = cos(t)$$

e

$$x\frac{d^2y}{dx^2} + 4x^3\frac{dy}{dx} + 3xy = e^x.$$

Ambas equações acima são não-homogêneas. A primeira é de grau 4 e a segunda de grau 2. A equação homogênea associada a cada uma é

$$\frac{d^4x}{dt^4} - t^3\frac{d^2x}{dt^2} + 5t\frac{dx}{dt} - xt = 0$$

e

$$x\frac{d^2y}{dx^2} + 4x^3\frac{dy}{dx} + 3xy = 0.$$

Iremos focar os estudos na equação diferencial homogênea

$$a_n(x)\frac{d^ny}{dx^n} + a_{n-1}(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \cdots + a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0(x)y = 0$$

3.3.1 Equações Diferencias Homogêneas de Ordem Superior

Não existe uma maneira universal de resolver uma equação diferencial homogênea de ordem n. Do mesmo jeito que não existe receita de bolo para resolver uma equação diferencial de primeira ordem, existe métodos particulares, usados para resolver problemas específicos. Um desses métodos é apropriado às equações em que os coeficientes $a_i(x)$ na equação geral $a_n(x)\frac{d^ny}{dx^n} + a_{n-1}(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \cdots + a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0(x)y = 0$ são constantes numéricas e não funções de x. Esse método será debatido logo mais. Precisamos, porém, debater sobre conceitos de dependência e independência linear em particular.

Dada n funções $f_1(x), f_2(x), ..., f_n(x)$ e n constantes $c_1, c_2, ..., c_n$, a expressão

$$c_1f_1(x) + c_2f_2(x) + \cdots + c_nf_n(x) \tag{33}$$

é denominada combinação linear de $f_1(x), f_2(x), ..., f_n(x)$ como coeficientes $c_1, c_2, ..., c_n$.

Considere uma combinação linear especial de $f_1(x), f_2(x), ..., f_n(x)$, dada por.

$$c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x) + \cdots + c_n f_n(x) = 0 \tag{34}$$

A combinação (34) admite a solução trivial,

$$c_1 = c_2 = ... = c_n = 0. \tag{35}$$

Se essa for a única solução para (34), se diz que as funções $f_1(x), f_2(x), ..., f_n(x)$ formam um conjunto linearmente independente, ou LI. Duas funções são linearmente independente se não forem múltiplas uma da outra.

Quando a combinação linear (34), admite, além da solução (35), alguma outra solução em pelo menos um dos coeficientes c_i seja diferente de zero, o conjunto formado pelas funções $f_1(x), f_2(x), ..., f_n(x)$ é dito linearmente dependente, ou LD. Duas funções são linearmente dependente se forem múltiplas uma da outra.

Uma equação $a_n(x)^n + a_{n-1}(x)^{n-1} + \cdots + a_1(x)^{t'} + a_0(x)y = 0$, onde $a_n, a_{n-1}, \cdots, a_0$ são constantes reais com $a_n \neq 0$, é dita equação diferencial linear homogênea de ordem n. Leve em consideração um conjunto formado pelas funções $f_1(x), f_2(x), \cdots, f_n(x)$ podendo ser linearmente dependente ou independente, tais função vinculadas as equações diferencias, é de suma importância um meio para verificar o tipo de dependência desse conjunto. Para isso utilizaremos o Wronskiano dessas funções, não demonstraremos o motivo da validade de tal método para verificar a dependência, no entanto pode ser consultado nas referências.

Se $f_1(x), f_2(x), \cdots, f_n(x)$, onde cada uma é derivável, então calcularemos seu determinante

$$W(f_1, f_2, \cdots, f_n) = \begin{vmatrix} f_1(x) & f_2(x) & \cdots & f_n(x) \\ f_1'(x) & f_2'(x) & \cdots & f_n'(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f^{n-1}{}_1(x) & f^{n-1}{}_2(x) & \cdots & f^{n-1}{}_n(x) \end{vmatrix}.$$

O determinante acima é chamado de Wronskiano das funções $f_1(x), f_2(x), \cdots, f_n(x)$.

As funções $f_1(x), f_2(x), \cdots, f_n(x)$ são linearmente dependentes em um intervalo, se, e somente se, $W(f_1, f_2, \cdots, f_n) = 0$ para todo x nesse intervalo. Logo, o cálculo do Wronskiano é um critério útil para decidir sobre dependência ou independência linear de funções.

Exemplo: Verificar se as funções $f_1(x) = 1$, $f_2(x) = e^x$, $f_3(x) = cos(x)$, $f_4(x) = sen(x)$ são linearmente dependentes ou independentes. Calculando o Wronskiano, temos

$$W(f_1,f_2,f_3,f_4) = \begin{vmatrix} f_1(x) & f_2(x) & f_3(x) & f_4(x) \\ f_1^{'}(x) & f_2^{'}(x) & f_3^{'}(x) & f_4^{'}(x) \\ f_1^{''}(x) & f_2^{''}(x) & f_3^{''}(x) & f_4^{''}(x) \\ f_1^{'''}(x) & f^{'''}{}_2(x) & f_3^{'''}(x) & f_n^{'''}(x) \end{vmatrix}$$

$$W(f_1,f_2,f_3,f_4) = \begin{vmatrix} 1 & e^x & cos(x) & sen(x) \\ 0 & e^x & -sen(x) & cos(x) \\ 0 & e^x & -cos(x) & -sen(x) \\ 0 & e^x & sen(x) & -cos(x) \end{vmatrix}.$$

Desenvolvendo determinante obtemos que $W(f_1,f_2,f_3,f_4) = 2e^x cos^2 x + 2e^x sen^2 x = 2e^x \neq 0$. Como o Wronskiano das funções é um resultado diferente de zero, vemos que as funções são linearmente independentes. Portanto a equação diferencial tem n soluções linearmente dependente, e a solução geral é dada pela combinação linear das soluções,

$$f(x) = c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x) + c_3 f_3(x) + \cdots + c_n f_n(x),$$

ou seja

$$f(x) = c_1 2e^x cos^2 x + c_2 2e^x sen^2 x,$$

aonde c_1 e c_2 são constantes e não são ambos nulos.

Como já dito no inicio desse tópico, quando os coeficientes $a_i(x)$ na equação são constantes, há um método simples para solução dessas equações. Esse será nosso material de estudo a seguir.

3.3.2 Equações Diferencias com Coeficientes Constantes

Nosso objeto de discussão agora é o método de resolução adequado para equações diferenciais homogêneas lineares com coeficientes constantes, no qual sua forma geral é

$$a_n(x)\frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1}(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \cdots + a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0(x)y = 0,$$

aonde $a_0, a_1, \cdots, a_n$ são constantes reais. Um exemplo de tal equação diferencial é

$$\frac{d^2y}{dx^2} - y = 0,$$

aonde a equação tem ordem 2, $a_2 = 1, a_1 = 0$ e $a_0 = -1$. Reescrevendo

$$\frac{d^2y}{dx^2} = y,$$

aonde se nota que ao se derivar y duas vezes, acaba voltando para função original. Observando os tipos de funções usadas no nosso dia a dia, vemos que existe uma classe de funções que tem essa característica. Funções do tipo $y = e^{mx}$.

Ao substituir na equação, temos

$$\begin{aligned} \frac{d^2y}{dx^2} &= y \\ m^2e^{mx} &= e^{mx} \end{aligned} \quad ,$$

como $e^{mx} \neq 0$, temos que $m^2 = \pm 1$, o que corresponde as soluções

$$\begin{aligned} y_1(x) &= e^x \\ y_2(x) &= e^{-x}. \end{aligned}$$

A solução geral da equação diferencial homogênea de ordem 2 é formada por duas funções LI. a solução geral fica

$$y(x) = c_1e^x + c_2e^{-x},$$

onde c_1 e c_2 são constantes, que podem ser determinadas se houver condições auxiliares.

Utilizando a ideia que foi usada para $y = e^m x$ e expandido até n-enésima derivada e substituindo na equação geral de uma equação diferencial homogênea linear com coeficientes constantes, temos

$$a_n(x)\frac{d^ny}{dx^n} + a_{n-1}(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \cdots + a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0(x)y = 0$$

$$a_nm^ne^{mx} + a_{n-1}m^{n-1}e^{mx} + \cdots + a_1me^{mx} + a_0e^{mx} = 0$$

ou

$$e^{mx}(a_nm^n + a_{n-1}m^{n-1} + \cdots + a_1m + a_0) = 0,$$

como $e^{mx} \neq 0$, podemos escrever

$$(a_nm^n + a_{n-1}m^{n-1} + \cdots + a_1m + a_0) = 0.$$

Agora o nosso problema vai ser obtenção das raízes desse polinômio de grau n, existe três casos a se estudar, raízes reais e distintas, raízes reais e repetidas e raízes complexas, que veremos em seguida.

3.3.2.1 Raízes Reais e Distintas

Se as n raízes da expressão anterior são reais e distintas, logo podem ser representadas da seguinte forma, $m_1, m_2, \cdots, m_n$, e suas soluções são

$$y_1(x) = e^{m_1 x} \quad y_2(x) = e^{m_2 x} \quad \cdots \quad y_1(x) = e^{m_n x},$$

que formam um conjunto LI. A solução geral de

$$a_n(x)\frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1}(x)\frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \cdots + a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0(x)y = 0$$

é

$$y(x) = c_1 e^{m_1 x} + c_2 e^{m_2 x} + \cdots + c_n e^{m_n x}.$$

Considere a equação diferencial

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} - 2y = 0.$$

Supondo que a solução é da forma $y(x) = e^{mx}$, temos

$$\frac{dy}{dx} = me^{mx} \quad \frac{d^2 y}{dx^2} = m^2 e^{mx}.$$

Logo

$$m^2 e^{mx} + me^{mx} - 2e^{mx} = 0$$

ou melhorando

$$m^2 + m - 2 = 0,$$

vemos que as raízes $m_1 = 1$ e $m_2 = -2$. Portanto vemos que as soluções são

$$y_1(x) = e^x \quad y(x) = e^{-2x}$$

que são LI e com isso formam a solução geral

$$y(x) = c_1 e^x + c_2 e^{-2x}.$$

3.3.2.2 Raízes Reais e Repetidas

Analisando o caso em que as raízes são iguais, $m_1 = m_2$, temos uma solução única exponencial, $y_1 = e^{m_1 x}$. Resolvendo a equação $a\frac{d^2y}{dx^2} + b\frac{dy}{dx} + c = 0$, temos

$$m_1 = m_2$$
$$m_1 = -\frac{b}{2a}$$
$$2m_1 = -\frac{b}{a}.$$

Outra solução é dado por

$$y_1 = e^{m_1 x} \int \frac{e^{2m_1 x}}{e^{2m_1 x}} dx = e^{m_1 x} \int dx = xe^{m_1 x}.$$

A solução geral é

$$y = c_1 e^{m_1 x} + c_2 x e^{m_1 x}.$$

No caso geral em que a equação diferencial linear

$$a_n(x)\frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1}(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \cdots + a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0(x)y = 0.$$

Ter raízes $m_1 = m_2, m_3, \cdots, m_n$ como raízes do polinômio $a_n m^n + a_{n-1}m^{n-1} + \cdots + a_1 m + a_0 = 0$, com raízes repetidas sua solução geral será do tipo

$$y = c_1 e^{m_1 x} + c_2 x e^{m_2 x} + c_3 x^2 e^{m_3 x} + \cdots + c_n x^{n-1} e^{m_n x}.$$

Se houver várias raízes duplicadas, repita o processo acima para cada raiz duplicada. Por exemplo, se as raízes da equação característica de uma equação diferencial são $m = 1, 1, 1, -3, -3, 4$, então a solução geral da equação é

$$y = c_1 e^x + c_2 x e^x + c_3 x^2 e^x + d_1 e^{-3x} + d_2 x e^{-3x} + a_1 e^{4x}.$$

Os conjuntos acima são formados por funções LI.

Levando em consideração a equação diferencial

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} + 4y = 0,$$

temos que

$$m^2+m+4=0$$
$$m_1=m_2=2.$$

Sendo assim a solução será

$$y=c_1e^{2x}+c_2xe^{2x}.$$

3.3.2.3 Raízes Complexas

O método utilizado para quando as raízes são complexas é idêntico. Se as raízes complexas forem distintas, segue o caso de raízes reais distintas. Se por acaso aparecer raízes complexas repetidas, segue o método de raízes reais repetidas, com apenas duas diferenças. Uma é que, $m_1=a+bi$ é raiz da equação, $m_2=a-bi$, que é o complexo conjugado, também é raiz, ou seja, ela aparecem em pares.

Se na equação

$$a_n(x)\frac{d^ny}{dx^n}+a_{n-1}(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}+\cdots+a_1(x)\frac{dy}{dx}+a_0(x)y=0.$$

Tivermos $m_1,m_2,m_3,\cdots,m_n$ como raízes do polinômio $a_nm^n+a_{n-1}m^{n-1}+\cdots+a_1m+a_0=0$, com as raízes complexas m_1 e m_2, formalmente esse caso não possui diferença entre ele e o primeiro caso que é sobre raízes distintas.

Logo

$$y(x)=c_1e^{(a+ib)x}+c_2e^{(a-ib)x}.$$

Contudo, na prática preferimos usar funções reais em vez de exponenciais complexas. Para isso usamos a fórmula de Euler:

$$e^{i\theta}=cos\theta+isen\theta,$$

em que θ é um número real qualquer. A partir disso seguimos e

$$e^{ibx}=cos(bx)+isen(bx) \tag{36}$$

$$e^{-ibx}=cos(bx)-isen(bx) \tag{37}$$

usamos $cos(-bx)=cos(bx)$ e $sen(-bx)=sen(bx)$. Note que somando e subtraindo (36) com (37), temos, respectivamente,

$$e^{ibx}+e^{-ibx}=2cos(bx) \quad \text{e} \quad e^{ibx}-e^{-ibx}=-2isen(bx).$$

Uma vez que $c_1e^{(a+ib)x} + c_2e^{(a-ib)x}$ para qualquer c_1 e c_2, as escolhas $c_1 = c_2 = 1$ ou $c_1 = 1$ e $c_2 = -1$, nos dão duas soluções:

$$y_1 = e^{(a+ib)x} + e^{(a-ib)x} \text{ e } y_2 = e^{(a+ib)x} - e^{(a-ib)x}$$
$$y_1 = e^{ax}(e^{ibx} + e^{ibx}) = 2e^{ax}cos(bx)$$
$$y_2 = e^{ax}(e^{ibx} - e^{ibx}) = 2e^{ax}isen(bx).$$

Os últimos resultados nos mostram que $e^{ax}cos(bx)$ e $e^{ax}sen(bx)$ são soluções da EDO. Logo a solução geral será

$$y = c_1e^{ax}cos(bx) + c_2e^{ax}sen(bx) = e^{ax}(c_1cos(bx) + c_2sen(bx)).$$

Considere a seguinte EDO $3y''' + 5y'' + 10y' - 4y$

temos que

$$3m^3 + 5m^2 + 10m - 4$$

$$m_1 = \frac{1}{3} \quad m_2 = -1 + \sqrt{3}i \quad \text{e } m_3 = -1 - \sqrt{3}i.$$

Com $a = 0$ e $b = 2$ a solução será

$$y = c_1e^{\frac{x}{3}}\left[c_2cos\sqrt{3} + c_2sen\sqrt{3}x\right].$$

3.4 SOLUÇÕES DE EQUAÇÕES DIFERENCIAIS ORDINÁRIAS LINEARES DE ORDEM SUPERIOR VIA SÉRIES

Como mencionado anteriormente, não existe uma forma universal de resolver equações diferenciais lineares de ordem n, existem métodos específicos para situações específicas. Estudaremos detalhadamente equações lineares com coeficientes constantes, e no capítulo anterior vimos diversas aplicações envolvendo essas equações. Nem sempre é possível descrever ou modelar um sistema por equações com coeficientes constantes, agora temos que estudar algumas equações diferenciais com coeficientes variáveis, os quais serão funções das variáveis independentes. O método de solução dessas equações é mais específico do que as equações diferenciais anteriores. Para isso será utilizados alguns conceitos de séries que foram discutidos para que possamos continuar a resolver equações diferenciais, como séries numéricas, potências série conceitos de números, somas de séries, séries de Taylor e Maclaurin e alguns dos testes de convergência já mencionados.

3.4.1 Método de Séries

No estudo vamos nos centralizar na equação diferencial de segunda ordem homogênea,

$$a_0(x)\frac{d^2y}{dx^2}+a_1(x)\frac{dy}{dx}+a_2(x)y=0$$

que agora tem coeficientes variáveis, mesmo a ideia sendo geral, podendo ser usada para equações diferenciais de qualquer ordem. Dado um ponto qualquer x_0, queremos encontrar pelo menos uma solução $y(x)$ em torno do ponto x_0, sendo que $y(x)$ deve ser da forma de uma série de potências

$$y(x)=\sum_n^\infty a_n(x-x_0)^n$$

A expressão acima é uma série, mas não é necessariamente uma série de Taylor de alguma função $f(x)$. Para prosseguir precisamos reescrever a equação diferencial na forma normal

$$\frac{d^2y}{dx^2}+P_1(x)\frac{dy}{dx}+P_2(x)y=0$$

onde

$$P_1(x)=\frac{a_1(x)}{a_0(x)} \quad P_2(x)=\frac{a_2(x)}{a_0(x)}$$

Veja que $P_1(x)$ e $P_2(x)$ são funções racionais, e como é sabido não é possível escrever a série de Taylor de uma função racional em torno dos pontos x_r que são raízes do denominador. Isto tem que ser levado em consideração se quisermos encontrar a solução na forma apresentada acima. O primeiro passo é analisar a natureza dos pontos x_r, que devem ser classificados conforme abaixo.

Se as funções $P_1(x)$ e $P_2(x)$ são ambas analíticas em x_r este é um ponto ordinário. Se pelo menos uma das funções $P_1(x)$ e $P_2(x)$ não é analítica em x_r, este ponto é um ponto singular.

Por exemplo, na equação diferencial

$$\frac{d^2y}{dx^2}+x\frac{dy}{dx}+(x^2+5)y=0 \tag{38}$$

Temos que

$$P_1(x)=x \quad P_2(x)=x^2+5$$

são polinômios e não possuem nenhum ponto singular. Todos os pontos são ordinários. Já na equação diferencial

$$\frac{d^2y}{dx^2}+\frac{1}{x-2}\frac{dy}{dx}+(x^2+-4x+5)y=0 \tag{39}$$

onde

$$P_1(x)=\tfrac{1}{x-2} \quad P_2(x)=x^2-4x+5$$

tem um ponto singular em $x_r=2$, mesmo $P_2(x)$ sendo analítica em todos os pontos.

Necessitamos distinguir pontos ordinários dos singulares, pois a obtenção da solução depende dessa diferenciação. No caso dos pontos ordinários, o teorema a seguir estabelece um fato importante.

Teorema 1 (Existência de soluções para pontos ordinários) . *Existência de soluções para pontos ordinários. Se x_0 for um ponto ordinário, então a equação diferencial $\frac{d^2y}{dx^2}+P_1(x)\frac{dy}{dx}+P_2(x)y=0$ tem duas soluções diferentes, linearmente independentes, dadas por série na forma*

$$y(x)=\textstyle\sum_n^\infty a_n(x-x_0)^n$$

Se x_0 for um ponto ordinário de $\frac{d^2y}{dx^2}+P_1(x)\frac{dy}{dx}+P_2(x)y=0$ é possível pelo meio de séries encontrar duas soluções LI em torno de x_0 que formam a solução geral da equação diferencial. O que diferencia as duas são os valores dos coeficientes a_n.

Como visto nos dois exemplos anteriores, na equação diferencial (38) não é encontrado nenhum ponto singular, logo podemos encontrar a solução para qualquer valor de x_0. No entanto, a equação (39) tem um ponto singular em $x_r=2$. A partir disso sabemos que a equação tem duas soluções LI para $x_r\neq 2$. Iremo expor o método de resolução para pontos ordinários e consideraremos nossa equação,

$$\tfrac{d^2y}{dx^2}+x\tfrac{dy}{dx}+(x^2+5)y=0$$

como já foi falado, a expressão não possui nenhum ponto singular e iremos encontrar a solução em torno do ponto $x_0=0$, na forma

$$y(x)=\textstyle\sum_{n=0}^\infty a_nx^n$$

Nosso objetivo é determinar o coeficiente a_n. Se a expressão acima é uma solução para uma equação, então a sua derivada também é, a partir da qual podemos encontrar uma equação e montar uma equação, à semelhança do que acontece com a determinação de equações diferenciais com coeficientes constantes através do método dos coeficientes, que nos permite obter a_n. Calculando primeiro a primeira derivada da solução, temos

$$\frac{dy}{dx} = \sum_{n=0}^{\infty} n a_n x^{n-1}$$

Observe que no início da soma ocorre agora n = 1, portanto, se adicionarmos um limite inferior ao índice de soma. No método das séries, isso sempre acontece com todas as derivadas geradas. Para ver isso, consideremos explicitamente alguns termos da soma

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots$$

Ao derivar

$$y'(x) = \frac{dy}{dx} = a_1 + 2a_2 x + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$$

Pode-se ver que o termo a_0 é uma constante e se anula quando derivado, resultando no primeiro termo da soma de $y'(x)$ sendo a_1. Deriva novamente

$$y''(x) = \frac{d^2y}{dx^2} = 2a_2 + \cdots = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2}$$

Da mesma forma, o limite inferior do índice somador deve ser numerado 1. Substituindo as derivadas e função na expressão inicial, temos

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} + x \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} + (x^2+5) \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0$$

ou melhorando

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} + \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^n + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+2} + 5 \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0$$

Veja que a variável x, na soma, não será elevada à mesma potência, se fosse, poderíamos tentar combinar os termos em um único somatório. Então, para continuar, primeiro precisamos elevar x ao mesmo expoente em cada somatório. Portanto, devemos reescrever o primeiro e o terceiro termos da equação, para isso, fazendo uma troca de variável. O nosso primeiro termo se trata de

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2}$$

Nosso objetivo é fazer com que em todos os termos a variável x esteja elevada a n para viabilizar a solução. No primeiro termo, como será necessário fazer uma toca de variável, chamaremos $n = m + 2$. Com isso

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-2}$$
$$\sum_{m+2=2}^{\infty}(m+2)(m+2-1)a_{m+2}x^{m+2-2}$$
$$\sum_{m=0}^{\infty}(m+2)(m+1)a_{m+2}x^{m}$$

Temos uma série em m, e não mais em n. Os índices n e m, e qualquer índice em toda somatória são denominadas de variáveis "mudas", assim, indicando apenas onde inicia e termina o somatório, podendo ser substituído um pelo outro sempre que necessário. Veja que, se trocarmos m por n o valor do somatório será igual se substituirmos os valores de cada variável a partir do valor inicial indicado pela somatória. Dito isso agora podemos voltar a usar no lugar de m a variável n pois tanto faz a variável o valor será o mesmo, resultando,

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)a_{n+2}x^{n}$$

Fazendo o mesmo procedimento para o terceiro termo, e usando $n = m - 2$, temos,

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+2}$$
$$\sum_{m-2=0}^{\infty} a_{m-2} x^{m-2+2}$$
$$\sum_{m=2}^{\infty} a_{m-2} x^{m}$$

como já explicado antes podemos trocar o índice m por n agora, e com isso o terceiro termo fica

$$\sum_{n=2}^{\infty} a_{n-2} x^{n}$$

Agora voltamos para equação inicial

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} + \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^n + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+2} + 5\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

substituindo o primeiro e terceiro termo

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)a_{n+2}x^{n} + \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^n + \sum_{n=2}^{\infty} a_{n-2} x^{n} + 5\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0$$

Na equação, vemos que agora a variável x é elevada à mesma potência em cada soma. Este recurso é essencial e não podemos continuar sem ele. Outro fato importante a ser observado é que o n inicial das somas é diferente. Dois dos somatórios começam com $n = 0$, outro com $n=1$ e a última com $n=2$. Notamos que a soma começando pelo maior número é quando $n=2$ e a partir daí desenvolveremos os demais somatórios até obtermos um valor de $n=2$. É extremamente importante que todos os somatórios comecem com o mesmo valor de n. Portanto teremos que desenvolver o primeiro, segundo e quarto somatório até os valores de n serem iguais, que na ocasião é $n=2$. Fazendo para a primeira,

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)a_{n+2}x^n = 2a_2+6a_3x+\sum_{n=2}^{\infty}(n+2)(n+1)a_{n+2}x^n$$

agora, fazendo para a segunda

$$\sum_{n=1}^{\infty} na_nx^n = a_1x+\sum_{n=2}^{\infty} na_nx^n$$

Por ultimo, mas não menos importante o quarto somatório

$$5\sum_{n=0}^{\infty} a_nx^n = 5a_0+5a_1x+5\sum_{n=2}^{\infty} a_nx^n$$

Com essa expressões, podemos

$$2a_2+6a_3x+\sum_{n=2}^{\infty}(n+2)(n+1)a_{n+2}x^n+a_1x+\sum_{n=2}^{\infty} na_nx^n+\sum_{n=2}^{\infty} a_{n-2}x^n+5a_0+5a_1x+ 5\sum_{n=2}^{\infty} a_nx^n$$

reescrevendo a equação em função as potências de x e juntando os somatórios ja que agora eles se iniciam no mesmo valor de n temos,

$$(2a_2+5a_0)+(6a_3+6a_1)x+\sum_{n=2}^{\infty}[(n+2)(n+1)a_{n+2}+(n+5)a_n+a_{n-2}]x^n = 0$$

Esta equação estabelece a igualdade dos polinômios, com o polinômio nulo no lado direito. Se quisermos que a equação seja válida, devemos verificar todas as potências de x. Portanto, igualamos os coeficientes dos polinômios, ou seja, encontramos

$$5a_0+2a_2 = 0$$
$$a_2 = \frac{-5}{2}a_0$$

com o polinômio x fazemos o mesmo

$$6a_1+6a_3 = 0$$
$$a_1 = -a_3$$

a condição nos permite calcular a_{n+2} em termos de a_n e a_{n-2}, com o polinômio de x^n, como pode ser visto

$$[(n+2)(n+1)a_{n+2}+(n+5)a_n+a_{n-2}]=0$$
$$(n+2)(n+1)a_{n+2}=-[(n+5)a_n+a_{n-2}]$$

Calculando em função de a_n+2

$$a_{n+2}=-\frac{(n+5)a_n+a_{n-2}}{(n+2)(n+1)}, \text{ para } n\geq 0$$

Assim, para $n=2$, temos

$$a_{2+2}=-\frac{(2+5)a_2+a_{2-2}}{(2+2)(2+1)}$$
$$a_4=-\frac{(7)a_2+a_0}{12}$$

só que já sabemos o valor de a_2, logo

$$a_{2+2}=-\frac{(2+5)a_2+a_{2-2}}{(2+2)(2+1)}$$
$$a_4=-\frac{(7)\left[-\frac{5}{2}a_0\right]+a_0}{12}$$
$$a_4=-a_0\frac{\left[-\frac{35}{2}\right]+1}{12}$$
$$a_4=-a_0\frac{\left[-\frac{33}{2}\right]}{12}$$

logo

$$a_4=\frac{33}{24}a_0$$

Quando $n=3$,

$$a_{3+2}=-\frac{(3+5)a_3+a_{3-2}}{(3+2)(3+1)}$$
$$a_5=-\frac{(8)a_3+a_1}{(5)(4)}$$

Só que $a_3=-a_1$ já sabemos o valor

$$a_5=-\frac{-8a_1+a_1}{(5)(4)}$$
$$a_5=-\frac{-8a_1+a_1}{20}$$
$$a_5=-\frac{-7a_1}{20}$$
$$a_5=\frac{7}{20}a_1$$

Podemos continuar se quisermos, então encontraríamos para coeficientes com n par em termos de a_0 e n ímpar em termos de a_1. Esse comportamento é chamado de recorrência. Colocando os valores encontrados na solução

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$
$$y(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4 + a_5 x^5 + \cdots$$
$$y(x) = a_0 + a_1 x + -\tfrac{5}{2} a_0 x^2 - a_1 x^3 + \tfrac{33}{24} a_0 x^4 + \tfrac{7}{20} a_1 x^5 + \cdots$$

colocando em evidencia a_0 e a_1

$$y(x) = a_0 \left[1 - \tfrac{5}{2}x^2 + \tfrac{33}{24}x^4 + \cdots\right] + a_1 \left[x - x^3 + \tfrac{7}{20}x^5 + \cdots\right]$$

que nada mais é a solução em série da equação diferencial

$$\tfrac{d^2y}{dx^2} + x\tfrac{dy}{dx} + (x^2+5)y = 0$$

Ela é formada por duas soluções LI, que são

$$y_1(x) = 1 - \tfrac{5}{2}x^2 + \tfrac{33}{24}x^4 + \cdots \quad y_2(x) = x - x^3 + \tfrac{7}{20}x^5 + \cdots$$

juntas com um coeficiente para forma uma solução geral

$$y(x) = a_1 y_1(x) + a_2 y_2(x)$$

Notemos, que quando encontramos a solução em termos de uma série para um ponto ordinário $x_0(x_0 = 0$, nesse caso), obtemos uma solução geral da equação diferencial, formada pela combinação linear de duas soluções LI.

4 OSCILADORES HARMÔNICOS

Há um grande número e variedade de fenômenos físicos que podem ser bem representados por equações diferenciais de segunda ordem, especialmente equações com coeficientes constantes. Na verdade, a maioria das equações diferenciais que descrevem situações físicas são, no máximo, de segunda ordem, ordinárias ou parciais (VALVERDE; OLIVEIRA, 2010).

O fenômeno que será estudado neste capítulo é o Oscilador Harmônico Simples (OHS), sistema ideal de grande importância na física e na matemática. É uma primeira aproximação para modelar dinâmica de sistemas com massa-mola, pêndulos simples, sistemas dinâmicos com configurações próximas do equilíbrio, oscilações de circuitos, interações moleculares, dentre outros.

O exemplo de Osciladores Harmônicos simples foi escolhido a partir das aplicações fornecidas no livro de Kleber Daum machado (MACHADO, 2019) e do artigo (DINIZ, 2023). A ideia neste capítulo é apresentar uma aplicação de fácil entendimento que poderá ser utilizado como um exemplo inicial para solução de equações diferenciais por meio de série de potência.

4.1 CONCEITOS BÁSICOS SOBRE MECÂNICA CLÁSSICA

A mecânica clássica é baseada na segunda lei de Newton, ela diz que a força resultante (F) é dada pela derivada da posição (p) em relação ao tempo (t), ou seja

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} \, , \tag{40}$$

onde as medições são feitas em um referencial inercial. Com a posição sendo igual a massa (m) vezes a velocidade (v).

$$\vec{p} = m\vec{v},$$

com isso podemos substituir a equação (40)

$$\begin{aligned} \vec{F} &= \frac{d}{dt}(m\vec{v}) \\ \vec{F} &= m\frac{d\vec{v}}{dt} + \vec{v}\frac{dm}{dt}. \end{aligned}$$

Considerando os sistemas no qual a massa m é uma constante, ou seja $\frac{dm}{dt} = 0$.

$$\vec{F} = m\frac{d\vec{v}}{dt} \tag{41}$$

$$\frac{\vec{F}}{m} = \frac{d\vec{v}}{dt}.$$

Com isso a aceleração é dado por

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}$$

Logo, a partir da equação (41), temos

$$\vec{F} = m\vec{a}. \tag{42}$$

A equação (42) é a mais conhecida e mais simples forma da segunda lei de Newton. No entanto a velocidade é a derivada da posição x em relação a derivada do tempo

$$\vec{v} = \frac{d\vec{x}}{dt},$$

com isso podemos reescrever a aceleração como:

$$\vec{a} = \frac{d}{dt}\frac{d\vec{x}}{dt} = \frac{d^2\vec{x}}{dt^2}.$$

Dai a expressão para a força resultante apresentada na equação (42) será :

$$\vec{F} = m\frac{d^2\vec{x}}{dt^2},$$

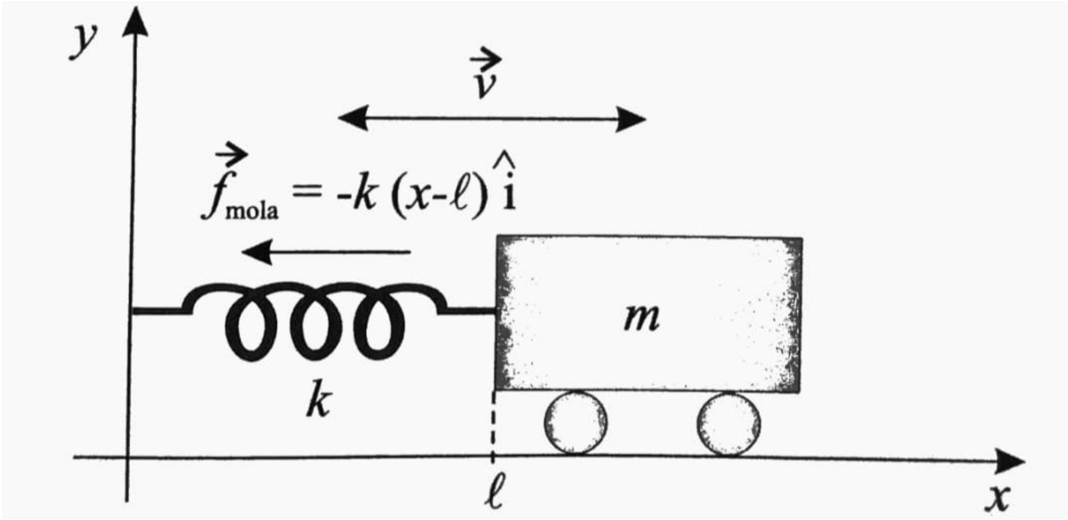
que é uma equação diferencial de segunda ordem.

4.2 OSCILADOR HARMÔNICO SIMPLES

O sistema oscilante mais conhecido, mais usual e mais analisado é o oscilador harmônico simples (OHS). Uma possível representação deste sistema é apresentada na figura 4.1, como um sistema massa-mola.

Esta imagem representa um OHS formado por um sistema massa-mola constituído por um objeto de massa m (excluindo rodas) que se move sem atrito cinético sobre uma superfície representada pelo eixo x. O objeto está conectado a uma mola cuja massa, por

Figura 4.1 – Oscilador harmônico simples representado por um sistema massa-mola



Fonte: Disponível em (MACHADO, 2019, p. 361)

suposição, é muito menor, ou seja, insignificante em comparação com a massa m do objeto. A outra extremidade da mola está, por sua vez, ligada a um ponto fixo, representado no desenho pela parede no eixo y. Em repouso, o comprimento da mola é l. Além disso, para eliminar a resistência do ar, podemos colocar o sistema em uma área onde foi criado vácuo.

Segundo Kleber Daum Machado (MACHADO, 2019), Robert Hooke demonstrou experimentalmente que quando uma mola é comprimida ou esticada por um meio externo, ela exerce uma força sobre esse meio. A direção desta força depende da direção da deformação: quando a mola é comprimida pelo meio, ela o empurra, e quando a mola é esticada, ela o puxa, ou seja, a mola sempre tende a retornar ao seu comprimento natural l . Este tipo de força é chamada de força restauradora. Se a deformação não for muito grande, o módulo da força exercida pela mola é proporcional à deformação $|x-l|$ ou ao alongamento, ou seja, em módulo.

$$f_{mola} \propto |x-l|$$

Essa razão pode ser convertida em uma equação por uma constante k que é única para cada mola, chamada de constante elástica da mola, e assim, já introduzindo o caráter vetorial.

$$\vec{f}_{mola} = -k(x-l)\hat{\imath},$$

O sinal negativo é usado para representar que existe uma força restauradora [1].

[1] Chama-se a força que atua sobre um corpo que descreve um movimento harmônico simples de

Essa expressão é chamada de Lei de Hooke.

No sistema mostrado na figura 4.1, a única força que atua sobre a massa m é a força restauradora da mola. Quando o sistema parte do ponto de equilíbrio $x = l$, a mola se deforma. Atua sobre a massa, empurrando ou puxando dependendo da deformação. Portanto, a massa m passa a oscilar em torno de $x = l$, caso em que temos um oscilador harmônico simples. Para este OHS, a segunda lei de Newton torna-se.

$$\vec{F} = \vec{f}mola = m\frac{d^2x}{dt^2}\hat{\imath}, \tag{43}$$

Observe que o deslocamento é na direção do eixo x portanto a componente vetorial, se dá na direção de î, Substituindo $\vec{f}_{mola} = -k(x-l)\hat{\imath}$, na expressão (43) temos,

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -k(x-l)$$

que manipulando algebricamente, se torna

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + k(x-l) = 0, \tag{44}$$

o que gera uma equação diferencial de segunda ordem. Com isso podemos fazer uma troca de variável

$$X = x - l \tag{45}$$

de forma que,

$$\frac{dX}{dt} = \frac{d}{dt}(x-l) = \frac{dx}{dt}$$

e

$$\frac{d^2X}{dt^2} = \frac{d^2x}{dt^2}. \tag{46}$$

Utilizando a mudança de variável da equação (45) na equação (44) e substituindo a equação (46), temos:

$$m\frac{d^2X}{dt^2} + kX = 0, \tag{47}$$

dividindo toda expressão (47) por m,

$$\frac{d^2X}{dt^2} + \frac{k}{m}X = 0, \tag{48}$$

força restauradora, pois ela atua de modo a garantir o prosseguimento das oscilações, restaurando o movimento anterior. Sempre que a partícula passa pela posição central, a força tem o efeito de retardá-la para depois poder trazê-la de volta.

nos deparamos com uma razão especial que é $\frac{k}{m}$, que nada mais é que a frequência natural de oscilação ao quadrado, que tem a seguinte forma

$$w_o^2 = \frac{k}{m}, \tag{49}$$

substituindo a expressão (49) na equação (48), temos a expressão que define esse fenômeno

$$\frac{d^2X}{dt^2} + w_o^2 X = 0. \tag{50}$$

Observe que (50) é uma equação diferencial linear com coeficientes constantes e pode ser resolvida usando o método de soluções de EDOs por meio de Séries de Potências, apresentado no capítulo 3. A obtenção da equação que define o o problema foi fundamentado através dos manuscritos de (MACHADO, 2019), já a resolução que foi desenvolvida pelo autor.

4.3 RESOLUÇÃO DO OSCILADOR HARMÔNICO SIMPLES POR MEIO DE SÉRIES DE POTÊNCIAS

Durante o decorrer dessa seção viemos debatendo sobre conceitos básicos e necessários para a resolução do Oscilador Harmônico Simples. Anteriormente vimos a obtenção da expressão que representa esse fenômeno, notamos que se trata de uma equação diferencial linear com coeficientes contantes e a partir disso veremos se é possível usar séries de potências para solucionar esse problema. A solução do problema baseia-se nos conceitos e resultados apresentados no capítulos 2 e 3.

Como já vimos a equação que representa essa aplicação é

$$\frac{d^2X}{dt^2} + w_o^2 X = 0,$$

a equação (50) não tem pontos singulares, somente ordinários, pois a sua maior derivada não tem uma função que gera singularidade [2]

Quando isso ocorre, podemos dizer que

$$x(t) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n t^n = C_0 + C_1 t + C_2 t^2 + C_3 t^3 + C_4 t^4 + C_5 t^5 \cdots, \tag{51}$$

[2] Considerando a equação diferencial de segunda ordem $a_2(x)y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0$. Como $a_1(x)$, $a_2(x)$, $a_3(x)$, iremos propor que exista solução na forma de série de potências $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n(x - x_0)^n$ centrada em x_0 e seja convergente quando $|x - x_0| < R$, onde R é o raio de convergência da série. De forma que seja possível encontrar os valores do coeficientes de $C_n \forall n \in \mathbb{N}$. Se o termo que acompanha a segunda derivada for diferente de zero quando substituirmos x_0 em x, ou seja $a_2(x_0) \neq 0$ é dito que o ponto é ordinário, caso se $a_2(x_0) = 0$ é dito que o ponto é singular, como afirmado por (VIEIRA, Marcelo Lopes, 2020).

como vemos a equação (51) é uma série simples na variável t. Derivando a função até sua segunda derivada, temos

$$x'(t) = \sum_{n=1}^{\infty} nC_n t^{n-1}; \tag{52}$$

$$x''(t) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)C_n t^{n-2}. \tag{53}$$

Fazendo as devidas substituições das expressões (52) e (53) na expressão (50)

$$\begin{aligned} \frac{d^2X}{dt^2} + w_o^2 X &= 0; \\ \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)C_n t^{n-2} + w_o^2 \sum_{n=0}^{\infty} C_n t^n &= 0. \end{aligned}$$

Para chegarmos em uma relação de recorrência temos que unir os somatórios, só será possível através de uma troca de variável no somatório (53). Para isso teremos que usar $p = n-2 \Rightarrow n = p+2$, com isso

$$\begin{aligned} \sum_{p+2=2}^{\infty} (p+2)(p+2-1)C_{p+2} t^{p+2-2} + w_o^2 \sum_{n=0}^{\infty} C_n t^n &= 0; \\ \sum_{p=0}^{\infty} (p+2)(p+1)C_{p+2} t^p + w_o^2 \sum_{n=0}^{\infty} C_n t^n &= 0. \end{aligned}$$

Note que agora ambos os somatórios iniciam em zero. Dessa forma podemos junta-los, e podemos voltar a chamar de $p = n$. Portanto

$$\sum_{n=0}^{\infty} [(n+2)(n+1)C_{n+2} t^n + w_o^2 C_n t^n] = 0;$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} [(n+2)(n+1)C_{n+2} + w_o^2 C_n] t^n = 0. \tag{54}$$

Para a expressão (54) ser satisfeita os termos dentre colchetes tem que ser igual a zero, logo:

$$[(n+2)(n+1)C_{n+2} + w_o^2 C_n] = 0$$

$$C_{n+2} = \frac{-w_o^2 C_n}{(n+2)(n+1)}$$

Com isso temos nossa relação de recorrência que nos fornece quem deve ser os índices da minha solução proposta , vai nos fornecer os valores de $C_2, C_3, C_4, C_5, \cdots, C_n$ em função de C_0 e C_1. Parar encontrar esses coeficientes temos que substituir os valores através da contagem do somatório inicial.

	$C_{n+2} = \frac{-w_o^2 c_n}{(n+2)(n+1)}$
$n = 0 \Rightarrow$	$C_2 = \frac{-w_0^2 C_0}{(0+2)(0+1)} = \frac{-w_0^2 C_0}{2\cdot 1} = \frac{-w_0^2}{2!} C_0$
$n = 1 \Rightarrow$	$C_3 = \frac{-w_0^2 C_1}{(1+2)(1+1)} = \frac{-w_0^2 C_1}{3\cdot 2} = \frac{-w_0^2}{3!} C_1$
$n = 2 \Rightarrow$	$C_4 = \frac{-w_0^2 C_2}{(2+2)(2+1)} = \frac{-w_0^2}{4\cdot 3} C_2 = \frac{-w_0^2}{12} \cdot \frac{-w_0^2}{2} C_0 = \frac{w_0^4}{4!} C_0$
$n = 3 \Rightarrow$	$C_5 = \frac{-w_0^2 C_3}{(3+2)(3+1)} = \frac{-w_0^2}{5\cdot 4} C_3 = \frac{-w_0^2}{5\cdot 4} \cdot \frac{-w_0^2}{3\cdot 2} C_1 = \frac{w_0^4}{5!} C_1$
$n = 4 \Rightarrow$	$C_6 = \frac{-w_0^2}{(6)(5)} C_4 = \frac{-w_0^2}{6\cdot 5} \cdot \frac{w_0^4}{24} C_0 = \frac{-w_0^6}{6!} C_0$
$n = 5 \Rightarrow$	$C_7 = \frac{-w_0^2}{7\cdot 6} C_5 = \frac{-w_0^2}{7\cdot 6} \cdot \frac{w_0^4}{120} C_1 = \frac{-w_0^6}{7!} C_1$
	$(\vdots)$

Logo a solução da equação (51)

$$
\begin{aligned}
x(t) &= \sum_{n=0}^{\infty} C_n t^n = C_0 + C_1 t + C_2 t^2 + C_3 t^3 + C_4 t^4 + C_5 t^5 + \cdots \\
x(t) &= C_0 + C_1 t - C_0 \frac{w_0^2 t^2}{2!} - C_1 \frac{w_0^2 t^3}{3!} + C_0 \frac{w_0^4 t^4}{4!} + C_1 \frac{w_0^4 t^5}{5!} + \cdots
\end{aligned}
$$

substituindo os índices e depois colocando C_0 em evidencia, temos

$$
x(t) = C_0 \left(1 - \frac{(w_o t)^2}{2!} + \frac{(w_o t)^4}{4!} + \cdots \right)
$$

fazendo o mesmo para C_1

$$
x(t) = C_1 \left(t - \frac{w_0^2 t^3}{3!} + \frac{w_o^4 t^5}{5!} + \cdots \right) \tag{55}
$$

desse modo

$$
x(t) = C_0 \left(1 - \frac{(w_o t)^2}{2!} + \frac{(w_o t)^4}{4!} + \cdots \right) + C_1 \left(t - \frac{w_0^2 t^3}{3!} + \frac{w_o^4 t^5}{5!} + \cdots \right) \tag{56}
$$

multiplicando a expressão (55) por $\frac{w_0}{w_0}$, temos

$$
\begin{aligned}
x(t) &= C_0\left(1-\frac{(w_o t)^2}{2!}+\frac{(w_o t)^4}{4!}+\cdots\right)+C_1\left(t-\frac{w_0^2 t^3}{3!}+\frac{w_o^4 t^5}{5!}+\cdots\right)\frac{w_0}{w_0}\\
x(t) &= C_0\left(1-\frac{(w_o t)^2}{2!}+\frac{(w_o t)^4}{4!}+\cdots\right)+\frac{C_1}{w_0}\left(w_0 t-\frac{(w_0 t)^3}{3!}+\frac{(w_o t)^5}{5!}+\cdots\right)\\
x(t) &= C_0\left(\underbrace{1-\frac{(w_o t)^2}{2!}+\frac{(w_o t)^4}{4!}+\cdots}_{\cos(w_0 t)}\right)+\frac{C_1}{w_0}\left(\underbrace{w_0 t-\frac{(w_0 t)^3}{3!}+\frac{(w_o t)^5}{5!}+\cdots}_{sen(w_0 t)}\right).
\end{aligned}
$$

Se prestarmos atenção, notaremos que a primeira parcela da expressão acima é a representação da série cosseno de Taylor e a segunda do seno que foram abordadas anteriormente nos exemplos 2.4 e 2.5. Dessa maneira podemos escrever a solução por meio do método de série de potência como

$$x(t) = C_0\cos(w_0 t)+\frac{C_1}{w_0}sen(w_0 t),$$

que reafirma para a gente que a solução de um oscilador harmônico simples é a combinação de senos e cossenos da forma

$$x(t) = A\cos(w_0 t)+Bsen(w_0 t).$$

Apesar de não ser a maneira mais adequada para a solução, sendo essa atribuída ao método da equação característica, o problema pode ser resolvido através de série de potências, mostrando que tal procedimento é viável para sua solução.

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

O presente trabalho foi uma pesquisa de natureza básica que teve como objetivo principal compreender como é realizada a solução de equações diferenciais ordinárias por meio de séries de potências. Para isto realizamos um estudo dos arcabouço teóricos necessários ao desenvolvimento deste método de solução.

A escolha da aplicação, Osciladores Harmônicos Simples, e o desenvolvimento de sua solução pelo autor demonstra que o objetivo da compreensão de como este método funciona foi alcançado.

Além disso, este trabalho pode vir a auxiliar a comunidade em geral (estudantes, professores e interessados na área) no entendimento do método, podendo aplicar a outros modelos de EDOs.

Um detalhe importante neste trabalho é que ele não se detém apenas a parte algébrica, mas faz um resgate histórico do desenvolvimento das Séries e das EDOs e de como as duas se relacionam.

A metodologia escolhida foi adequada, observando que diante da aplicação escolhida, observamos que muitos dos conceitos estudados foram desnecessários à aplicação e outros novos tiveram que ser abordados, mas podemos compreender que esse é o caminho da pesquisa científica, porque o conhecimento adquirido propicia a maturidade para a inclusão ou exclusão de conceitos.

Diante do exposto podemos afirmar que nossa hipótese inicial que é possível a compreensão do tema soluções de equações diferenciais por meio de série de potencia foi confirmada.

Pessoalmente esse trabalho me permitiu aprofundar, meus conhecimentos de Cálculo, de EDO, de Historia da Matemática, além de desenvolver minha maturidade como um estudante e plantando em mim a semente de um pesquisador.

Com base neste trabalho é possível estudar outras aplicações das equações diferenciais Ordinárias oriundas da mecânica, química, biologia, etc. Ou ainda fazendo comparações de diferentes métodos para solução de um problema específico.

Além disso, este material pode ser utilizado, para demonstrar uma das utilidades do estudo de Séries e Sequencia no disciplina de Cálculo Diferencial e Integral.

REFERÊNCIAS

BOYCE, W.; DIPRIMA, R. Equações diferenciais elementares e problemas de valores de contorno. **LTC Editora**, 2006.

BOYER, C. B. História da matemática.(2ª edição). **Editora Edgard Blucher Ltda, Brasil**, 1996.

BOYER, C. B.; MERZBACH, U. C. **História da matemática**. [S.l.]: Editora Blucher, 2019.

CAPRA, F. **A teia da vida**. [S.l.]: São Paulo: Cultrix, 1996. v. 44.

DINIZ, E. M. Doze maneiras de resolver o oscilador harmônico simples. **Revista Brasileira de Ensino de Física**, SciELO Brasil, v. 45, p. e20230054, 2023.

D'AMBROSIO, U. Euler, um matemático multifacetado. **Revista Brasileira de História da Matemática**, v. 9, n. 17, p. 13–31, 2009.

EVES, H. W. **Introdução à história da matemática**. [S.l.]: Unicamp, 1995.

MACHADO, K. D. **Equações diferenciais aplicadas à física**. [S.l.]: TODAPALAVRA, 2019.

MOL, R. S. Introdução à história da matemática. **Belo Horizonte: CAED-UFMG**, p. 17, 2013.

MUNEM, M. A.; FOULIS, D. J. Calculo–vol. ii. **Ed. Guanabara Dois SA**, 1982.

O'Connor, J.J and Robertson, E. F. **Daniel Bernoulli**. 1998. Disponível em: <https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Bernoulli_Daniel/>. Acesso em: 25 de maio 2023.

OLIVERO, M. **História da matemática através de problemas**. [S.l.]: UFF/CEP–EB, 2010. v. 1.

PRODANOV, C. C.; FREITAS, E. C. D. **Metodologia do trabalho científico: métodos e técnicas da pesquisa e do trabalho acadêmico-2ª Edição**. [S.l.]: Editora Feevale, 2013.

PUPIN, J. R.; SILVA, K. S.; CARBONE, V. L. Introdução às séries e transformadas de fourier e aplicações no processamento de sinais e imagens. **Trabalho (Conclusao de Curso)-Universidade Federal de Sao Carlos, Sao Carlos**, 2011.

REAIS, A. poesia dos N. 15º. seminário nacional de história da ciência e da tecnologia.

SCHICKLING, E. et al. A convergência de sequências e séries sob uma perspectiva histórica: de zenão a cauchy. Universidade Federal da Grande Dourados, 2019.

SILVA, E. O. d. et al. Fórmula de taylor e aplicações de derivadas. Universidade Federal da Paraíba, 2021.

STEWART, J. **cálculo volume 2**. [S.l.]: Pioneira Thomson Learning, 2006.

TEIXEIRA, F. L. Modelos descritos por equações diferenciais ordinárias. Universidade Estadual Paulista (Unesp), 2012.

THOMAS, G. B. et al. **Cálculo. 2 v**. [S.l.]: São Paulo: Pearson Education do Brasil, 2009.

VALVERDE, C.; OLIVEIRA, H. C. Um setor especial generalizado da equação do oscilador harmônico forçado e amortecido. **ENCICLOPEDIA BIOSFERA**, v. 6, n. 11, 2010.

VIEIRA, Marcelo Lopes. **E.D.O.'s Por Séries de Potência | Solução em Torno de Pontos Ordinários**. 2020. Disponível em: <https://matematicasimplificada.com/e-d-o-s-por-series-de-potencia-solucao-em-torno-de-pontos-ordinarios/>. Acesso em: 25 de janeiro 2024.

INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA DA PARAÍBA
Campus Cajazeiras - Código INEP: 25008978
Rua José Antônio da Silva, 300, Jardim Oásis, CEP 58.900-000, Cajazeiras (PB)
CNPJ: 10.783.898/0005-07 - Telefone: (83) 3532-4100

Documento Digitalizado Ostensivo (Público)

TCC

Assunto:	TCC
Assinado por:	Matheus Oliveira
Tipo do Documento:	Anexo
Situação:	Finalizado
Nível de Acesso:	Ostensivo (Público)
Tipo do Conferência:	Cópia Simples

Documento assinado eletronicamente por:

- **Matheus de Oliveira Silva, ALUNO (201622020081) DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA - CAJAZEIRAS**, em 07/03/2024 21:16:52.

Este documento foi armazenado no SUAP em 07/03/2024. Para comprovar sua integridade, faça a leitura do QRCode ao lado ou acesse https://suap.ifpb.edu.br/verificar-documento-externo/ e forneça os dados abaixo:

Código Verificador: 1107771
Código de Autenticação: 62d91f9663