

INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA DA PARAÍBA
CAMPUS CAJAZEIRAS

RADAMÉS RAMOS DE SOUSA

**ANÁLISE DE VIGAS-PAREDE UTILIZANDO O MODELO DE BIELAS E
TIRANTES E ELEMENTOS FINITOS CST**

Cajazeiras-PB
2023

RADAMÉS RAMOS DE SOUSA

**ANÁLISE DE VIGAS-PAREDE UTILIZANDO O MODELO DE BIELAS E
TIRANTES E ELEMENTOS FINITOS CST**

Trabalho de Conclusão de Curso submetido à Coordenação do Curso de Bacharelado em Engenharia Civil do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia da Paraíba-*Campus* Cajazeiras, como parte dos requisitos para a obtenção do Título de Bacharel em Engenharia Civil, sob Orientação do Prof. Dr. Sebastião Simão da Silva e Coorientação do Prof. Me. Iuri Augusto Alves Lustosa.

Cajazeiras-PB
2023

IFPB / Campus Cajazeiras
Coordenação de Biblioteca
Biblioteca Prof. Ribamar da Silva
Catalogação na fonte: Cícero Luciano Félix CRB-15/750

S725a Sousa, Radamés Ramos de.
Análise de vigas-parede utilizando o modelo de bielas e tirantes e elementos finitos CST / Radamés Ramos de Sousa. – 2023.
124f. : il.
Trabalho de Conclusão de Curso (Bacharelado em Engenharia Civil) - Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia da Paraíba, Cajazeiras, 2023.
Orientador(a): Prof. Dr. Sebastião Simão da Silva.
Coorientador(a): Prof. Me. Iuri Augusto Alves Lustosa.
1. Estrutura de concreto armado . 2. Vigas-parede. 3. Análise estrutural. 4. Método dos elementos finitos. I. Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia da Paraíba. II. Título.

RADAMÉS RAMOS DE SOUSA

**ANÁLISE DE VIGAS-PAREDE UTILIZANDO O MODELO DE BIELAS E
TIRANTES E ELEMENTOS FINITOS CST**

Trabalho de Conclusão de Curso submetido à
Coordenação do Curso de Bacharelado em
Engenharia Civil do Instituto Federal de
Educação, Ciência e Tecnologia da Paraíba,
Campus Cajazeiras, como parte dos
requisitos para a obtenção do Título de
Bacharel em Engenharia Civil.

Aprovado em 15 de dezembro de 2023.

BANCA EXAMINADORA

Dr. Sebastião Simão da Silva – IFPB-*Campus* Cajazeiras
Orientador

Me. Iuri Augusto Alves Lustosa – IFPI-*Campus* Parnaíba
Coorientador

Eng.^a Evilly Raquel Henrique da Silveira – IFPB-*Campus* Cajazeiras
Examinador 1

Dedico este trabalho aos meus pais, Raimundo de Sousa e Irene dos Ramos de Sousa, pelo apoio em todos os momentos difíceis, a minha noiva Deise Laís da Silva por ter segurado a minha mão e não me deixar desistir e ao meu filho Enzo Gabriel Pinheiro Ramos por ter sido meu combustível para chegar até aqui.

AGRADECIMENTOS

Agradeço ao Instituto Federal de Ciência e Tecnologia da Paraíba, *Campus Cajazeiras*, pela significativa oportunidade que me foi concedida como aluno, permitindo-me aprender e aprofundar meus estudos e pesquisas no âmbito da Engenharia Civil.

Agradeço sinceramente aos meus pais, que sempre me apoiaram e acreditaram nos meus sonhos. Também expresso meus profundos agradecimentos aos Professores Dr. Sebastião Simão da Silva e Me. Iuri Augusto Alves Lustosa, pela paciência e dedicação ao desempenharem o papel de orientador e coorientador, respectivamente, e pelos seus comprometimentos em me ensinar.

Quero expressar minha gratidão a todos os docentes que ao longo da minha graduação compartilharam seus conhecimentos com excelência e expertise. Além de serem excelentes educadores, agradeço a amizade e por serem uma inspiração profissional para mim.

A minha família e amigos que estiveram comigo nessa caminhada, agradeço imensamente.

RESUMO

No campo da engenharia civil é comum que se projete elementos estruturais de concreto armado, de acordo com as hipóteses de *Euler-Bernoulli*. No entanto, o projetista pode deparar-se com elementos de geometrias complexas, em que essas hipóteses não mais são válidas. Nesse contexto, pode-se inferir a importância da análise estrutural, sendo necessário que se tenha conhecimento em outras técnicas de análises, como os métodos numéricos que inclui o Método dos Elementos Finitos. Contudo, não basta apenas a análise, faz-se necessário obter um modelo que suporte os carregamentos a qual a estrutura está submetida, para isso, uma alternativa a modelagem de estruturas de geometrias complexas são Modelos de Bielas e Tirantes. As vigas-parede, em sua particularidade, são elementos estruturais que suportam cargas mais elevadas, devido a sua geometria, contudo, a análise dessas estruturas carece de avaliar os campos de tensões em que os carregamentos se direcionam, uma vez que estes apresentam trajetórias não-lineares. Entretanto, as normas nacionais e internacionais permitem que o seu dimensionamento seja realizado a partir de uma análise linear elástica, tratando as tensões de compressão e tração como bielas e tirantes, respectivamente. Logo, o objetivo inicial deste trabalho é obter as trajetórias de tensões principais através de uma análise via Método dos Elementos Finitos, utilizando o elemento finito *CST*. A fim de obter uma compreensão do comportamento estrutural. A implementação computacional é conduzida por meio de *softwares* de código aberto, como o *Scilab*, ressaltando a relevância da acessibilidade e adaptabilidade inerentes a essas ferramentas. Além disso, a fim de realizar uma representação gráfica dos resultados obtidos, o software livre *Paraview*, é empregado. Adicionalmente, o estudo desenvolve uma análise comparativa dos resultados obtidos com *softwares* comerciais, como o *LISA*, com o objetivo de validar e verificar a exatidão da formulação implementada. Por fim, cabe destacar, que este trabalho busca contribuir para a compreensão e análise de vigas-parede, explorando abordagens computacionais e avaliando sua eficácia em comparação com ferramentas consolidadas no âmbito da engenharia estrutural.

Palavras-chave: método dos elementos finitos; vigas-parede; bielas e tirantes;

ABSTRACT

In the field of civil engineering, it is common to design reinforced concrete structural elements, which follow the Bernoulli-Euler hypotheses. However, the designer may come across elements with complex geometries, where these assumptions are no longer valid. In this context, the importance of structural analysis can be inferred, requiring knowledge of analysis techniques, such as numerical methods, which include the Finite Element Method. However, analysis alone is not enough, it is necessary to obtain a model that supports the loads to which the structure is subjected. For this, an alternative to modeling structures with complex geometries are Strut and Tie Models. Wall beams, in their particularity, are structural elements that support higher loads, due to their geometry, however, the analysis of these structures needs to evaluate the stress fields in which the loads are directed, since they behave differently. non-linear way. However, national and international standards allow its design to be carried out based on a linear elastic analysis, treating compression and tension stresses as struts and ties, respectively. The objective of this work is to obtain the main stress trajectories through an analysis via the Finite Element Method, using the CST finite element. In order to gain an understanding of structural behavior. The computational implementation is conducted using open source software, such as Scilab, highlighting the relevance of accessibility and adaptability inherent to these tools. Furthermore, in order to make a graphical representation of the results obtained, the free software Paraview is used. Additionally, the study develops a comparative analysis of the results obtained with commercial software, such as LISA, with the aim of validating and verifying the effectiveness of the implemented numerical code. Finally, it is worth highlighting that this work seeks to contribute to the understanding and analysis of wall beams, exploring computational approaches and evaluating their effectiveness in comparison with consolidated tools within the scope of structural engineering.

Keywords: finite element method; wall-beams; strut-and-tie;

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 2.1.1 – Exemplos de vigas-parede.....	24
Figura 2.2.1 – viga-parede contínua em fachada de edifício.....	26
Figura 2.2.2 – viga-parede de transição.....	26
Figura 2.3.1 – Tipos de carregamentos em vigas-parede.....	28
Figura 2.3.2 – Tensões em viga-parede com $l/h = 1$	28
Figura 2.3.3 – Variação das tensões normais nas vigas-parede.....	29
Figura 2.3.4 – Viga-parede biapoiada.....	29
Figura 2.3.5 – Distribuição de tensões, nas seções do apoio e do meio do vão, em vigas-parede contínuas segundo a teoria da elasticidade.....	30
Figura 2.4.1.1 – Distribuição da armadura do banzo tracionado.....	33
Figura 2.4.1.2 – Distribuição da armadura sobre os apoios intermediários.....	33
Figura 2.4.1.3 – Modelo de bielas e tirantes para uma viga-parede contínua de dois vãos iguais e carga uniformemente distribuída.....	34
Figura 2.4.1.4 – Campos de tensões idealizados mostrando a necessidade de armaduras secundárias.....	36
Figura 2.4.2.1 – Armadura de suspensão para cargas indiretas concentradas.....	37
Figura 2.4.3.1 – Modelo biela-tirante para viga-parede biapoiada.....	38
Figura 2.4.3.2 – Tensões de compressão em apoios de extremidade.....	39
Figura 2.4.3.3 – Apoio intermediário de viga-parede contínua.....	41
Figura 3.1.1 – Modelo de treliça de Mörsch.....	42
Figura 3.1.2 – Inclinação do Banzo comprimido.....	44
Figura 3.1.3 – Fluxograma do MBT.....	45
Figura 3.2.1.1 – Campo de tensões de compressão e tração e modelo equivalente de bielas e tirantes para uma viga biapoiada com força centrada.....	46
Figura 3.2.1.2 – MBT para uma viga-parede biapoiada.....	47
Figura 3.2.1.3 – Modelos normativos para vigas-parede com diversos carregamentos.....	48
Figura 3.2.2.1 – Definição geométrica do modelo.....	49
Figura 3.3.1 – Situações típicas de Regiões D.....	51
Figura 3.4.1.1 – Modelo de Bielas e Tirantes padronizado de consolo curto.....	53
Figura 3.4.2.1 – Estrutura com geometria complexa.....	54
Figura 3.4.2.2 – Resultados de uma análise elástica pelo MEF.....	55

Figura 3.4.2.3 – Mapas coloridos dos campos de tensões.....	55
Figura 3.4.2.4 – MBT concebido via análise elástica.....	56
Figura 3.4.3.1 – Exemplo do processo do caminho de carga em uma viga-parede.....	57
Figura 3.5.1 – Exemplo de dois modelos para uma mesma viga-parede.....	58
Figura 3.5.2 – Superposição de dois modelos para consolos com ação aplicada ao longo da altura.....	58
Figura 3.6.1 – Relação tensão-deformação do aço para concreto armado.....	59
Figura 3.6.2 – Relação tensão deformação do concreto submetido a compressão uniaxial.....	59
Figura 3.6.3 – Relação tensão-deformação em ensaio triaxial e uniaxial de compressão em espécie de concreto.....	61
Figura 3.6.4 – Influência de deformações laterais impostas na relação tensão-deformação.....	61
Figura 3.6.1.1 – Modelo de bielas e tirantes indicando seus elementos.....	62
Figura 3.6.1.2 – Campos de tensões de compressão em leque.....	62
Figura 3.6.1.3 – Exemplo de modelo de bielas e tirantes seguindo a trajetória das tensões principais em uma viga-parede.....	63
Figura 3.6.2.1 – Diagrama tensão-deformação para aços.....	65
Figura 3.6.3.1 – Exemplos de nós CCC, CTT e CCT.....	67
Figura 3.6.3.2 – Tipos de nós.....	67
Figura 3.6.3.3 – Mecânica de nós hidrostáticos e não- hidrostáticos.....	68
Figura 4.2.1.1 – Placas carregadas em seu plano médio.....	70
Figura 4.2.1.2 – Estruturas sob estado plano de deformações.....	71
Figura 4.2.2.1 – Estados planos: a) de tensões e b) de deformações.....	72
Figura 4.3.1 – Viga-parede discretizada com elementos finitos triangulares CST.....	75
Figura 4.3.2 – Elemento Finito Triangular CST.....	76
Figura 5.2.1 – Fluxograma das etapas metodológicas.....	86
Figura 5.2.2.1 – Fluxograma do código computacional.....	88
Figura 6.1.1 – Viga biapoiada com carga concentrada no meio do vão.....	90
Figura 6.1.2 – trajetória de tensões em viga biapoiada com carga concentrada.....	91
Figura 6.1.3 – Campos de tensões para viga esbelta pelo código implementado.....	92
Figura 6.1.4 – Campos de tensões para viga esbelta pelo LISA.....	92
Figura 6.1.5 – comportamento das tensões normais σ_x no meio do vão da viga esbelta.....	93
Figura 6.2.1 – Viga-parede biapoiada com carga concentrada no centro da face superior.....	93
Figura 6.2.2 – Trajetória de tensões em viga-parede biapoiada com carga concentrada.....	94

Figura 6.2.3 – Campos de tensões para viga-parede pelo código implementado.....	95
Figura 6.2.4 – Campos de tensões para viga-parede pelo LISA.....	95
Figura 6.2.5 – comportamento das tensões normais σ_x no meio do vão da viga-parede.....	96
Figura 6.2.6 – Discretização de viga-parede em elementos finitos CST para o código implementado.....	97
Figura 6.2.7 – Discretização de viga-parede em elementos finitos CST pelo LISA.....	97
Figura 6.3.1 – Viga-parede contínua com carregamentos distribuídos.....	98
Figura 6.3.2 – Exemplo de discretização com variação nas dimensões dos elementos.....	99
Figura 6.3.3 – Trajetória de tensões em viga-parede contínua de apoios fixos com carregamentos distribuídos.....	99
Figura 6.3.4 – Ângulos das bielas de compressão encontrados pelo MEF em viga-parede contínua de apoios fixos.....	100
Figura 6.3.5 – Campos de tensões para viga-parede contínua hiperestática pelo código implementado.....	101
Figura 6.3.6 – Campos de tensões para viga-parede contínua hiperestática pelo LISA.....	101
Figura 6.3.7 – Trajetória de tensões em viga-parede contínua isostática com carregamentos distribuídos.....	102
Figura 6.3.8 – Campos de tensões para viga-parede contínua isostática pelo código implementado.....	103
Figura 6.3.9 – Campos de tensões para viga-parede contínua isostática pelo LISA.....	103
Figura 6.3.10 – Reações e diagramas de momentos fletores.....	104
Figura 6.3.11 – Modelo de bielas e tirantes para o exemplo de viga-parede contínua.....	105
Figura 6.3.12 – Verificação dos ângulos adotados para viga-parede contínua isostática.....	105
Figura 6.3.13 – Geometria do nó intermediário com as camadas de armadura.....	109
Figura 6.4.1 – Viga-parede com abertura.....	110
Figura 6.4.2 – Trajetórias de tensões principais e viga-parede com abertura.....	111
Figura 6.4.3 – Modelo de bielas e tirantes para viga-parede com abertura.....	112
Figura 6.4.4 – Detalhamento da armadura para viga-parede com abertura.....	112
Figura 6.4.5 – Campos de tensões em viga-parede com abertura pelo código implementado..	113
Figura 6.4.6 – Campos de tensões em viga-parede com abertura pelo LISA.....	114

LISTA DE TABELAS

Tabela 2.1 – Distribuição da armadura sobre os apoios intermediários.....	35
Tabela 3.1 – Parâmetros de resistência de cálculo das bielas e regiões nodais.....	63
Tabela 3.2 – Ângulos de inclinação entre bielas e tirantes permitidos por algumas normas.....	64
Tabela 6.1 – Razão entre comprimento de ancoragem básico e diâmetro da barra (l_b/ϕ).....	108
Tabela 8.1 – Resultados numéricos: viga-parede biapoiada.....	120

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

ABNT – Associação Brasileira de Normas Técnicas

CEB – *Comité Euro-Internacional Do Béton*

CST – *Constant Strain Triangle*

ELU – Estado-Limite Último

MEF – Método dos Elementos Finitos

MBT – Método de Bielas e tirantes

NBR – Norma Brasileira

STM – *Strut-and-Tie Model*

LISTA DE SÍMBOLOS

- f_{ck} – Resistência característica do concreto.
- l – Comprimento.
- h – Altura
- $\varepsilon_{xx}, \varepsilon_{yy}$ e ε_{xy} – Deformações
- $\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_x$ e σ_y – Tensões normais
- τ_{xy} – Tensão de cisalhamento
- σ_1 e σ_2 – Tensões principais
- h_e – Altura efetiva
- Z – Braço de alavanca
- R_c – Resultante de compressão
- R_t – Resultante de compressão
- σ_o – Tensão máxima para vigas esbeltas
- M – Momento fletor
- b – Base ou largura da viga
- A_s – Área de aço
- M_d – Momento fletor de cálculo
- f_{yd} – Tensão de escoamento de cálculo do aço
- R_{sd} – Força resultante de tração de cálculo
- M_r – Momento de fissuração
- f_{ct} – Resistência a tração do concreto
- $A_{s,min}$ – Área de aço mínima
- k_1 – Coeficiente determinado numericamente pelo MEF
- $A_{s,min}VP$ – Armadura mínima das vigas-parede
- $A_{s,min}VE$ – Armadura mínima das vigas esbeltas
- P_d – Carga de cálculo uniformemente distribuída
- F_d – Parcela da força a ser levantada pelas barras dobradas
- α – Ângulo de inclinação genérico
- R_d – Reação de apoio
- R_{sd} – Força de tração na armadura
- θ – Ângulo de inclinação da biela

F_c – Força de compressão na biela

c – Largura do apoio

d' – Distância do centroide das armaduras do banzo tracionado até a face inferior da viga-parede

u – Altura no nó de apoio

σ_d – Tensão no apoio

σ_{2d} – Tensão na biela inclinada

f_{cd} – Resistência de cálculo do concreto

f_{cdr} – Resistência de cálculo do concreto reduzida

F_i – Força no tirante i

l_i – Comprimento do tirante i

ε_i – Deformação específica do tirante i

$f_{c,ef}$ – Resistência à compressão efetiva do concreto

f_c – Resistência à compressão padrão obtida em ensaios

α_{v2} – Efeito do acréscimo da fragilidade da ruptura do material (*brittleness*)

f_{cd1}, f_{cd2} e f_{cd3} – Resistências de cálculo das bielas e regiões nodais

γ_c – Coeficiente de minoração da resistência do concreto à compressão

F_{sd} – Força de cálculo de tração atuante no tirante

F_{td} – Força de tração transversal

A_p – Área de aço protendido

f_{pyd} – Resistência ao escoamento da armadura ativa de cálculo

$\{\sigma\}$ – Vetor de tensões

$[D]$ – Matriz tensão-deformação ou matriz constitutiva

$\{\varepsilon\}$ – Vetor de deformações

∂ – Derivada parcial

$\{u\}$ – Vetor de deslocamentos

$[d]$ – Operador linear

x_i, y_i, x_j, y_j, x_m e y_m – Coordenadas globais

a_i – Coeficientes das funções de deslocamentos

A – Área

$[N]$ – Matriz de funções de forma

$[B]$ – Matriz de derivadas parciais das funções de forma

$[k]$ – Matriz de rigidez

Ω_b – Energia potencial das forças de corpo

Ω_p – Energia potencial das cargas concentradas

Ω_s – Energia potencial das cargas distribuídas

U – Energia de deformação

γ_{xy} – Deformação ao cisalhamento

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	19
1.1	JUSTIFICATIVA.....	21
1.2	OBJETIVOS	22
1.2.1	<i>Objetivo geral</i>	22
1.2.2	<i>Objetivos específicos</i>	22
1.3	ESTRUTURA DO TRABALHO.....	23
2	VIGAS-PAREDE	24
2.1	CONCEITUAÇÃO	24
2.2	APLICAÇÕES	25
2.3	TENSÕES EM VIGAS-PAREDE	27
2.4	CRITÉRIOS DE DIMENSIONAMENTO	30
2.4.1	<i>Armadura do banzo tracionado</i>	31
2.4.2	<i>Armadura de suspensão</i>	36
2.4.3	<i>Tensões de compressão nos apoios (verificação)</i>	37
3	MODELO DE BIELAS E TIRANTES	42
3.1	INTRODUÇÃO	42
3.2	DEFINIÇÃO GEOMÉTRICA DO MODELO	46
3.2.1	<i>Fundamentos do modelo</i>	46
3.2.2	<i>Concepção da geometria</i>	49
3.3	REGIÕES B E D.....	50
3.4	ANÁLISE ESTRUTURAL.....	52
3.4.1	<i>Modelos pré-definidos ou normativos</i>	53
3.4.2	<i>Análise elástica</i>	54
3.4.3	<i>Caminho das cargas</i>	56

3.5	OTIMIZAÇÃO DO MODELO	57
3.6	DIMENSIONAMENTO DAS BIELAS, TIRANTES E NÓS	59
3.6.1	<i>Bielas</i>	62
3.6.2	<i>Tirantes</i>	64
3.6.3	<i>Nós</i>	66
3.6.4	<i>Ancoragem</i>	68
4	ELEMENTO FINITO CST.....	69
4.1	INTRODUÇÃO	69
4.2	NOÇÕES DE TEORIA DA ELASTICIDADE	70
4.2.1	<i>Estruturas bidimensionais</i>	70
4.2.2	<i>Introdução a teoria da Elasticidade</i>	71
4.2.3	<i>Relação deformação-deslocamento</i>	72
4.2.4	<i>Relação tensão e deslocamento</i>	73
4.3	ELEMENTO TRIANGULAR CST.....	74
4.3.1	<i>Deformação do elemento e matriz de rigidez</i>	79
5	METODOLOGIA	85
5.1	CLASSIFICAÇÃO DA PESQUISA	85
5.2	PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS.....	85
5.2.1	<i>Levantamento bibliográfico</i>	87
5.2.2	<i>Código computacional</i>	87
6	APLICAÇÕES NUMÉRICAS.....	90
6.1	VIGA ESBELTA	90
6.2	VIGA PAREDE	93
6.3	VIGA-PAREDE CONTÍNUA.....	98
6.4	VIGA-PAREDE COM ABERTURA	110
7	CONCLUSÃO.....	115

7.1 SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS	116
REFERÊNCIAS.....	117
APÊNDICE A – RESULTADOS NUMÉRICOS.....	120

1 INTRODUÇÃO

A engenharia civil é uma área em constante evolução, e a busca por métodos eficazes de análise e dimensionamento de estruturas é fundamental para o desenvolvimento de projetos seguros e economicamente viáveis. Nessa conjuntura, a análise de vigas-parede desempenha um papel fundamental, uma vez que essas estruturas são amplamente utilizadas na construção civil, especialmente em edifícios e pontes, devido à sua capacidade de suportar cargas elevadas.

Souza (2004), indica que as vigas-parede, por serem altas, apresentam problemas de estabilidade. Desta forma, a afirmação mencionada pelo autor destaca um desafio importante associado a esses elementos estruturais, sugerindo a necessidade de considerações especiais no projeto e análise dessas estruturas. Este aspecto ressalta a importância da aplicação de métodos numéricos como o Método dos Elementos Finitos (MEF) para analisar o comportamento dessas vigas em condições diversas de carga e ambiente.

Além disso, nos projetos estruturais contemporâneos, a demanda por elementos de construção de geometria complexa e variação de seções tem impulsionado os engenheiros a adotarem abordagens de técnicas e métodos já bem estabelecidos. O Modelo de Bielas e Tirantes (MBT) se destaca como uma ferramenta fundamental para resolver desafios estruturais de natureza não convencional.

Baseado na analogia da treliça clássica, o MBT fornece uma estrutura teórica para abordar padrões de tensão complexos. Nesse método, as tensões de compressão são representadas por bielas de concreto, enquanto as tensões de tração são resistidas pelos tirantes, que correspondem às armaduras. De acordo com Santos (2021), o MBT opera dentro dos princípios do Limite Inferior da Teoria da Plasticidade, garantindo o equilíbrio e a necessária ductilidade do elemento estrutural para o desenvolvimento eficaz de bielas e tirantes. Essa abordagem se mostra elementar na resolução de problemas estruturais desafiadores, atendendo às demandas da engenharia moderna.

Desta forma, a análise estrutural emerge como uma etapa que antecede as demais fases do desenvolvimento do projeto. Onde, de acordo com Sussekind (1987), a análise estrutural é a parte da mecânica que estuda as estruturas, consistindo este estudo na determinação dos esforços e das deformações a que elas ficam submetidas quando solicitadas por agentes externos (cargas, variações térmicas, movimento de seus apoios etc.). Isto posto, as estruturas se compõem de uma ou mais peças, ligadas entre si e ao meio exterior de modo a formar um conjunto estável, isto é, um conjunto capaz de receber solicitações externas, absorvê-las

internamente e transmiti-las até seus apoios, onde estas solicitações externas encontrarão seu sistema estático equilibrante.

Para alcançar esse objetivo, ao longo dos anos, foram desenvolvidos diversos modelos estruturais. Esses modelos variam em complexidade, desde cálculos manuais simplificados até abordagens altamente complexas que fazem uso de recursos computacionais avançados, proporcionando análises mais precisas e próximas da realidade. Desempenhando um papel fundamental na delimitação de todo o processo de dimensionamento, possibilitando a concepção de projetos que cumpram com padrões de segurança aceitáveis e financeiramente possíveis.

Portanto, a análise estrutural é uma etapa essencial no campo da engenharia estrutural, desempenhando um papel substancial na concepção, dimensionamento e avaliação de estruturas de concreto armado. Em que, as vigas-parede devido à sua complexidade de estado de tensões e geométrica, além das condições de contorno envolvidas, esses elementos estruturais frequentemente desafiam as abordagens analíticas tradicionais. A solução desses problemas, que envolvem equações diferenciais de alta ordem, requer a utilização métodos numéricos avançados, a exemplo do Método dos Elementos Finitos (MEF).

De forma complementar, segundo Oliveira *et al.* (2002), a análise do estado de tensões em um elemento estrutural é fundamental para o engenheiro estrutural. Ao compreender os valores máximos de tensões, é possível assegurar um dimensionamento seguro e econômico para a peça estrutural.

Este trabalho se concentra na análise de vigas-parede, utilizando uma abordagem bastante usual que combina o Modelo de Bielas e Tirantes com o Método dos Elementos Finitos, especificamente a implementação do elemento finito *CST* (*Constant Strain Triangle*), onde o processamento de dados será realizado, sendo possível visualizar os resultados do código implementado através do pós processamento de dados em outro *software* de código aberto, o *Paraview*. A integração dessas técnicas permite uma análise mais abrangente e precisa das vigas-parede, considerando tanto o comportamento estrutural global quanto os aspectos locais, como a distribuição de tensões e deformações. Essa metodologia permite uma análise do comportamento das vigas-parede, levando em consideração aspectos fundamentais para um dimensionamento preciso.

Além disso, exploraremos alguns Modelos de Bielas e Tirantes, como os originados por modelos normativos e os que surgem a partir de uma análise elástica linear. Essa abordagem

abrangente nos permitirá entender melhor o comportamento das vigas-parede em uma variedade de situações e aprimorar o processo de projeto e dimensionamento.

De forma que ao longo deste trabalho, serão abordados conceitos teóricos fundamentais relacionados à análise de vigas-parede, o Modelo de Bielas e Tirantes, bem como a aplicação dos Elementos Finitos CST. Além disso, serão realizados estudos de casos práticos para demonstrar a eficácia dessa abordagem. O objetivo final é contribuir com as técnicas de análise e dimensionamento de vigas-parede, fornecendo ferramentas e conhecimentos que possam ser aplicados na prática da engenharia civil, resultando em projetos mais seguros e eficientes.

1.1 JUSTIFICATIVA

Um aspecto abordado neste trabalho é a implementação de métodos numéricos em *softwares* livres. Desta forma, utilizar um código numérico desenvolvido em uma linguagem livre para análise via Método dos Elementos Finitos (MEF) oferece vantagens significativas em comparação com *softwares* comerciais. Notavelmente, os *softwares* comerciais, mesmo em suas versões estudantis, impõem limitações à quantidade de nós utilizáveis em análises estruturais por MEF. Em contraste, ao empregar o código numérico desenvolvido na linguagem *SciLab*, essa restrição é eliminada, proporcionando uma flexibilidade determinante para lidar com modelos complexos. A ausência de limitações de nós não apenas amplia a capacidade de análise, mas também permite a adaptação precisa do código às necessidades específicas do usuário, promovendo maior controle, compreensão aprofundada do método e custos mais baixos, destacando a superioridade desta abordagem na execução de análises estruturais.

Isso representa não apenas uma abordagem economicamente eficiente, mas também uma abertura significativa para a comunidade acadêmica e profissional. O uso do *SciLab* para programação numérica, em um ambiente de código aberto, oferece flexibilidade e adaptabilidade para lidar com as equações diferenciais complexas envolvidas na análise estrutural.

Segundo Leite (2015), o *SciLab* é uma ferramenta de alta performance e utilizada em situações que requer soluções baseadas em cálculos numéricos de certa complexidade, sendo manipulada interativamente ou através de programação. No geral, sua versatilidade o tornou popular em academias, pesquisa e engenharias, sendo acessível a diversos níveis de usuários e de código aberto, é gratuito e conta com uma comunidade ativa de desenvolvedores. É uma escolha sólida para quem trabalha com cálculos numéricos em áreas como engenharia, ciência, educação e pesquisa.

Adicionalmente, a visualização dos resultados é uma parte fundamental do pós-processamento de dados da análise estrutural. Neste contexto, o *software Paraview* é empregado, sendo importante salientar que se trata de uma ferramenta de código aberto. Esta permite a representação gráfica dos resultados da programação, tornando a interpretação dos dados mais acessível e possibilitando *insights* valiosos sobre o comportamento das vigas-parede.

Neste cenário, as vigas-parede são elementos estruturais constituídos de concreto armado, desta forma, é inquestionavelmente que este material é amplamente utilizado em todo o mundo, moldando uma variedade de elementos estruturais. Para garantir sua eficácia, as peças formadas por esse material devem ser projetadas de forma a proporcionar segurança e desempenho ideais. Durante o processo de projeto, é importante compreender o comportamento dessas estruturas sob diferentes tipos de cargas e em diferentes condições ambientais.

Neste contexto, este trabalho visa explorar a integração do Método dos Elementos Finitos em *softwares* livres com o Modelo de Bielas e Tirantes, como uma abordagem eficaz para a análise de vigas-parede. Além disso, enfatiza a importância de utilizar tecnologias de código aberto e soluções acessíveis, ao mesmo tempo que enfrenta os desafios inerentes à modelagem de estruturas complexas. Por meio deste estudo, procura-se desenvolver o conhecimento nas ferramentas disponíveis para os engenheiros civis, proporcionando uma base sólida para análises estruturais mais precisas e eficientes.

1.2 OBJETIVOS

1.2.1 *Objetivo geral*

O objetivo geral é estudar a orientação das trajetórias de tensões principais em vigas-parede por métodos numéricos utilizando o elemento finito CST e, por meio destas, dimensionar tais elementos por meio do Modelo de Bielas e Tirantes. Os dados obtidos são comparados com aqueles determinados por meio do pacote comercial *LISA*.

1.2.2 *Objetivos específicos*

Para atingir o objetivo geral, foram definidos os seguintes objetivos específicos:

- Desenvolver um código numérico para análise de vigas-parede utilizando o Método dos Elementos Finitos com a linguagem de programação *SciLab*;

- Apresentar todos os conceitos, as formulações e os aspectos de implementação computacional relativos ao elemento finito CST e ao Modelo de Bielas e Tirantes;
- Desenvolver uma rotina para gerar os arquivos necessários para a visualização as trajetórias de tensões principais e campos de tensões de vigas-parede utilizando o *software Paraview*;
- Analisar os resultados alcançados e realizar comparações com os dados de outros pesquisadores e/ou os obtidos por meio de sistemas computacionais convencionais, como *LISA*;
- Avaliar a eficácia da implementação e as possíveis aplicações dos códigos utilizados.

1.3 ESTRUTURA DO TRABALHO

No primeiro capítulo, realiza-se a apresentação do trabalho, destacando seus objetivos gerais e específicos. Aborda-se as problemáticas em projetos estruturais e questiona-se a necessidade da análise numérica.

No segundo capítulo, explora-se o elemento estrutural objeto de estudo, suas características e aplicações, introduzindo brevemente o conceito do modelo de bielas e tirantes.

O terceiro capítulo detalha a sequência lógica do Modelo de Bielas e Tirantes.

O quarto capítulo se dedica à formulação matemática dos elementos finitos triangulares CST, com ênfase na definição algébrica das matrizes de rigidez.

No quinto capítulo, apresenta-se a metodologia utilizada, descrevendo as etapas das análises das estruturas abordadas.

O sexto capítulo exhibe os exemplos numéricos analisados, os resultados obtidos com o programa livre *Scilab* e a comparação com os resultados de outros autores, incluindo o pacote comercial *LISA*.

Finalmente, o sétimo capítulo conclui o estudo e sugere temas para futuras pesquisas.

2 VIGAS-PAREDE

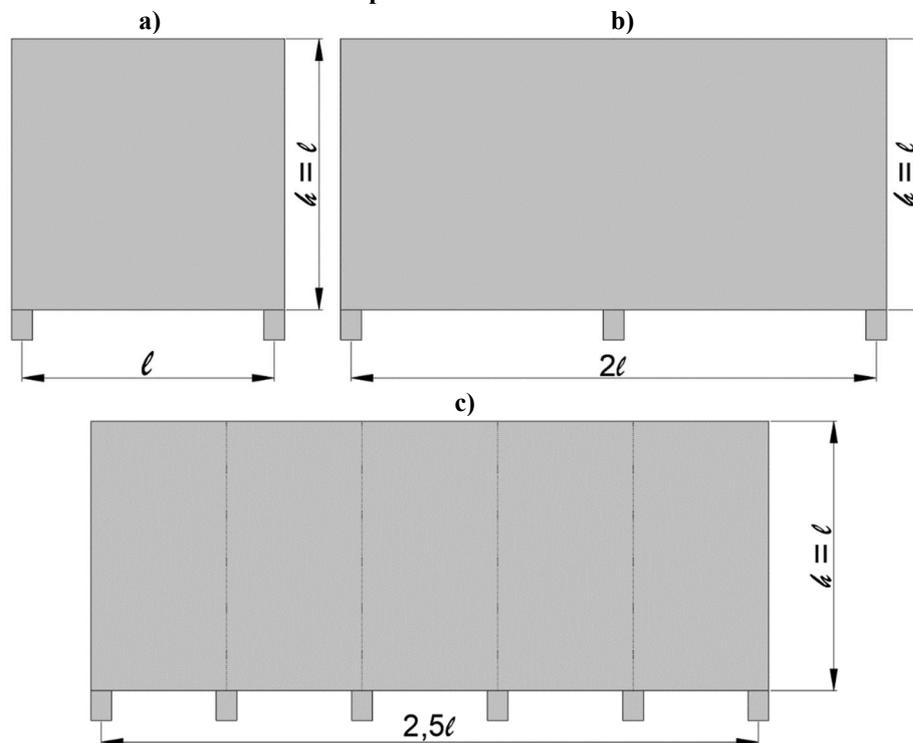
2.1 CONCEITUAÇÃO

De acordo com Silva (1991), as chapas são estruturas laminares planas que recebem ações atuando exclusivamente em seu plano médio. Por outro lado, uma viga-parede é essencialmente uma chapa orientada verticalmente, com apoios discretos, apresentando considerável altura em comparação ao vão.

Para Araújo (2014), a distinção entre vigas-parede e vigas esbeltas é estabelecida com base na relação entre o comprimento do vão de cálculo (l) e a altura da viga (h). Os critérios típicos de esbeltez para vigas-parede incluem os critérios abaixo, conforme é ilustrado na Figura 2.1.1.

- Viga-parede biapoiada: $l/h < 2,0$;
- Viga-parede de dois vãos: $l/h < 2,5$;
- Viga-parede contínua com mais de dois vãos: $l/h < 3,0$.

Figura 2.1.1 – Exemplos de viga-parede: a) viga-parede biapoiada; b) viga-parede de dois vãos; c) viga-parede contínua.



Fonte: Autoria própria, 2023.

Tais conceitos remetem a definição clássica que as vigas-parede são elementos estruturais que se caracterizam por apresentar uma relação h/l significativamente maior do que

o usual, enquanto sua espessura na direção perpendicular é substancialmente menor que a altura e a profundidade.

A NBR 6118 (ABNT, 2023), estabelece que vigas-parede são caracterizadas por sua altura em relação ao vão, com limites específicos para essa relação. Elas podem receber cargas superiores ou inferiores. No entanto, essas vigas apresentam ineficiência estrutural em comparação com vigas convencionais, tanto em termos de flexão quanto de cisalhamento.

Conforme destacado por Araújo (2014), nas vigas-parede, a suposição clássica das seções planas de Bernoulli não é mais aplicável devido às grandes distorções enfrentadas pela estrutura. Isso resulta em deformações normais ε_{xx} que não seguem uma variação linear ao longo da altura da viga. Mesmo em materiais elásticos lineares, as tensões normais σ_{xx} não mantêm uma variação linear, ao contrário do que ocorre em vigas esbeltas. Isso evidencia que as análises devem ser tratadas como um problema bidimensional de tensões e que para alguns casos específicos de materiais elásticos lineares a solução analítica de Airy se aplicam.

Por outro lado, é comum o emprego de soluções numéricas para obtenção de análises estruturais em elementos especiais, como no caso das vigas-parede. Neste contexto, o MEF se torna essencial por considerar o comportamento não-linear das trajetórias de tensão.

2.2 APLICAÇÕES

As vigas-parede desempenham um papel fundamental na estabilidade e resistência de edifícios, pontes e outras estruturas que requerem aumento da rigidez. Além disso, sua eficácia nas situações em que cargas verticais e horizontais devem ser adequadamente distribuídas as torna elementos estruturais de grande relevância. Como mencionado por Silva (1991), é frequente a aplicação de vigas-parede como cortinas em pavimentos ou paredes de contenção em subsolo ou garagens. Nessas situações, o elemento estrutural não apenas é calculado como viga-parede, mas também é dimensionado como uma laje vertical submetida a ações provenientes do empuxo do terreno.

A investigação do comportamento estrutural das vigas-parede, as condições de projeto, a influência de perturbações, a aplicação de métodos de análise estrutural, como o método das bielas e tirantes, bem como o uso de ferramentas de simulação e cálculos numéricos, como o MEF, na análise e dimensionamento desses elementos. Tudo isso resulta em uma compreensão mais aprofundada da reposta das vigas-parede sendo essencial para projetar estruturas seguras e eficientes, cumprindo os requisitos de desempenho exigidos nas diferentes áreas da engenharia civil.

De acordo com Araújo (2014), as vigas-parede são encontradas nos reservatórios superiores e inferiores com iguais condições de apoios. O autor destaca o comportamento das paredes do reservatório como placas conforme destacado por Silva (1991). Além disso, menciona que este elemento estrutural é frequentemente encontrado nas fachadas de edifícios, originando assim o termo "viga-parede". Conforme ilustrado na Figura 2.2.1.

Figura 2.2.1 – Viga-parede contínua em fachada de edifício.



Fonte: Wight e Macgregor, 2012.

Silva (1991) aponta que as paredes dos reservatórios recebem reações uniformemente distribuídas das lajes da tampa e do fundo e as transmitem aos pilares, o que torna o comportamento do elemento estrutural semelhante a uma viga tradicional. O autor também observa que, em algumas estruturas de edifícios, as vigas-parede funcionam como vigas de transição, absorvendo os esforços de um ou mais pilares e transferindo para outros pilares, conforme ilustrado na Figura 2.2.2.

Figura 2.2.2 – Viga-parede de transição.



Fonte: Wight e Macgregor, 2012.

A investigação do comportamento estrutural das vigas-parede, as condições de projeto, a influência de perturbações, a aplicação de métodos de análise estrutural, como o uso de

ferramentas de simulação e cálculos numéricos, como o MEF, bem como os Modelos de Bielas e Tirantes, na análise e dimensionamento, respectivamente, desses elementos. Torna a compreensão mais aprofundada das aplicações de vigas-parede e essencial para projetar estruturas seguras e eficientes, cumprindo os requisitos de desempenho exigidos nas diferentes áreas da engenharia civil.

2.3 TENSÕES EM VIGAS-PAREDE

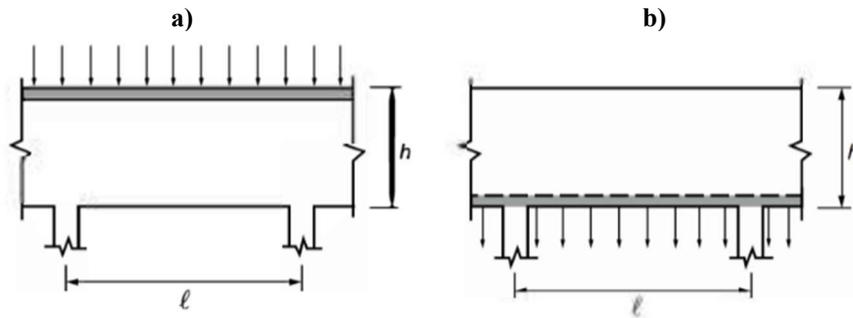
Silva (1991) destaca a importância da análise elástica em vigas-parede, tendo em vista que os resultados mostram a distribuição de tensões que causam a fissuração e, como efeito, servem como guia para a direção das fissuras e do fluxo de forças após a fissuração, uma vez que, ela começará com 33% a 50% da carga última e neste caso uma redistribuição pode ser considerada.

Conforme mencionado por Araújo (2014), a determinação dos esforços solicitantes em vigas-parede segue um procedimento semelhante ao aplicado em vigas esbeltas. Por outro lado, em vigas hiperestáticas, é fundamental dar atenção especial aos deslocamentos nos apoios, pois essas deformações podem ter um impacto significativo nos esforços solicitantes, devido à elevada rigidez dessas estruturas. Além disso, nos vãos, observa-se a presença de momentos mais elevados em comparação com vigas esbeltas. Em contrapartida, nos apoios intermediários, a situação se inverte, resultando em momentos fletores menores do que aqueles encontrados em vigas esbeltas.

Segundo Brandão *et al.* (2016), a análise da trajetória de tensões visa identificar os percursos das forças dentro de uma estrutura, desde o ponto de aplicação até o ponto de reação. Ao considerar o efeito combinado das tensões normais e cisalhantes, é possível determinar as trajetórias das tensões principais, representadas por curvas ortogonais que modelam o comportamento estrutural. Esses resultados, quando avaliados adequadamente, refletem de maneira precisa o desempenho da peça sob a influência das cargas aplicadas.

Silva (1991), Pantoja (2012) e Araújo (2014), consideram como parâmetros importantes para caracterizar o comportamento e funcional estrutural de vigas-parede a influência do ponto de aplicação da carga e o tipo de vinculação. Nesse contexto, Araújo (2014) destaca que para o dimensionamento e a disposição das armaduras é importante fazer uma distinção entre os casos de carregamento superior e inferior, bem como entre apoio direto e apoio indireto. A Figura 2.3.1 ilustra os casos de carregamento superior e inferior.

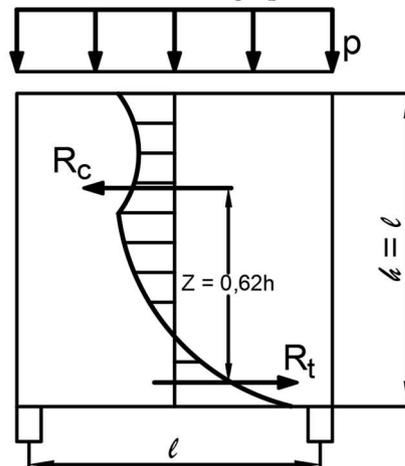
Figura 2.3.1 – Tipos de carregamentos em vigas-parede: a) carregamento superior b) carregamento inferior.



Fonte: ABNT, 2023.

A Figura 2.3.2 ilustra a distribuição de tensões normais σ_x no meio do vão de uma viga com relação l/h unitária, submetida a um carregamento distribuído uniformemente na face superior.

Figura 2.3.2 – Tensões em viga-parede com $l/h = 1$.



Fonte: Adaptado de Araújo, 2014.

A altura efetiva h_e para uma viga-parede é usualmente adotada de acordo com a Equação (2.1).

$$h_e \leq \begin{cases} l \\ h \end{cases} \quad (2.1)$$

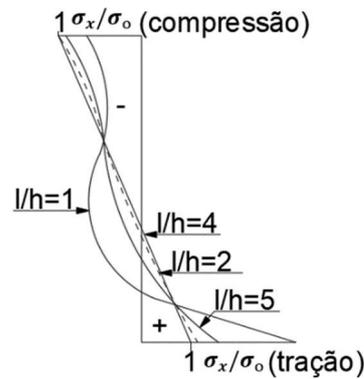
É possível observar na Figura 2.3.2, que as vigas-parede diferem das vigas esbeltas em alguns critérios, como a apresentação de uma não linearidade na distribuição das tensões e que o braço de alavanca Z , formado entre as resultantes de compressão e tração, R_c e R_t respectivamente, é igual a $0,62h$, ao contrário das vigas esbeltas que tem $Z = 0,67h$.

Na Figura 2.3.3, são apresentadas as variações das tensões normais (σ_x) no meio do vão para diferentes relações l/h , obtidas por meio do Método dos Elementos Finitos. A figura exibe

as relações σ_x/σ_o , em que $\sigma_o = 6M/bh^2$ é a tensão máxima para vigas esbeltas, com M sendo o momento fletor na seção central.

Para $l/h \geq 2$, a distribuição das tensões se assemelha àquela encontrada em vigas esbeltas, apresentando variação linear de σ_x ao longo da altura da viga. Já para as relações $l/h < 2$, a distribuição das tensões difere daquela obtida para vigas esbeltas. Nota-se também que a tensão máxima de tração na borda inferior da viga excede σ_o quando $l/h < 2$, o que impacta o momento de fissuração e, por conseguinte, as taxas de armadura mínima.

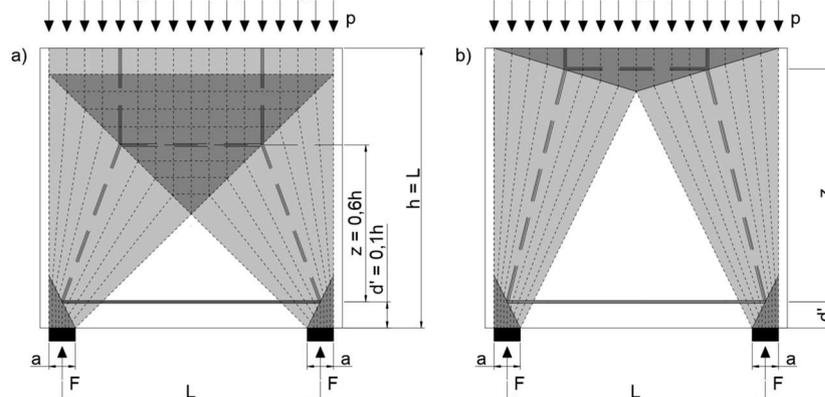
Figura 2.3.3 – Variação das tensões normais nas vigas-parede.



Fonte: Adaptado de Araújo, 2014.

De acordo com Santos (2021), em uma viga-parede biapoada com carga uniformemente distribuída, é viável estabelecer um modelo de bielas e tirantes com base no fluxo de tensões principais por meio de análise elástica (Figura 2.3.4a). Em contraste, a abordagem elástica pode se mostrar mais conservadora do que um modelo plástico (Figura 2.3.4b). Essa diferença é ainda mais notável ao considerar que normas nacionais e internacionais prescrevem armaduras secundárias mínimas, as quais contribuem para aumentar a capacidade resistente da viga-parede.

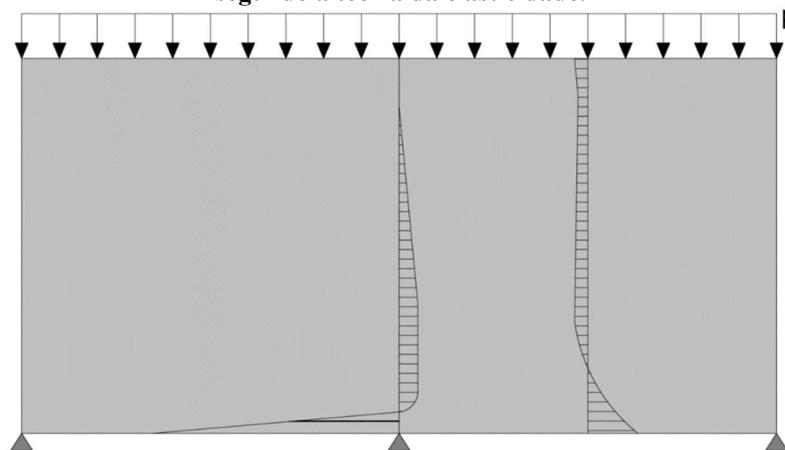
Figura 2.3.4 – Viga-parede biapoada: a) modelo baseado em tensões principais elásticas e b) modelo plástico que esgota a resistência do banzo superior.



Fonte: Adaptado de Santos, 2021.

Santos (2021) destaca que embora para vigas-parede contínuas o MBT pode ser orientado da mesma forma que para as vigas-parede biapoiadas, as tensões baseadas na teoria da elasticidade mostram que, na região dos apoios intermediários, as tensões de tração são menores se comparadas às tensões de compressão. Entretanto, a maior parte da seção possui tensões de tração. Devido a esse fator, a armadura negativa sobre o apoio costuma ter diâmetro menor e distribuída em uma faixa maior que a armadura positiva. Por outro lado, na seção do meio do vão, o comportamento se assemelha com o de vigas-parede isostáticas. Conforme ilustra a Figura 2.3.5.

Figura 2.3.5 – Distribuição de tensões, nas seções do apoio e do meio do vão, em vigas-parede contínuas segundo a teoria da elasticidade.



Fonte: Adaptado de Santos, 2021.

2.4 CRITÉRIOS DE DIMENSIONAMENTO

Timboni (2019) observa que diversos pesquisadores formularam distintas equações e expressões para os fatores relacionados às vigas-parede. Contudo, destaca-se que a fonte mais empregada para o cálculo desse elemento é a NBR 6118 (ABNT, 2023).

Segundo a NBR 6118 (ABNT, 2023) devido à altura, problemas de estabilidade, como corpo rígido e, às vezes, elástica, podem surgir, frequentemente exigindo o uso de enrijecedores de apoio ou travamentos. Além disso, perturbações, como cargas concentradas, aberturas ou engrossamentos, podem afetar significativamente o comportamento e a resistência da estrutura. Ao abordar tais complexidades, a escolha do modelo de análise torna-se crucial, este deve levar em consideração que o comportamento estrutural das vigas-parede difere substancialmente das vigas esbeltas e apresenta algumas limitações em relação aos métodos tradicionais de dimensionamento. Contudo, é importante ressaltar a possibilidade de aplicação tanto de

modelos planos elásticos lineares quanto não lineares, inclusive a utilização do Método dos Elementos Finitos.

Além disso, faz-se necessário entender os modos de ruptura das vigas-parede de concreto armado. Conforme Araújo (2014) destaca, ensaios realizados neste elemento estrutural indicam que tais modos são:

- escoamento da armadura longitudinal do banzo tracionado;
- ruptura da ancoragem da armadura longitudinal do banzo tracionado;
- esmagamento do concreto nas diagonais comprimidas próximas aos apoios;
- ruptura da armadura de suspensão para as cargas penduradas.

Desta forma para calcular e detalhar as armaduras, os modelos devem ser criados levando em consideração dos tipos de ruína mencionados. Pode-se aplicar modelos elásticos, modelos não-lineares e o modelo das bielas e tirantes que é uma opção para o dimensionamento no estado-limite último (ELU), com a geometria das treliças projetada para se assemelhar a um modelo elástico linear. A verificação da compressão máxima nas bielas pode ser realizada indiretamente, limitando as tensões de compressão nas regiões de apoio, de acordo com os parâmetros de resistência estabelecidos para as bielas e as áreas nodais que serão vistos mais adiante na seção 3.6.

2.4.1 Armadura do banzo tracionado

Conforme mencionado por Araújo (2014), é possível calcular a área da armadura longitudinal de tração, denotada por A_s , utilizando a Equação (2.2).

$$A_s = \frac{M_d}{Z f_{yd}} \quad (2.2)$$

em que:

- M_d é o valor do momento fletor, determinado como nas vigas esbeltas;
- f_{yd} é a tensão de escoamento de cálculo do aço;
- Z é o braço de alavanca.

O braço de alavanca toma os seguintes valores:

- a) Viga-parede biapoiada, segundo as Equações (2.3) e (2.4), de acordo com os critérios.

$$Z = 0,15h\left(3 + \frac{l}{h}\right), \quad \text{se } 1 < \frac{l}{h} < 2 \quad (2.3)$$

$$Z = 0,6l \quad \text{se } \frac{l}{h} \leq 1 \quad (2.4)$$

- b) Viga-parede de dois vãos, segundo as Equações (2.5) e (2.6), de acordo com os critérios.

$$Z = 0,10h\left(2,5 + \frac{2l}{h}\right), \quad \text{se } 1 < \frac{l}{h} < 2,5 \quad (2.5)$$

$$Z = 0,45l, \quad \text{se } \frac{l}{h} \leq 1 \quad (2.6)$$

- c) Viga-parede contínua com mais de dois vãos.

Para as extremidades dos vãos e os primeiros apoios intermediários, são utilizados os valores fornecidos nas Equações (2.5) e (2.66). Para os demais vãos e apoios, tem-se as Equações (2.7) e (2.8), de acordo com os critérios.

$$Z = 0,15h\left(2 + \frac{l}{h}\right), \quad \text{se } 1 < \frac{l}{h} < 3 \quad (2.7)$$

$$Z = 0,45l, \quad \text{se } \frac{l}{h} \leq 1 \quad (2.8)$$

Nas vigas-parede de único vão, a armadura do banzo inferior é distribuída entre $0,15h_e$ a $0,20h_e$, conforme indicado na Figura 2.4.1.1. A transferência dessa armadura de apoio para apoio é realizada sem escalonamento e ancorada na zona do apoio para uma força $R_{sd} \geq 0,8A_s f_{yd}$. Em apoios curtos, a ancoragem pode ser feita com ganchos fechados deitados ou por placas de ancoragem, evitando o uso de ganchos no plano vertical para reduzir riscos de fissuração.

A NBR 6118 (ABNT, 2023), estabelece que a armadura no banzo inferior tracionado de vigas-parede deve ser distribuída em uma altura de $0,15h$.

Santos (2021), ressalva que o nó sobre o apoio é submetido a tensões muito elevadas, sendo importante a análise pormenorizada dessa região. Desta forma, esse detalhamento é necessário para alargar a biela diagonal e reduzir a tensão de compressão, de modo a evitar a ruptura por esmagamento do nó sobre o apoio. Com isso, a distribuição indicada pela norma

contribui para melhorar o quadro de fissuração por flexão, já que reduz a tensão nas barras, e, consequentemente as tensões em serviço.

Figura 2.4.1.1 – Distribuição da armadura do banzo tracionado.



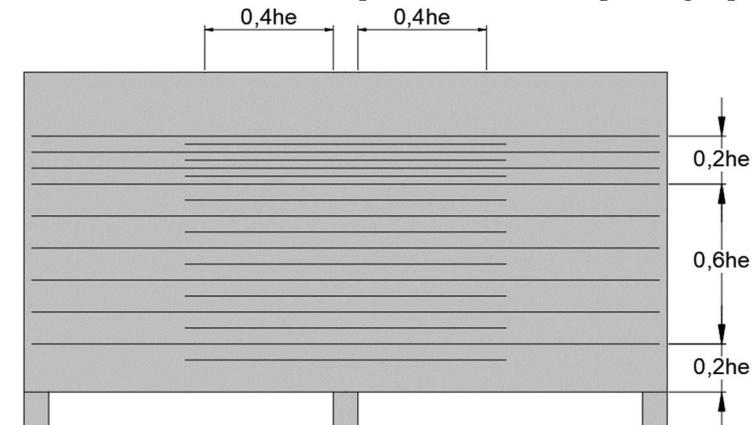
Fonte: Adaptado de Araújo, 2014.

Araújo (2014), destaca que para vigas-parede contínuas, a armadura do banzo inferior deve estender-se ao longo de todo o comprimento da parede. Se necessário, pode ser emendada sobre apoios intermediários. A ancoragem de extremidade e a distribuição da armadura na zona tracionada seguem os mesmos princípios das vigas-parede de único vão.

De acordo com Santos (2021), como as vigas-parede contínuas são estruturas hiperestáticas, é necessário calcular primeiramente as reações de apoio e em seguida estabelecer o MBT adequado. Contudo, faz-se necessário considerar a deformação por cisalhamento na análise estrutural, que para isso se faz necessário a formulação de viga de *Timoshenko*.

A armadura sobre os apoios intermediários é distribuída nas faixas indicadas na Figura 2.4.1.2, sendo pelo menos metade dela prolongada ao longo do comprimento da parede. A outra metade pode ser interrompida a uma distância de $0,4h_e$ das faces do apoio intermediário.

Figura 2.4.1.2 – Distribuição da armadura sobre os apoios intermediários para vigas-parede de dois vãos.



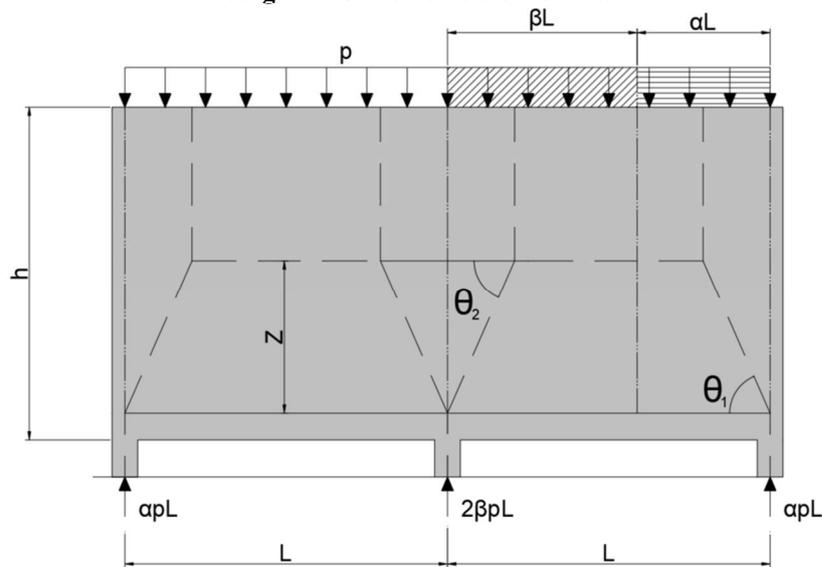
Fonte: Adaptado de Araújo, 2014.

Conforme a NBR 6118 (ABNT, 2023), a altura de distribuição da armadura superior deve ser feita considerando três faixas na altura h , não se considerando para h , no entanto, os valores superiores ao vão teórico ($3 \geq L/h \geq 1$):

- 20% superiores de h : $A_{s1} = (L/2h)A_{s, neg}$;
- 60% superiores de h : $A_{s2} = (1,5 - L/2h)A_{s, neg}$;
- 20% superiores de h : região da armadura inferior positiva.

Araújo (2014) alinha-se a NBR 6118 (ABNT, 2023), também afirmando que a armadura negativa é distribuída em uma faixa de altura de $0,8h_e$. Contudo, na faixa superior com $0,2h_e$ de altura, coloca-se a fração $0,5(l/h - 1) \geq 0,25$ da armadura calculada. O restante, quando $h > 1$, deve ser uma malha ortogonal com predominância de barras horizontais - Figura 2.4.1.2. Na Figura 2.4.1.3 é ilustrado um modelo de bielas e tirantes para vigas-parede contínuas de dois vãos iguais submetidos a um carregamento distribuído.

Figura 2.4.1.3 – Modelo de bielas e tirantes para uma viga-parede contínua de dois vãos iguais e carga uniformemente distribuída.



Fonte: Adaptado de Santos, 2021.

Diferentemente das vigas esbeltas, as vigas-parede tem uma variação não-linear de tensões normais σ_x . Desta forma, a Equação (2.9) para o cálculo da armadura longitudinal mínima que dimensiona a viga para o momento de fissuração não pode ser usada, mas mantida as suas características gerais, que ainda são válidas. Contudo, o momento de fissuração das vigas-parede é menor do que o dado por $M_r = bh^2f_{ct}/6$, devido a distribuição de tensões σ_x/σ_o . Logo, as taxas de armadura mínima também serão menores.

$$A_{s,min} = \frac{M_r}{Z f_{yd}} \quad (2.9)$$

A equação que descreve o momento de fissuração para vigas-parede é dada por:

$$M_r = k_1 \frac{bh^2}{6} f_{ct} \quad (2.10)$$

em que k_1 é um coeficiente determinado numericamente pelo Método dos Elementos Finitos.

Substituindo a Equação do braço de alavanca (2.3) em (2.9), tem-se a Equação (2.11).

$$A_{s,min} = \left(\beta \frac{f_{ct}}{f_{yd}} \right) bh \quad (2.11)$$

em que

$$\beta = \frac{k_1}{0,9(3 + k_2)} \quad (2.12)$$

em que $1 < k_2 = l/h < 2$.

Devido a semelhança com as vigas esbeltas em que $\beta = 0,20$, a Tabela 2.1 para vigas-parede com carregamento uniformemente distribuído na face superior foi obtida através do Método dos Elementos Finitos.

Tabela 2.1 – Distribuição da armadura sobre os apoios intermediários.

$k_2 = l/h$	k_1	β	$\lambda = \beta/0,2$
2,0	0,91	0,20	1,00
1,5	0,73	0,18	0,90
1,25	0,57	0,15	0,75
10	0,38	0,11	0,55

$$A_{s,min}VP = \lambda A_{s,min}VE$$

$A_{s,min}VP$ = armadura mínima das vigas – parede

$A_{s,min}VE$ = armadura mínima das vigas esbeltas

Fonte: Adaptado de Araújo, 2014.

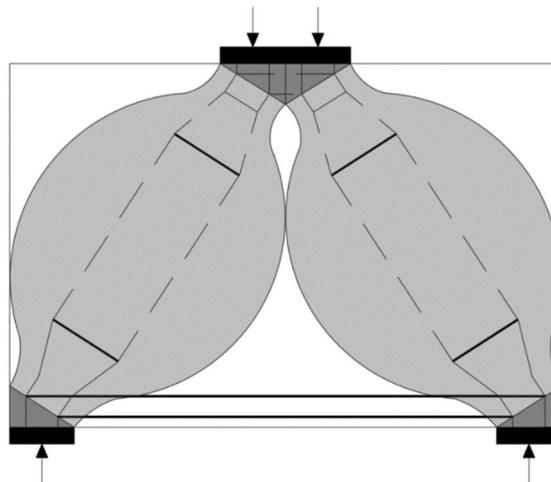
Segundo Santos (2021), para vigas-parede biapoiadas com carga uniformemente distribuída, algumas regras estabelecidas podem ser aplicadas. Por exemplo, é comum adotar o braço de alavanca $z = 0,6h$, para $1 < L/h \leq 2$, ou $z = 0,6L$, caso $h \geq L$ (Figura 2.3.4a).

Contudo, para que se atenda a NBR 6118 (ABNT, 2023), deve-se assumir que o braço de alavanca $z = 0,5L$, para $h > L$. Isso faz com que o ângulo de inclinação máxima entre biela e tirante seja $\theta = 63,4^\circ$, em que a armadura principal é dada pela equação (2.13).

$$A_s = \frac{M}{zf_{yd}} = \frac{p_d L^2 / 8}{0,5L f_{yd}} = \frac{p_d L}{2} \cot g \theta = \frac{p_d L}{4 f_{yd}} \quad (2.13)$$

Ainda segundo o autor supracitado é importante destacar que o dimensionamento plástico apresentado na Figura 2.3.4b pode resultar em fissuração excessiva do concreto em serviço. Uma abordagem indireta para atender aos Estados Limites de Serviço (ELS) envolve assumir inclinações máximas de bielas em relação às armaduras dentro dos limites normativos e utilizar armaduras secundárias que "costuram" as trações que atravessam os campos de compressão (Figura 2.4.1.4).

Figura 2.4.1.4 – Campos de tensão idealizados mostrando a necessidade de armaduras secundárias.



Fonte: Adaptado de Santos, 2021.

2.4.2 Armadura de suspensão

Segundo Araújo (2014), para cargas distribuídas uniformemente na face inferior de uma viga-parede, a armadura de suspensão deve consistir em estribos verticais que envolvam a armadura longitudinal inferior, atingindo uma altura não inferior a h_e . A área necessária para a armadura de suspensão é dada pela Equação (2.14) em cm^2/m .

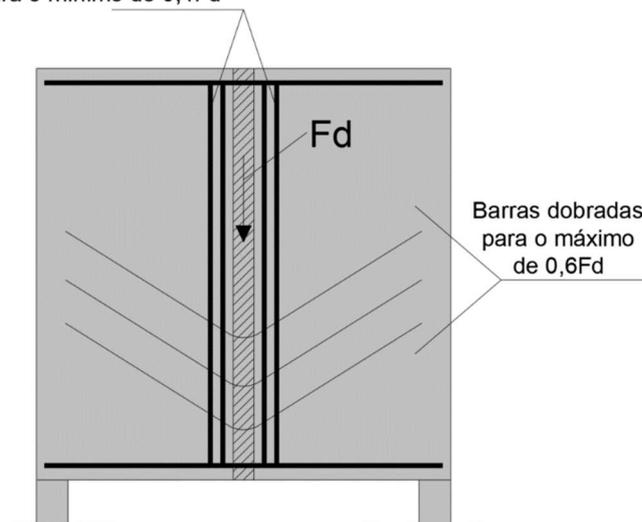
$$A_s = \frac{P_d}{f_{yd}} \quad (2.14)$$

Em casos de cargas concentradas elevadas, como em paredes apoiadas indiretamente, estribos verticais ou uma combinação de estribos com barras dobradas podem ser utilizados. Em se tratando da última opção, as barras dobradas devem ter uma inclinação entre 50° e 60° em relação à horizontal e podem absorver no máximo 60% da carga concentrada. A área das barras dobradas é calculada pela Equação (2.15).

$$A_s = \frac{\overline{F}_d}{2\text{sen}\alpha f_{yd}} \quad (2.15)$$

em que $\overline{F}_d \leq 0,6F_d$ é a parcela da força a ser levantada pelas barras dobradas e α é o ângulo de inclinação dessas barras. A Figura 2.4.2.1 indica a solução com estribos e barras dobradas.

Figura 2.4.2.1 – Armadura de suspensão para cargas indiretas concentradas.
Estribos para o mínimo de 0,4F_d



Fonte: Adaptado de Araújo, 2014.

A parte não mencionada da parede deve ser reforçada com uma armadura de pele em malha, presente em ambas as faces, com espaçamentos não excedendo duas vezes a espessura da parede ou 30 cm. A densidade mínima dessa armadura deve ser de 0,10% em cada face, em ambas as direções.

2.4.3 Tensões de compressão nos apoios (verificação)

Como mencionado, é possível realizar o cálculo de vigas-parede de concreto armado utilizando modelos de bielas e tirantes. A Figura 2.4.3.1 ilustra o MBT para uma viga-parede biapoiada com uma carga distribuída uniformemente em sua face superior.

Onde a reação de apoio é dada pela Equação (2.16).

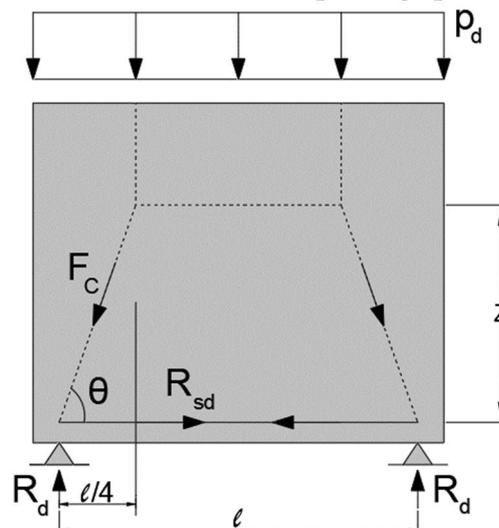
$$R_d = \frac{p_d l}{2} \quad (2.16)$$

em que p_d é a carga de cálculo uniformemente distribuída. A partir da Figura 2.4.3.1, obtém-se a expressão de equilíbrio:

$$R_{sd} Z = R_d \frac{l}{4} \quad (2.17)$$

em que Z é o braço de alavanca dado nas Equações (2.3) e (2.4).

Figura 2.4.3.1 – Modelo biela-tirante para viga-parede biapoiada.



Fonte: Adaptado de Araújo, 2014.

A partir da Figura 2.4.3.1 pode-se notar que o momento fletor na seção central da viga-parede é dado pela Equação (2.18).

$$M_d = R_d \frac{l}{4} \quad (2.18)$$

Levando em consideração que $R_{sd} = A_s f_{yd}$ e substituindo (2.17) em (2.16) conclui-se que a Equação (2.16) é igual a Equação (2.2), usada para calcular a armadura no banzo inferior da viga.

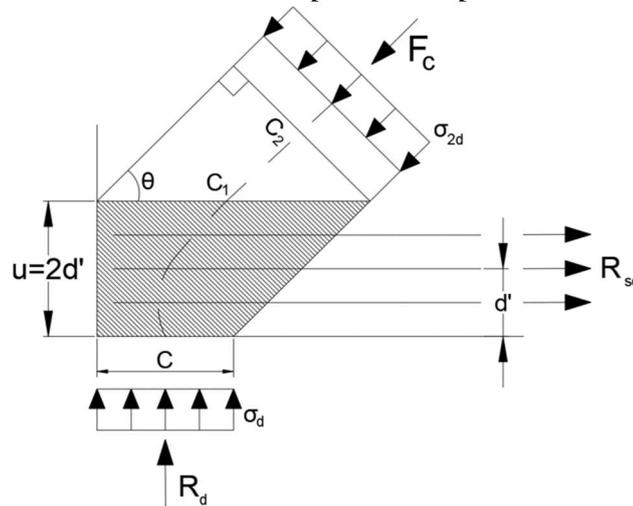
Outros dados importantes que se obtém do modelo são o ângulo de inclinação e a força de compressão da biela, dados pelas Equações (2.19) e (2.20).

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{4}{l} \quad (2.19)$$

$$F_c = \frac{R_d}{\operatorname{sen}\theta} \quad (2.20)$$

A fim de prevenir a compressão excessiva do concreto, é essencial restringir as tensões de compressão na área dos apoios. Estas tensões de compressão são determinadas pela análise do nó de apoio do modelo, como exemplificado na Figura 2.4.3.2.

Figura 2.4.3.2 – Tensões de compressão em apoios de extremidade.



Fonte: Adaptado de Araújo, 2014.

em que:

- c = largura do apoio;
- d' = distância do centroide das armaduras do banzo tracionado até a face inferior da viga-parede;
- u = altura no nó de apoio.

As dimensões de c_1 e c_2 , da Figura 2.4.3.2, são dadas pelas Equações (2.21) e (2.22).

$$c_1 = c + u \operatorname{cotg}\theta \quad (2.21)$$

$$c_2 = (c + u \operatorname{cotg}\theta) \operatorname{sen}\theta \quad (2.22)$$

A tensão σ_d no apoio é dada pela Equação (2.23).

$$\sigma_d = \frac{R_d}{bc} \quad (2.23)$$

em que:

- R_d = cálculo da reação;
- b = largura da viga-parede;

A tensão na biela inclinada é dada pela Equação (2.24).

$$\sigma_{2d} = \frac{F_d}{bc_2} \quad (2.24)$$

Substituindo (2.19) e (2.21) em (2.23), temos a Equação (2.25).

$$\sigma_{2d} = \frac{R_d}{bc_2 \text{sen}\theta} \quad (2.25)$$

De acordo com Araújo (2014), as tensões no apoio e na biela inclinada, σ_d e σ_{2d} , respectivamente precisam ser controladas para prevenir o esmagamento do concreto na área de apoio. Para considerar a diminuição da resistência à compressão do concreto devido às tensões de tração transversais (na zona de ancoragem das armaduras do banzo), considerando a possibilidade de fissuração do concreto, é necessário utilizar um valor reduzido para a resistência à compressão do concreto.

Com isso, as seguintes condições devem ser garantidas pelas Inequações (2.26).

$$\sigma_d \leq f_{cdr} \quad e \quad \sigma_{2d} \leq f_{cdr} \quad (2.26)$$

em que f_{cdr} é dada pela Equação (2.27).

$$f_{cdr} = 0,60 \left(1 - \frac{f_{ck}}{250} \right) f_{cd} = 0,60 \alpha_v f_{cd} \quad (2.27)$$

com f_{ck} em Mpa.

A partir das Equações (2.22) e (2.24) verifica-se que $\sigma_{2d} \leq \sigma_d$ sempre que $u \geq c \cotg\theta$. Quando a situação mencionada for válida, basta verificar a tensão de contato no apoio. Contudo,

se $u < c \cot\theta$ a tensão na biela inclinada deve ser verificada, uma vez que esta é mais solicitada.

Pode-se concluir que para reforçar a segurança da biela inclinada, a armadura longitudinal do banzo tracionado deve ser distribuída em uma ampla faixa de altura, utilizando barras em múltiplas camadas. Normalmente, a faixa indicada na Figura 2.4.1.1 é adequada para garantir a segurança das bielas inclinadas.

Desta maneira, nos apoios das extremidades das vigas-parede, as seguintes verificações são realizadas:

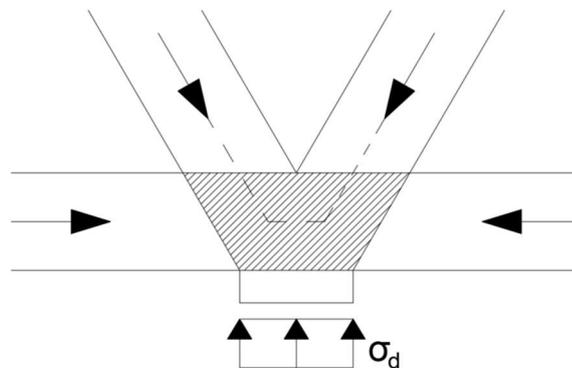
$$\text{se } u \geq c \cot\theta \quad \Rightarrow \quad \sigma_d \leq f_{cdr} \quad (2.28)$$

$$\text{se } u < c \cot\theta \quad \Rightarrow \quad \sigma_{2d} \leq f_{cdr} \quad (2.29)$$

Nos apoios intermediários de vigas-parede contínuas, as bielas de compressão geram um estado de compressão biaxial, conforme representado na Figura 2.4.3.3. Desta forma, basta garantir que:

$$\sigma_d \leq 0,85 f_{cd} \quad (2.30)$$

Figura 2.4.3.3 – Apoio intermediário de viga-parede contínua.



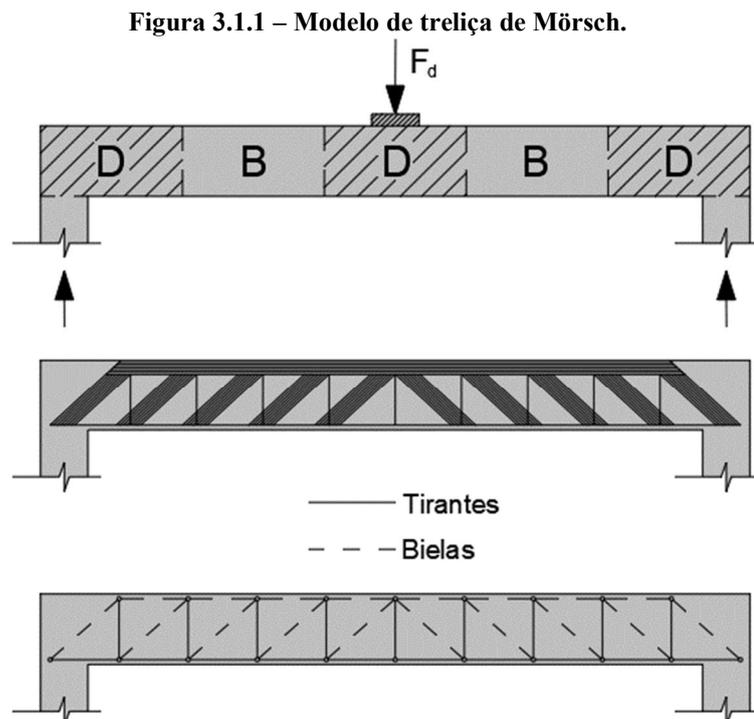
Fonte: Adaptado de Araújo, 2014.

3 MODELO DE BIELAS E TIRANTES

3.1 INTRODUÇÃO

A grande parte dos elementos comuns na engenharia estrutural podem ser dimensionados seguindo a clássica Hipótese de *Euler-Bernoulli* (chamadas de regiões B), que pressupõe que a seção permanece plana após a deformação. Contudo, ocorrem diversas situações em que essa hipótese não se aplica (ditas regiões D), tornando inviável o uso dos métodos de dimensionamento convencionais. Nestes casos, conhecidos como especiais, é necessário recorrer a abordagens alternativas de análises, como o Método dos Elementos Finitos e para o dimensionamento, como o Método das Bielas e Tirantes (MBT).

Desta forma, o fato de que o MBT parte da ideia do modelo de treliça para dimensionamento e detalhamento de estruturas de concreto armado não é recente e remonta ao início do século passado, quando Ritter (1899) e Morsch (1909) sugeriram essa abordagem como uma solução para calcular a armadura de cisalhamento em vigas fletidas, visando a resistência aos esforços cortantes. Na analogia da treliça supõe-se que os carregamentos aplicados na viga percorrem um caminho semelhante ao de uma treliça até chegar aos apoios. A "Treliça de Morsch" como ficou conhecida, foi divulgada após seus ensaios usando barras dobradas a 45° e estribos a 90°, como mostrado na Figura 3.1.1.



Fonte: Adaptado de Silva, 1991.

Este sistema é composto por componentes sob tração denominados tirantes e componentes sob compressão conhecidos como bielas. Após o surgimento da analogia de treliça, tornou-se possível diversas simplificações, dentre elas:

- Banzos superior e inferior paralelos: um de concreto sob compressão e um de armadura submetida a tração, respectivamente;
- Bielas são delimitadas pelas fissuras ($\theta = 45^\circ$);
- Diagonais;
- Montantes formados por estribos com $45^\circ < \alpha < 90^\circ$.

Sendo as diagonais e montantes responsáveis por resistir às cargas de compressão e tração, respectivamente. Na prática este modelo conduz a uma quantidade exagerada de armadura transversal. Entretanto, as hipóteses básicas de Morsch continuam válidas para o dimensionamento de vigas de concreto armado.

De acordo com Aguiar (2018), a analogia da treliça clássica só pode representar as regiões de regularidade das estruturas, não sendo aplicável em regiões com descontinuidade estática ou geométrica, como forças pontuais, variações bruscas de seção e aberturas, entre outras. Para cobrir esses casos eram usados no passado procedimentos empíricos.

As diagonais comprimidas apresentam inclinação θ menor ou igual a 45° em relação ao eixo longitudinal do elemento estrutural, o comportamento da diagonal se dá segundo as fissuras, uma vez que a diagonal está compreendida no espaço entre duas fissuras. Experimentalmente, observa-se que as inclinações das fissuras diminuem em relação aos apoios, valendo aproximadamente 90° na região central da viga.

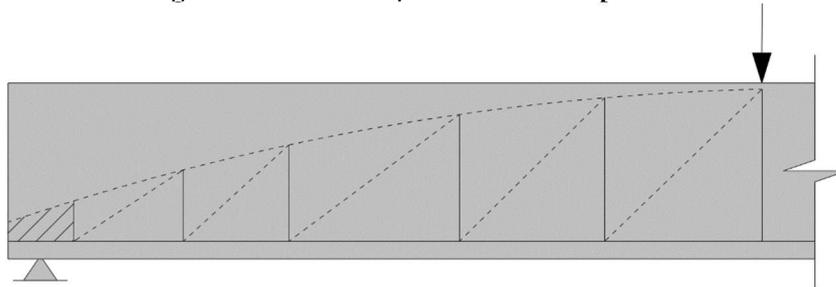
Diversos pesquisadores contribuíram ao longo das décadas para aprimorar o modelo original de análise de vigas em concreto armado. Em particular, Emílio Baumgart (1943) introduziu modificações detalhadas nas barras dobradas, classificando-as como "superiores" (nos apoios) e "inferiores" (nos vãos).

Leonhard (1964) realizou ensaios que demonstraram que é possível utilizar apenas estribos, dispensando as barras dobradas. Ele também evidenciou que a quantidade necessária de estribos pode ser menor do que a prevista pelo modelo original de Morsch. Leonhard observou que, nas regiões mais sujeitas a esforços cortantes, a inclinação das fissuras e, conseqüentemente, das diagonais de concreto, é menor que os 45 graus considerados por Morsch. Isso ocorre porque parte do esforço cortante é absorvido na zona do concreto comprimido, devido à inclinação do banzo comprimido, conforme a Figura 3.1.2. Leonhard

ressaltou que o cisalhamento não é resistido exclusivamente pelas armaduras, uma vez que existem outros mecanismos em questão que não foram considerados por Mörsch.

Santos (2006) afirma que o modelo propõe uma treliça de banzos paralelos em quase toda a extensão da viga, sendo que apenas nas regiões dos apoios o banzo superior inclina-se até encontrar com o inferior. Conforme a Figura 3.1.2.

Figura 3.1.2 – Inclinação do Banzo comprimido.



Fonte: Adaptado de Silva, 1991.

Do antes exposto, depreende-se a existência de muitas contribuições para aprimorar o modelo de dimensionamento de estruturas de concreto armado submetidas a esforços de cisalhamento e torção. Mesmo com tantos avanços nas pesquisas desenvolvidas na intenção do aperfeiçoamento, até hoje as hipóteses básicas da Treliça de Mörsch continuam válidas para vigas de concreto armado.

Atualmente a NBR 6118 (ABNT, 2023), estabelece que o desenvolvimento do ângulo das bielas possui uma limitação e devem possuir tangente entre 0,57 e 2, ou seja, $29,68^\circ$ e $63,43^\circ$.

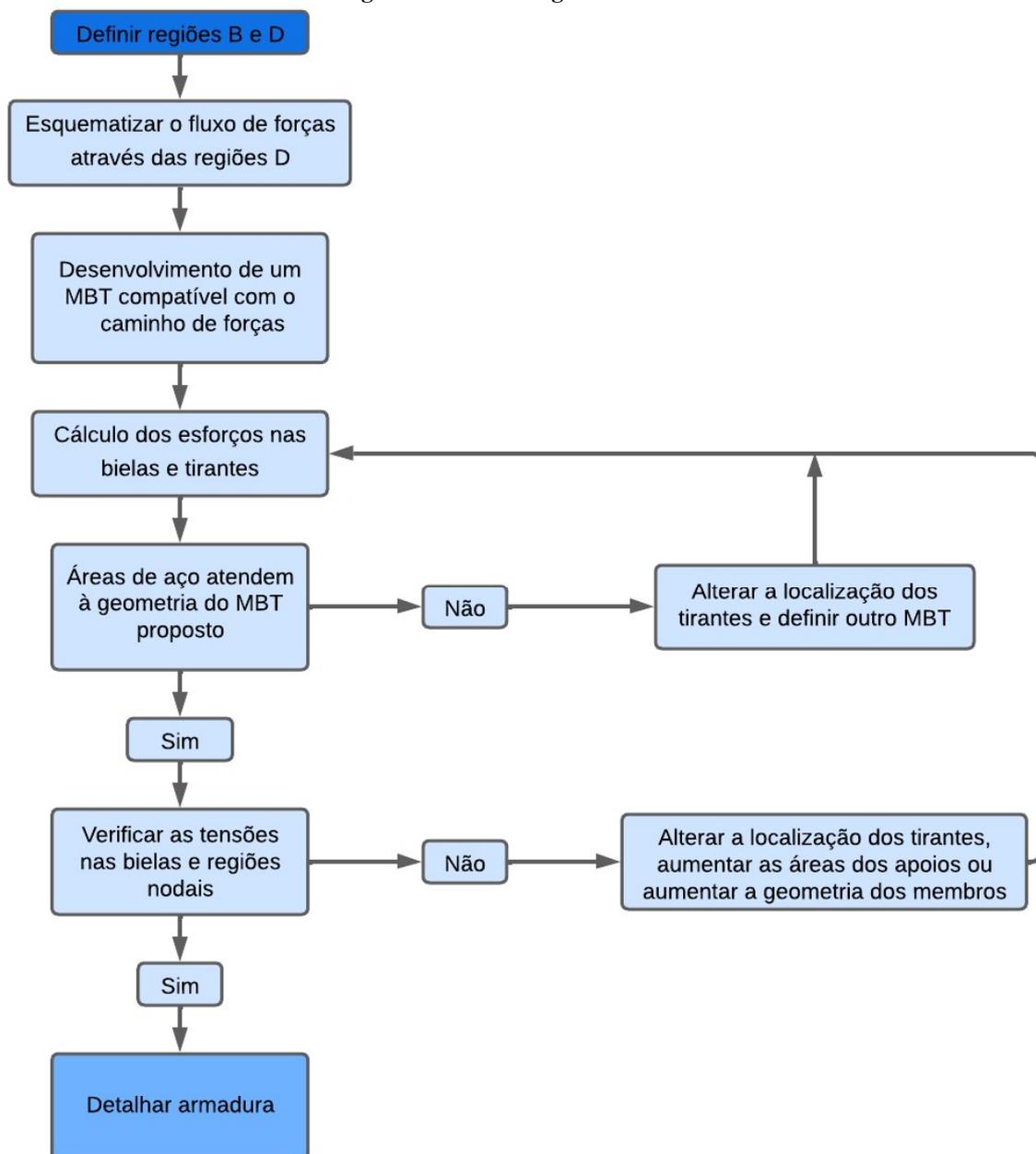
Um Modelo de Bielas e Tirantes (*Strut-and-tie models - STM*) é uma representação simplificada da estrutura real, na qual a estrutura é tratada como uma treliça equivalente. Nesse modelo, os esforços axiais em cada elemento são determinados com base nas cargas aplicadas. A treliça em questão deve atender às suposições do teorema do limite inferior da plasticidade. O processo de calcular os esforços axiais nos elementos é essencial para o dimensionamento das armaduras requeridas e para a avaliação da resistência adequada das bielas, tirantes e dos nós.

Conforme aponta Ladeira (2019), em linhas gerais, um projeto envolvendo o MBT apresenta o roteiro descrito nos passos I a VI a seguir, e mostrado de forma esquemática pela Figura 3.1.3.

- I. Identificação das regiões com descontinuidade através do Princípio de Saint Venant;
- II. Cálculo dos esforços solicitantes no contorno da região D. Para tanto, forças distribuídas devem ser substituídas por cargas concentradas equivalentes;

- III. Concepção do modelo topológico da treliça no interior do contínuo de concreto. Nesta etapa, os eixos das bielas e tirantes devem ser orientados para coincidirem aproximadamente com os eixos dos campos de tensões principais de compressão e tração, respectivamente;
- IV. Cálculos dos esforços nas barras da treliça;
- V. Verificação da resistência nas bielas e regiões nodais quanto ao esmagamento e cálculo da área de aço necessária para os tirantes. O detalhamento da armadura deve assegurar a adequada condição de ancoragem além de prever armadura de pele mínima para controle da fissuração;
- VI. Aperfeiçoamento do modelo, se necessário.

Figura 3.1.3 – Fluxograma do MBT.



Fonte: Adaptado de Ladeira, 2019.

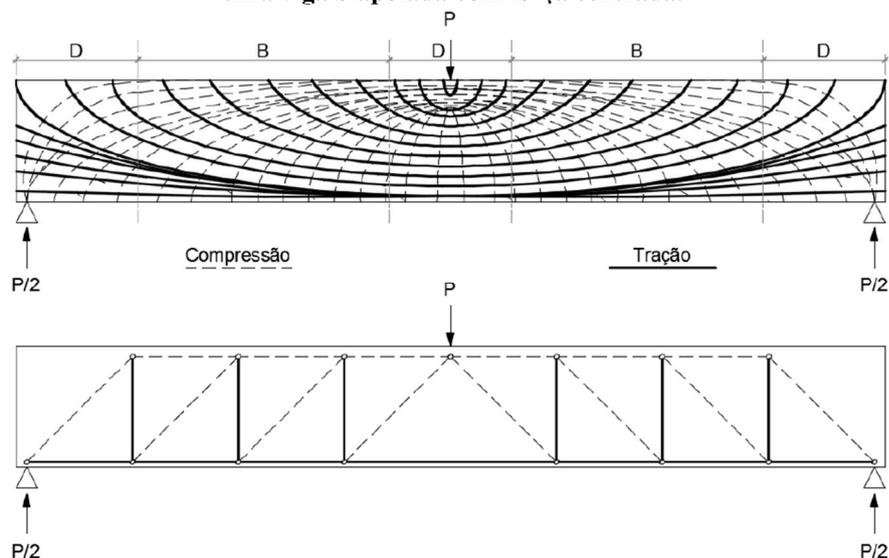
3.2 DEFINIÇÃO GEOMÉTRICA DO MODELO

3.2.1 Fundamentos do modelo

Schlaich *et al.* (1987) sugeriram a aplicação generalizada da analogia da treliça, sob a forma de um Modelo de Bielas e Tirantes, a todas as partes de estruturas de concreto armado. Essa proposta se baseia no comportamento eficaz das estruturas de concreto armado, onde as forças se deslocam por campos de tensões de compressão interligados por tensões de tração. O Modelo de Bielas e Tirantes simplifica esse comportamento, concentrando as tensões em elementos unidimensionais, as bielas para compressão e os tirantes para tração, conectando-os por nós, tornando o entendimento do comportamento das estruturas de concreto mais claro, como segue na Figura 3.2.1.1.

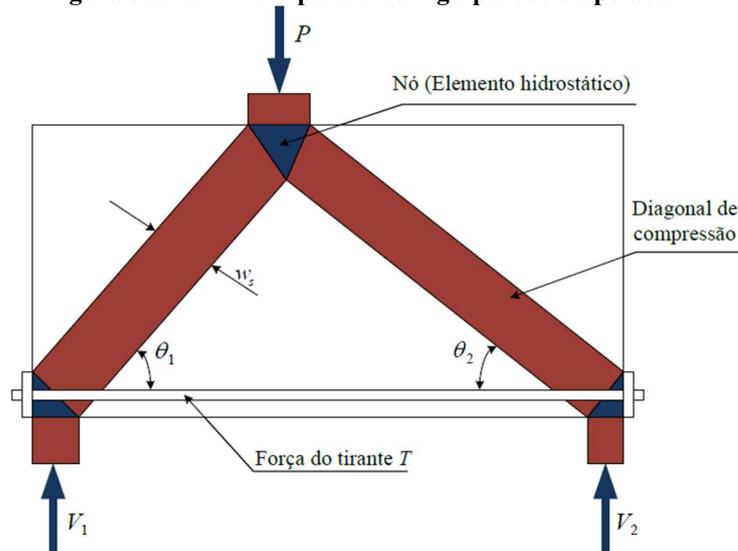
De acordo com Silva (1991), os Modelos de Bielas e Tirantes são representações discretas dos campos de tensões nos elementos estruturais de concreto armado,. As bielas são idealizações dos campos de tensão de compressão no concreto, e os tirantes, campos de tensão de tração que podem ser absorvidos por uma ou várias camadas de armadura. O modelo idealizado, que é uma estrutura de barras, concentra todas as tensões em barras comprimidas e tracionadas ligando-as através de nós, conforme ilustrado na Figura 3.2.1.2.

Figura 3.2.1.1 – Campo de tensões de compressão e tração e modelo equivalente de bielas e tirantes para uma viga biapoiada com força centrada.



Fonte: Aguiar, 2018.

Figura 3.2.1.2 – MBT para uma viga-parede biapoada.



Fonte: Pantoja, 2012.

Em certos casos, o concreto pode absorver tensões de tração, como em lajes sem armadura transversal. Ao conhecer um modelo apropriado para uma região da estrutura, as forças nas bielas e tirantes são calculadas automaticamente, mantendo o equilíbrio entre forças internas e externas. Schlaich *et al.* (1987), sugeriram analisar o comportamento da estrutura nos estados elástico e plástico por meio da modelagem. Uma vez que, a orientação do modelo é definida através das trajetórias de tensões elásticas, o modelo pode ser ajustado para aumentar a resistência da estrutura quando o objetivo é obter a carga última, modificando a posição das bielas e tirantes. No entanto, em áreas com baixas tensões, o modelo pode desviar-se do elástico, podendo negligenciar a capacidade última da estrutura impedindo o cálculo de sua carga de colapso, conforme salientado por Souza (2004). Quando as tensões elásticas são conhecidas, a direção das bielas pode ser definida com base na direção média das tensões de compressão.

O modelo de bielas e tirantes oferece a vantagem da generalidade, permitindo uma representação aproximada, mas realista e sistemática, de uma ampla gama de elementos estruturais de concreto armado e protendido. Isso fornece aos engenheiros estruturais uma visão física intuitiva e abrangente do comportamento desses elementos. Esse modelo é especialmente aplicável a elementos com descontinuidades, como consolos, apoios dentados, aberturas em vigas, vigas-parede e nós de pórtico. Anteriormente, esses elementos eram frequentemente projetados com base em recomendações práticas ou experiência passada, o que nem sempre resultava em cálculos precisos em situações desconhecidas.

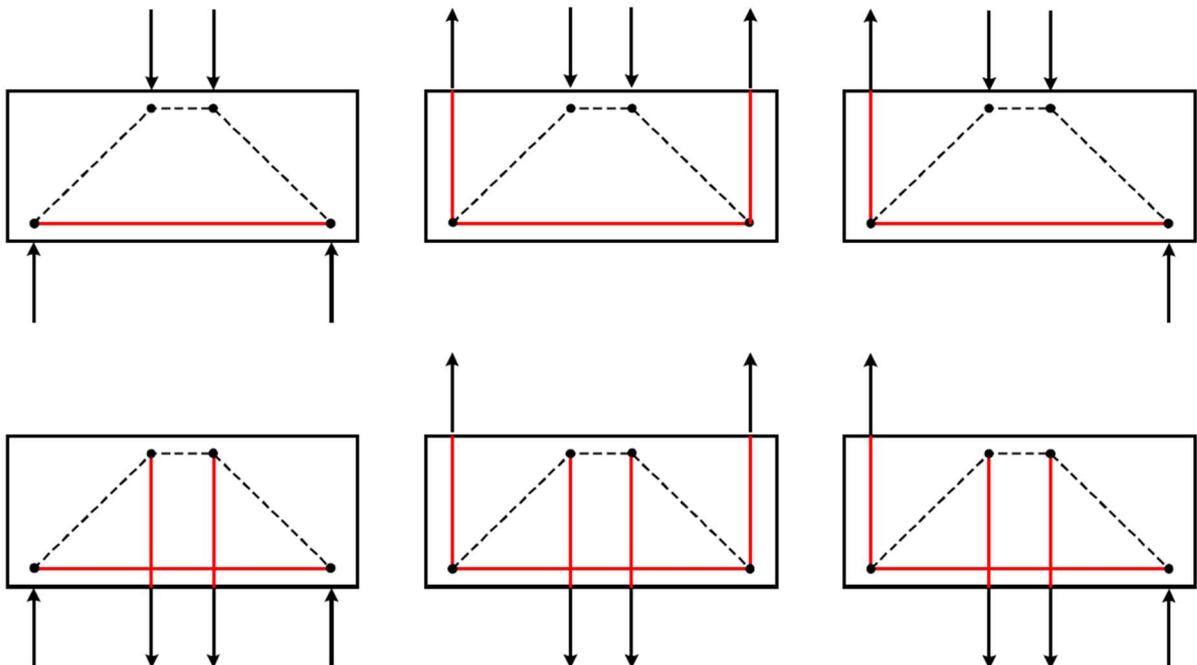
Segundo Pantoja (2012), o Modelo de Bielas e Tirantes é concebido com base na geometria do elemento estrutural, fluxo de tensões no interior da estrutura e nas condições de

apoio e distribuição dos carregamentos atuantes. Os tipos de ações atuantes, área de aplicação das ações e reações, ângulos existentes entre as barras, espessura da camada para distribuição das armaduras, cobrimentos, entre outros, são os parâmetros definidores da geometria do modelo.

Além disso, Santos (2021), ressalta que Modelos de Bielas e Tirantes e campos de tensões são fundamentados no teorema estático da teoria da plasticidade e permitem o dimensionamento e o detalhamento de estruturas de concreto estrutural. Com base em observações minuciosas do comportamento de estruturas de concreto e em numerosos testes experimentais, esta ferramenta é clara e altamente aplicável e deve fazer parte da “caixa de ferramentas” de todo engenheiro estrutural.

Para Silva (1991), caso se disponha das tensões elásticas e suas direções principais através de uma análise elástica, o desenvolvimento do modelo é imediato. Esta análise elástica pode ser feita utilizando métodos numéricos. A direção das bielas pode, então, ser adotada de acordo com a direção média das tensões de compressão ou os elementos (bielas e tirantes) mais importantes podem ser posicionados no centro de gravidade dos diagramas de tensão correspondentes. Para ilustrar, a Figura 3.2.1.3 apresenta alguns modelos de bielas e tirantes para vigas-parede em função dos carregamentos aplicados.

Figura 3.2.1.3 – Modelos normativos para vigas-parede com diversos carregamentos.



Fonte: CEB-FIP, 2010.

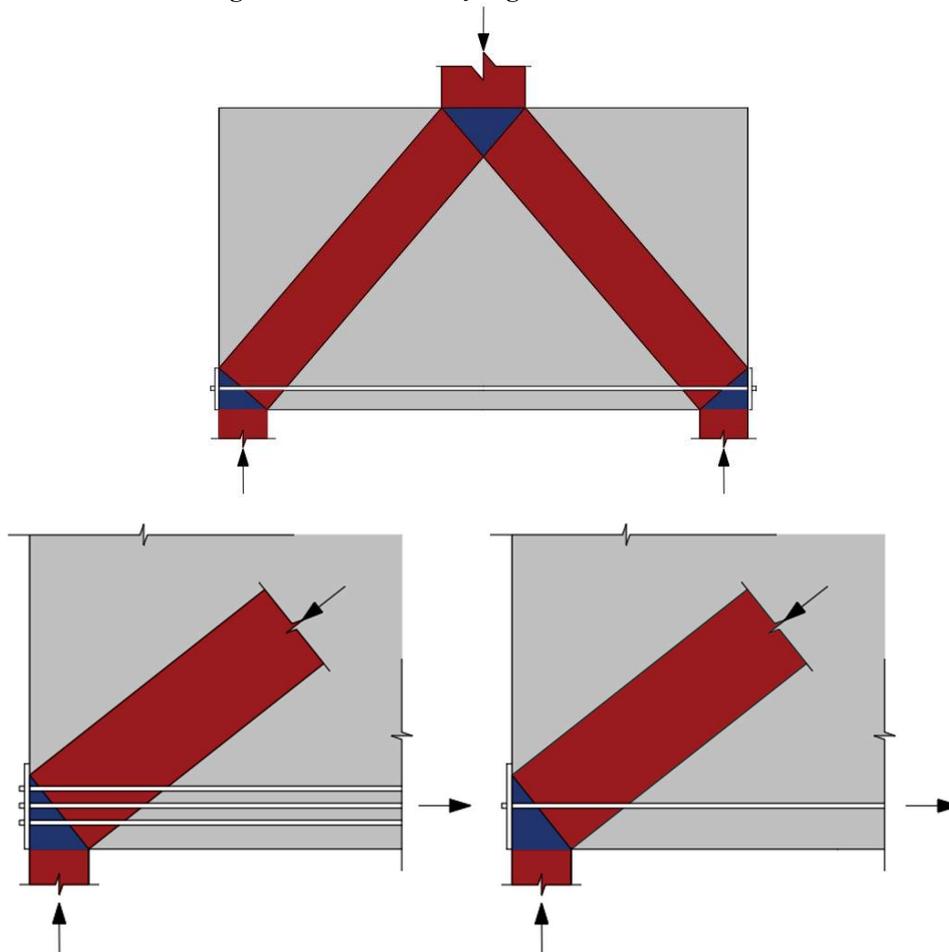
3.2.2 Concepção da geometria

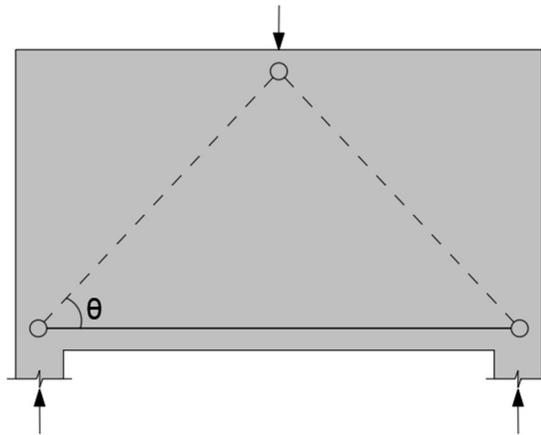
De acordo com Silva (1991), a geometria do modelo pode ser obtida analisando-se os seguintes aspectos:

- tipos de ações atuantes;
- ângulos entre bielas e tirantes;
- área de aplicação das ações e reações;
- número de camadas da armadura;
- cobertura da armadura.

Os ângulos entre as bielas e tirantes são definidos pela distribuição das tensões elásticas geradas pelas cargas atuantes. As dimensões das bielas e das zonas nodais são influenciadas pela área de aplicação das forças e reações, pelo número de camadas e pela cobertura da armadura. A Figura 3.2.2.1 ilustra o modelo para uma viga-parede simplesmente apoiada submetida a uma força concentrada no meio do vão. As áreas em azul representam as regiões nodais.

Figura 3.2.2.1 – Definição geométrica do modelo.





Fonte: Adaptado de Silva, 1991.

Segundo Santos (2021), a aplicação da teoria da plasticidade no dimensionamento de estruturas de concreto implica a inexistência de apenas um modelo, e é comum o mesmo problema ser resolvido de maneiras diferentes. Logo, a primeira e mais importante tarefa de um engenheiro de estruturas é encontrar um modelo para uma determinada geometria e conjunto de cargas que seja adequado ao concreto estrutural. O mesmo autor também comenta sobre a observação feita por Schlaich *et al.* (1987), recomendando que, para garantir os requisitos de ductilidade, os modelos de bielas e tirantes sejam baseados nas direções das tensões principais determinadas por meio de uma solução elástica linear.

3.3 REGIÕES B E D

Schlaich *et al.* (1987) considera para as regiões de descontinuidade o princípio de Saint Venant que diz: “Os efeitos localizados provocados por cargas concentradas dissipam-se em regiões suficientemente distantes do ponto de aplicação de carga.” Isso implica que os elementos estruturais de concreto armado podem ser divididos em regiões de descontinuidade (grandes descontinuidades de deformações, chamadas de regiões D), onde o método de dimensionamento deveria ser diferente das demais regiões em que a ideia de linearidade é válida, chamadas de regiões B (onde se aplicam as hipóteses de Bernoulli).

Beer *et al.* (2011) indica que as tensões nas proximidades dos pontos de aplicação de forças concentradas têm o potencial de atingir valores significativamente superiores ao valor médio da tensão no componente. Quando há descontinuidades em um componente estrutural, como um furo ou uma mudança abrupta na seção transversal, é possível observar elevados valores de tensões localizadas próximos à descontinuidade. Essa hipótese justifica as regiões D em um elemento estrutural.

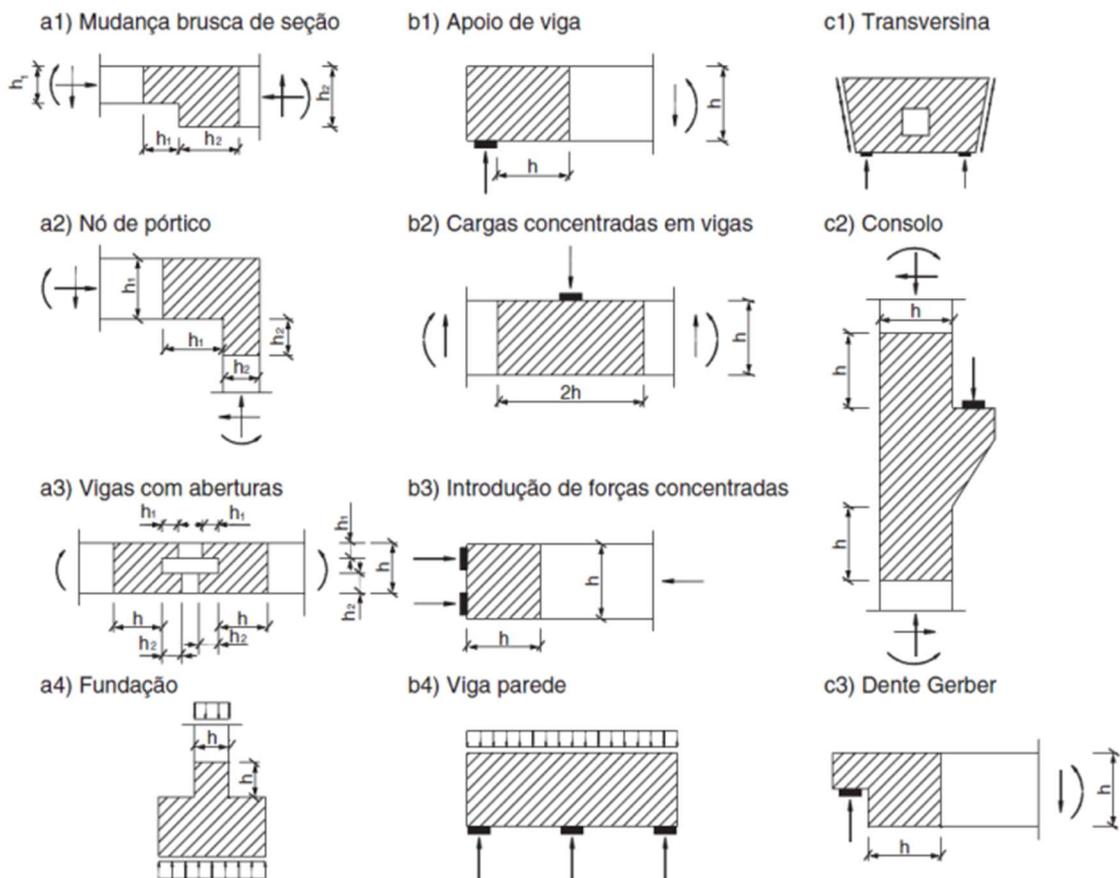
Soriano (2009) destaca que na *Teoria de Viga de Bernoulli-Euler*, também denominada *Teoria Clássica de Viga*, supõe-se que cada seção transversal permaneça plana e normal ao eixo geométrico deformado. A *Teoria de Timoshenko* inclui a deformação causada pelo esforço cortante.

A NBR 6118 (ABNT, 2023), traz alguns critérios dessa metodologia aplicada a projetos de elementos estruturais especiais como sendo aqueles com descontinuidade generalizada, geométricas ou de cargas que afetam o comportamento do elemento estrutural como um todo. Em geral, o limite entre as regiões B e D pode ser considerado localizado a uma distância h (altura da seção transversal do elemento estrutural considerado da seção efetiva da descontinuidade).

A Figura 3.3.1 ilustra situações típicas de regiões D (nas áreas hachuradas) com distribuição de deformações não linear devido à:

- descontinuidade geométrica,
- descontinuidade estática e
- descontinuidade geométrica e estática.

Figura 3.3.1 – Situações típicas de Regiões D (hachurada).



Fonte: ABNT, 2023.

Em uma estrutura qualquer, podem haver várias regiões D, como estruturas moldadas in loco, pré-moldadas, etc. A proximidade de cargas é uma das principais causas de perturbação do campo de tensão em elementos estruturais. Outros como geometria, adição de furos, introdução de forças de protensão, quando o elemento estrutural não é muito esbelto e muito rígido.

Quando trabalha-se com regiões B onde se aplicam as hipóteses de Bernoulli, dizemos que existem uma compatibilidade de deformações por admitir que existe uma distribuição linear das deformações inclusive no ELU. Assim as seções planas permanecem planas após a flexão, dimensionamento.

Uma vez que em regiões do tipo D, tem-se uma distribuição de deformações complexa, o Método das Bielas e Tirantes é utilizado como uma alternativa ao dimensionamento.

3.4 ANÁLISE ESTRUTURAL

De acordo com Sussekind (1981), a análise estrutural é a parte da mecânica responsável pela determinação dos esforços e das deformações das estruturas. Em geral, devido à complexidade desse processo, as teorias que descrevem o comportamento dos elementos estruturais são fundamentadas em simplificações. Um exemplo disso é a famosa Lei de Hooke, que estabelece uma relação linear entre tensões e deformações.

Em muitos casos, é impraticável modelar toda a estrutura usando apenas bielas e tirantes. A abordagem mais adequada envolve dividir a estrutura em regiões B e regiões D. Um exemplo comum são as estruturas hiperestáticas, onde primeiramente se determina as reações de apoio e os esforços internos e, em seguida, se divide a estrutura em regiões B e D.

Silva (1991) destaca em seu trabalho que, o dimensionamento das regiões B pode ser realizado mediante a aplicação de modelos de treliça. Por outro lado para o dimensionamento das regiões D, deve-se conhecer os esforços solicitantes no contorno dessas regiões. Estes esforços são obtidos da análise estrutural e do dimensionamento das regiões B adjacentes.

É importante dividir a estrutura em regiões B e D e definir os esforços nas regiões de contorno para mapear a distribuição das cargas na estrutura. Esse mapeamento de cargas permite modelar a estrutura usando o processo de caminho de carga. Alguns elementos estruturais são compostos apenas por regiões D, como, por exemplo, no caso das vigas-parede que os carregamentos no seu contorno e as reações de apoio são aplicadas na modelagem.

O modelo escolhido para a estrutura depende da sua geometria e das condições de contorno. Estruturas com geometrias idênticas, mas sujeitas a diferentes carregamentos, não podem ser modeladas da mesma forma, mostrando a limitação das classificações baseadas apenas em parâmetros geométricos, como as relações l/h comumente usadas para consolos e vigas-parede.

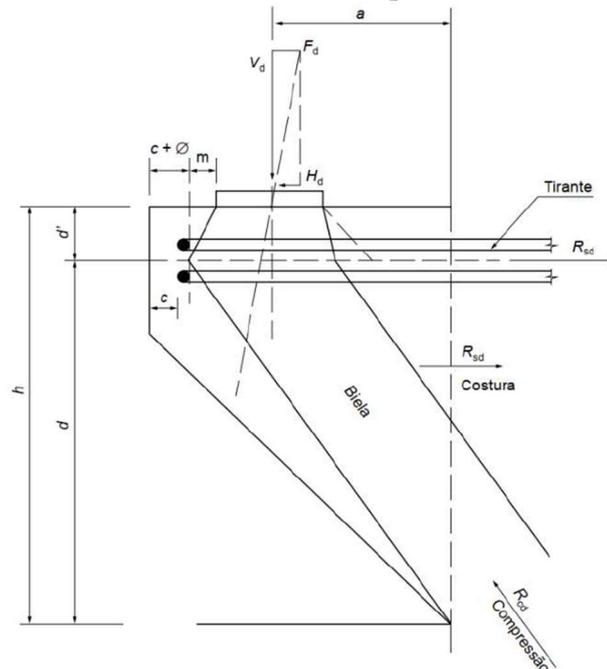
Ainda segundo Silva (1991), para estruturas não planas, é possível dividir em planos individuais e tratá-los separadamente para simplificar a criação de modelos. Elementos retangulares sob tensões tridimensionais podem ser analisados em diferentes planos ortogonais. Embora modelos bidimensionais sejam mais comuns, a interação entre planos diferentes deve ser considerada usando condições de contorno adequadas.

A configuração das barras e nós no modelo é influenciada por uma variedade de fatores como supracitado, incluindo condições de contorno. Ao longo do tempo, vários métodos foram desenvolvidos e confirmados para estabelecer a geometria do modelo. Estes são discutidos nas seções a seguir.

3.4.1 Modelos pré-definidos ou normativos

Esses métodos são estabelecidos por normas ou especialistas renomados que fundamentam suas recomendações em testes práticos. Como pode-se verificar o modelo ilustrado na Figura 3.4.1.1.

Figura 3.4.1.1 – Modelo de Bielas e Tirantes padronizado de consolo curto.



Fonte: ABNT, 2017.

Segundo Pantoja (2012), uma vez que esses modelos são amarrados a parâmetros geométricos constantes da estrutura sua limitação para fins práticos é muito grande.

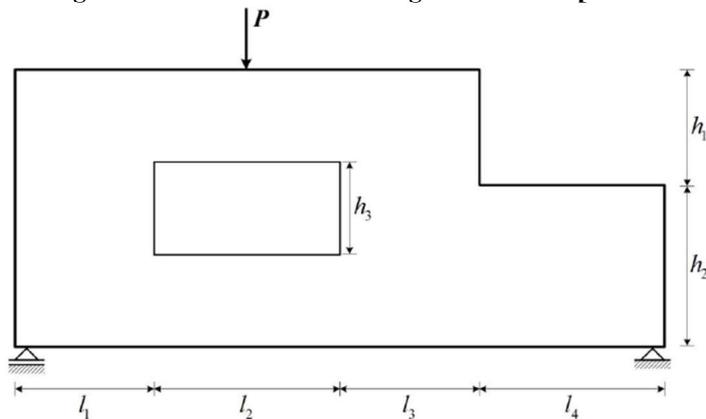
3.4.2 Análise elástica

Souza (2004) afirma que uma forma de adquirir modelos apropriados de bielas e tirantes é por meio do fluxo de tensões obtido através de uma análise elástica utilizando o Método dos Elementos Finitos. A vantagem desse método é que o modelo resultante atende tanto às exigências de uso quanto às condições de falha da estrutura. Além disso, o mesmo autor comenta que pesquisadores renomados, recomendam estruturar o modelo disponibilizando os elementos nas direções das tensões principais encontradas nessa análise. A partir dessas direções, é possível conceber uma treliça simplificada na estrutura e, assim, avaliar as forças atuantes, garantindo que as tensões nas bielas, tirantes e áreas nodais, bem como os requisitos de ancoragem, sejam adequadas para manter o equilíbrio da estrutura.

É fundamental enfatizar a importância de precauções, especialmente ao selecionar a malha de elementos finitos e ao definir o detalhamento da armadura longitudinal com base em análises elásticas lineares. O dimensionamento de armaduras principais de acordo com análises elásticas lineares usando o Método dos Elementos Finitos pode levar a um projeto inseguro, destacando a necessidade de uma interpretação meticulosa dos resultados fornecidos por esse método.

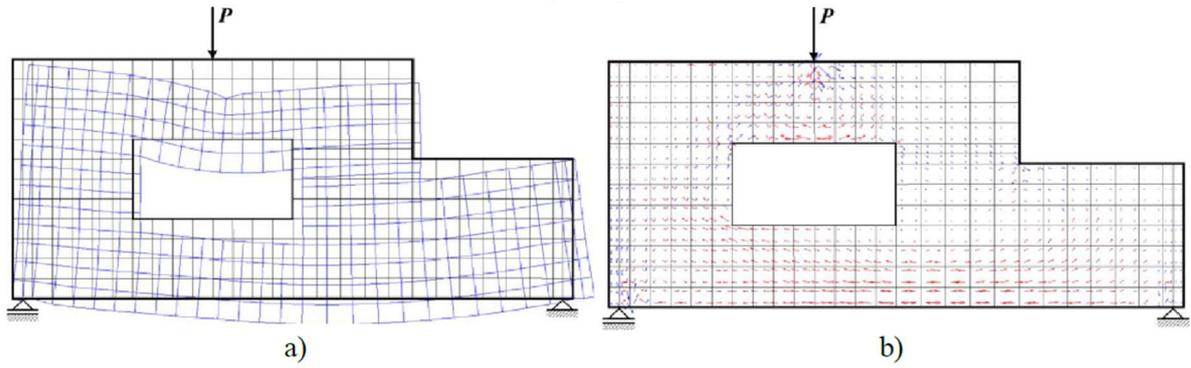
Nas Figuras 3.4.2.1, 3.4.2.2, 3.4.2.3 e 3.4.2.4 podemos visualizar um exemplo de uma estrutura complexa, os resultados obtidos da análise linear elástica conduzida, e também o MBT proposto.

Figura 3.4.2.1 – Estrutura com geometria complexa.



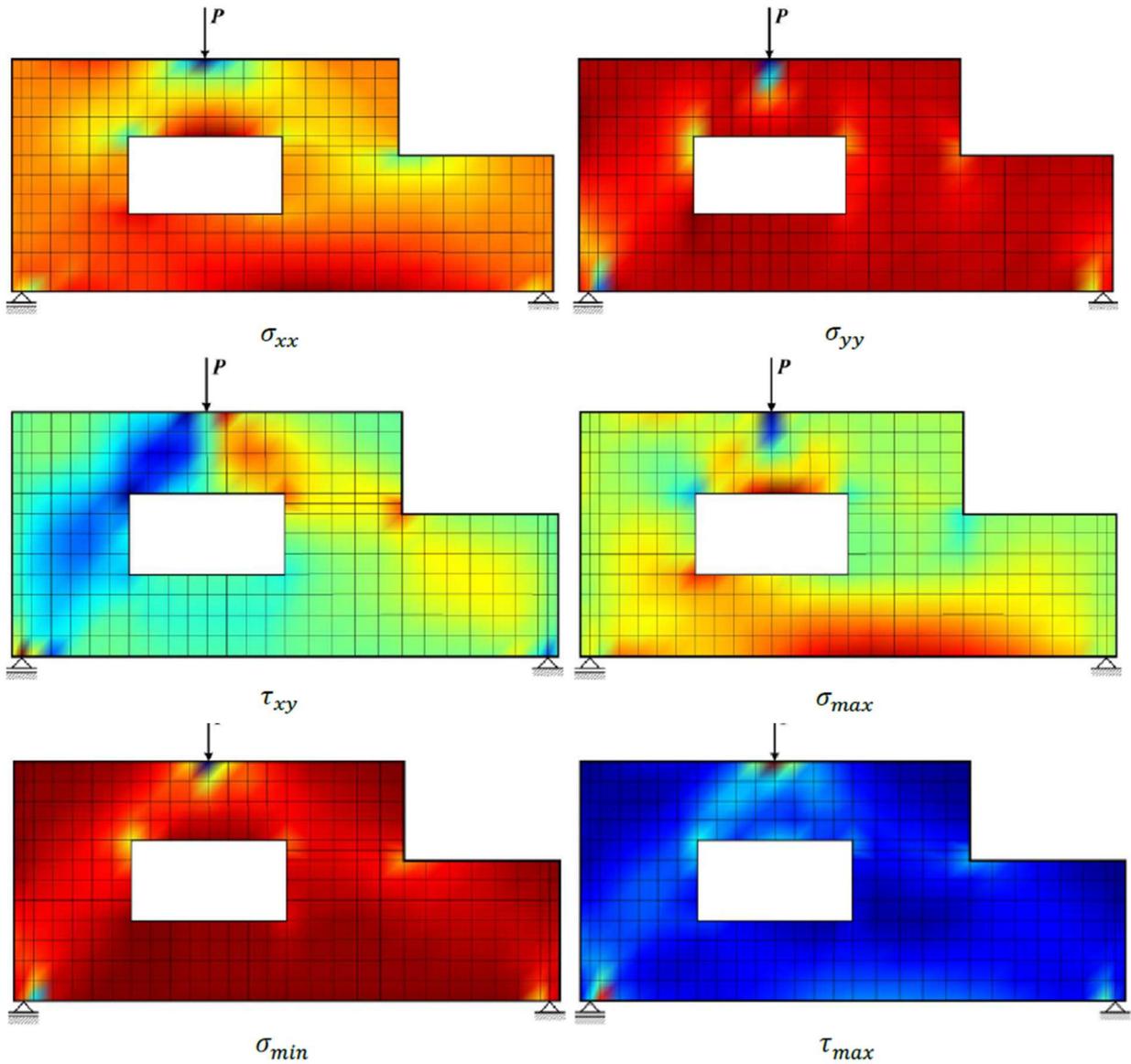
Fonte: Pantoja, 2012.

Figura 3.4.2.2 – Resultados de uma análise elástica pelo MEF: a) Deslocamentos e b) Fluxo de tensões principais.



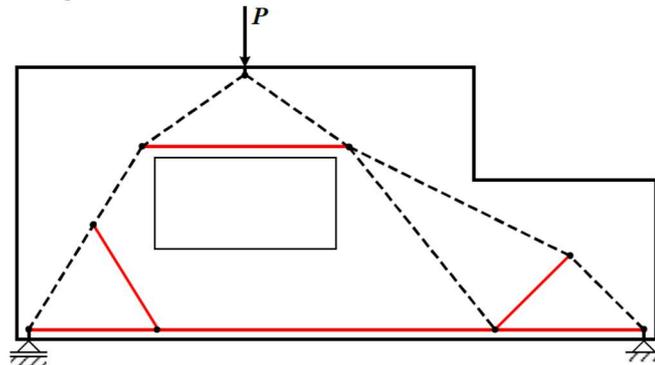
Fonte: Pantoja, 2012.

Figura 3.4.2.3 – Mapas coloridos dos campos de tensões.



Fonte: Pantoja, 2012.

Figura 3.4.2.4 – MBT concebido via análise elástica.



Fonte: Pantoja, 2012.

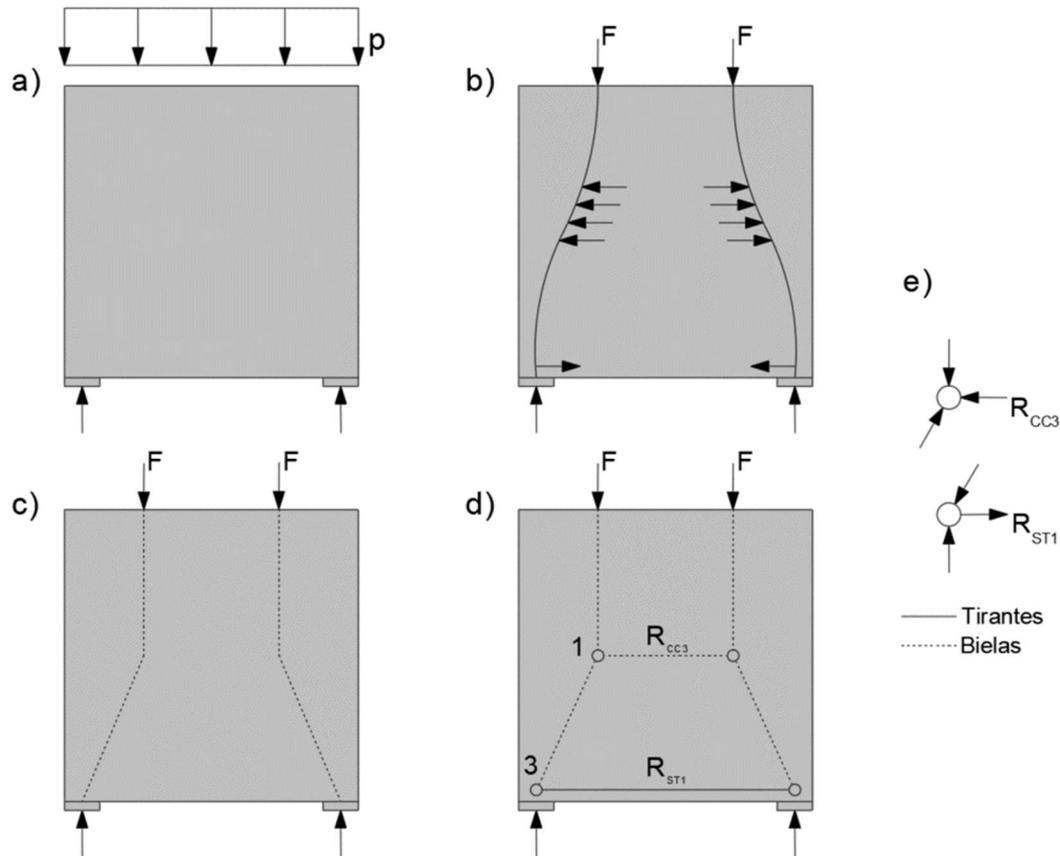
3.4.3 Caminho das cargas

Pantoja (2012) comenta que neste processo, o equilíbrio externo da área modelada é garantido ao satisfazer as equações de equilíbrio com base nos carregamentos atuantes e nas restrições de apoio existentes. Posteriormente, as cargas são direcionadas dentro da estrutura por meio de campos de compressão e tração.

Silva (1991), regiões com carregamentos distribuídos devem ser transformados em carregamentos concentrados equivalentes, de forma a definir um caminho de carga específico dentro da estrutura que conduza essas cargas até as forças de reação equilibradoras. Os caminhos de carga devem ser contínuos e não devem se cruzar, e cargas opostas devem ser conectadas pelos caminhos mais curtos possíveis. Qualquer curvatura nos caminhos de carga pode indicar concentração de tensões.

Em virtude de todos os caminhos de carga entre as forças (atuantes e reações) serem definidos, um polígono composto por linhas é estabelecido dentro da estrutura. Considerando os carregamentos, essas linhas consistirão em bielas (linhas tracejadas) e tirantes (linhas contínuas), e outras linhas necessárias são adicionadas para equilibrar cada nó presente. A Figura 3.4.3.1 ilustra um exemplo desse processo do caminho de cargas.

Figura 3.4.3.1 – Exemplo do processo do caminho de carga em uma viga-parede: a) a estrutura e suas ações no contorno; b) o caminhamento das ações externas; c) as linhas do polígono; d) o modelo; e) o equilíbrio dos nós.



Fonte: Adaptado de Silva, 1991.

3.5 OTIMIZAÇÃO DO MODELO

De acordo com Silva (1991), a modelagem fornece ao projetista uma certa liberdade de escolha que pode ser utilizada para se obter estruturas mais seguras e econômicas. Entretanto, é importante ressaltar que como visto anteriormente a estrutura pode ser analisada por diferentes modelos, ficando a critério do projetista a escolha pelo qual será executado. Na prática isso recai na escolha de modelos ditos ótimos e que não é uma tarefa fácil, exigindo bastante experiência do engenheiro de estruturas.

Para Aguiar (2018), um critério simples para otimizar um modelo pode ser formulado a partir do Princípio da Energia Potencial Mínima, que postula entre diferentes possíveis estados de tensão sendo o mais correto aquele que corresponde à mínima energia potencial. Considerando-se que a contribuição do concreto nas bielas possa ser desprezada devido ao aço nos tirantes ser muito mais deformável, ter-se-á Equação (3.1).

$$\sum F_i \cdot l_i \cdot \varepsilon_i = \text{Mínimo} \quad (3.1)$$

em que:

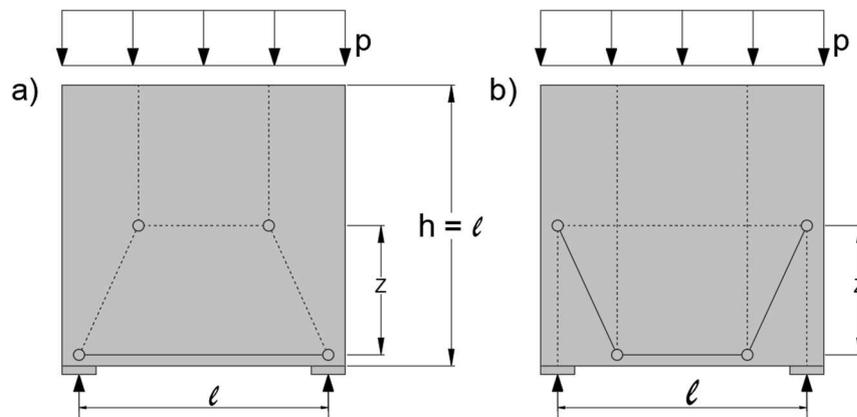
F_i = Força no tirante i ;

l_i = comprimento do tirante i ;

ε_i = deformação específica do tirante i .

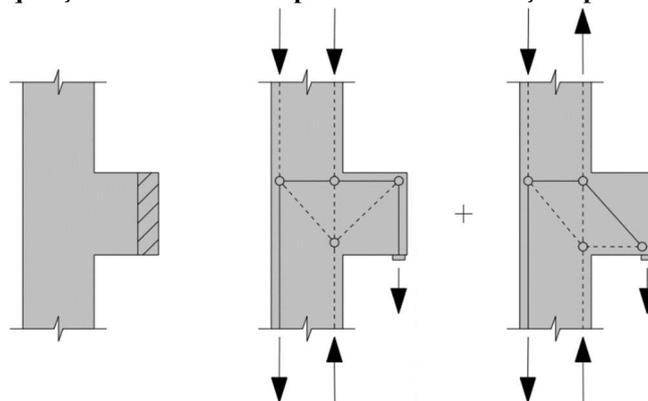
A ideia apresentada pode ser visualizada nas Figuras 3.5.1. e 3.5.2.

Figura 3.5.1 – Exemplo de dois modelos para uma mesma viga-parede, em que o modelo adequado (a) possui tirantes mais curtos que o modelo (b).



Fonte: Adaptado de Silva, 1991.

Figura 3.5.2 – Superposição de dois modelos para consolos com ação aplicada ao longo da altura.



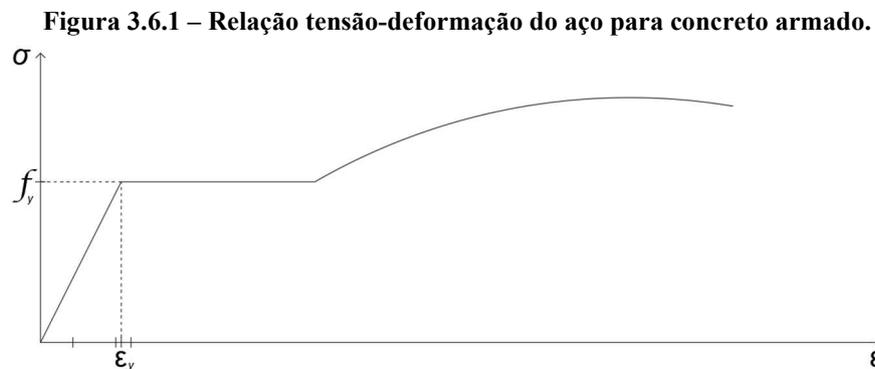
Fonte: Adaptado de Silva, 1991.

De acordo com Silva (1991), esta equação deve ser considerada para o comportamento linear-elástico de bielas e tirantes após a fissuração. O mesmo autor também cita que em alguns casos, o carregamento atuante pode conduzir a modelos um tanto complicados. Pode ser

interessante então fazer a superposição de dois modelos mais simples, desde que o modelo combinado satisfaça aos requisitos de ângulos razoáveis entre bielas e tirantes.

3.6 DIMENSIONAMENTO DAS BIELAS, TIRANTES E NÓS

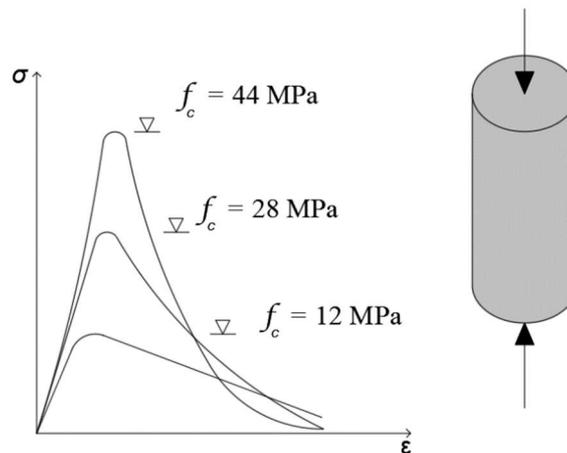
Para realizar um dimensionamento mais preciso de estruturas de concreto especiais, é crucial compreender as propriedades e características resistentes dos materiais. Segundo Santos (2021), o aço apresenta deformações plásticas consideravelmente superiores à deformação de escoamento ϵ_y , possibilitando a aplicação da teoria da plasticidade em elementos estruturais de concreto. O uso do diagrama elastoplástico perfeito é viável, conforme ilustrado na Figura 3.6.1.



Fonte: Adaptado de Santos, 2021.

Conforme mencionado pelo autor supracitado, ao analisar a relação proposta para ensaios uniaxiais do concreto com deformação controlada, é possível identificar três regiões distintas, conforme ilustrado na Figura 3.6.2.

Figura 3.6.2 – Relação tensão deformação do concreto submetido a compressão uniaxial (deformação lateral controlada).



Fonte: Adaptado de Muttoni, 1997.

Essas regiões são denominadas segundo Muttoni *et al.* (1997) e caracterizada por:

- Região quase elástica linear→ observa-se um comportamento que se assemelha ao elástico linear, onde a relação entre a tensão de compressão e a deformação axial é praticamente constante. Desvios desse comportamento são, em parte, influenciados pela abertura de microfissuras entre o agregado e a matriz de cimento.
- Região de endurecimento com grandes deformações laterais→ após o início das microfissuras entre o agregado e a matriz de cimento, fissuras paralelas à direção do carregamento são formadas na matriz de cimento. Tanto a tensão axial de compressão quanto a deformação lateral aumentam de forma mais acentuada do que linearmente.
- Região de amolecimento com grandes deformações laterais→ o concreto passa por um processo de laminação devido à fissuração, com algumas fissuras resultando em pedaços instáveis. Nessa fase, as tensões diminuem à medida que a deformação aumenta.

Santos (2021), considera que inicialmente, um material com essas propriedades não seria categorizado como idealmente plástico. No entanto, a teoria da plasticidade pode ser aplicada ao concreto estrutural em geral, contanto que seja empregado um valor efetivo de resistência à compressão. A resistência à compressão efetiva do concreto é determinada pela Equação (3.2).

$$f_{c,ef} = v f_c \quad (3.2)$$

em que:

$v \leq 1$ é chamado de fator de efetividade da resistência a compressão;

f_c é a resistência à compressão padrão obtida em ensaios.

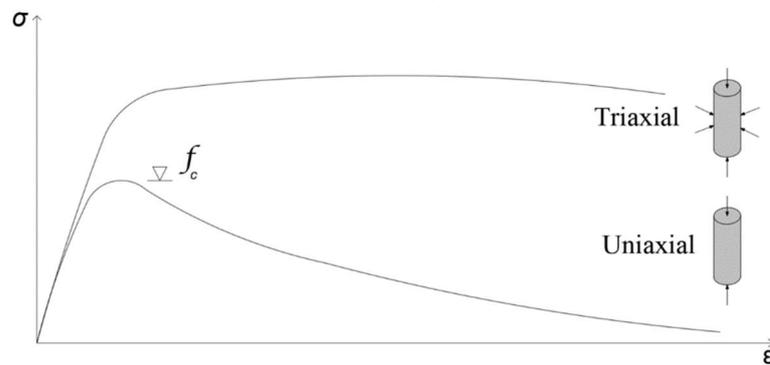
A diminuição da resistência à compressão em elementos estruturais é influenciada principalmente por dois fatores: fissuras e amolecimento do concreto. A redução de resistência devido às fissuras pode ser subdividida em:

- diminuição da resistência causada por microfissuração pré-existente, anterior à aplicação de carga;
- diminuição da resistência causada pela microfissuração imposta pela carga;
- diminuição da resistência causada pela microfissuração.

Várias sugestões são feitas na literatura para a resistência efetiva à compressão, fundamentadas em ensaios de vários elementos sujeitos a diferentes tipos de esforços, onde possibilitam a abordagem do concreto como um material idealmente plástico.

Em situações de tensões multiaxiais de compressão, há um aumento na resistência do concreto, sendo possível descrevê-lo pelo critério de resistência de Mohr-Coulomb. Em ensaios triaxiais com pressão lateral constante (Fig. 3.6.3), observa-se não apenas um aumento na resistência, mas também uma notável melhoria na ductilidade do concreto.

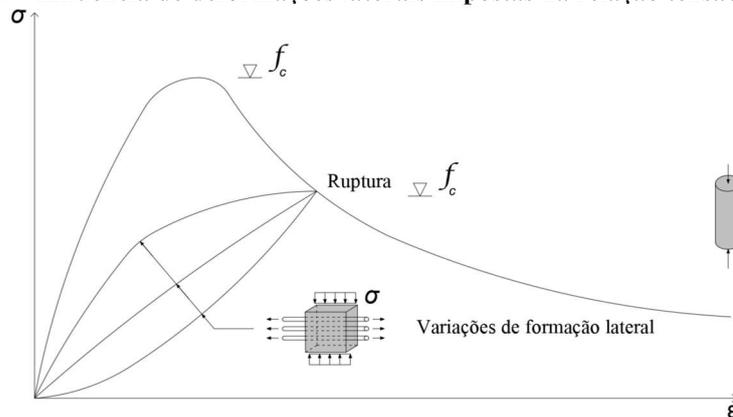
Figura 3.6.3 – Relação tensão-deformação em ensaio triaxial e uniaxial de compressão em espécie de concreto.



Fonte: Adaptado de Muttoni, 1997.

Segundo Santos (2021), quando submetido a uma deformação causada pelo alongamento da armadura transversal tracionada, o concreto experimenta uma redução em sua resistência. A deformação na armadura provoca fissuras que resultam no amolecimento do concreto, como ilustrado na Figura 3.6.4. Na aplicação da teoria da plasticidade para o dimensionamento de elementos de concreto estrutural, não é possível determinar diretamente as deformações, razão pela qual esse fenômeno é considerado indiretamente na redução da resistência efetiva do concreto.

Figura 3.6.4 – Influência de deformações laterais impostas na relação tensão-deformação.

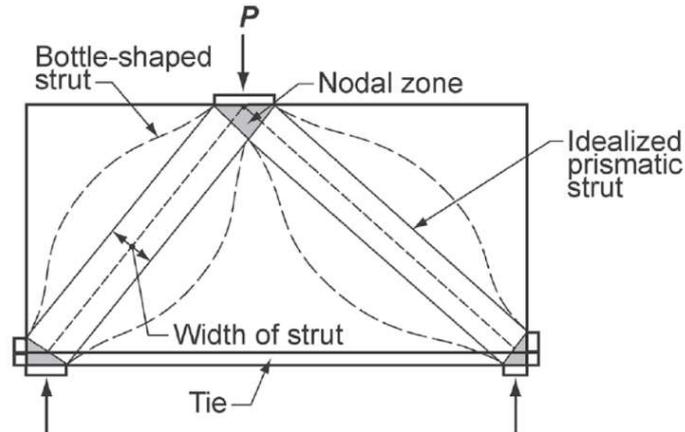


Fonte: Adaptado de Muttoni, 1997.

3.6.1 Bielas

De acordo com Carvalho (2017), bielas são componentes encarregados de suportar forças de compressão, com as tensões de compressão atuando paralelamente a elas. Conseqüentemente, existem dois tipos principais de bielas: prismáticas e em formato de garrafa, ambas ilustradas na Figura 3.6.1.1.

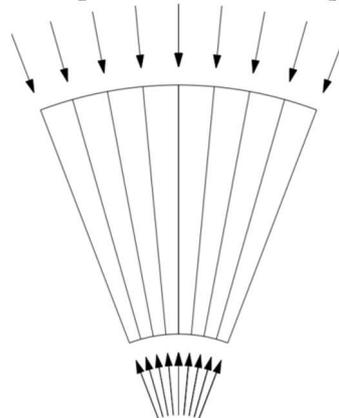
Figura 3.6.1.1 – Modelo de bielas e tirantes indicando seus elementos.



Fonte: ACI 318-14, 2014.

Segundo Santos (2021), um terceiro tipo de bielas pode ser utilizado - leques de compressão. No entanto, o mesmo pode ser visto como um conjunto de bielas prismáticas de pequena largura, conforme ilustrado na Figura 3.6.1.2.

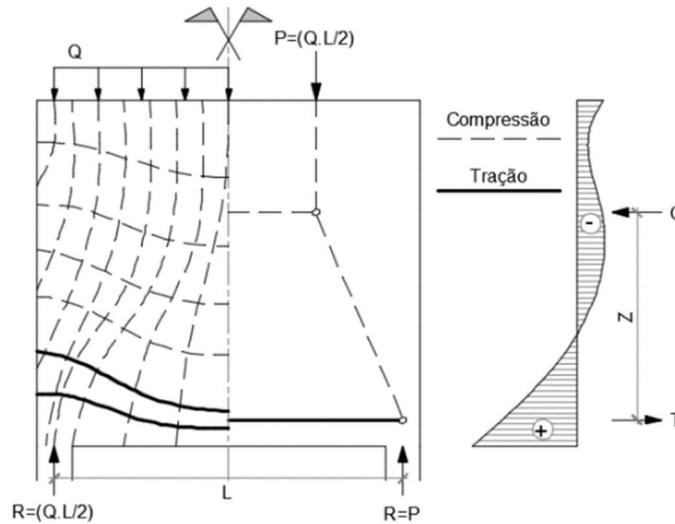
Figura 3.6.1.2 – Campos de tensões de compressão em leque.



Fonte: Adaptado de Santos, 2021.

As bielas do tipo garrafa tendem a tomar esse formato devido as cargas confluírem diretamente para os apoios, seguindo o fluxo de tensões principais obtidas através dos cálculos de resistência dos materiais, conforme definido por Schlaich *et al.* (1991) e pode ser ilustrado na Figura 3.6.1.3.

Figura 3.6.1.3 – Exemplo de modelo de bielas e tirantes seguindo a trajetória das tensões principais em uma viga-parede.



Fonte: Aguiar, 2018.

Segundo a NBR 6118 (ABNT, 2023), a tensão resistente máxima do concreto é determinada de acordo com o tipo de solicitação. Onde deve-se levar consideração o efeito do acréscimo da fragilidade da ruptura do material (*brittleness*) que existe quando se utilizam concretos de maior resistência característica, chamado de α_{v2} , dado por:

$$\alpha_{v2} = 1 - \frac{f_{ck}}{250} \quad (3.3)$$

em que:

f_{ck} = resistência característica à compressão do concreto e deve estar entre 20 e 90 Mpa.

A Tabela 3.1 detalha as prescrições das resistências das bielas segundo a NBR 6118 (ABNT, 2023).

Tabela 3.1 – Parâmetros de resistência de cálculo das bielas e regiões nodais segundo a NBR 6118 (ABNT, 2023).

Tipo de solicitação	Notação	Resistência	Aplicações
Bielas prismáticas ou nós CCC	f_{cd1}	$0,85\alpha_{v2}f_{cd}$	<ul style="list-style-type: none"> - Compressão pura; - Banzo de compressão comprimido por flexão de vigas, lajes e paredes. - Regiões com tensões de compressão transversal ou sem tensões de tração transversal em nós onde confluem somente bielas de compressão.

Bielas atravessadas por mais de um tirante, ou nós CTT ou TTT	f_{cd2}	$0,60\alpha_{v2}f_{cd}$	<ul style="list-style-type: none"> - Bielas em formato de garrafa; - Elementos com deformação lateral imposta. - Almas de vigas sujeitas à cortante e à torção; - Almas de vigas-parede. - Regiões com tensões de tração transversal ou sem tensões de tração transversal e em nós onde confluem dois ou mais tirantes tracionados.
Bielas atravessadas por tirante único, ou nós CCT	f_{cd3}	$0,72\alpha_{v2}f_{cd}$	- Nós onde conflui um tirante tracionado.

Fonte: Autoria própria, 2023.

em que:

$$f_{cd} = \frac{f_{ck}}{\gamma_c} \quad (3.4)$$

em que:

f_{cd} = é a tensão resistente máxima do concreto para cada condição específica;

f_{ck} = é a resistência característica à compressão do concreto;

γ_c = é o coeficiente de minoração da resistência do concreto à compressão.

Um aspecto importante da modelagem é o ângulo de inclinação entre bielas e tirantes. Existem muitos limites diferentes em normas e códigos. Os ângulos permitidos por algumas normas são mostrados na Tabela 3.2 (Santos, 2021).

Tabela 3.2 – Ângulos de inclinação entre bielas e tirantes permitidos por algumas normas.

Norma	Ângulos permitidos
NBR 6118 (ABNT, 2023)	$30^\circ \leq \theta \leq 63,4^\circ$ ($0,5777 \leq tg\theta \leq 2$)
Eurocode 2 (CEN, 2004)	$21,8^\circ \leq \theta \leq 68,2^\circ$ ($0,4 \leq tg\theta \leq 2,5$)
Model Code 2010 (fib, 2013)	$25^\circ \leq \theta \leq 68,2^\circ$ ($0,467 \leq tg\theta \leq 2,5$)

Fonte: Adaptado de Santos, 2021.

3.6.2 Tirantes

Os tirantes são elementos submetidos à tração no MBT. Vários autores indicam que a armadura deve ser distribuída de forma que seu centroide coincida com a localização do tirante,

sendo importante assumir que apenas o aço resiste às tensões de tração. Para encontrar a área de aço A_s da armadura longitudinal segundo a NBR 6118 (ABNT, 2023) deve-se seguir a Equação (3.5).

$$A_s = \frac{F_{sd}}{f_{yd}} \quad (3.5)$$

em que:

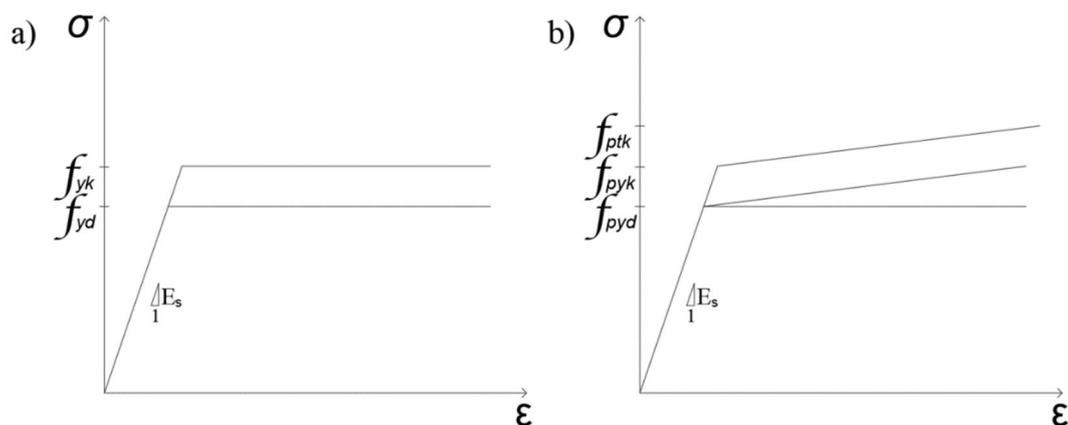
F_{sd} = é a força de cálculo de tração atuante no tirante;

f_{yd} = é a resistência ao escoamento da armadura passiva de cálculo.

É importante destacar que tanto a norma americana quanto a norma europeia abordam o dimensionamento dos tirantes de maneira idêntica.

Para o dimensionamento dos tirantes, Silva (2021) leva em consideração o diagrama tensão-deformação estabelecido pela NBR 6118 (ABNT, 2023) para materiais com comportamento elastoplástico perfeito no caso de armadura passiva (conforme mostrado na Figura 3.6.2.1a). Para armadura ativa, é utilizado um diagrama bilinear em que, para as deformações últimas especificadas na norma, pode ser representado por um patamar de escoamento (linha horizontal na Figura 3.6.2.1b).

Figura 3.6.2.1 – Diagrama tensão-deformação para aços: a) aço passivo e b) aço ativo.



Fonte: Adaptado de Santos, 2021.

Para Silva (2021), o critério de resistência de um tirante devidamente ancorado é dado pela Equação (3.6).

$$F_{td} \leq A_s f_{yd} + A_p f_{pyd} \quad (3.6)$$

em que:

F_{td} = é a força de tração transversal;

A_p = é a área de aço protendido;

f_{pyd} = é a resistência ao escoamento da armadura ativa de cálculo.

Santos (2021) ressalta que a tensão-limite da armadura ativa só pode ser alcançada quando há a aplicação de pré-tração. A magnitude do pré-alongamento deve ser adequada para que o aumento adicional devido às ações externas conduza ao ELU - escoamento do aço de protensão.

3.6.3 Nós

Segundo Carvalho (2017), os nós representam pontos de interseção entre bielas e tirantes, assemelhando-se a uma treliça, com o intuito de atingir o equilíbrio por meio de, no mínimo, três forças. A região nodal é configurada como um prisma de concreto, cujas faces mantêm contato com as extremidades das bielas ou tirantes, apresentando a mesma largura dessas extremidades.

De acordo com Santos (2021), a consideração dos nós é importante na análise de uma estrutura por meio de campos de tensões e modelos de bielas e tirantes. Esses elementos exibem estados de tensões distintos, exigindo verificações separadas.

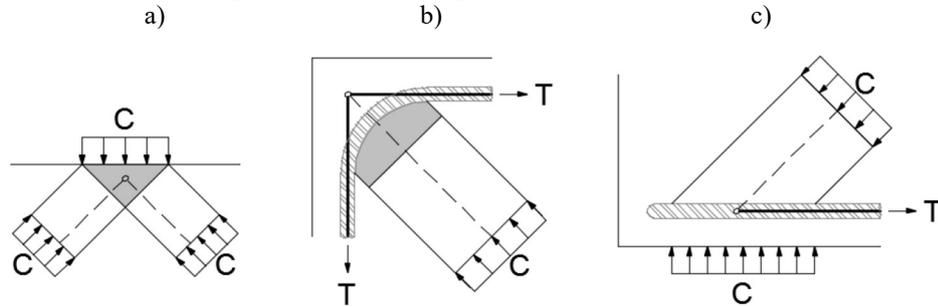
Na abordagem por modelos de bielas e tirantes, é comum que os nós determinem o dimensionamento dos elementos estruturais. Verificações ou detalhamentos inadequados podem resultar em uma redução significativa na resistência de um componente estrutural.

No plano, os nós podem ser categorizados em quatro tipos:

- Nós CCC: Onde apenas forças de compressão são equilibradas. Exemplos incluem apoio interno de uma viga contínua e quinas de consolos - Figura 3.6.3.1a;
- Nós CTT: Ancoram barras tracionadas em duas direções e são comuns em nós de pórticos e consolos sujeitos a cargas indiretas - Figura 3.6.3.2b;
- Nós CCT: ~~Que~~ ancoram barras tracionadas em apenas uma direção, como o apoio extremo de vigas e a região de aplicação direta de carga em consolos - Figura 3.6.3.2c;

- Nós TTT: Onde apenas tirantes convergem para o nó. Nesta situação, deve-se dar atenção especial à ancoragem da armadura, e recomenda-se o confinamento do nó por meio de estribos ou quadros. A utilização desse tipo de nó deve ser evitada sempre que possível.

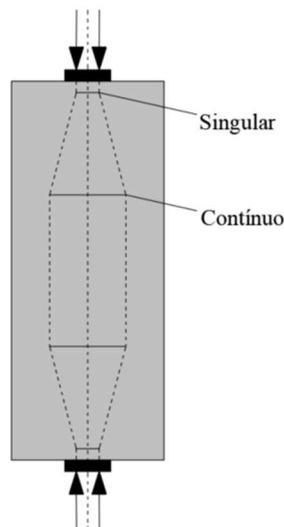
Figura 3.6.3.1 – Exemplos de nós CCC, CTT e CCT.



Fonte: Aguiar, 2018.

Em uma estrutura, a maioria dos nós é do tipo contínuo, onde os campos de tensões no concreto se equilibram ou são desviados em comprimentos satisfatórios. Esses nós não são críticos no projeto e é suficiente que seja verificada a ancoragem das barras que nele concorrem (Nepomuceno, 2012). Entretanto, os nós singulares geralmente governam o dimensionamento dos elementos estruturais, uma vez que são regiões de concentração de tensões e seu detalhamento incorreto é a causa mais frequente de falta de resistência em elementos de concreto armado. Esses tipos de nós são ilustrados na Figura 3.6.3.2:

Figura 3.6.3.2 – Nós singular e contínuo.

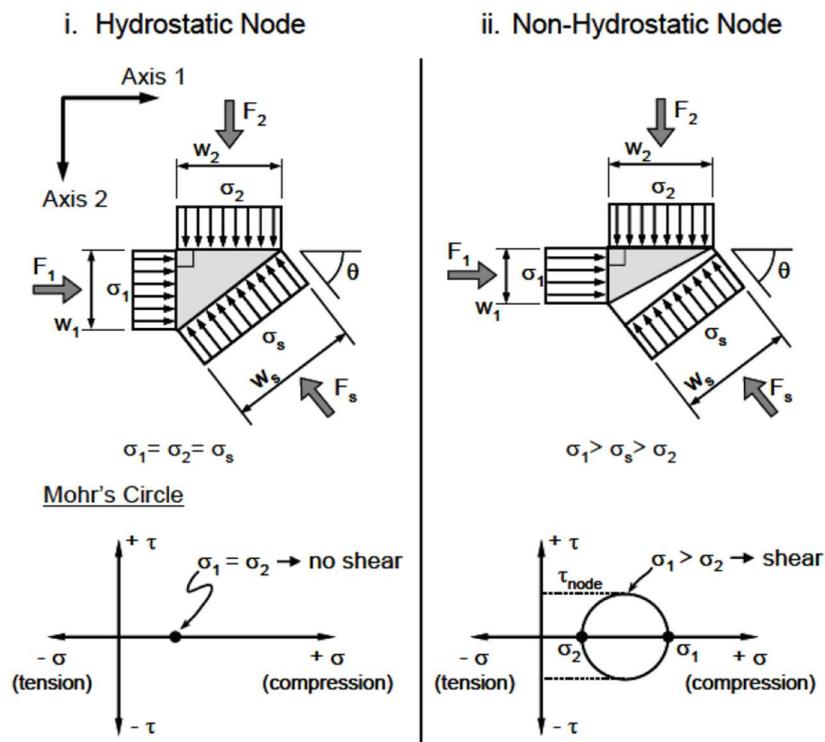


Fonte: Autoria própria, 2023.

Carvalho (2017) enfatiza que a mecânica do nó ideal é o nó hidrostático, exemplificado pelo nó CCC, onde três bielas convergem e formam um prisma triangular reto, confinado pela compressão em três direções. Entretanto, outros tipos de nós, como CCT ou CTT, podem surgir,

sendo preferencialmente modelados como nós hidrostáticos, embora a incompatibilidade de tensões os torne menos resistentes que os nós CCC. É fundamental que a resistência da face de um nó não ultrapasse as resistências de uma biela ou tirante em contato com ela. A Figura 3.6.3.3 apresenta a mecânica dos nós.

Figura 3.6.3.3 – Mecânica de nós hidrostáticos e não- hidrostáticos.



Fonte: Thompson, 2002.

O dimensionamento e verificação da resistência dos nós segue a Tabela 2.

3.6.4 Ancoragem

Embora não seja amplamente abordada nesta pesquisa, a ancoragem é fundamental para a segurança do elemento estrutural. A interação entre zonas nodais e tirantes deve ser examinada com cuidado, e a ancoragem apropriada é aquela que possibilita o comportamento desejado do elemento estrutural. Entre os métodos de ancoragem, destaca-se na literatura clássica a ancoragem por laço, reconhecida por sua capacidade de reduzir significativamente o comprimento necessário para ancoragem, superando desafios comuns nas ancoragens por aderência reta ou por ganchos. Esse método implica a formação de um laço em plano horizontal que conecta duas barras de uma camada de armadura, iniciando a partir do ponto crítico em que o tirante entra na região da biela ao confluir para o nó, assegurando que o laço permaneça confinado dentro do nó.

4 ELEMENTO FINITO CST

4.1 INTRODUÇÃO

O Método dos Elementos Finitos (MEF) é uma abordagem versátil na análise de estruturas. Ele é amplamente utilizado na engenharia para resolver problemas de análise estrutural. A história do MEF remonta à década de 1940 e tem evoluído constantemente. Ele se tornou uma ferramenta essencial na engenharia, capaz de lidar com problemas complexos e multifísicos. De acordo com Assan (2020), surgiu como uma nova possibilidade de resolver problemas da teoria da elasticidade, superando as dificuldades e problemas inerentes aos métodos de Rayleigh-Ritz, Galerkin, diferenças finitas, resíduos ponderados e outros.

Esse método foi desenvolvido para a análise de meios contínuos, possibilitando, nos dias de hoje, a análise da maior parte dos sistemas físicos dos quais trata a engenharia (Soriano, 2021).

O Método dos Elementos Finitos, no âmbito das aplicações estruturais, está voltado para a determinação da configuração da deformada da estrutura, a partir do cálculo dos deslocamentos nodais. As forças que atuam em um dado elemento e os correspondentes deslocamentos estão relacionados entre si por intermédio das diversas rigidezes associadas ao elemento (Alves Filho, 1957).

As primeiras aplicações foram realizadas na análise de estruturas de aeronaves, possibilitando também outros estudos como em cascos de navios, tanques de armazenamento, lastros de pontes, simulações de fluidos, eletromagnetismo e muitas outras áreas da engenharia.

Usualmente é muito complexo analisar de forma exata o meio contínuo de caráter estrutural, como em outros sistemas físicos. Desta forma, o MEF prevê a divisão do domínio de integração (estrutura), contínuo em um número finito de elementos, ou seja, discretizar o modelo estrutural como barras, placas, triângulos ou quadriláteros, dependendo da geometria da estrutura, tornando o meio contínuo em discreto. Isso possibilita a criação de modelos matemáticos aproximados em relação ao sistema físico real, onde cada elemento possui suas propriedades mecânicas (como rigidez, módulo de elasticidade ou Poisson) relativamente simples e resolve as equações diferenciais parciais que descrevem o seu comportamento.

Há vários tipos de elementos finitos com aplicações específicas, como elementos de mola, elementos de barra, elementos de treliça, elementos de placa, elementos isoparamétricos, elementos de casca e elementos tridimensionais. A escolha do tipo de elemento depende das características da estrutura e do problema a ser resolvido.

A evolução do MEF está intimamente ligada ao avanço da tecnologia de Engenharia Assistida por Computador (CAE), que permitiu simulações mais precisas e eficientes. O MEF também se integra a tecnologias emergentes, como IA, realidade virtual e Internet das Coisas, expandindo suas capacidades e aplicações. Atualmente, o MEF é usado em uma ampla gama de aplicações, desde engenharias até simulações em escala nano e micro. É uma ferramenta essencial na análise numérica e simulação de sistemas complexos.

Neste capítulo, são abordados os conceitos, formulações e os aspectos para a análise de estruturas a partir do elemento finito triangular CST.

4.2 NOÇÕES DE TEORIA DA ELASTICIDADE

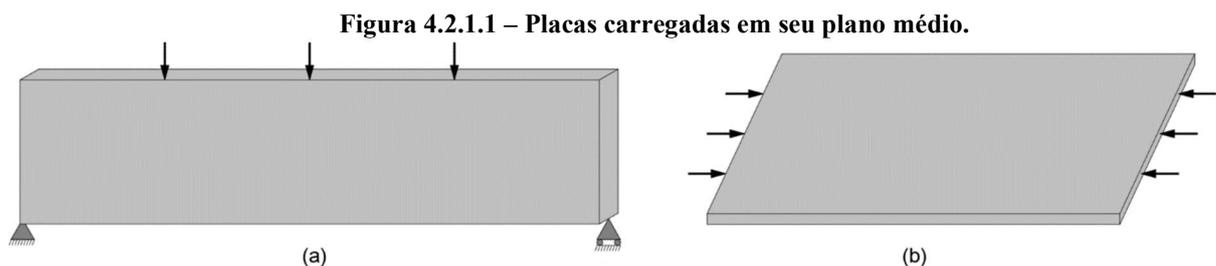
4.2.1 Estruturas bidimensionais

A análise de estruturas bidimensionais desempenha um papel fundamental na engenharia, fornecendo *insights* valiosos sobre o comportamento dos elementos estruturais e seus respectivos sistemas.

Modelos bidimensionais ou de superfície, têm-se duas direções preponderantes, cada uma com a correspondente variável independente. Nos casos de estado plano de tensões, a terceira dimensão é denominada espessura. Em estado plano de deformações, tem-se comportamento elástico constante na direção da terceira dimensão e torna-se segundo ela, um comprimento unitário para efeito de análise (Soriano, 2021).

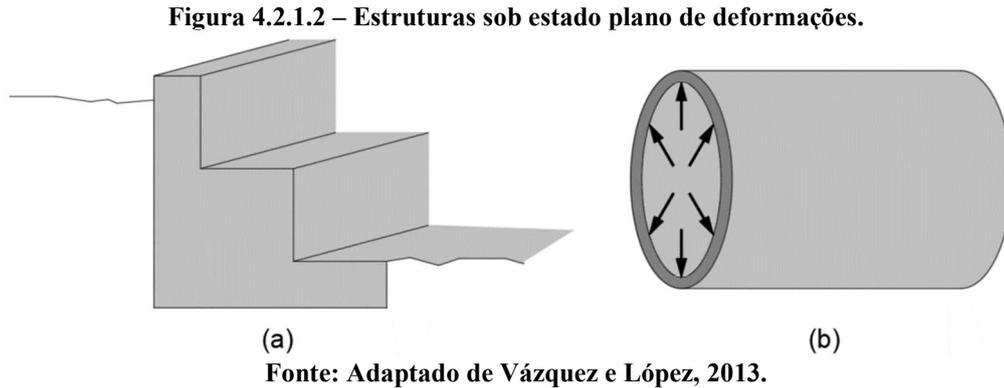
Uma estrutura corresponde a um estado de tensão plana quando uma de suas dimensões (largura ou espessura) é muito menor do que as outras duas e as cargas são aplicadas em seu plano médio (Vázquez e López, 2013).

Desta maneira, podemos destacar exemplos que incluem vigas de grande altura, como as vigas-parede Figura 4.2.1.1(a), e placas carregadas em seu plano médio - 4.2.1.1(b).



Fonte: Adaptado de Vázquez e López, 2013.

Uma estrutura bidimensional corresponde a um estado de deformação plana quando uma de suas dimensões (comprimento) é muito maior do que as outras duas, sendo as cargas aplicadas perpendicularmente ao eixo da estrutura e uniformemente distribuídas por todo o comprimento da estrutura. São exemplos de estruturas bidimensionais sob um estado plano de deformação as paredes de contenção - Figura 4.2.1.2 (a), e os tubos submetidos à pressão - Figura 4.2.1.2 (b).



4.2.2 Introdução a teoria da Elasticidade

A relação entre tensão e deformação no espaço pode ser expressa de forma matricial por meio de Equação (4.1):

$$\{\boldsymbol{\sigma}\} = [\mathbf{D}]\{\boldsymbol{\varepsilon}\} \quad (4.1)$$

em que $[\mathbf{D}]$ é a matriz tensão-deformação ou matriz constitutiva, definida pela Equação (4.2):

$$[\mathbf{D}] = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} (1-\nu) & \nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & (1-\nu) & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & \nu & (1-\nu) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{(1-2\nu)}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{(1-2\nu)}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{(1-2\nu)}{2} \end{bmatrix} \quad (4.2)$$

No **estado plano de tensão**, as tensões que atuam no plano xy e são nulas na direção z , ou seja, $\sigma_z = \tau_{yz} = \tau_{zx} = 0$. Nesse caso, as deformações ε_z não são nulas, e substituindo seu valor $\varepsilon_z = -\nu(\sigma_x + \sigma_y)/E$ na Equação (4.1) obtém-se:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_{xy} \end{Bmatrix} \quad (4.3)$$

sendo, neste caso, a matriz constitutiva dada por:

$$[D] = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \quad (4.4)$$

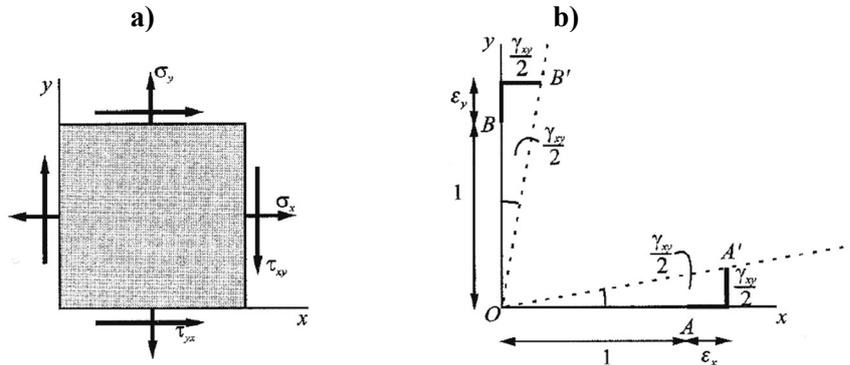
No **estado plano de deformação**, as deformações são zero na direção z, ou seja, $\varepsilon_z = \gamma_{yz} = \gamma_{zx} = 0$. Eliminando na matriz dada pela Equação (4.2) as linhas e colunas 3, 5 e 6, a matriz constitutiva correspondente obtida é:

$$[D] = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & 0 \\ \nu & 1-\nu & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} \end{bmatrix} \quad (4.5)$$

Então a equação da matriz tensão-deformação (4.3) se reduz a:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & 0 \\ \nu & 1-\nu & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \quad (4.6)$$

Figura 4.2.2.1 – Estados planos: a) de tensões e b) de deformações.



Fonte: Vázquez e López, 2013.

4.2.3 Relação deformação-deslocamento

Em um estado de tensão plana ou estado de deformação plana, os componentes do vetor de deformações que influenciam o comportamento de uma estrutura bidimensional são $\varepsilon_x, \varepsilon_y, e \gamma_{xy}$. As relações entre as deformações e os deslocamentos são dadas pelas Equações (4.7).

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} \quad e \quad \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \quad (4.7)$$

em que $u(x, y)$ e $v(x, y)$ são os componentes do deslocamento do ponto considerado. Essas relações podem ser expressas em uma forma matricial, dado pela Equação (4.8).

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} \quad (4.8)$$

ou

$$\{\boldsymbol{\varepsilon}\} = [\boldsymbol{d}]\{\mathbf{u}\} \quad (4.9)$$

Em que $[\boldsymbol{d}]$ é o operador linear, dado pela Equação (4.10).

$$[\boldsymbol{d}] = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \quad (4.10)$$

e \mathbf{u} é o vetor de deslocamentos, dado pela Equação (4.11).

$$\{\mathbf{u}\} = \begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} \quad (4.11)$$

4.2.4 Relação tensão e deslocamento

Substituindo a Equação (4.9) na Equação (4.1), as relações entre tensão e deslocamentos são obtidas, através da Equação (4.12).

$$\{\sigma\} = [D]\partial u \quad (4.12)$$

que para o estado plano de tensão temos a Equação (4.13).

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial_u}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} \quad (4.13)$$

e para o estado plano de deformações temos a Equação (4.14).

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & 0 \\ \nu & 1-\nu & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial_u}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} \quad (4.14)$$

4.3 ELEMENTO TRIANGULAR CST

O Elemento Finito Triangular Linear é um elemento finito bidimensional com coordenadas locais e globais. É caracterizado por funções de forma lineares. Este elemento pode ser usado para problemas de tensão plana ou de deformação plana na elasticidade. Também é chamado de triângulo de tensão constante. O elemento triangular linear tem módulo de elasticidade E , coeficiente de Poisson ν , e espessura t . Cada triângulo linear tem três nós com dois graus de liberdade no plano em cada nó, como mostrado na Figura 4.3.1. As coordenadas globais dos três nós são denotadas por (x_i, y_i) , (x_j, y_j) e (x_m, y_m) . A ordem dos nós para cada elemento é importante – eles devem ser listados no sentido anti-horário começando em qualquer nó. A área de cada triângulo deve ser positiva (Kattan, 2008).

A modelagem de estruturas com o Método dos Elementos Finitos, é uma abordagem poderosa para analisar e projetar elementos estruturais especiais. Ela oferece a capacidade de lidar com geometrias complexas e diversos tipos de carregamentos, quando aplicada

corretamente, essa abordagem pode ser uma ferramenta valiosa para engenheiros e analistas na análise de estruturas (Oliveira, 2019).

Uma vez definidos os elementos finitos, é possível construir um modelo da estrutura inteira, montando as equações de cada elemento em um sistema de equações lineares para toda a estrutura. Para cada elemento, uma formulação local é desenvolvida, envolvendo funções de interpolação que aproximam a solução dentro do elemento, geralmente usando funções polinomiais.

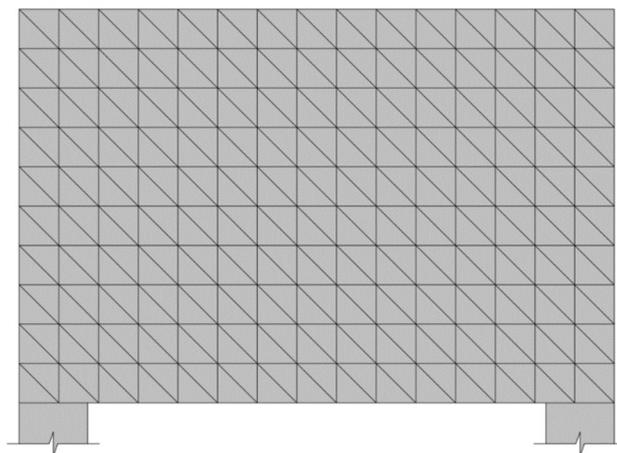
Com base nas funções de interpolação, as matrizes de rigidez do elemento e os vetores de força são calculados, representando a relação entre deslocamentos nodais e forças internas no elemento, bem como as forças externas aplicadas. Essas matrizes e vetores são montados em uma matriz global de rigidez e um vetor global de força, combinando os efeitos de todos os elementos.

Em seguida, as condições de contorno, que refletem as restrições reais da estrutura, são aplicadas à matriz global de rigidez e ao vetor global de força. O sistema de equações resultante é resolvido numericamente para obter os deslocamentos nodais desconhecidos.

Com os deslocamentos conhecidos, é possível calcular deformações, em toda a estrutura. As soluções numéricas são analisadas para entender o comportamento da estrutura em diferentes condições.

Na análise por elementos finitos, a discretização da estrutura pode ser realizada mediante a utilização de tipos específicos de elementos. A Figura 4.31. exemplifica para o caso da utilização do elemento CST.

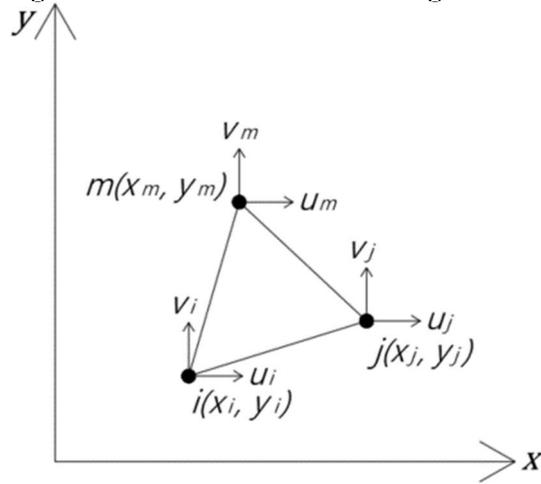
Figura 4.3.1 – Viga-parede discretizada com elementos finitos triangulares CST.



Fonte: Autoria própria, 2023.

O elemento bidimensional triangular de três nós, possui 2 graus de liberdade por nó, conforme ilustrado na Figura 4.3.1.

Figura 4.3.2 – Elemento Finito Triangular CST.



Fonte: Autoria própria, 2023.

Para este elemento, as funções de deslocamento linear são definidas pelas equações:

$$u(x, y) = a_1 + a_2x + a_3y \quad (4.15)$$

$$v(x, y) = a_4 + a_5x + a_6y$$

Na forma matricial, têm-se:

$$\begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x & y & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x & y \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \\ a_6 \end{Bmatrix} \quad (4.16)$$

Para obter os coeficientes a_i substitui-se as coordenadas nodais na Equação (4.16), tem-se as Equações dadas em (4.17).

$$u_i = u(x_i, y_i) = a_1 + a_2x_i + a_3y_i$$

$$u_j = u(x_j, y_j) = a_1 + a_2x_j + a_3y_j$$

$$u_m = u(x_m, y_m) = a_1 + a_2x_m + a_3y_m \quad (4.17)$$

$$v_i = v(x_i, y_i) = a_4 + a_5x_i + a_6y_i$$

$$v_j = v(x_j, y_j) = a_4 + a_5x_j + a_6y_j$$

$$v_m = u(x_m, y_m) = a_4 + a_5 x_m + a_6 y_m$$

Escrevendo as três primeiras equações para o deslocamento \mathbf{u} na forma matricial dada pela Equação (4.18), temos que,

$$\begin{Bmatrix} u_i \\ u_j \\ u_m \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x_i & y_i \\ 1 & x_j & y_j \\ 1 & x_m & y_m \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{Bmatrix} \quad (4.18)$$

ou em sua forma reduzida,

$$\{\mathbf{a}\} = [\mathbf{x}]^{-1}\{\mathbf{u}\} \quad (4.19)$$

De acordo com Logan (2016), a matriz inversa de \mathbf{x} é igual a:

$$[\mathbf{x}]^{-1} = \frac{1}{2A} \begin{bmatrix} \alpha_i & \alpha_j & \alpha_m \\ \beta_i & \beta_j & \beta_m \\ \gamma_i & \gamma_j & \gamma_m \end{bmatrix} \quad (4.20)$$

onde:

$$2A = \begin{bmatrix} 1 & x_j & y_m \\ 1 & x_j & y_m \\ 1 & x_j & y_m \end{bmatrix} \quad (4.21)$$

pelo determinante de matriz (4.21), temos a Equação (4.22).

$$2A = x_i(y_j - y_m) + x_j(y_m - y_i) + x_m(y_i + y_j). \quad (4.22)$$

desta maneira os coeficientes da Equação (4.20) são dados pelas Equações em (4.23).

$$\begin{array}{lll} \alpha_i = x_j y_m - y_j x_m & \alpha_j = y_i x_m - x_i y_m & \alpha_m = x_i y_j - y_i x_j \\ \beta_i = y_j - y_m & \beta_j = y_m - y_i & \beta_m = y_i - y_j \\ \gamma_i = x_m - x_j & \gamma_j = x_i - x_m & \gamma_m = x_j - x_i \end{array} \quad (4.23)$$

Logo, tem-se a Equação (4.24).

$$\begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{Bmatrix} = \frac{1}{2A} \begin{bmatrix} \alpha_i & \alpha_j & \alpha_m \\ \beta_i & \beta_j & \beta_m \\ \gamma_i & \gamma_j & \gamma_m \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_i \\ u_j \\ u_m \end{Bmatrix} \quad (4.24)$$

De forma similar ao feito para o descolamento \mathbf{u} , para o deslocamento \mathbf{v} , os coeficientes a_4, a_5 e a_6 , são iguais a Equação (4.25).

$$\begin{Bmatrix} a_4 \\ a_5 \\ a_6 \end{Bmatrix} = \frac{1}{2A} \begin{bmatrix} \alpha_i & \alpha_j & \alpha_m \\ \beta_i & \beta_j & \beta_m \\ \gamma_i & \gamma_j & \gamma_m \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_i \\ v_j \\ v_m \end{Bmatrix} \quad (4.25)$$

Para encontrar as funções de interpolação N_i , ou funções de forma, que são usadas para relacionar os deslocamentos nodais com as coordenadas do ponto dentro do elemento. Resolve-se a Equação (4.15), sendo necessário reescrever os deslocamentos em forma matricial. Uma vez que, o processo irá se repetir para \mathbf{u} e \mathbf{v} , será demonstrado apenas os deslocamentos em \mathbf{u} , dado pela Equação (4.26).

$$\{u\} = [1 \quad x \quad y] \begin{Bmatrix} \alpha_i \\ \alpha_j \\ \alpha_m \end{Bmatrix} \quad (4.26)$$

substituindo (4.24) em (4.26), tem-se a Equação (4.27):

$$\{u\} = \frac{1}{2A} [1 \quad x \quad y] \begin{bmatrix} \alpha_i & \alpha_j & \alpha_m \\ \beta_i & \beta_j & \beta_m \\ \gamma_i & \gamma_j & \gamma_m \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_i \\ u_j \\ u_m \end{Bmatrix} \quad (4.27)$$

resolvendo o problema algébrico, obtém-se a Equação (4.28).

$$u(x, y) = \frac{1}{2A} \{(\alpha_i + \beta_i x + \gamma_i y)u_i + (\alpha_j + \beta_j x + \gamma_j y)u_j + (\alpha_m + \beta_m x + \gamma_m y)u_m\} \quad (4.28)$$

De forma análoga, temos que a função $v(x, y)$ é dada pela Equação (4.29).

$$v(x, y) = \frac{1}{2A} \{(\alpha_i + \beta_i x + \gamma_i y)v_i + (\alpha_j + \beta_j x + \gamma_j y)v_j + (\alpha_m + \beta_m x + \gamma_m y)v_m\} \quad (4.29)$$

Partindo do ponto em que as equações (4.28) e (4.29) possuem termos semelhantes entre elas, eles são chamados de funções interpoladoras do elemento triangular de três nós, assim pode-se definir as funções de forma, dadas pelas Equações em (4.30).

$$\begin{aligned} N_i &= \frac{1}{2A}(\alpha_i + \beta_i x + \gamma_i y) \\ N_j &= \frac{1}{2A}(\alpha_j + \beta_j x + \gamma_j y) \\ N_m &= \frac{1}{2A}(\alpha_m + \beta_m x + \gamma_m y) \end{aligned} \quad (4.30)$$

Logo, a Equação (4.15) pode ser reescrita conforme a Equação (4.31).

$$\begin{aligned} u(x, y) &= N_i u_i + N_j u_j + N_m u_m \\ v(x, y) &= N_i v_i + N_j v_j + N_m v_m \end{aligned} \quad (4.31)$$

matricialmente, tem-se a Equação (4.32) .

$$\begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} N_i & 0 & N_j & 0 & N_m & 0 \\ 0 & N_i & 0 & N_j & 0 & N_m \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ u_j \\ v_j \\ u_m \\ v_m \end{Bmatrix} \quad (4.32)$$

ou em notação a Equação (4.33).

$$\{\mathbf{u}\} = [\mathbf{N}]\{\mathbf{d}\} \quad (4.33)$$

4.3.1 Deformação do elemento e matriz de rigidez

A partir da Equação (4.7), temos que as deformações no elemento são definidas conforme a Equação (4.34).

$$\varepsilon = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \end{bmatrix} \quad (4.34)$$

Pelas derivadas das Equações de deslocamento (4.10), obtém-se as Equações (4.35), validando a definição de que no elemento triangular todos os seus pontos convergem para um estado plano de tensões ou deformações, por este motivo é chamado de CST (*constant-strain triangle*) e apresentado por Turner, Clough, Martin e Topp (1956).

$$\varepsilon_x = a_2 \quad \varepsilon_y = a_6 \quad \gamma_{xy} = a_3 + a_5 \quad (4.35)$$

Como as funções de forma são dependentes de x e y, tem-se que as derivadas das Equações (4.31) são dadas pelas Equações (4.36).

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} = u_{,x} &= \frac{\partial}{\partial x} (N_i u_i + N_j u_j + N_m u_m) \\ \frac{\partial u}{\partial x} = u_{,x} &= \frac{\partial N_i}{\partial x} u_i + \frac{\partial N_j}{\partial x} u_j + \frac{\partial N_m}{\partial x} u_m \end{aligned} \quad (4.36)$$

Deste modo tem-se que as funções de forma se tornam as Equações (4.37).

$$\begin{aligned} \frac{\partial N_i}{\partial x} &= \frac{1}{2A} (\alpha_i u_i + \beta_i x + \gamma_i y) = \frac{\beta_i}{2A} \\ \frac{\partial N_j}{\partial x} &= \frac{\beta_j}{2A} \\ \frac{\partial N_m}{\partial x} &= \frac{\beta_m}{2A} \end{aligned} \quad (4.37)$$

Substituindo a (4.37) em (4.36), tem-se a Equação (4.38).

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{2A} (\beta_i u_i + \beta_j u_j + \beta_m u_m) \quad (4.38)$$

e conseqüentemente, tem-se que ε_y é dada pela Equação (4.39).

$$\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{1}{2A} (\gamma_i v_i + \gamma_j v_j + \gamma_m v_m) \quad (4.39)$$

e que γ_{xy} é dada pela Equação (4.40).

$$\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = (\gamma_i u_i + \beta_i v_i + \gamma_j u_j + \beta_j v_j + \gamma_m u_m + \beta_m v_m) \quad (4.40)$$

Finamente substituindo as Equações (4.38), (4.39) e (4.40) em (4.34), tem-se a Equação (4.41).

$$\{\varepsilon\} = \frac{1}{2A} \begin{bmatrix} \beta_i & 0 & \beta_j & 0 & \beta_m & 0 \\ 0 & \gamma_i & 0 & \gamma_j & 0 & \gamma_m \\ \gamma_i & \beta_i & \gamma_j & \beta_j & \gamma_m & \beta_m \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ u_j \\ v_j \\ u_m \\ v_m \end{Bmatrix} \quad (4.41)$$

$$\{\varepsilon\} = [[\beta_i] \quad [\beta_j] \quad [\beta_m]] \begin{Bmatrix} d_i \\ d_j \\ d_m \end{Bmatrix} = [B]\{d\} \quad (4.42)$$

onde d_i , d_j e d_m são as deformações em u , v e γ .

Com isso, tem-se que a matriz de deformações é dada por:

$$[\beta_i] = \frac{1}{2A} \begin{bmatrix} \beta_i & 0 \\ 0 & \gamma_i \\ \gamma_i & \beta_i \end{bmatrix} \quad [\beta_j] = \frac{1}{2A} \begin{bmatrix} \beta_j & 0 \\ 0 & \gamma_j \\ \gamma_j & \beta_j \end{bmatrix} \quad [\beta_m] = \frac{1}{2A} \begin{bmatrix} \beta_m & 0 \\ 0 & \gamma_m \\ \gamma_m & \beta_m \end{bmatrix} \quad (4.43)$$

ou

$$[\beta] = [[\beta_i] \quad [\beta_j] \quad [\beta_m]] \quad (4.44)$$

No elemento CST a relação tensão deformação é dada pela Equação (4.3), conforme foi visto no breve resumo sobre teoria da elasticidade e utilizando do princípio da energia potencial mínima, pode-se obter a matriz de rigidez do elemento CST. A energia potencial total é descrita pela Equação (4.45).

$$\pi_p = \pi_p(u_i, v_i, u_j, \dots, v_m) \quad (4.45)$$

que é dada pela Equação (4.46).

$$\pi_p = U + \Omega_b + \Omega_p + \Omega_s \quad (4.46)$$

em que:

- U é a energia de deformação dada pela Equação (4.47).

$$U = \frac{1}{2} \iiint_v \{\boldsymbol{\varepsilon}\}^T \{\boldsymbol{\sigma}\} dV = \frac{1}{2} \iiint_v \{\boldsymbol{\varepsilon}\}^T [\mathbf{D}] \{\boldsymbol{\varepsilon}\} dV \quad (4.47)$$

- Ω_b é a energia potencial das forças de corpo dada pela Equação (4.48).

$$\Omega_b = \iiint_v \{\mathbf{u}\}^T [\mathbf{X}] dV \quad (4.48)$$

- Ω_p é a energia potencial das cargas concentradas conforme a Equação (4.49).

$$\Omega_p = -\{\mathbf{d}\}^T [\mathbf{P}] \quad (4.49)$$

- Ω_s é a energia potencial das cargas distribuídas dada pela Equação (4.50).

$$\Omega_s = -\iint_s \{\mathbf{u}\}^T [\mathbf{T}]_s dS \quad (4.50)$$

A partir das equações de deslocamentos nodais (4.33) e das matrizes de deformações em (4.42) e substituindo as Equações (4.47), (4.48), (4.49) e (4.50) na Equação (4.46), tem-se a Equação (4.51).

$$\begin{aligned} \pi_p = & \frac{1}{2} \iiint_v [\{\mathbf{d}\}^T [\mathbf{B}]^T [\mathbf{D}] [\mathbf{B}] \{\mathbf{d}\}] dV - \iiint_v [\{\mathbf{d}\}^T [\mathbf{N}]^T [\mathbf{X}]] dV - \{\mathbf{d}\}^T [\mathbf{P}] \\ & - \iint_s \{\mathbf{d}\}^T [\mathbf{N}]_s^T [\mathbf{T}]_s dS \end{aligned} \quad (4.51)$$

Pode ser reformulada conforme a Equação (4.52).

$$\begin{aligned} \pi_p = & \frac{1}{2} \{\mathbf{d}\}^T \iiint_v [[\mathbf{B}]^T [\mathbf{D}] [\mathbf{B}]] dV \{\mathbf{d}\} - \{\mathbf{d}\}^T \iiint_v [[\mathbf{N}]^T [\mathbf{X}]] dV - \{\mathbf{d}\}^T [\mathbf{P}] \\ & - \{\mathbf{d}\}^T \iint_s [[\mathbf{N}]_s^T [\mathbf{T}]_s] dS \end{aligned} \quad (4.52)$$

Analisando os últimos três termos da Equação (4.52), pode-se concluir que o sistema de forças é representado pela Equação (4.53).

$$\{\mathbf{f}\} = \iiint_v [\mathbf{N}]^T [\mathbf{X}] dV + [\mathbf{P}] + \iint_s [\mathbf{N}]_s^T [\mathbf{T}]_s dS \quad (4.53)$$

Substituindo a Equação (4.53) na Equação (4.52) tem-se a Equação (4.54).

$$\pi_p = \frac{1}{2} \{\mathbf{d}\}^T \iiint_v [[\mathbf{B}]^T [\mathbf{D}] [\mathbf{B}]] dV \{\mathbf{d}\} - \{\mathbf{d}\}^T \{\mathbf{f}\} \quad (4.54)$$

Ao considerar a primeira variação em relação aos deslocamentos nodais, tem-se a Equação (4.55).

$$\frac{\partial \pi_p}{\partial \mathbf{d}} = \left[\iiint_v [[\mathbf{B}]^T [\mathbf{D}] [\mathbf{B}]] dV \right] \{\mathbf{d}\} - \{\mathbf{f}\} = 0 \quad (4.55)$$

Assim, tem-se a Equação (4.56).

$$\iiint_v [[\mathbf{B}]^T [\mathbf{D}] [\mathbf{B}]] dV \{\mathbf{d}\} = \{\mathbf{f}\} \quad (4.56)$$

ou de forma matricial a Equação (4.57).

$$[\mathbf{k}] \{\mathbf{d}\} = \{\mathbf{f}\} \quad (4.57)$$

sendo $[\mathbf{k}]$ a matriz de rigidez dada pela Equação (4.58).

$$[\mathbf{k}] = t \iint_A [[\mathbf{B}]^T [\mathbf{D}] [\mathbf{B}]] dx dy \quad (4.58)$$

e finalmente a Equação (4.59).

$$[\mathbf{k}] = tA [[\mathbf{B}]^T [\mathbf{D}] [\mathbf{B}]] \quad (4.59)$$

A matriz de rigidez do elemento triangular pode ser expressa como submatrizes, conforme a Equação (4.60).

$$[\mathbf{k}] = \begin{bmatrix} \mathbf{k}_{ii} & \mathbf{k}_{ij} & \mathbf{k}_{im} \\ \mathbf{k}_{ji} & \mathbf{k}_{jj} & \mathbf{k}_{jm} \\ \mathbf{k}_{mi} & \mathbf{k}_{mj} & \mathbf{k}_{mm} \end{bmatrix}_{(6 \times 6)} \quad (4.60)$$

onde as submatrizes 2×2 são dadas por:

$$\begin{aligned} - \mathbf{k}_{ii} &= [[\mathbf{B}]_i^T [\mathbf{D}] [\mathbf{B}]_i] tA \\ - \mathbf{k}_{ij} &= [[\mathbf{B}]_i^T [\mathbf{D}] [\mathbf{B}]_j] tA \\ - \mathbf{k}_{im} &= [[\mathbf{B}]_i^T [\mathbf{D}] [\mathbf{B}]_m] tA \end{aligned}$$

Cada elemento contribui para a formação da matriz de rigidez da estrutura, ocupando as posições correspondentes aos graus de liberdade em seus nós. Após a obtenção da matriz de rigidez global, as condições de contorno são aplicadas, e o sistema de equações é resolvido para determinar os deslocamentos desconhecidos e as reações de apoio.

5 METODOLOGIA

Esse capítulo é destinado a apresentar a classificação da pesquisa quanto a natureza, abordagem, objetivos e os procedimentos realizados no trabalho para atingir as metas propostas.

5.1 CLASSIFICAÇÃO DA PESQUISA

A natureza deste trabalho é de pesquisa aplicada, uma vez que o estudo aborda problemas específicos no campo da engenharia de estruturas. Conforme destacado por Fleury e Werlang (2018), esse tipo de pesquisa é caracterizado por uma abordagem em que conhecimentos previamente adquiridos são aplicados para selecionar e coletar fatos e dados com o propósito de obter e confirmar resultados.

Quanto à abordagem do problema, adota-se uma pesquisa quali-quantitativa. Os dados derivados da implementação do código consistem em valores das tensões principais e suas trajetórias, aspectos intrínsecos à análise estrutural. Isso evidencia a manipulação de dados numéricos, conferindo ao estudo um caráter quantitativo. Adicionalmente, é essencial comparar os resultados obtidos pelo código com ferramentas comerciais estabelecidas, como o *LISA*, para avaliar qualitativamente o seu potencial.

Quanto aos seus objetivos, o estudo se enquadra como uma pesquisa exploratória. Inicialmente, foram conduzidas pesquisas bibliográficas para se familiarizar com o problema, tornando-o mais explícito e levantando hipóteses para sua resolução. Essa abordagem, de acordo com Gil (2002), caracteriza a pesquisa exploratória.

No que se refere aos procedimentos técnicos, a pesquisa é identificada como bibliográfica e experimental. Como destacado anteriormente, a fase de revisão do referencial teórico é essencial para fundamentar a pesquisa. Além disso, o trabalho se configura como uma pesquisa experimental, uma vez que, além de propor o desenvolvimento de códigos numéricos para conduzir as análises, investiga os resultados que serão obtidos por meio dos experimentos numéricos.

5.2 PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS

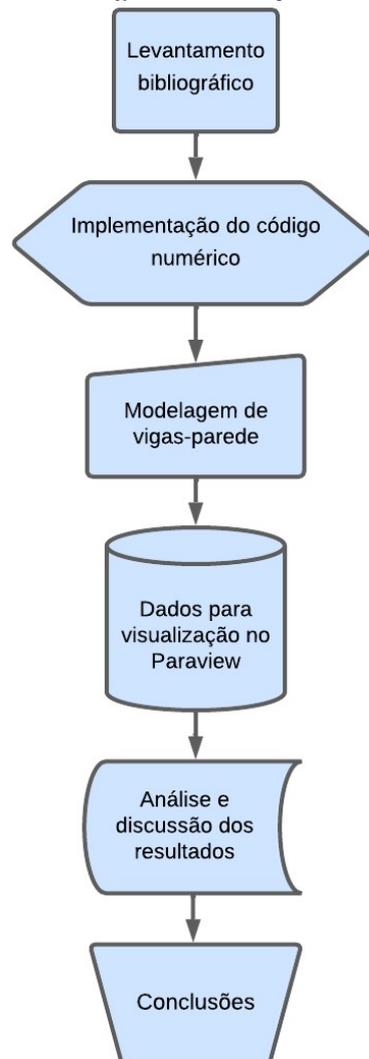
Como descrito anteriormente, o objetivo geral da pesquisa é examinar o comportamento das trajetórias de tensões principais em vigas-parede por meio de métodos numéricos, utilizando o elemento finito CST e, a partir disso, realizar o dimensionamento de tais elementos por meio do Modelo de Bielas e Tirantes. Para isso, foi desenvolvido um código

numérico no software *Scilab*. Com a finalidade de gerar dados que descrevem o fluxo de tensões principais. Por fim, foi realizado o pós-processamento dos dados no *software Paraview*, uma nova rotina foi implementada.

A metodologia empregada incorporou hipóteses simplificadoras, como a homogeneidade dos materiais e uma análise linear-elástica. Essas decisões viabilizaram a aplicação das equações de resistência dos materiais para o cálculo das tensões no estado plano de tensão, com o objetivo de obter as trajetórias de tensões principais.

Logo após, compara-se os resultados com o pacote comercial *LISA*, a fim de verificar a formulação implementada. O fluxograma apresentado na Figura 5.2.1 representa a sequência cronológica de passos executados para atingir os objetivos propostos, e os tópicos a seguir são dedicados a detalhar esse processo.

Figura 5.2.1 – Fluxograma das etapas metodológicas.



Fonte: Autoria própria, 2023.

5.2.1 Levantamento bibliográfico

Durante esta fase, foi conduzida uma revisão da literatura sobre o tema em estudo. O meio eletrônico foi amplamente utilizado para a obtenção de material bibliográfico, incluindo trabalhos e estudos desenvolvidos nesta área, como livros e trabalhos acadêmicos. Nesta fase, alguns livros físicos foram adquiridos. É importante destacar que essa etapa se estendeu ao longo de todo o desenvolvimento do trabalho, pois, à medida que se avançava, havia a necessidade de aprofundamento em alguns tópicos.

5.2.2 Código computacional

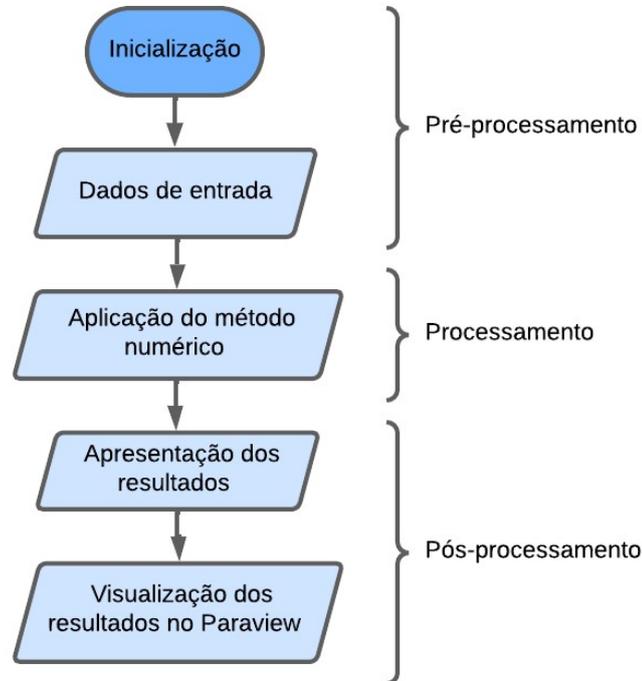
O código numérico para análise das trajetórias de tensões principais por meio de elementos finitos CST, partiu inicialmente do código presente na obra de Kattan (2008). No livro intitulado *MATLAB Guide to Finite Elements*, capítulo onze, onde consta o código para o elemento finito triangular linear. O elemento foi escolhido devido a sua simplicidade e por possuir tensão e deformação constante por todo o elemento, o que facilitou a implementação de uma rotina de suavização de tensão.

Em seguida, o código foi transcrito para a linguagem *Scilab*. Com o objetivo de validar a implementação ~~correta~~, o exemplo 11.1, retirado da referência antes mencionada, foi modelado. Esse processo permitiu a obtenção dos deslocamentos, forças nos nós e coordenadas da geometria deformada da estrutura. Posteriormente, o código passou por adaptações específicas para este estudo, a fim de atender aos critérios de análise estrutural de elementos de concreto especiais, com foco em vigas-parede. As adaptações foram as seguintes:

- a) Adaptação do código para que a entrada de dados fosse realizada em uma função distinta do programa principal;
- b) Implementação para o cálculo das tensões suavizadas nos nós;
- c) Implementação para o cálculo das tensões principais e seus respectivos ângulos de inclinação.
- d) Implementação da verificação da trajetória de tensões principais a partir das tensões normais e cisalhantes.
- e) Implementação de uma rotina para exportar uma matriz com vetores das trajetórias de tensões em um arquivo *.txt*.

Na Figura 5.2.2.1 é mostrado o fluxograma do código computacional implementado na qual ilustra a sequência de etapas conforme discutido nos itens acima.

Figura 5.2.2.1 – Fluxograma do código computacional.



Fonte: Autoria própria, 2023.

Na etapa inicial, são efetuados alguns cálculos para a inicialização do problema, sendo necessário que o usuário forneça ao algoritmo informações sobre a geometria e o material dos elementos da estrutura:

- Módulo de elasticidade;
- Coeficiente de Poisson;
- Número de elementos;
- Número de nós;
- Espessura da seção transversal dos elementos;
- Coordenadas nodais;
- Conectividades dos elementos;
- Nós restritos e direção de restrição;
- Nós com cargas aplicadas e seu carregamento;
- Tipo de análise: tensão plana ou deformação plana;

Na fase de processamento dos dados, o código numérico emprega o método dos elementos finitos a partir de elementos finitos CST para avaliar as trajetórias de tensões principais da estrutura. Diversas funções são acionadas para calcular a matriz de rigidez de

todos os elementos triangulares lineares, construir a matriz de rigidez global da estrutura, aplicar as condições de contorno, determinar as forças internas e os deslocamentos, verificar a direção das tensões principais e por fim exportar um arquivo *.txt* com o resultado da análise.

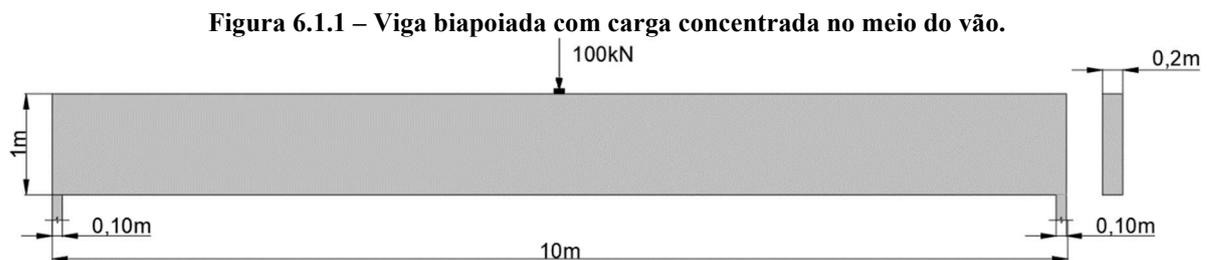
Na fase de pós-processamento, o código numérico exibe os resultados da análise. Adicionalmente, considerando a importância da visualização gráfica para uma interpretação precisa, o algoritmo incorpora uma função para salvar os dados necessários. Isso possibilita a visualização das trajetórias de tensões principais e consequentes campos de tensões ao longo do processo por meio do software *Paraview*.

6 APLICAÇÕES NUMÉRICAS

Neste capítulo, serão expostos os resultados e discussões referentes às análises estruturais de problemas clássicos presentes na literatura. Nos próximos tópicos, além de apresentar as trajetórias das tensões principais, serão destacadas as peculiaridades do método de bielas e tirantes. Isso visa proporcionar uma compreensão mais aprofundada para situações mais complexas, como no caso de vigas-parede com aberturas.

6.1 VIGA ESBELTA

O primeiro problema analisado nesta pesquisa trata-se de uma viga esbelta biapoiada com uma carga concentrada numa faixa de 10 cm no meio do vão na face superior. A geometria da estrutura é apresentada na Figura 6.1.1. Este problema é de autoria própria, tem a finalidade de verificar a influência da variação do tamanho do vão no campo de tensão que se desenvolve dentro do elemento estrutural. A viga possui módulo de elasticidade $E = 20GPa$ e $\nu = 0,2$.



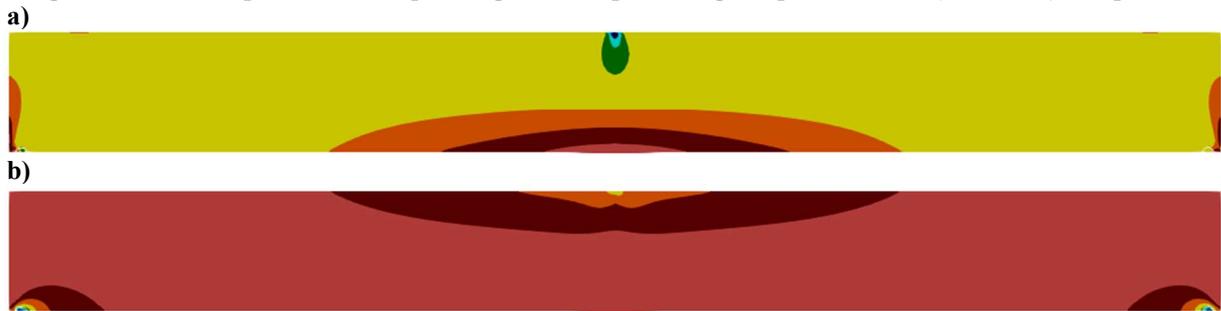
Fonte: Autoria própria, 2023.

Os parâmetros utilizados como dados de entrada no código numérico implementado, foram:

- Módulo de elasticidade: $E = 20e9$;
- Coeficiente de Poisson: $\nu = 0.2$;
- Número de elementos: $numberElements = 32000$;
- Número de nós: $numberNodes = 16441$;
- Espessura: $thickness = 0.20$;
- Coordenadas dos nós: $nodecoordinates = [0.00\ 0.00; \dots; 10.00\ 1.00;]$;
- Conectividades: $ElementNodes = [1\ 42\ 2; \dots; 16400\ 16440\ 16441;]$;
- Condições de contorno:

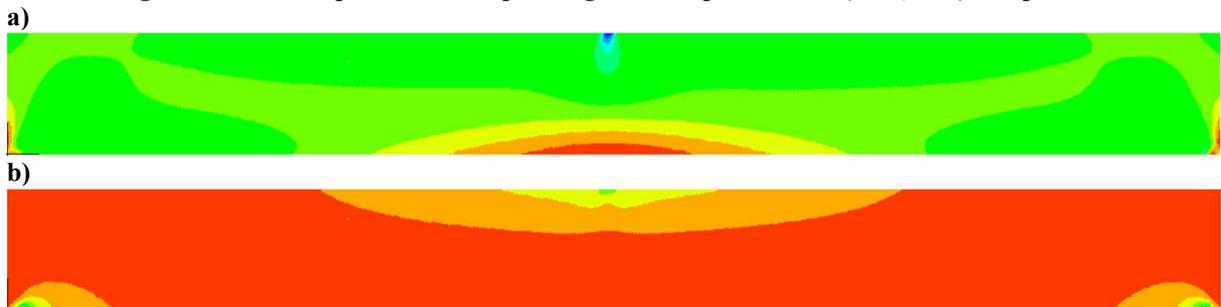
$$bcdof = [1; 2; 83; 84; 165; 166; 247; 248; 32555; 32556; 32637; 32638; 32719; 32720; 32801; 32802;]$$

Figura 6.1.3 – Campos de tensões para viga esbelta pelo código implementado: a) tração b) compressão.



Fonte: Aatoria própria, 2023.

Figura 6.1.4 – Campos de tensões para viga esbelta pelo LISA: a) tração b) compressão.

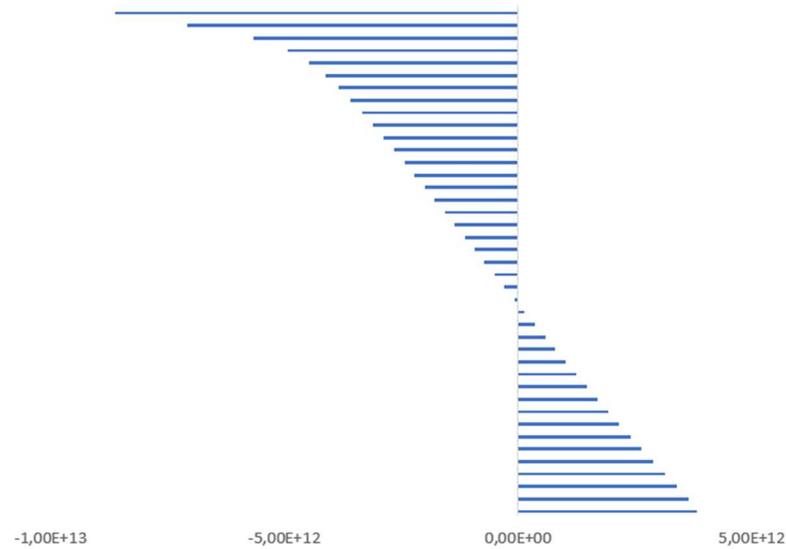


Fonte: Aatoria própria, 2023.

É possível notar que as trajetórias de tensões apresentadas na Figura 6.1.2, correspondem a ideia proposta por Mörsch e que são fundamentais para o dimensionamento ao cisalhamento em vigas a partir da concepção de um modelo de treliça baseado nas trajetórias de tensões principais.

A Figura 6.1.5 apresenta o comportamento das tensões normais σ_x no meio do vão da viga em estudo, é possível observar a linearidade existente no seu comportamento. Contudo, a concentração de tensões próximas a carga pontual resulta em uma perturbação no comportamento, e isso confirma o princípio de *Saint-Venant*. Esse princípio afirma que a tensão e a deformação produzidas em pontos de um corpo suficientemente distantes da região da aplicação da carga serão iguais à tensão e à deformação produzidas por quaisquer carregamentos aplicados que tenham a mesma resultante estaticamente equivalente e sejam aplicados ao corpo dentro da mesma região em pontos de um corpo suficientemente distantes (Hibbeler, 2010). Em outras palavras, nas áreas mais afastadas do ponto de aplicação da carga, o material exibirá um comportamento linear elástico, no qual a lei de Hooke será válida e existirá uma relação proporcional entre tensão e deformação.

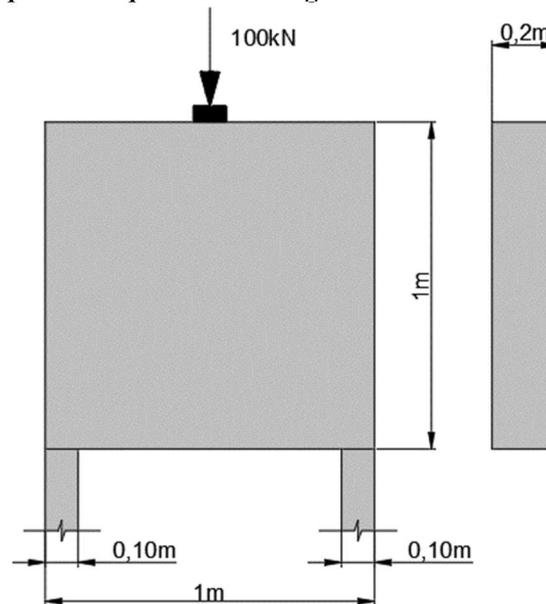
Figura 6.1.5 – comportamento das tensões normais σ_x no meio do vão da viga esbelta.



6.2 VIGA PAREDE

Este exemplo é uma variação do problema proposto na seção anterior, onde aplicou-se uma redução do comprimento da viga e manteve-se as demais características geométricas, com intuito de demonstrar o comportamento das tensões e suas respectivas trajetórias em vigas-parede. A Figura 6.2.1 apresenta as características geométricas do problema.

Figura 6.2.1 – Viga-parede biapoiada com carga concentrada no centro da face superior.

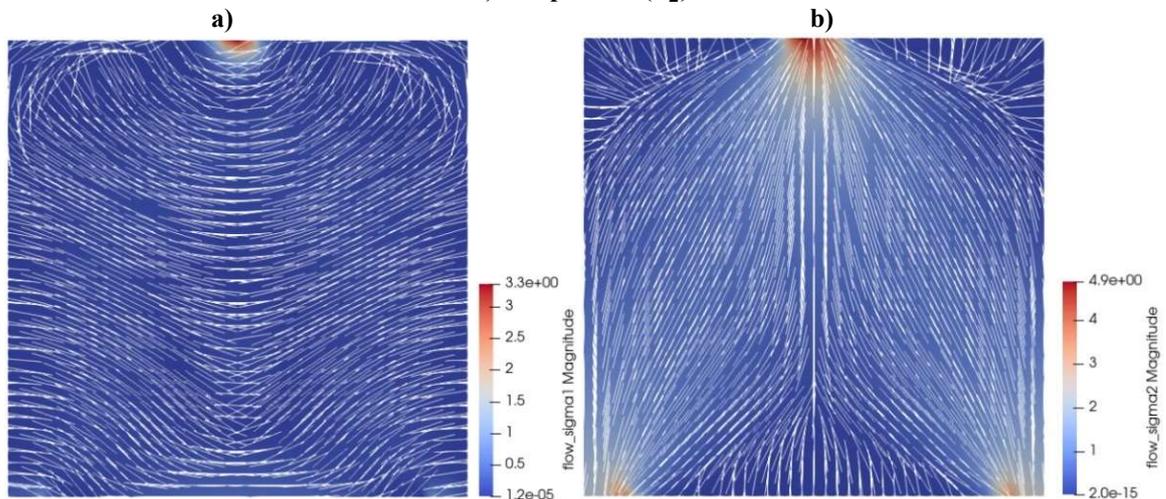


Os parâmetros utilizados como dados de entrada no código numérico implementado, foram:

- Módulo de elasticidade: $E = 20e9$;
- Coeficiente de Poisson: $\nu = 0.2$;
- Número de elementos: $numberElements = 20000$;
- Número de nós: $numberNodes = 10201$;
- Espessura: $thickness = 0.20$;

Aplicando-se a metodologia mencionada para o problema anterior e considerando que os apoios são do segundo gênero, os resultados obtidos são apresentados nas Figuras 6.2.2 e 6.2.3, onde são ilustradas as trajetórias de tensões principais e os campos de tensões, respectivamente.

**Figura 6.2.2 – Trajetória de tensões em viga-parede biapoiada com carga concentrada: a) tração (σ_1)
b) compressão (σ_2).**

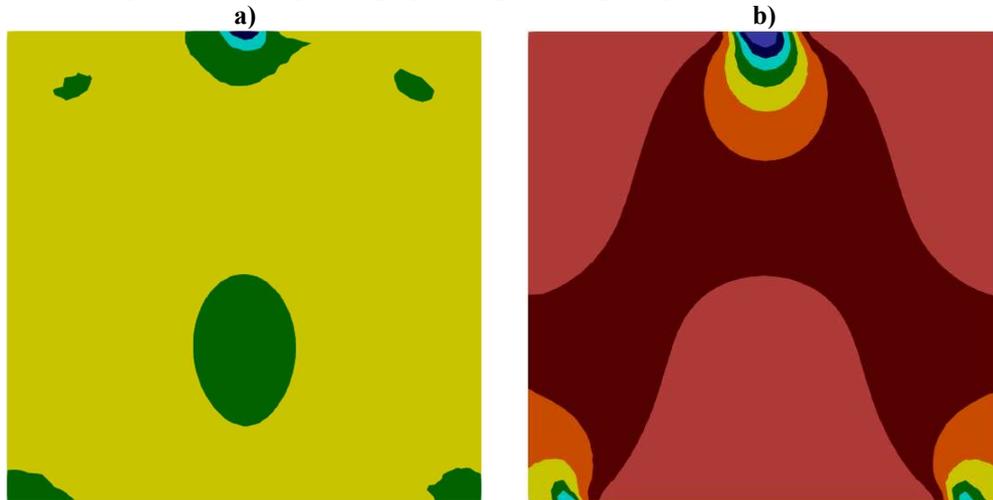


Fonte: Autoria própria, 2023.

Nota-se que as trajetórias de tensões de tração (σ_1) estão mais concentradas na região inferior da viga-parede e paralelas ao eixo longitudinal, onde comumente chamamos de região tracionada devido o momento fletor positivo, desta forma, explicando a necessidade de armadura no banzo inferior tracionado. Também é possível observar a altura em que as armaduras devem ser dispostas, uma vez que devem seguir as tensões de tração. Por outro lado, as trajetórias de tensões de compressão (σ_2) assemelham-se com duas “garrafas”, confirmando a teoria proposta no capítulo 3, onde as cargas aplicadas tendem a distribuir-se direcionando-se diretamente para os apoios e que os ângulos das bielas de compressão são definidos a partir do centro do apoio até o centro do carregamento. Nesta situação, devido a essas características, as propriedades mecânicas do concreto suportam as cargas nas bielas, dispensando a necessidade de armaduras de compressão para as bielas.

É possível observar que as tensões de tração atravessam os campos de tração e nessa região faz-se necessário de armaduras secundárias que “costuram” os campos de compressão, desta forma controlando a fissuração nas bielas.

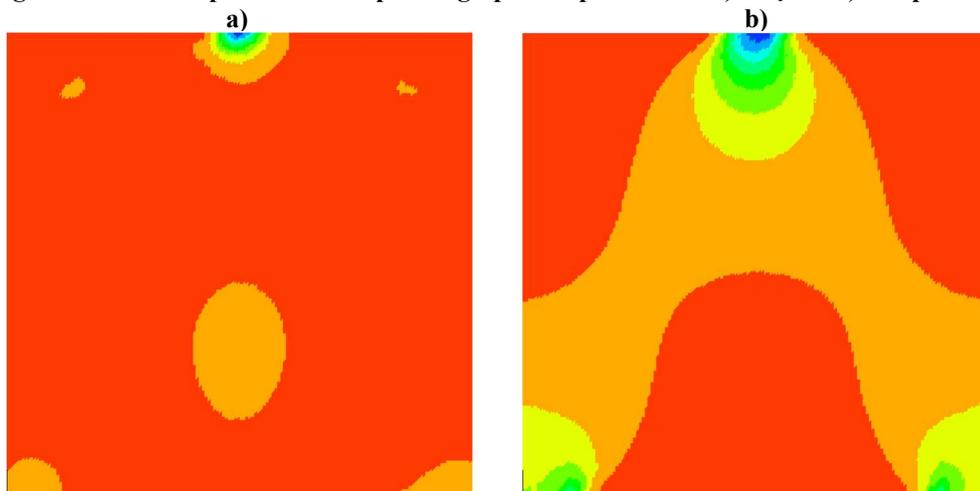
Figura 6.2.3 – Campos de tensões para viga-parede pelo código implementado: a) tração b) compressão.



Fonte: Autoria própria, 2023.

A Figura 6.2.4 ilustra o resultado obtido para este exemplo através do *software LISA*, em que se nota a existência de uma pequena diferença nas inclinações dos campos de tensões nas regiões dos apoios e no local de aplicação da carga. Tal fato decorre da diferença na orientação do elemento nas malhas do código implementado e aquela gerada pelo LISA. A Figura 6.2.6 apresenta a discretização realizada para solucionar o problema através da implementação e a Figura 6.2.7 ilustra a discretização realizada no *LISA*.

Figura 6.2.4 – Campos de tensões para viga-parede pelo LISA: a) tração b) compressão.

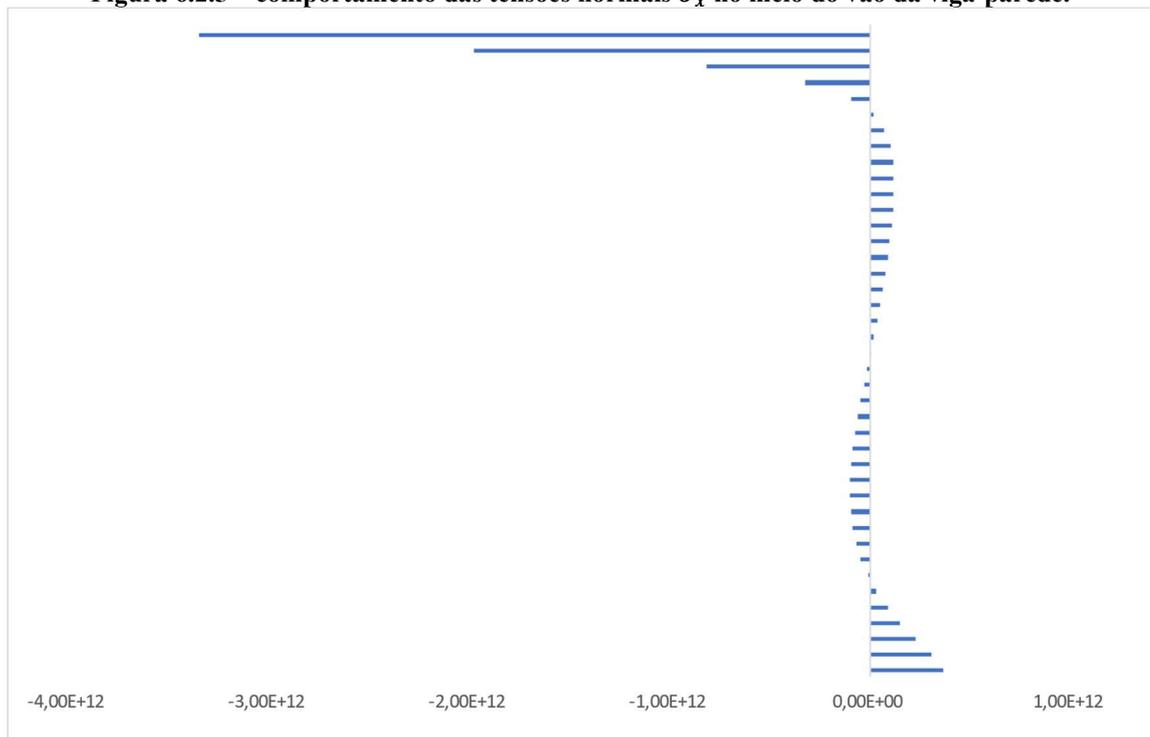


Fonte: Autoria própria, 2023.

Através a discretização adotada na implementação (Figura 6.2.6) percebe-se que a orientação dos elementos está da esquerda para direita. Por outro lado, na representação dada na Figura 6.2.7, a discretização adotada pelo pacote comercial *LISA*, sugere o sentido contrário, indicando assim o motivo pelo qual a visualização dos resultados leva em consideração a composição da malha.

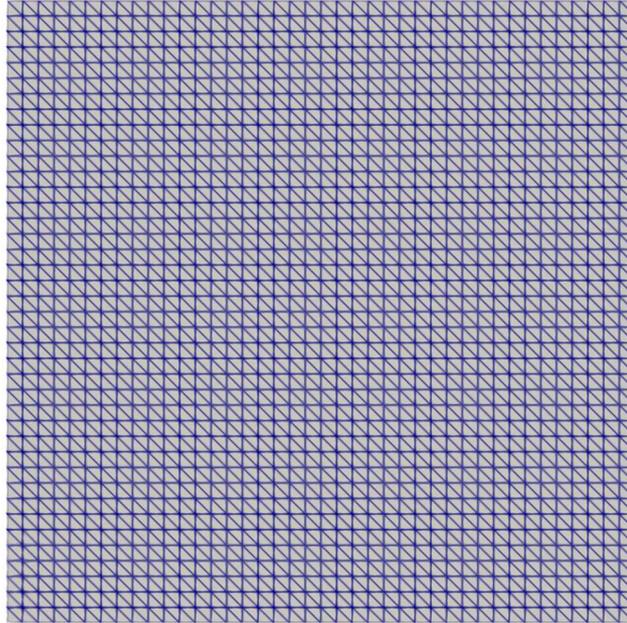
A Figura 6.2.5 ilustra o comportamento das tensões normais (σ_x) no meio do vão da viga-parede obtida através da implementação de elementos finitos CST, onde apresenta não linearidade das tensões axiais. Tal fato pode ser atribuído a diversos fatores. Em vigas-parede, especialmente em regiões onde a geometria ou a distribuição de cargas resultam em condições complexas, as simplificações lineares podem não capturar completamente a resposta estrutural. Descontinuidades na geometria, variações bruscas de seção transversal ou concentrações de carga podem criar gradientes de tensão não lineares ao longo da estrutura. A utilização de métodos numéricos, oferece uma abordagem mais precisa para analisar esse comportamento não linear das tensões, e entender melhor como a estrutura responde a diferentes condições de carregamento. Tal fato é fundamental para um dimensionamento estrutural preciso, especialmente em casos em que o comportamento não linear das tensões pode influenciar significativamente o desempenho e na segurança da viga-parede, sendo importante considerar os efeitos de cisalhamento.

Figura 6.2.5 – comportamento das tensões normais σ_x no meio do vão da viga-parede.



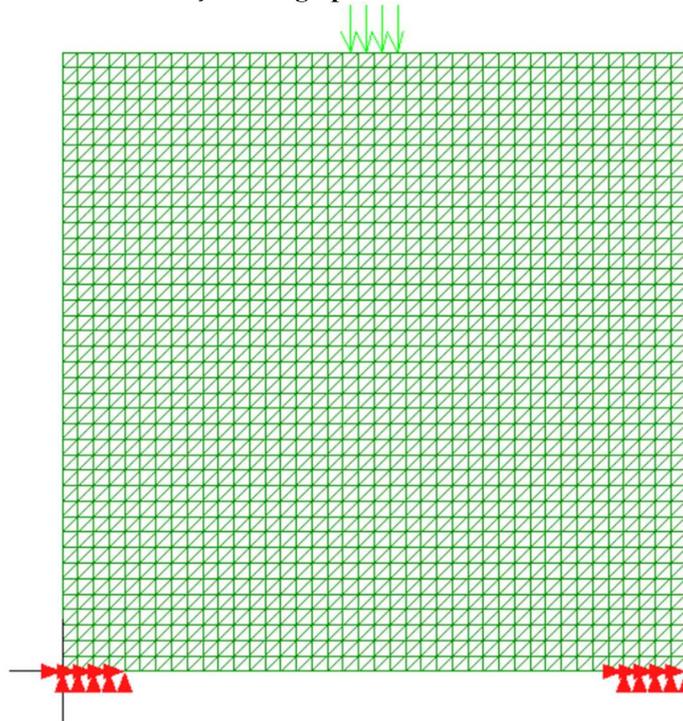
Fonte: Autoria própria, 2023.

Figura 6.2.6 – Discretização de viga-parede em elementos finitos CST para o código implementado.



Fonte: Autoria própria, 2023.

Figura 6.2.7 – Discretização de viga-parede em elementos finitos CST pelo LISA.

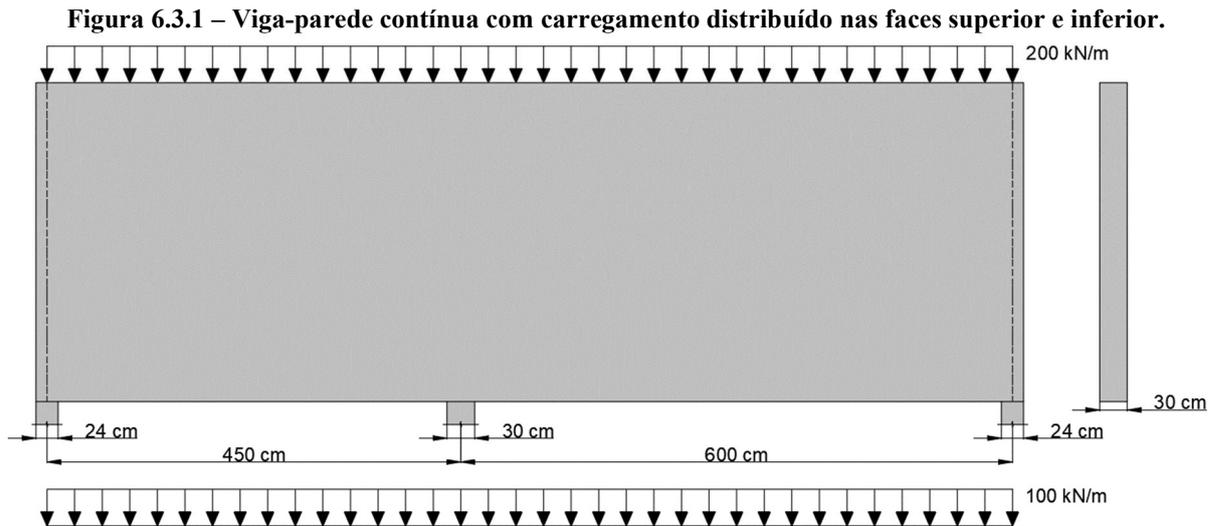


Fonte: Autoria própria, 2023.

Por fim, pode-se concluir que a observação realizada não anula a validade do código, mas ressalta a importância de avaliar como os softwares comerciais realizam a discretização antes de realizar a validação dos resultados da pesquisa. Isso se evidencia no exemplo 6.4, onde uma estrutura de maior complexidade foi discretizada da mesma maneira nas duas ferramentas, resultando em conclusões idênticas.

6.3 VIGA-PAREDE CONTÍNUA

Nesta seção analisa-se um problema estudado por Santos (2021). Trata-se de uma viga-parede contínua com assimetria entre os vãos. A Figura 6.3.1 ilustra as características geométricas do elemento estrutural, em que ele está submetido a um carregamento distribuído na face superior e outro na face inferior.



Fonte: Adaptado de Santos, 2021.

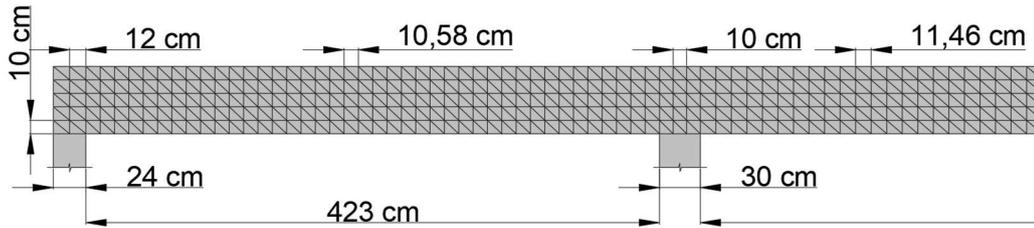
Os parâmetros utilizados como dados de entrada no código numérico implementado, foram:

- Número de elementos: *numberElements* = 6790;
- Número de nós: *numberNodes* = 3528;
- Espessura: *thickness* = 0.30;

Durante a pesquisa, vários autores sugerem, para que se obtenha um resultado satisfatório na análise pelo MEF, o projetista deve refinar a malha de modo que esta atinja uma resposta satisfatória, levando em consideração que a partir de um determinado número de elementos a resposta se estabiliza. Desta maneira, neste trabalho todos os exemplos possuem um refinamento, cujo resultados são considerados estáveis e não necessitando que a malha seja ampliada e que as respostas sejam mais próximas possíveis da realidade.

Para o exemplo foi necessário realizar uma variação no tamanho dos elementos nos apoios e vãos, para que os nós coincidisse com as condições de contorno e os carregamentos fossem aplicados de forma correta. A Figura 6.3.2 ilustra o padrão seguido para a malha da viga-parede contínua em um caso semelhante.

Figura 6.3.2 – Exemplo de discretização com variação nas dimensões dos elementos.

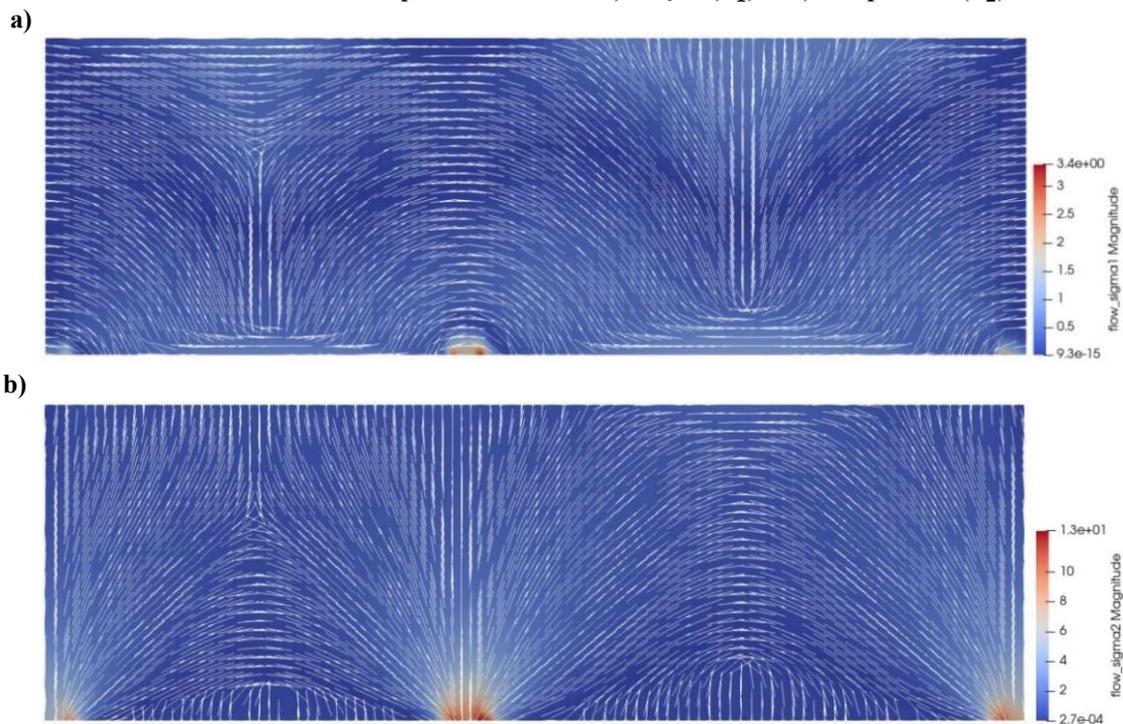


Fonte: Autoria própria, 2023.

Para conduzir a análise, optou-se por variar as condições de contorno da estrutura da seguinte maneira: no primeiro caso, consideraram-se apenas apoios do segundo gênero, o que resultou na hiperstaticidade da viga-parede. A Figura 6.3.3 ilustra as trajetórias de tensões principais para este cenário. Nota-se que as trajetórias de tensões exibem uma simetria nos vãos, onde cada um deles se assemelha ao comportamento de uma viga-parede biapoiada, como exemplificado na seção 6.2.

Para as tensões de tração (σ_1) (Figura 6.3.3a), nota-se que elas se verticalizam nos meios dos vãos e nessa região é como se o concreto estivesse se “abrindo”, ou seja, proporcionando o surgimento de fissuras. Já no apoio intermediário, onde se tem momento fletor negativo é crucial compreender a necessidade de armadura longitudinal devido a tração provocada nessa região.

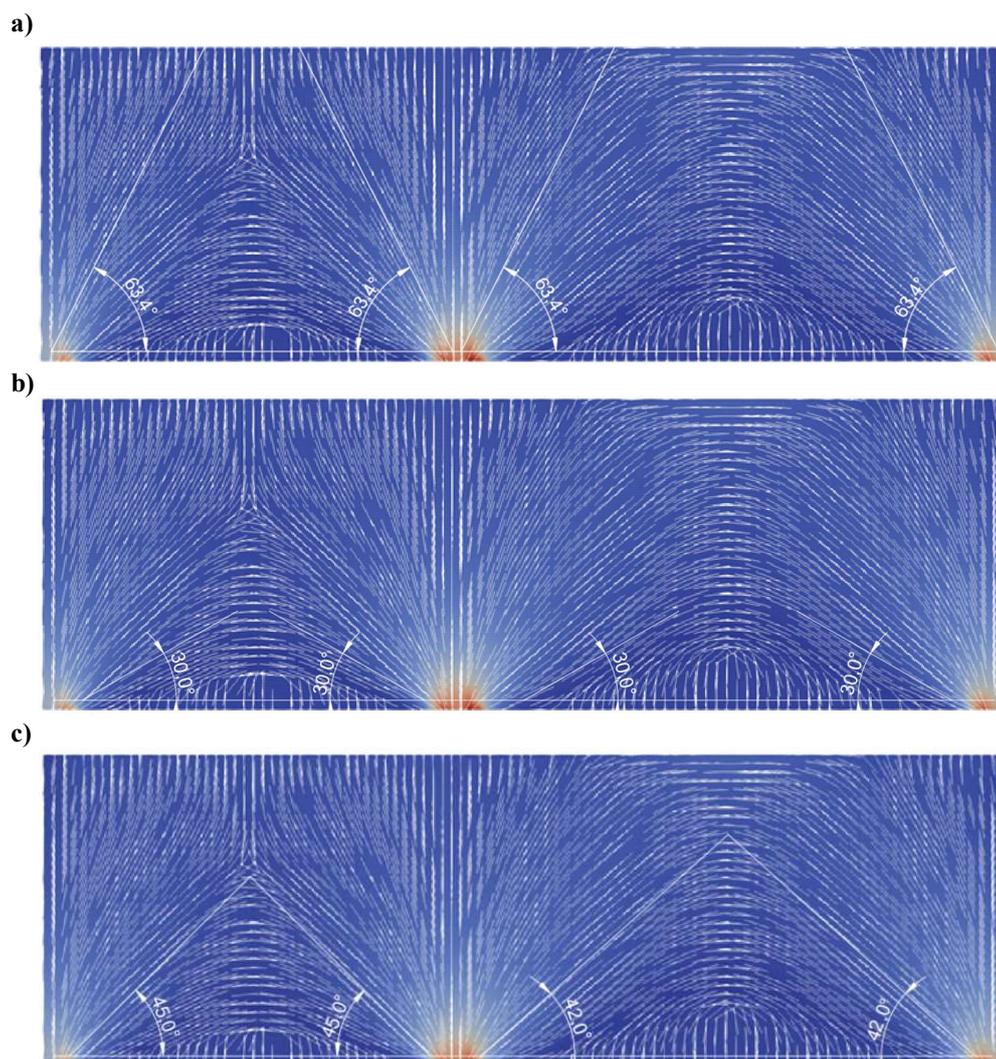
Figura 6.3.3 – Trajetória de tensões em viga-parede contínua de apoios fixos com carregamento distribuído na face superior e inferior: a) tração (σ_1) e b) compressão (σ_2).



Fonte: Autoria própria, 2023.

Após tratar as informações da Figura 6.3.3b, onde são destacadas as trajetórias de tensões de compressão (σ_2), podemos verificar que os ângulos das bielas de compressão podem assumir valores que variam dentro do intervalo permitido pela NBR 6118 (ABNT, 2023) e são semelhantes em cada vão. Conforme ilustra a Figura 6.3.4.

Figura 6.3.4 – Ângulos das bielas de compressão encontrados pelo MEF em viga-parede contínua de apoios fixos: a) ângulo máximo permitido pela NBR 6118 (ABNT, 2023), b) ângulo máximo permitido pela NBR 6118 (ABNT, 2023) e c) ângulos idealizados.



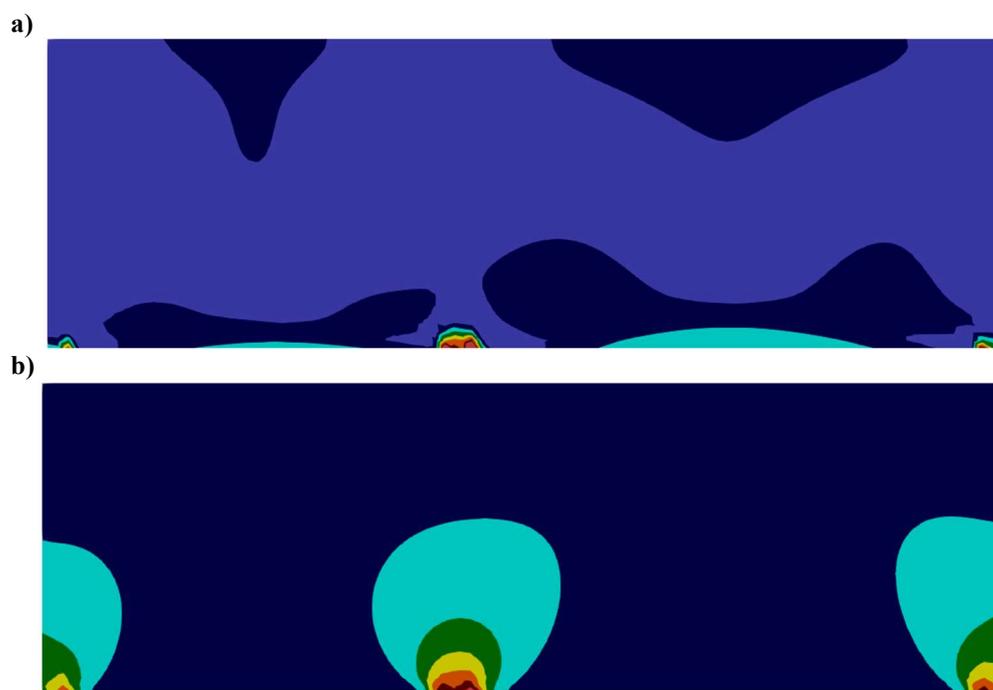
Fonte: Autoria própria, 2023.

Percebe-se que quanto mais o ângulo se torna agudo mais ele se afasta do nó, devido ao fato de acompanhar as trajetórias de tensões principais, o que pode tornar o ponto de intersecção de bielas e tirantes frágil e conseqüentemente necessitando de reforço nessas regiões.

Diante do exposto, as Figuras 6.3.5 e 6.3.6 ilustram os campos de tensões obtidos pelo código implementado e o pacote comercial *LISA* para mais uma vez validar a eficiência do uso

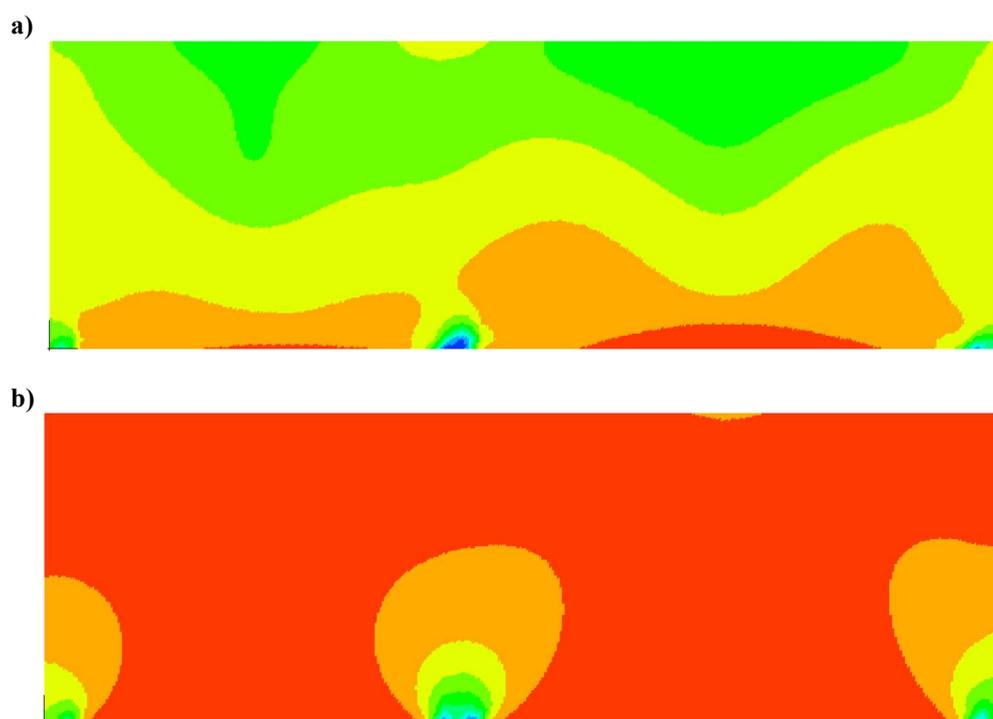
de ferramentas numéricas de código aberto (*open source*) durante o desenvolvimento acadêmico.

Figura 6.3.5 – Campos de tensões para viga-parede contínua hiperestática pelo código implementado: a) tração e b) compressão.



Fonte: Autoria própria, 2023.

Figura 6.3.6 – Campos de tensões para viga-parede contínua hiperestática pelo LISA: a) tração e b) compressão.

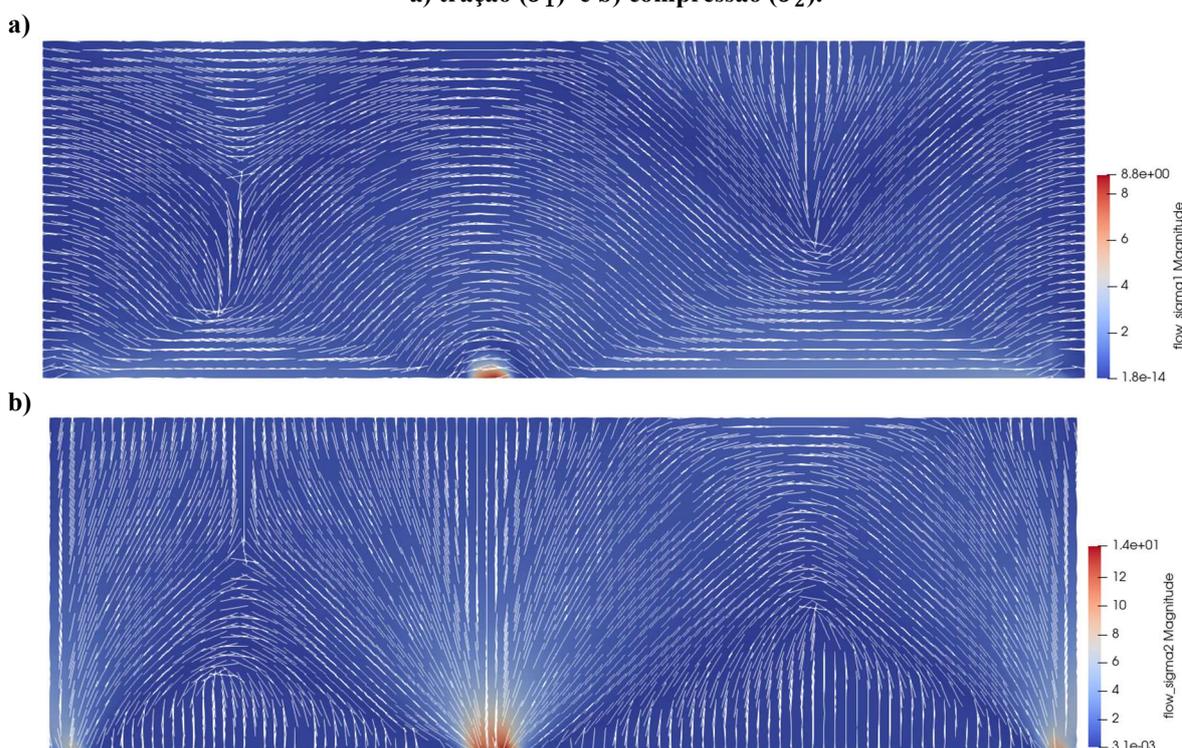


Fonte: Autoria própria, 2023.

Seguindo o proposto inicialmente nesta seção, mais uma vez varia-se as condições de contorno do elemento estrutural. A Figura 6.3.7 ilustra as trajetórias de tensões quando tratamos o primeiro apoio à esquerda como de segundo gênero e os demais de primeiro gênero. O primeiro ponto a se observar é a disposição das trajetórias de tensões de tração (Figura 6.3.7a) onde percebe-se que o critério dos apoios adotados faz com se necessite de uma camada maior de armaduras. Esse fator se deve ao aumento do momento fletor positivo nos vãos, enquanto ao considerar todos apoios fixos no primeiro caso tem-se um momento negativo maior no apoio intermediário.

As tensões de compressão (σ_2) ilustradas na Figura 6.3.7b deixam claro a variação que os ângulos das bielas sofrem com a mudança dos apoios, tornando necessário o aumento de reforços no apoio intermediário e de armaduras de suspensão.

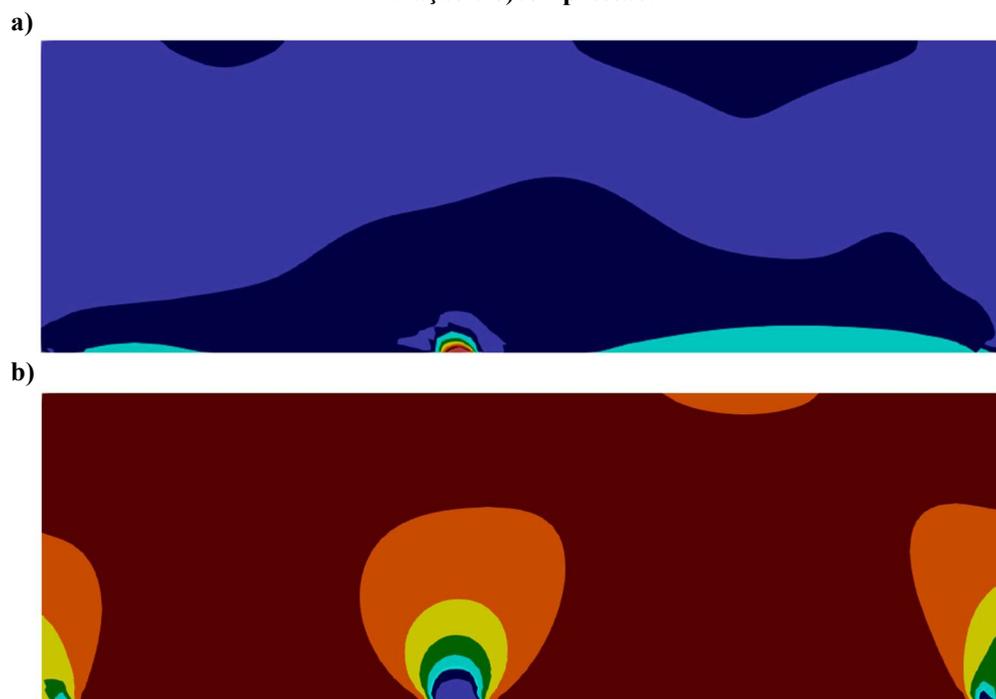
Figura 6.3.7 – Trajetória de tensões em viga-parede contínua isostática com carregamentos distribuídos: a) tração (σ_1) e b) compressão (σ_2).



Fonte: Autoria própria, 2023.

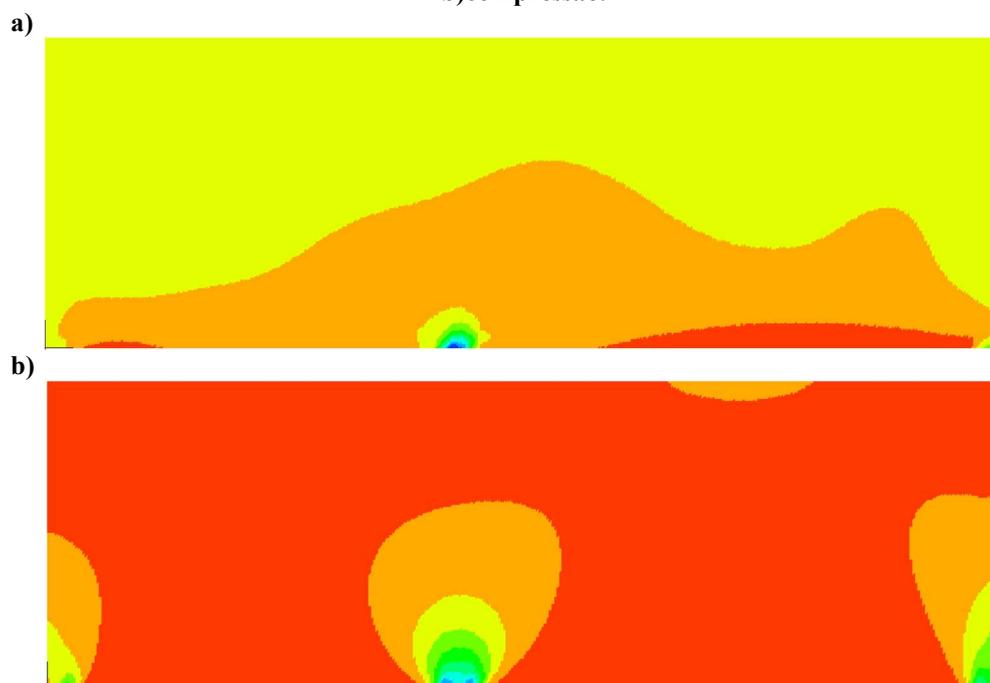
As figuras 6.3.8 e 6.3.9 ilustram o comparativo dos resultados obtidos dos campos de tensões para a viga-parede isostática. Um fato interessante é o aumento das tensões de compressão na face superior do maior vão, representado pela cor laranja (Figuras 6.3.8b e 6.3.9b).

Figura 6.3.8 – Campos de tensões para viga-parede contínua isostática pelo código implementado: a) tração e b) compressão.



Fonte: Autoria própria, 2023.

Figura 6.3.9 – Campos de tensões para viga-parede contínua isostática pelo LISA: a) tração e b) compressão.



Fonte: Autoria própria, 2023.

Um exemplo de dimensionamento para o problema proposto é demonstrado por Santos (2021). O mesmo adotou os seguintes dados de materiais e de cobrimento:

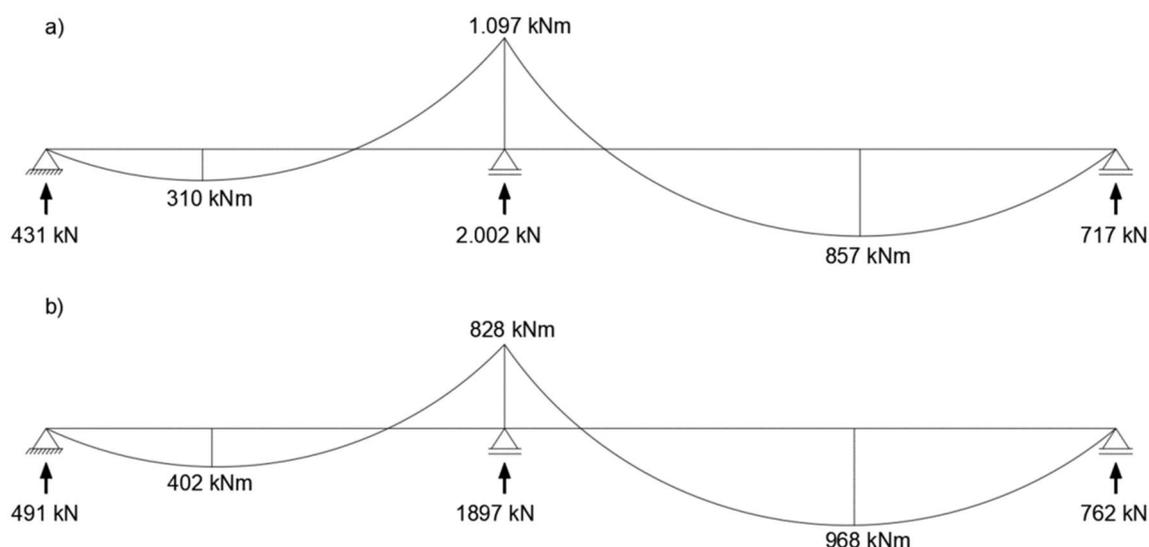
- Concreto: C30;

- Aço: CA50;

- $c = 3$ cm.

Inicialmente, é necessário calcular as reações de apoio. Na análise estrutural de vigas altas, é essencial considerar a deformação por cisalhamento, sendo recomendável a aplicação de uma teoria apropriada, como a teoria de viga de Timoshenko (não abordada neste trabalho). As reações e os diagramas de momentos fletores para as teorias de vigas de Euler Bernoulli e Timoshenko são mostrados na Figura 6.3.10.

Figura 6.3.10 – Reações e diagramas de momentos fletores: a) deformação por cisalhamento nula e b) considerando deformação por cisalhamento.

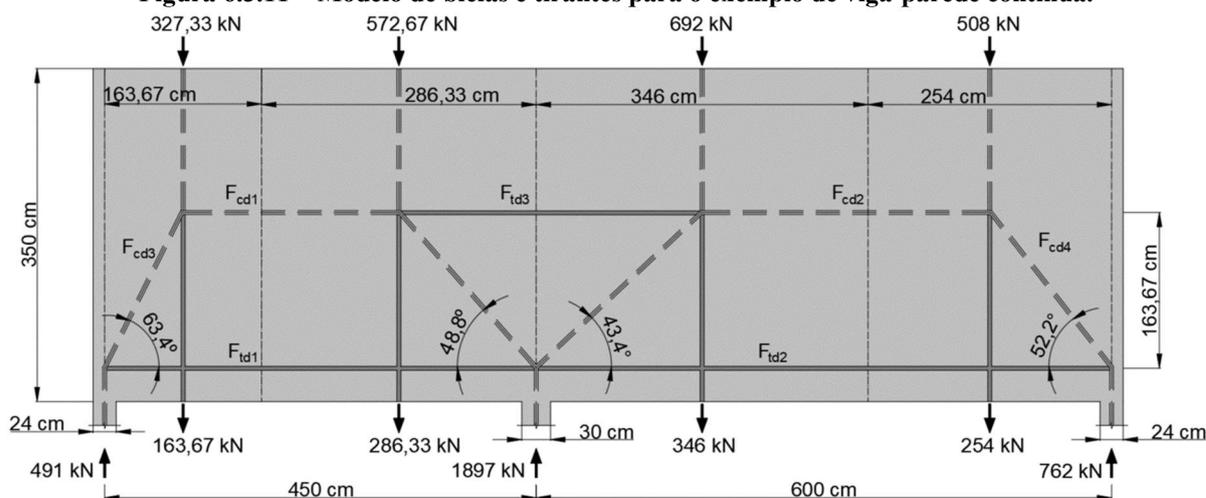


Fonte: Adaptado de Santos, 2021.

Os diagramas de momentos fletores na Figura 6.3.10 indicam que, ao levar em conta a deformação por cisalhamento, os momentos positivos aumentam e os negativos diminuem. Este tipo de viga é particularmente sensível a recalques diferenciados nos apoios, demandando uma análise meticulosa.

No exemplo em questão, opta-se pela análise considerando a deformação por cisalhamento. O próximo passo consiste em assumir que o maior ângulo entre bielas e tirantes atende ao limite estabelecido pela NBR 6118 (ABNT, 2023), assegurando que todos os ângulos estejam em conformidade com esse padrão. O modelo proposto de bielas e tirantes é apresentado na Figura 6.3.11.

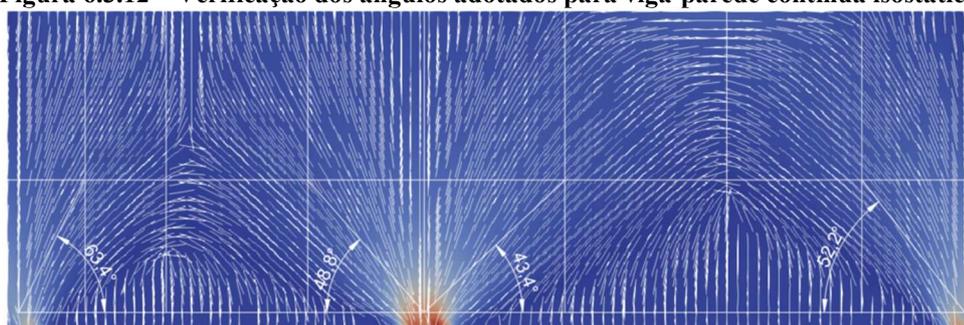
Figura 6.3.11 – Modelo de bielas e tirantes para o exemplo de viga-parede contínua.



Fonte: Adaptado de Santos, 2021.

É possível verificar através das trajetórias de tensões obtidas pelo código implementado os ângulos que o autor supracitado considerou em seus cálculos e realizar uma comparação como na Figura 6.3.12. Um aspecto interessante a ser observado é o comportamento dos ângulos das bielas nos apoios de primeiro gênero, conforme indicado anteriormente (Figura 6.3.10). Tais ângulos demonstram uma variação considerável em suas inclinações se comparado aos verificados para apoios do segundo gênero, conforme apresentado na Figura 6.3.4. Neste contexto, é relevante realizar um estudo complementar para verificar a melhor inclinação possível para garantir que os critérios de resistência dos materiais sejam atendidos de forma econômica e segura.

Figura 6.3.12 – Verificação dos ângulos adotados para viga-parede contínua isostática.



Fonte: Autoria própria, 2023.

Contudo, segue a verificação para o modelo adotado.

- As forças nos elementos da treliça idealizada são:

$$F_{td1} = 491 \times 0,5 = 245,5 \text{ kN} \rightarrow A_{s1} = 5,7 \text{ cm}^2$$

$$F_{td2} = 762 \times \frac{1,27}{1,6367} = 591,3 \text{ kN} \rightarrow A_{s2} = 13,6 \text{ cm}^2$$

$$F_{td3} = (692 + 346) \times \frac{3,46/2}{1,6367} - 591,3 = 505,9 \text{ kN} \rightarrow A_{s3} = 11,6 \text{ cm}^2$$

$$F_{cd1} = F_{td1} = 245,5 \text{ kN} \therefore F_{cd2} = F_{td2} = 591,3 \text{ kN}$$

$$F_{cd3} = \frac{492}{\text{sen } 63,4^\circ} = 550 \text{ kN}$$

$$F_{cd4} = \frac{762}{\text{sen } 52,2^\circ} = 964 \text{ kN}$$

- Distribuição das armaduras

- Armadura negativa:

Como há vãos distintos, é utilizada a média da relação entre altura e os vãos:

$$\frac{L}{h} \text{ médio} = 0,5 \times \left(\frac{4,5}{3,5} + \frac{6}{3,5} \right) = 1,5$$

$$\frac{A_{s,sup}}{s} = \frac{(L/2h - 0,5)A_{s,neg}}{0,2h} = \frac{0,25 \times 11,6}{0,7} = 4,14 \text{ cm}^2/m$$

$$\frac{A_{s,cen}}{s} = \frac{(1,5 - L/2h)A_{s,neg}}{0,6h} = \frac{0,75 \times 11,6}{2,1} = 4,14 \text{ cm}^2/m$$

$$\frac{A_{s,mín}}{s} = 2 \times 0,075 \times 30 = 4,5 \text{ cm}^2/m$$

- Armadura vertical (suspensão):

$$\frac{A_{s,sup}}{s} = \frac{100}{43,5} = 2,3 \text{ cm}^2/m$$

$$\frac{A_{s,mín}}{s} = 0,15 \times 30 = 4,5 \text{ cm}^2/m$$

- Armadura positiva:

Assumindo a distribuição da armadura positiva do vão maior em $0,15h$ (~ 50 cm), tem-se:

$$u = 50 \text{ cm}$$

Adotado: 6 laços $\emptyset 12,5$ mm c/10.

No vão menor, a armadura necessária é menos da metade dos seis laços determinados para o vão maior. Considerando que três desses seis laços são colocados em toda a extensão da viga, tem-se que a altura do campo de tração é igual a:

$$u = (n - 1) + \emptyset \cong 20 \text{ cm}$$

- Verificação da segurança dos nós

Resistência do nó CCT:

$$f_{cd3} = 0,72 \left(1 - \frac{30}{250}\right) \frac{30}{1,4} = 13,5 \text{ MPa}$$

Apoio à esquerda:

$$a_3 = 24 \times \text{sen } 63,4^\circ + 50 \times \text{cos } 63,4^\circ = 30 \text{ cm}$$

$$\sigma_{cd3,bie} = \frac{550}{30 \times 30} = 0,61 \text{ kN/cm}^2 = 6,1 \text{ MPa}$$

Apoio à direita:

$$a_4 = 24 \times \text{sen } 52,2^\circ + 50 \times \text{cos } 52,2^\circ = 49,6 \text{ cm}$$

$$\sigma_{cd4,bie} = \frac{964}{30 \times 49,6} = 0,65 \text{ kN/cm}^2 = 6,5 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{cd3,bie} \text{ e } \sigma_{cd4,bie} < f_{cd3} \text{ (OK)}$$

Observação: as tensões verticais são automaticamente verificadas no dimensionamento do pilar. No entanto, como o pilar não é o foco da análise, essas tensões serão determinadas e verificadas.

$$\sigma_{cd3,v} = \frac{491}{30 \times 24} = 0,68 \text{ kN/m}^2 = 6,8 \text{ MPa} < f_{cd3}$$

$$\sigma_{cd,v} = \frac{762}{30 \times 24} = 1,06 \text{ kN/m}^2 = 10,6 \text{ MPa} < f_{cd3}$$

- Ancoragem das barras

Região de boa aderência:

$$l_b = 34\emptyset = 42,5 \text{ cm de acordo com a Tabela 6.1.}$$

Tabela 6.1 – Razão entre comprimento de ancoragem básico e diâmetro da barra (l_b/\varnothing), dependente da resistência à compressão do concreto (f_{ck}) e da condição de aderência.

f_{ck} (Mpa)	25	30	35	40	45	50	60	70	80	90
NBR 6118 (ABNT, 2023)										
Boa aderência	38	34	30	28	26	25	25	25	25	25
Má aderência	54	48	43	39	36	34	32	30	29	27

Fonte: Adaptado de Santos, 2021.

Laço:

$$l_{b,nec} = \alpha_1 l_b = 0,7 \times 42,5 \cong 30 \text{ cm}$$

Comprimento de ancoragem disponível:

$$l_{b,disp} = \alpha_{pilar} - c = 24 - 3 = 21 \text{ cm}$$

Segundo as regras que constam na NBR 6118 (ABNT, 2023), além do gancho, barras transversais soldadas deveriam ser utilizadas. No entanto, é possível considerar a compressão direta na redução do comprimento de ancoragem necessário, conforme o Eurocode 2 (CEN, 2004). Com isso, tem-se:

$$l_{b,nec} = \alpha_1 \alpha_5 l_b \frac{A_{s,calc}}{A_{s,ef}} \geq l_{b,min}$$

$$\alpha_1 = 0,7 \text{ (laço)}$$

$$\alpha_5 = 1 - 0,04p = \begin{cases} 1 - 0,04 \times 6,8 = 0,73 \text{ (apoio esquerdo)} \\ 0,7 \text{ (apoio direito)} \end{cases}$$

Apoio à esquerda:

$$l_{b,nec} = 0,7 \times 0,73 \times 34 \times 1,25 \times \frac{5,7}{6 \times 1,25} = 16,5 \text{ cm} \geq l_{b,min}$$

Apoio à direita:

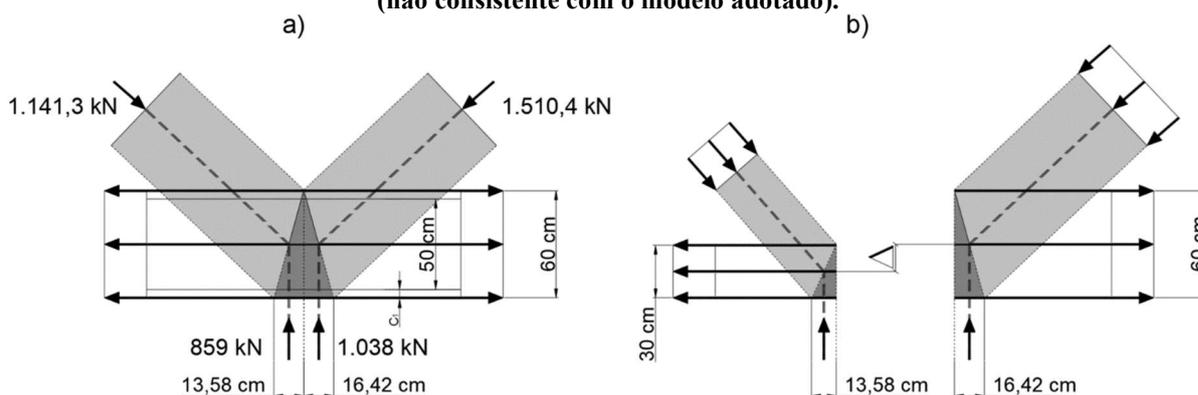
$$l_{b,nec} = 0,7 \times 0,7 \times 34 \times 1,25 \times \frac{13,6}{12 \times 1,25} = 19 \text{ cm} \geq l_{b,min}$$

$$l_{b,nec} < l_{b,disp} \text{ (OK)}$$

- Nó sobre o apoio intermediário

O modelo de bielas e tirantes adotado admite a tração inferior dos dois vãos no mesmo nível, o que significa que a altura das armaduras deveria ser a mesma, e não da forma considerada neste exemplo. No entanto, como a simplificação de usar um só braço de alavanca ($z = 163,67 \text{ cm}$) é conservadora, o nó será verificado de acordo a Figura 6.3.13b.

Figura 6.3.13 – Geometria do nó intermediário com as camadas de armadura possuem alturas distintas (não consistente com o modelo adotado).



Fonte: Adaptado de Santos, 2021.

Assumindo os ângulos das bielas em relação à horizontal conforme o modelo original, têm-se:
Tensão vertical:

$$\sigma_{cd,v} = \frac{1897}{30 \times 30} = 2,1 \text{ kN/cm}^2 = 21 \text{ MPa} > f_{cd}$$

O pilar necessita de armadura de compressão. Contudo, essa etapa não será detalhada aqui.

Tensões nas bielas:

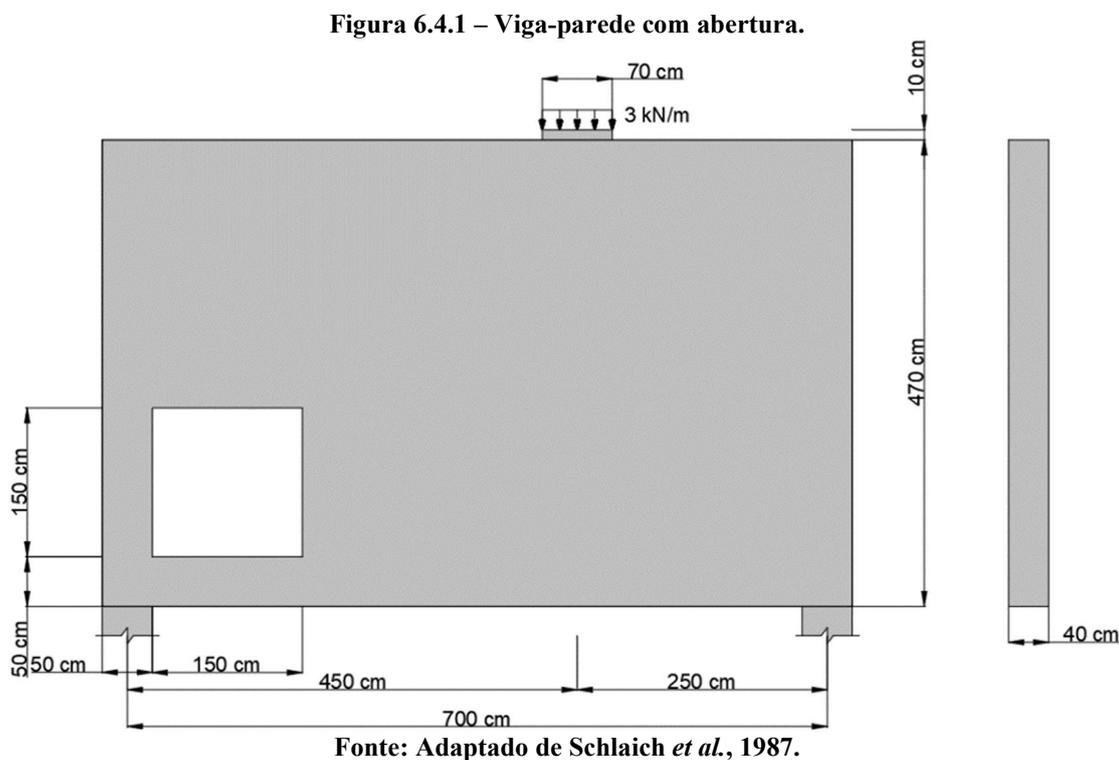
$$\sigma_{cd,bie}^{esq} = \frac{1.141,3}{(13,58 \times \text{sen } 48,8^\circ + 30 \times \text{sen } 48,8^\circ) \times 30} = 1,27 \text{ kN/cm}^2 = 12,7 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{cd,bie}^{dir} = \frac{1.141,3}{(16,42 \times \text{sen } 43,4^\circ + 60 \times \text{sen } 43,4^\circ) \times 30} = 0,92 \text{ kN/cm}^2 = 9,2 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{cd,bie}^{dir \text{ ou } esq} < f_{cd1} = 0,85(1 - 30/250) \frac{30}{1,4} = 16 \text{ MPa}$$

6.4 VIGA-PAREDE COM ABERTURA

A estrutura apresentada na Figura 6.4.1 foi estudada por Schlaich *et al.* (1987), trata-se de uma viga-parede biapoiada com abertura e carregamento distribuído em uma faixa de 70 cm conforme indicado, juntamente com as demais características geométricas.



Para a análise do elemento estrutural, o padrão de entrada de dados segue o mesmo apresentado na seção 6.1, sendo necessário realizar alguns ajustes para adaptar ao objeto em estudo, variando os tamanhos dos elementos, como realizado na seção 6.3, e conseqüentemente o tamanho da malha. A Figura 6.4.2 ilustra o resultado obtido para as trajetórias de tensões.

Os parâmetros utilizados como dados de entrada no código numérico implementado, foram:

- Número de elementos: *numberElements* = 6614;
- Número de nós: *numberNodes* = 3460;
- Espessura: *thickness* = 0.40;

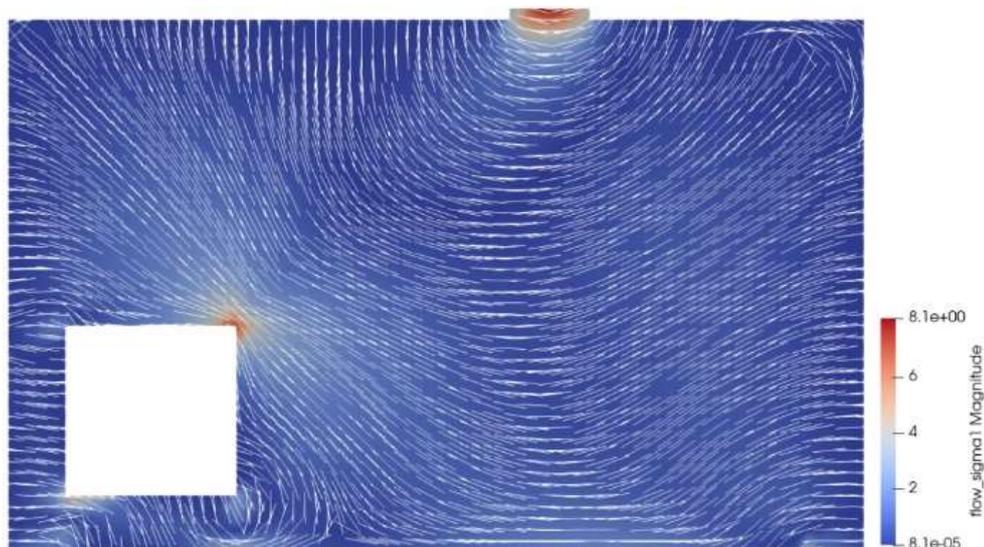
É possível notar que as tensões de tração (σ_1) ilustradas na Figura 6.4.2a apresentam grandes variações em suas trajetórias. Os pontos importantes a serem observados são os “cantos” da abertura, uma vez que há grande concentração de tensão. O que necessita de uma boa análise do projetista no dimensionamento. As peças com aberturas possuem estados de

tensões mais complexos, requerendo verificações das tensões atuantes e a concepção de um modelo de bielas e tirantes eficaz.

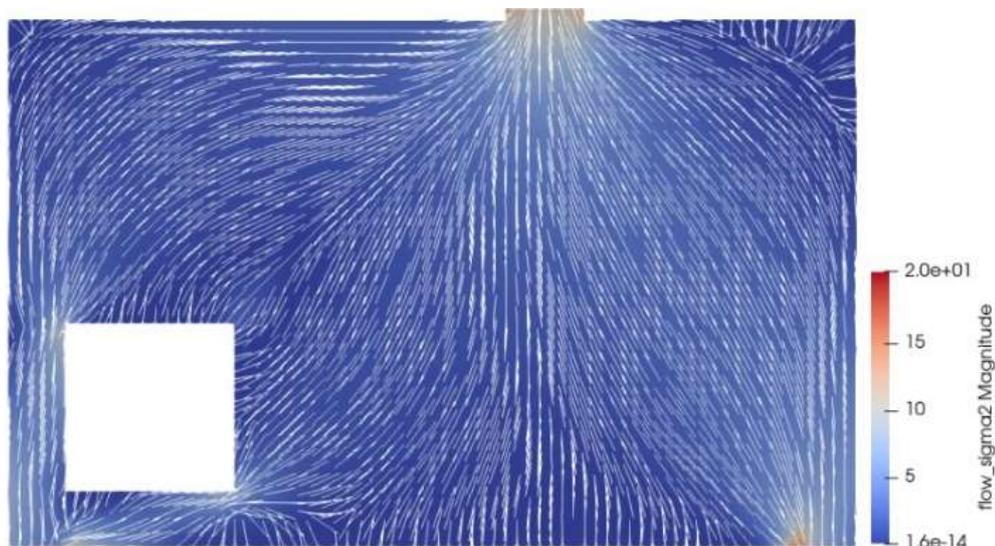
É necessário utilizar uma maior quantidade de armadura (tirantes) na região próxima a abertura, onde os efeitos das tensões de tração somam-se aos causados pelas tensões de compressão (σ_2) Figura 6.4.2b. Essa condição resulta na formação de bielas que desviam o contorno da abertura, direcionando o carregamento para o apoio à esquerda, onde os esforços sobre o apoio da esquerda são parecidos com aqueles que se desenvolvem em um pilar. Por outro lado, para a biela à direita, observamos uma semelhança com o exemplo da seção 6.2, onde a biela do tipo "garrafa" requer armaduras na região comprimida para conter a fissuração do elemento.

Figura 6.4.2 – Trajetórias de tensões principais e viga-parede com abertura: a) tração e b) compressão.

a)



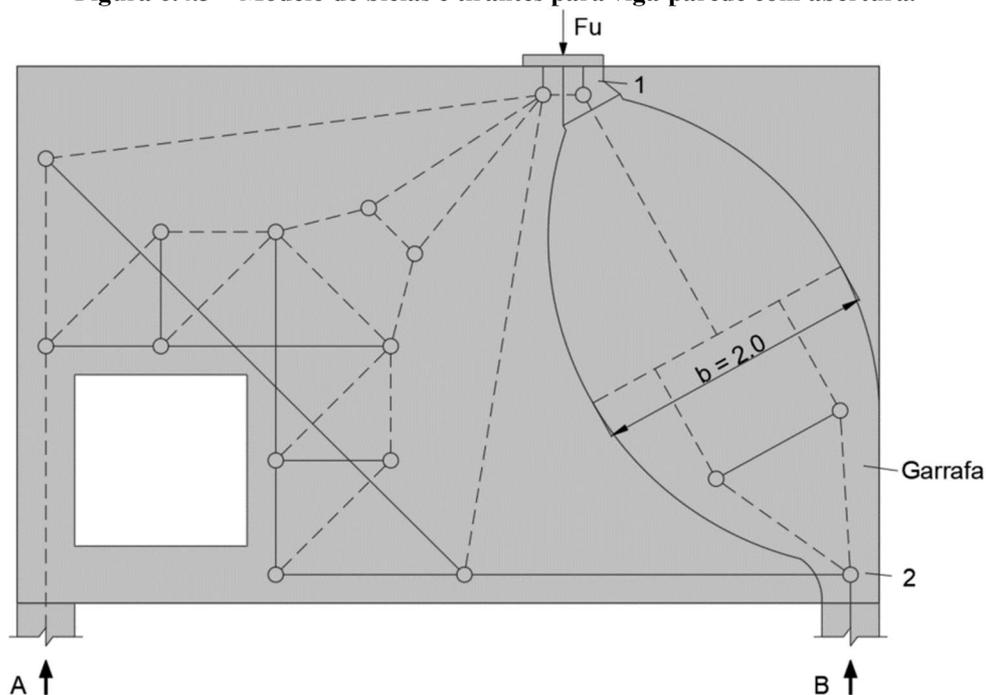
b)



Fonte: Autoria própria, 2023.

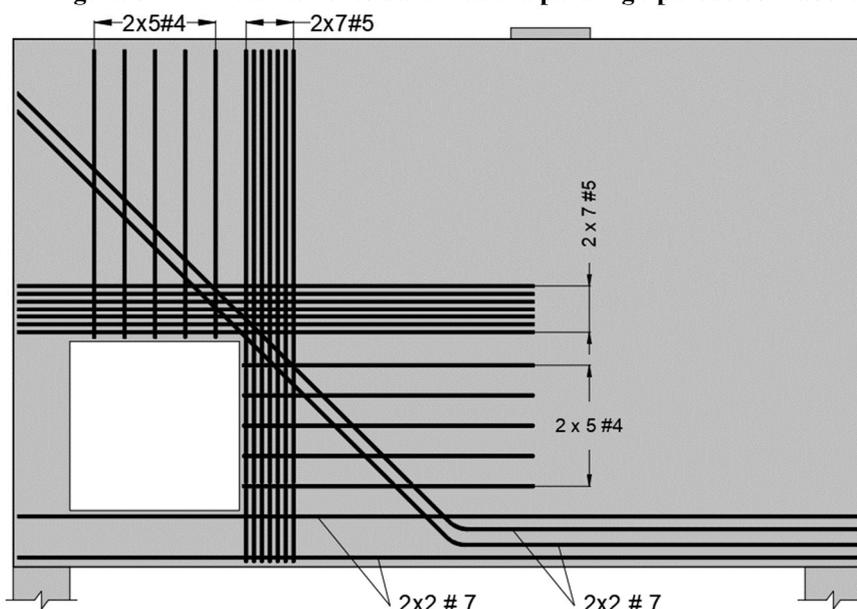
O modelo proposto por Schlaich *et al.* (1987) para o problema é ilustrado na Figura 6.4.3, onde os tirantes coincidem com as trajetórias de σ_1 , com atenção especial aos tirantes próximos a abertura, visando garantir a segurança e estabilidade do Modelo. Também pode-se observar que a disposição das camadas de armadura no banzo inferior, devem acompanhar o fluxo de tensões de tração entre os apoios. Um modelo de disposição das armaduras é apresentado na Figura 6.4.4.

Figura 6.4.3 – Modelo de bielas e tirantes para viga-parede com abertura.



Fonte: Adaptado de Schlaich *et al.*, 1987.

Figura 6.4.4 – Detalhamento da armadura para viga-parede com abertura.



Fonte: Adaptado de Schlaich *et al.*, 1987.

Os resultados das trajetórias de tensões principais obtidos através da implementação do código numérico são confrontados com os resultados do autor de referência (Schlaich *et al.*, 1987). A consistência entre os resultados obtidos e os dos autores mencionados reafirma, mais uma vez, a qualidade do código numérico implementado.

Ademais, os campos de tensões obtidos, ilustrados na Figura 6.4.5, são comparados com os resultados provenientes do pacote comercial LISA na Figura 6.4.6. Isso ressalta, mais uma vez, a eficácia da programação em código aberto, possibilitando o desenvolvimento no meio acadêmico por meio de pesquisas.

Figura 6.4.5 – Campos de tensões em viga-parede com abertura pelo código implementado: a) tração e b) compressão.

a)



b)



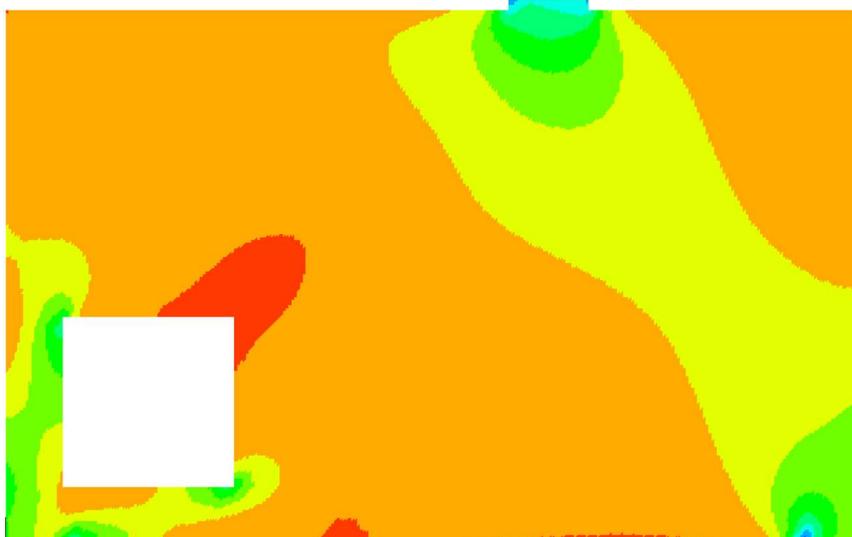
Fonte: Autorial própria, 2023.

Figura 6.4.6 – Campos de tensões em viga-parede com abertura pelo LISA: a) tração e b) compressão.

a)



b)



Fonte: Autoria própria, 2023.

7 CONCLUSÃO

É essencial realizar uma análise estrutural mais criteriosa em elementos que possuem regiões onde as hipóteses de Bernoulli-Euler não se aplicam. Isto é importante para o desenvolvimento de projetos seguros e economicamente viáveis. Essa análise é executada por algoritmos numéricos essenciais para uma boa aproximação ao modelo real. Para obtenção de trajetórias e campos de tensão, utilizou-se o método dos elementos finitos que em conjunto com o método de bielas e tirantes tornou possível obtenção do modelo estrutural.

Adicionalmente, empregou-se a formulação do elemento finito triangular CST para obter as trajetórias das tensões principais. A partir deste resultado, o Método de Bielas e Tirantes foi empregado para determinar um MBT adequado a trajetória de tensões obtida na análise via MEF, e além disto, analisar a resistência dos elementos de treliça propostos.

Cabe ainda destacar, que o objetivo deste estudo foi introduzir conceitos fundamentais de estruturas com estados de tensão complexos, oferecendo compreensão inicial dos aspectos relacionados a comportamentos não lineares.

Além disso, este trabalho se propôs a implementação de um algoritmo numérico, na linguagem de programação *Scilab*, para analisar vigas-parede clássicas. Foi explorado também, a aplicação do código na análise da variação de comprimento de uma viga esbelta até esta se tornar uma viga-parede. Isso revelou que, em determinado ponto, as hipóteses de *Bernoulli-Euler* se tornam inválidas devido a um estado de tensões não-linear. Essas estruturas exibiram trajetórias de tensões complexas, exigindo atenção especial do projetista.

Além do mais, os resultados, visualizados no *Paraview*, destacaram regiões críticas e possibilitaram a discussão das trajetórias de tensão obtidas. Outro resultado importante discutido neste trabalho, diz respeito aos ângulos das bielas de compressão e seus valores críticos para fins de dimensionamento, considerando a inclinação máxima e mínima permitida pela NBR 6118 (ABNT,2023).

Por fim, cabe destacar que, as formulações implementadas foram validadas por meio de comparação com resultados de estudos anteriores, bem como, com os resultados obtidos no pacote comercial *LISA*, evidenciando concordância e, em alguns casos, oferecendo *insights* preciosos.

Pode-se ainda concluir que a aplicação do elemento finito triangular linear, considerado simples, em ferramentas numéricas de código aberto viabiliza uma análise estrutural eficaz.

Além disso, possibilita a concepção de um modelo de bielas e tirantes a partir da avaliação das trajetórias e dos campos de tensões obtidos para vigas-parede.

7.1 SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS

Recomenda-se explorar novas vertentes de pesquisa para abordar aspectos que não foram contemplados neste estudo, incluindo:

- Otimização de modelos de bielas e tirantes;
- Avaliação do comportamento de diferentes elementos especiais considerando ou não as deformações por cisalhamento;
- Realização de estudo em estruturas pré-moldadas;
- Realização de estudo para consolos curtos.

REFERÊNCIAS

- AMERICAN CONCRETE INSTITUTE-ACI. **ACI 318-14**: Building Code Requirements for Structural Concrete and Commentary, September of 2014.
- AGUIAR, C. C. P. de. **Dimensionamento de estruturas especiais de concreto armado pelo método de bielas e tirantes**. Dissertação (Mestrado em Projeto de Estruturas) – Universidade Federal do Rio de Janeiro, Escola Politécnica, Programa de Projeto de Estruturas, Rio de Janeiro, 2018.
- ARAÚJO, J. M. **Curso de concreto armado**. 4. Ed. Rio Grande: Dunas, 2014b, vol. 4.
- ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS-ABNT. **NBR 6118**: Projeto de estruturas de concreto - Procedimento. Rio de Janeiro: ABNT, 2023.
- ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS-ABNT. **NBR 9062**: Projeto e execução de estruturas de concreto pré-moldado. Rio de Janeiro: ABNT, 2017.
- ALVES FILHO, A.. **Elementos finitos: a base da tecnologia CAE**. 1. São Paulo: ed. Editora Érica, 2000.
- Beer, F. P., *et al.* **Mecânica dos materiais**. tradução técnica José Benaque Rubert, Walter Libardi. – 5. ed. – Dados eletrônicos. – Porto Alegre: AMGH, 2011.
- BRANDÃO, B. B.; TEIXEIRA P. J. B; BURGOS R. B.; TAVARES M. E. da N.. **Obtenção de trajetórias de tensões em vigas de concreto armado**. Rio de Janeiro: Projectus, 2016.
- EUROPEAN COMMITTEE FOR STANDARDIZATION– CEN. **Eurocode 2: EN 1992-1-1** – Design of Concret Structures – Part 1-1: General Rules and Rules for Buildings. Brussels, 2004.
- FÉDERATION INTERNATIONALE DU BÉTON–fib. **fib Model Code for Concret Structures** 2010. Lausanne, 2013.
- FLEURY, M. T. L.; WERLANG, S. **Pesquisa aplicada: reflexões sobre conceitos e abordagens metodológicas**. 2018. Disponível em: https://bibliotecadigital.fgv.br/dspace/bitstream/handle/10438/18700/A_pesquisa_aplicada_conceito_e_abordagens_metodol%C3%B3gicas.pdf?sequence=6&isAllowed=y. Acesso em: 17 out. 2023.
- GIL, A. C.. **Como elaborar projetos de pesquisa**. 4. ed. São Paulo: Atlas, 2002.
- Hibbeler, R. C..**Resistência dos materiais**. tradução Arlete Simille Marques; revisão técnica Sebastião Simões da Cunha Jr.- 7. ed. - São Paulo: Pearson Prentice Hall, 2010.
- KATTAN, P.. L. **Matlab guide to finite elements**. 2ª Edição. Berlin: Editora Springer, 2008.

- LADEIRA, A. H. **Análise de estruturas de concreto armado via modelos de bielas e tirantes e técnicas de otimização topológica**. Dissertação (Mestrado em Engenharia Civil) – Escola de Minas, Universidade Federal de Ouro Preto, Ouro Preto, 2019.
- LAMPERT, P., THURLIMANN, B. **Ultimate strength and design of reinforced concrete beams in torsion and bending**. IABSE, Publications. V. 31-I, pp. 107-131, 1971.
- LEITE, M.. **SciLab: uma abordagem prática e didática**. 6. ed. Rio de Janeiro: Editora Ciência Moderna., 2015.
- LEONHARDT, F. **Reducing the Shear Reinforcement in Reinforced Concrete Beams and Slabs**. Mag. Concrete Res., 17(53), 187, 1965.
- LOGAN, D. L. **A first course in the finite element method**. 6. ed. Cengage Learning, 2016.
- MÖRSCH, E. **Concrete-Steel Construction**. The engineering News publishing company. [S. l.]. 1909.
- NEPOMUCENO, C. L. **Análise de vigas-parede aplicando modelo de biela e tirante e microtreliça**. 2012. 159 f. Dissertação (Mestrado em Estruturas e Construção Civil) — Universidade de Brasília, Brasília, 2012.
- MUTONNI, A; SHWARTZ, J; THÜRLIMANN, B. **Design of Concret Structures with Stress Field**. Basel: Birkhäuser, 1997.
- OLIVEIRA, J. M. et al. **Estudo sobre a trajetória de tensões principais em vigas isostáticas**. In: JORNADA CIENTÍFICA DA ENGENHARIA DA UCG, 1. Goiás: UCG, 2002.
- OLIVEIRA, V. M. de. **Estudo e Desenvolvimento de Código Computacional para Análise de Chapas Utilizando Elementos Finitos CST e CSQ**. Trabalho de Conclusão de Curso (Bacharelado em Engenharia Civil) - Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Campo Mourão, 2019.
- PANTOJA, J. da C.. **Geração Automática via Otimização Topológica e Avaliação de Segurança de Modelos de Bielas e Tirantes**. 2012. 240 p. Tese (Doutorado em Engenharia Civil) – Pontifícia Universidade Católica do Rio De Janeiro - PUC-RIO, Rio De Janeiro, 2012. Disponível em: <https://doi.org/10.17771/PUCRio.acad.20548>. Acesso em: 09 ago. 2023.
- RITTER, W. **Die bauweise hennebique** (The hennebique construction method). [S. l.]. Schweizerische Bauzeitung, 1899.
- SANTOS, D. M. dos. **Projeto Estrutural por Bielas e Tirantes**. 1. ed. São Paulo: Oficina de Textos, 2021.
- SCHLAICH, J., SCHAEFER, K.. AND JENNEWEIN, M. **Towards a Consistent Design of Structural Concrete**. PCI Journal. V. 32, No. 3, May-June, pp 74-150, 1987.

SILVA, R. C. da. **Concreto armado: aplicações de modelos de bielas e tirantes**. 1991. Dissertação (Mestrado em Engenharia das Estruturas) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 1991.

SORIANO, H. L.. **Elementos Finitos – Formulação e Aplicação na Estática e Dinâmica das Estruturas**. 1. Rio de Janeiro: ed. Editora Ciência Moderna Ltda, 2009a.

SORIANO, H. L.. **Elementos Finitos em Análises de Estruturas**. 1. ed. 1. reimp. São Paulo : Editora da Universidade de São Paulo, 2021b.

SOUZA, R. A. de. **Concreto estrutural: análise e dimensionamento de elementos com descontinuidades**. Tese (Doutorado em Engenharia Civil) – Escola Politécnica da Universidade de São Paulo. São Paulo, 442 p. 2004.

SUSSEKIND, J. C.. **Curso de análise estrutural**. 6. ed. Porto Alegre: Editora Globo, 1981.v 1.

THOMPSON, M. K., JIRSA, J.O., BREEN, J.E., KLINGNER, R.E. **The Anchorage Behavior of Headed Reinforcement: Literature Review**. The University of Texas at Austin, maio de 2002.

TIMBONI, G. V.. **A Utilização de Vigas-Parede nas Estruturas: Análise de Estabilidade**. Trabalho de Conclusão de Curso (Engenharia Civil) – Universidade do Sul de Santa Catarina Santa Catarina, 2019.

VÁZQUEZ, M.; LÓPEZ, Eloisa. **El metodo de los elementos finitos aplicado al analisis estructural**. Madri: Editorial Noela, 2001.

WIGHT, J K. MACGREGOR, J. G. **Reinforced Concrete: Mechanics and Design**. New Jersey: Pearson, 2012.

APÊNDICE A – Resultados numéricos

Neste apêndice, são fornecidos os resultados numéricos obtidos por meio do código computacional desenvolvido na linguagem de programação *Scilab*, referentes ao problema numérico da viga-parede discutida na seção 6.2 deste trabalho.

Tabela 8.1 – Resultados numéricos: viga-parede biapoiada.

Node	xx_displac_deformada_matrix	"yy_displac_deformada_matrix"
1	-9.3125940757229D-11	-7.8908913576138D-11
2	1.6522992465374D-11	1.8785827659975D-10
3	3.0125545807850D-10	-3.1935247592972D-10
4	-1.0333561312481D-11	6.6681892493306D-11
5	-2.5056502168647D-12	-4.8651235858794D-12
6	-2.6496639151770D-06	-6.6244163078917D-06
7	-3.9027266588170D-06	-1.0778537108598D-05
8	-4.3865051388960D-06	-1.3874955837593D-05
9	-4.4828076291424D-06	-1.6315715073963D-05
10	-4.3731160855370D-06	-1.8302051046471D-05
11	-4.1443797308932D-06	-1.9952145784695D-05
12	-3.8403911026006D-06	-2.1339656546606D-05
13	-3.4847594635880D-06	-2.2512358712704D-05
14	-3.0912949982932D-06	-2.3502267719978D-05
15	-2.6688532674212D-06	-2.4331401924017D-05
16	-2.2236875301060D-06	-2.5015184125013D-05
17	-1.7606412532735D-06	-2.5564518729685D-05
18	-1.2837779239381D-06	-2.5987098995053D-05
19	-7.9672511819821D-07	-2.6288247097277D-05
20	-3.0286706908220D-07	-2.6471455507557D-05
21	1.9454541073899D-07	-2.6538724583212D-05
22	6.9232952633384D-07	-2.6490749237969D-05
23	1.1873259935892D-06	-2.6326981729220D-05
24	1.6763580312249D-06	-2.6045579547960D-05
25	2.1561775704914D-06	-2.5643231858861D-05
26	2.6233789065610D-06	-2.5114840670277D-05
27	3.0742500228709D-06	-2.4453009007156D-05
28	3.5045095777180D-06	-2.3647250205670D-05
29	3.9088287906277D-06	-2.2682766287794D-05
30	4.2799270145710D-06	-2.1538522334152D-05
31	4.6067680939053D-06	-2.0184112146575D-05
32	4.8707338680250D-06	-1.8574442266968D-05
33	5.0369404813563D-06	-1.6640218811752D-05
34	5.0330002032419D-06	-1.4269370224773D-05
35	4.6916004797150D-06	-1.1262930012443D-05
36	3.5632737793344D-06	-7.1680638050726D-06

37	5.4368908983172D-12	-1.0817799353643D-11
38	-3.6511161895195D-11	8.2917602817892D-12
39	4.1191304197196D-11	-4.0468259252779D-11
40	-9.8031378228579D-12	1.2810394574742D-11
41	-3.6273657380164D-11	-6.4938504793801D-11

Fonte: Aatoria própria, 2023.