Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia da Paraíba
Campus Campina Grande
Curso de Especialização em Ensino de Matemática

MARIA DA GUIA SARINHO CAVALCANTI

PROPOSTAS METODOLÓGICAS PARA O ENSINO DE MATRIZES: ENTRELAÇANDO TEORIA E PRÁTICA

CAMPINA GRANDE - PB
2024

C376p Cavalcanti, Maria da Guia Sarinho.
Propostas metodológicas para o ensino de matrizes: entrelaçando teoria e prática / Maria da Guia Sarinho Cavalcanti. Campina Grande, 2024.
46 f. : il.

Trabalho de Conclusão de Curso (Especialização em Ensino de Matemática) - Instituto Federal da Paraíba, 2024.
Orientador: Prof. Me. Maxwell Aires da Silva.

1. Ensino de matemática - matrizes 2. Educação básica. 3. Metodologia de ensino - metodologias ativas I. Silva, Maxwell Aires da. II. Título.

CDU 512.674:37

Ficha catalográfica elaborada por GUSTAVO CÉSAR NOGUEIRA DA COSTA, CRB 15/479.

MARIA DA GUIA SARINHO CAVALCANTI

PROPOSTAS METODOLÓGICAS PARA O ENSINO DE MATRIZES: ENTRELAÇANDO TEORIA E PRÁTICA

Monografia apresentada ao Curso de Especialização em Ensino de Matemática do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia da Paraíba (IFPB), como requisito parcial para obtenção do título de Especialista em Ensino de Matemática.

Orientador: Prof. Me. Maxwell Aires da Silva

CAMPINA GRANDE

2024

MARIA DA GUIA SARINHO CAVALCANTI

PROPOSTAS METODOLÓGICAS PARA O ENSINO DE MATRIZES: ENTRELAÇANDO TEORIA E PRÁTICA

Monografia apresentada ao Curso de Especialização em Ensino de Matemática do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia da Paraíba (IFPB), como requisito parcial para obtenção do título de Especialista em Ensino de Matemática.

Aprovado em: 27/03/2024

BANCA EXAMINADORA

Documento assinado digitalmente
gov.br
MAXWELL AIRES DA SILVA
Data: 02/07/2024 19:26:54-0300
Verifique em https://validar.iti.gov.br

Prof. Me. Maxwell Aires da Silva (Orientador)
UEPB, Campina Grande

Documento assinado digitalmente
gov.br
LUCIANA ROZE DE FREITAS
Data: 02/07/2024 19:11:30-0300
Verifique em https://validar.iti.gov.br

Profa. Dra. Luciana Roze de Freitas
UEPB, Campina Grande

Documento assinado digitalmente
gov.br
SALOMAO PEREIRA DE ALMEIDA
Data: 02/07/2024 17:51:04-0300
Verifique em https://validar.iti.gov.br

Prof. Dr. Salomão Pereira de Almeida
IFPB Campus Campina Grande

Aos meus pais, José Benivaldo e Rosa Maria, por todo apoio e incentivo, DEDICO.

AGRADECIMENTOS

Em primeiro lugar, a Deus, pelo dom da vida e pelo seu amor infinito, por ser meu refúgio, força e salvação. Agradeço por me permitir concretizar mais um sonho, pela sabedoria para enfrentar cada obstáculo e por sempre me conduzir pelo melhor caminho.

À minha família, por todo amor e incentivo, em especial aos meus pais, José Benivaldo e Rosa Maria, que sempre se desdobraram para que nada me faltasse, sobretudo, por apoiarem minhas decisões e serem o estímulo que me impulsiona diariamente.

Ao meu orientador, professor Maxwell, por aceitar o desafio de me orientar, mesmo não sendo sua área de pesquisa. Agradeço pela orientação exemplar, pela minuciosa correção, por caminhar junto comigo durante este percurso, pelas palavras de incentivo, e principalmente, pela paciência. Nem todas as mais lindas palavras seriam capazes de externar toda a minha gratidão.

À professora Luciana e ao professor Salomão, por aceitarem o convite para fazer parte da banca examinadora, pela disponibilidade e por todas as contribuições.

Ao melhor grupo da Especialização, meus Friends: Caio, Janassiel, Alecio, Lucas e Eduardo. Agradeço pelo companheirismo, união e partilha de conhecimento. Tê-los ao meu lado, tornou o processo mais leve.

Aos professores do Curso de Especialização em Ensino de Matemática, em especial ao professor Luís Havelange, atual coordenador do curso, por toda dedicação e pelas magníficas aulas, como também, à professora Daiana Estrela, pelas valiosas dicas que impulsionaram na construção deste trabalho.

Ao Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia da Paraíba - IFPB, Campus Campina Grande, pela oferta do curso, gratuito e de qualidade.

De modo geral, a todos que me apoiam e torcem por mim, meu muito obrigada!

“Uma prova de que Deus esteja conosco não é o fato de que não venhamos a cair, mas que nos levantemos depois de cada queda.” (Santa Teresa de Ávila).

RESUMO

Este trabalho tem como objetivo apresentar propostas metodológicas para o ensino de matrizes na Educação Básica. Tradicionalmente, percebe-se que esse conteúdo é abordado em sala de aula de maneira convencional, com foco em memorização de regras e repetição de exercícios, o que pode limitar a capacidade dos alunos de relacionar os assuntos estudados com o mundo ao seu redor. Diante desse cenário, foram elaboradas quatro propostas de atividades que buscam entrelaçar a teoria matricial com situações práticas, cujo intuito é despertar o interesse dos alunos pelo tema e possibilitar aos mesmos uma aprendizagem mais significativa. A pesquisa dá continuidade ao estudo realizado anteriormente sobre aplicações de matrizes (Cavalcanti, 2022).

Palavras-chave: Ensino de matemática - matrizes. Educação Básica. Metodologia de ensino - metodologias ativas.

ABSTRACT

This work aims to present methodological proposals for teaching matrices in Basic Education. Traditionally, it is clear that this content is covered in the classroom in a conventional way, focusing on memorizing rules and repetition of exercises, which can limit students' ability to relate the subjects studied with the world around you. Given this scenario, four proposals were developed of activities that seek to intertwine matrix theory with practical situations, whose aim is to awaken students' interest in the topic and enable them to learning more significative. The research continues the study previously carried out on matrix applications (Cavalcanti, 2022).

Keywords: Teaching mathematics - matrices. Basic Education. Teaching methodology - active methodologies.

Lista de Figuras

Lista de Tabelas

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

A curiosidade sobre o estudo das Matrizes, surgiu durante a graduação em Licenciatura em Matemática, realizada na Universidade Estadual da Paraíba (UEPB) – Campus I, em uma disciplina denominada Matemática 3, cuja ementa contempla o conteúdo de Matrizes.

Apesar de ser uma disciplina que aborda conteúdos de Matemática Básica, era notório perceber que muitos alunos chegavam na graduação sem domínio do conteúdo. A grande maioria relatava ter estudado o conteúdo de forma superficial, sem aprofundamento. Em uma das aulas da disciplina acima citada, um dos alunos questionou a professora sobre a aplicabilidade do conteúdo em uma situação cotidiana. A professora citou que as matrizes são encontradas em diversas áreas, sendo utilizadas até para evitar engarrafamentos em cruzamentos de ruas.

Eu, como aluna da graduação, até então não conhecia nenhuma aplicabilidade para as matrizes, e isso despertou em mim uma curiosidade. Essa curiosidade se prolongou no decorrer do curso, me levando a pesquisar esse tema no Trabalho de Conclusão de Curso (TCC). Neste estudo, pude conhecer algumas aplicações de matrizes, como, por exemplo, na Geometria, na Criptografia, Computação gráfica, etc.

O conteúdo de matrizes é geralmente visto no segundo ano do Ensino Médio, e as aplicações, quase sempre, não são apresentadas. Isso na maioria das vezes ocorre, pela complexidade de algumas aplicações, como também devido à ementa do curso que necessita ser cumprida, impossibilitando assim o aprofundamento de alguns conteúdos. Diante disso, é comum os alunos resolverem exercícios para determinar a inversa de uma matriz, encontrar um elemento qualquer, e até mesmo as operações. Esse tipo de exercício não possibilita que o mesmo enxergue a aplicabilidade das matrizes, o que torna muitas vezes esse conteúdo “chato” e mecânico.

Acredito, que caso o aluno venha se deparar com outras situações diferentes das que são apresentadas pelo livro didático, o mesmo poderá compreender melhor tal teoria, e assim demonstrar um interesse maior pelo conteúdo.

Diante disto, surgiu o seguinte questionamento para um novo estudo: “Como abordar o conteúdo de matrizes na Educação Básica, entrelaçando teoria e prática?”. Perante o exposto, temos como objetivo geral apresentar uma proposta metodológica para o ensino de matrizes na Educação Básica, e para isso, faremos um estudo dos aspectos históricos e epistemológicos do conceito de matriz, iremos propor um aporte metodológico para o ensino de matriz, que possa servir de suporte para professores, como também iremos investigar os vieses matemáticos do conceito de matriz e suas operações.

A presente pesquisa é de caráter exploratório, de cunho qualitativo, desenvolvida através de levantamento bibliográfico, analisando estudos já realizados, a fim de desenvolver propostas metodológicas para o ensino de Matrizes na Educação Básica.

O trabalho está dividido em cinco capítulos. No primeiro capítulo abordaremos o contexto histórico das matrizes, seu surgimento e qual era a necessidade da comunidade matemática da época que levou ao conceito de matriz.

No segundo capítulo, falamos um pouco sobre a metodologia abordada no desenvolvimento desta pesquisa. No terceiro capítulo, é desenvolvido o referencial teórico, tendo como base Iezzi e Hazzan (2013). É apresentado o conceito de matrizes, como representá-la, os principais tipos e operações, seguido de alguns teoremas.

No quarto capítulo, é sugerido algumas atividades, que poderão ser aplicadas em turmas do Ensino Médio. No último capítulo, as considerações finais do trabalho, seguida de sugestões para futuras pesquisas, relacionadas ao objeto estudado.

1 AS MATRIZES SOB A PERSPECTIVA HISTÓRICA

O conceito de matriz foi aprimorado ao longo do tempo, com contribuições significativas de renomados matemáticos. Segundo Sanches (2002), por volta do século II a.C., se deu início ao estudo das matrizes, contudo, há registros que apontam para o século IV a.C., e por volta do século XVII as ideias ressurgiram e seu conceito foi desenvolvido.

Para Moura (2014) o surgimento das matrizes está ligado à necessidade de resolução de sistemas lineares. Os babilônios, por sua vez, estudavam sobre equações lineares simultâneas, resolvendo problemas em tábuas de argila, conforme apresentado em Sanches (2002, p.9), datada de cerca de 300 a.C.:

Dois campos têm área total de 1800 jardas quadradas. Um produz grãos em $\frac{2}{3}$ de um alqueire por jarda quadrada, enquanto o outro produz grãos em $\frac{1}{2}$ de um alqueire por jarda quadrada. Se o lucro total é de 1100 alqueires, qual o tamanho de cada campo?

O problema dos babilônios faz referência as equações lineares

$$\begin{cases} x + y = 1800 \\ \frac{2}{3}x + \frac{1}{2}y = 1100 \end{cases}$$

em que x e y representam as áreas dos dois campos.

Os chineses, por volta de 200 a.C. e 100 a.C. foram dos babilônios no que se refere à matriz. No livro *K'ui-Ch'ang Suan-Shu* (Nove Capítulos sobre a Arte Matemática), especificamente no capítulo oito, é apresentado problemas envolvendo equações lineares, como aponta Eves (2011):

> Três feixes de uma colheita de boa qualidade, dois feixes de uma qualidade regular e um feixe de má qualidade são vendidos por 39 dou. Dois feixes da boa, três de regular e uma de má são vendidos por 34 dou. Um feixe de boa dois de regular e três de má são vendidos por 26 dou. Qual o preço do feixe para cada uma das qualidades? (Eves, 2011 p.268).

Tal problema pode ser representado através de um sistema de equações lineares:

$$\begin{cases} 3x + 2y + z = 39 \\ 2x + 3y + z = 34 \\ x + 2y + 3z = 26 \end{cases}$$

de modo que x refere-se à colheita de boa qualidade, y de qualidade regular e z de má qualidade.

De acordo com Cavalcanti (2022, p.12) “para resolver esse tipo de problema eram efetuadas operações em uma tabela, assim como acontece com as matrizes, a diferença é que os chineses não utilizavam a representação por linhas, e sim por colunas”. Os chineses também utilizam a escrita de cima para baixo e da direita para a esquerda. A tabela abaixo, ilustra o problema apresentado anteriormente:

1	2	3
2	3	2
3	1	1
26	34	39

Após efetuar as operações, a tabela era reduzida a:

0	0	3
0	5	2
36	1	1
99	24	39

O que leva a representação das equações $36z = 99$, $5y + z = 24$ e $3x + 2y + z = 39$, das quais são calculados consecutivamente, os valores de z, y e x, como aponta Boyer (1974). Como podemos notar, os chineses utilizam o método que hoje é conhecido como método da eliminação de Gauss.

No ano de 1545, o matemático italiano Cardan, sugere em *Ars Magna*, uma regra para resolução de sistema de duas equações lineares, a qual ele dá o nome de *Regula de Modo* (Mãe das Regras). Tal regra se assemelha à Regra de Cramer, para resolução de um sistema 2×2. Ainda que Cardan não tenha atingido a definição de um determinante, seu método leva à definição.

A ideia de determinante surgiu no Japão antes da Europa. O matemático japonês Seki, é considerado a primeira pessoa a estudar determinantes. No ano de 1683, Seki escreveu *Methods of solving the dissimulated problem* (Método de Resolver os Problemas Dissimulados) que apresentava métodos matriciais escritos em forma de tabela, semelhante ao que foi feito pelos chineses. Sem mencionar o termo determinante, Seki através de exemplos introduziu o conceito de “determinante”, e assim, foi capaz de encontrar determinantes para matrizes 2×2, 3×3, 4×4 e 5×5 e utilizá-los para resolver equações.

Por volta de 1693, o matemático alemão Leibniz destina uma carta ao matemático francês L’Hospital e cita que “ocasionalmente usava números indicando linhas e colunas numa coleção de equações simultâneas”(Boyer, 1974, p.297). Ele explicou que:

$$\begin{array}{lcl} 10 + 11x + 12y = 0 & & 1_0 + 1_1x + 1_2y = 0 \\ 20 + 21x + 22y = 0 & \text{ou} & 2_0 + 2_1x + 2_2y = 0 \\ 30 + 31x + 32y = 0 & & 3_0 + 3_1x + 3_2y = 0 \end{array}$$

poderia ser escrito como

$$\begin{aligned} a_1 + b_1x + c_1y = 0 \\ a_2 + b_2x + c_2y = 0 \\ a_3 + b_3x + c_3y = 0 \end{aligned}$$

sendo possível uma solução, pois

$$10 \cdot 21 \cdot 32 + 11 \cdot 22 \cdot 30 + 12 \cdot 20 \cdot 31 = 10 \cdot 22 \cdot 31 + 11 \cdot 20 \cdot 32 + 12 \cdot 21 \cdot 30$$

uma vez que, a matriz dos coeficientes tem determinante 0.

Essa forma de resolução de sistema de equações foi uma grandiosa contribuição de Leibniz à Matemática, conforme aponta Boyer (1974):

> Os comentários de Leibniz na carta mostram que ele tinha consciência do poder da análise de "característica" ou notação que revele adequadamente os elementos de uma dada situação. Evidentemente ele tinha alta opinião dessa contribuição à notação por causa da facilidade de generalização e gabava-se de ter mostrado que "Viéte e Descartes não tinha ainda descobertos todos os mistérios" da análise. Leibniz, na verdade, foi um dos maiores formadores de notação, inferior apenas a Euler nesse ponto." (Boyer, 1974, p.297).

Ainda sobre Leibniz, Sanches (2002, p.12) destaca que "da mesma maneira como os estudos de sistema de coeficientes de equações levaram aos determinantes, o estudo dos sistemas de coeficientes de formas quadrangulares guiou Leibniz, naturalmente, em direção à teoria da matriz."

Em 1748, dois anos após a morte do matemático escocês MacLaurin, foram publicados em *Treatise of algebra* (Tratado de álgebra) os primeiros resultados a respeito de determinantes, comprovando a regra de Cramer para sistemas 2×2 e 3×3, e indicações de como funcionaria para um sistema 4×4.

Por volta de 1801, o matemático alemão Gauss introduziu pela primeira vez o termo determinante, porém, só em 1812, através do francês Cauchy é que o termo determinante é usado no sentido moderno. Posteriormente, em 1826, Cauchy utiliza o termo *tableau* para a matriz dos coeficientes, fazendo referência ao contexto das formas quadráticas em n variáveis. Cauchy também chegou a introduzir a ideia de matrizes semelhantes.

Conforme Pereira (2015) enfatiza, por muito tempo o estudo das matrizes foi associado aos determinantes. Segundo Santiago (2021, p.15) "a noção de matriz foi usada implicitamente pela primeira vez por Lagrange, quando reduziu a caracterização dos máximos e mínimos de uma função real de várias variáveis."

O termo Matriz foi utilizado pela primeira vez por Joseph Sylvester, em 1850. Ele considerava as matrizes como parte da teoria dos determinantes.

> Um bloco retangular de termos... o que não representa um determinante, mas é como se fosse uma matriz a partir da qual podemos formar vários sistemas de determinantes, ao fixar um número p e escolher à vontade p linhas e p colunas. (Artigo publicado na Philosophical Magazine de 1850) apud Moura (2014).

No ano seguinte, em 1851, Sylvester conhece o inglês Arthur Cayley, que assim como ele, era advogado. Sylvester e Cayley passaram a compartilhar juntos estudos mais aprofundados em Matemática. Foi então que em 1853, Cayley publica um trabalho, no qual é apresentado o inverso de uma matriz.

Por volta de 1858, Cayley publica *Memoir on the Theory of Matrices* (Memórias sobre a Teoria das Matrizes), contendo a primeira definição abstrata de matriz, e para ele as matrizes surgiram como consequência de transformações lineares, sendo assim, era possível representar a transformação

$$\begin{cases} x' = ax + by \\ y' = cx + dy \end{cases} \quad \text{escrevendo } (x', y') = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot (x, y)$$

Cayley apresentou a álgebra das matrizes definindo as operações de adição, produto e produto por escalar, além disto, expôs a matriz identidade e a matriz nula, como elemento neutro para o produto e adição entre matrizes, respectivamente. Por sua enorme contribuição à Teoria das Matrizes, Cayley é conhecido como Pai das matizes.

Apesar de Cayley ser considerado o precursor sobre a Teoria das Matrizes, alguns estudos já haviam sido realizados, relacionando tal teoria, com estudos das Formas Quadráticas. Segundo Santiago (2021, p. 16) “ a Teoria das Matrizes teve como precursora a Teoria das Formas Quadráticas. Entretanto, o estudo das formas quadráticas hoje em dia é simplesmente uma parte dessa teoria”. O autor ainda cita que os determinantes colaboraram pouco para o desenvolvimento da Teoria Matricial (Santiago, 2021).

Com este breve relato buscamos destacar os principais acontecimentos que levaram ao surgimento das matrizes e da sua teoria. No capítulo seguinte, apresentaremos a abordagem adotada para desenvolvimento desta pesquisa.

2 SOBRE A PESQUISA

Quanto à natureza, a presente pesquisa se enquadra como pesquisa aplicada, que para Prodanov e De Freitas (2013) se caracteriza por gerar conhecimentos voltados para a solução de problemas específicos. A mesma apresenta uma abordagem qualitativa e, quanto aos objetivos, é uma pesquisa exploratória, cuja finalidade é promover mais conhecimento sobre o ensino de matriz.

> As pesquisas exploratórias têm como principal finalidade desenvolver, esclarecer e modificar conceitos e ideias, tendo em vista a formulação de problemas mais precisos ou hipóteses pesquisáveis para estudos posteriores. De todos os tipos de pesquisa, estas são as que apresentam menor rigidez no planejamento. Habitualmente envolvem levantamento bibliográfico e documental, entrevistas não padronizadas e estudos de caso. Procedimentos de amostragem e técnicas quantitativas de coleta de dados não são costumeiramente aplicados nestas pesquisas.(Gil, 2008, p.27)

Para desenvolvê-la, o procedimento adotado foi a pesquisa bibliográfica, identificando estudos já realizados, a exemplos de livros, artigos científicos, e trabalhos acadêmicos, que tratem do ensino de matrizes e de suas aplicações. A busca pelos textos, se deu de forma manual, na base de dados do *Google* Acadêmico, buscado pelas palavras-chave: Matrizes, Sequência Didática, Educação Básica e Aplicações.

Após esse levantamento, desenvolvemos uma proposta didático-metodológica para o Ensino de Matrizes na Educação Básica, buscando propor atividades diferentes das que geralmente são apresentadas pelos livros didáticos.

No que se refere à proposta, não foi possível concretizá-la efetivamente, sendo concluída nesta etapa apenas a fase de planejamento, ficando a aplicação e avaliação para momentos posteriores. Dessa forma, a mesma pode servir de suporte para outros professores, ou quem se interessar pelo tema.

No capítulo seguinte, apresentamos o referencial teórico deste trabalho, com base na obra Fundamentos de Matemática Elementar 4 (Iezzi e Hazzan, 2013).

3 MATRIZES: EXPLORANDO OS FUNDAMENTOS TEÓRICOS

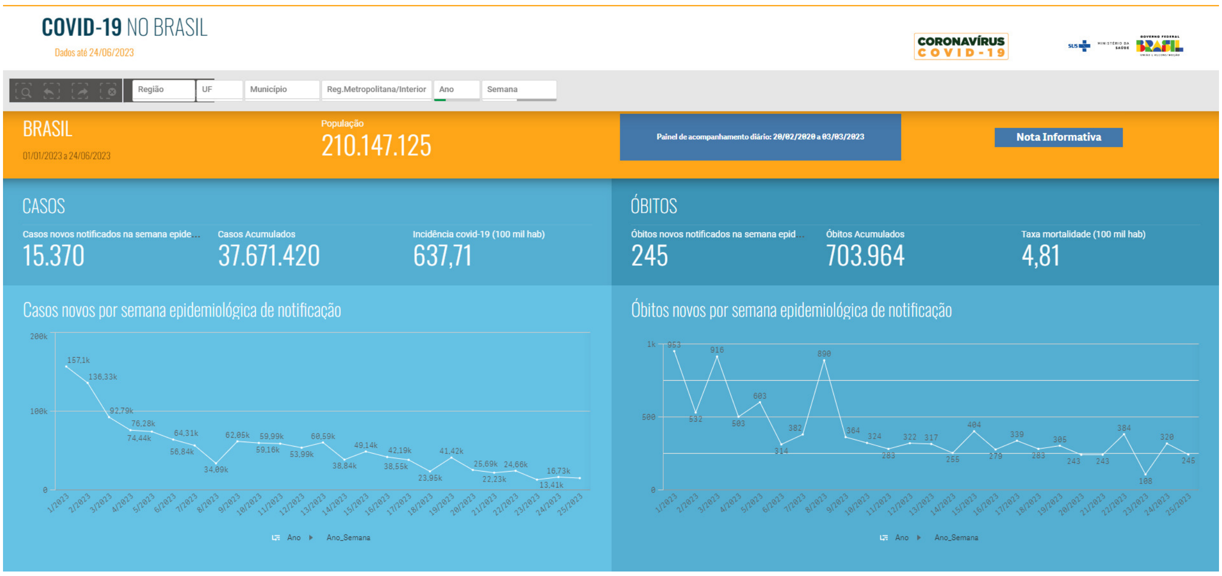
Antes de adentar no conceito de matriz e suas principais operações, falaremos um pouco sobre uma das formas utilizadas para organizar os dados refente à Covid-19, no Brasil.

No final do ano de 2019, se deu início ao surto do coronavírus (SARS-CoV-2), causador da Covid-19. Estudos apontam que o primeiro caso aconteceu em 11 de dezembro, na cidade de Wuhan, China. Tal vírus se espalhou rapidamente por todo o mundo, tendo o primeiro caso registrado no Brasil em 26 de fevereiro de 2020. Tratava-se de um homem, de 61 anos, morador da cidade de São Paulo-SP.

Em 11 de março de 2020 a Organização Mundial da Saúde (OMS) declara a pandemia de Covid-19, obrigando todos os países a tomarem medidas de prevenção contra o vírus. No Brasil, foi recomendado o isolamento social e adoção de medidas de higiene pessoal, como o uso de máscaras, lavagem com frequência das mãos com água e sabão, bem como o uso de álcool em gel.

O número de casos confirmados cresceu de forma rápida em todo o mundo, levando muitos a óbito. Só com a chegada das vacinas foi possível reduzir o número de casos, e também prevenir complicações. Decorridos mais de quatro anos do primeiro caso no Brasil, semanalmente ainda são registrados novos casos e óbitos de Covid-19, conforme informações apresentadas em `https://infoms.saude.gov.br/extensions/covid-19_html/covid-19_html.html`.

Figura 1 – *Layout* do *site*



Fonte: `https://infoms.saude.gov.br/extensions/covid-19_html/covid-19_html.html`

Essas informações podem ser visualizadas por município, por estado e por região. Fica evidente que os cuidados de prevenção ainda devem permanecer, tendo em vista que o vírus ainda continua circulando e infectando pessoas.

Figura 2 – Semana 25/2023

Detalhar por

Região Estado Município Região Metropolitana Todos

Região	População	Casos novos notificados na semana	Casos Acumulados	Incidência covid-19 (100 mil hab)	Óbitos novos notificados na semana	Óbitos Acumulados	Taxa mortalidade (100 mil hab)
Totais	**210.147.125**	**15.370**	**37.671.420**	**637,71**	**245**	**703.964**	**4,81**
Sudeste	88.371.433	4.580	14.991.771	661,41	149	338.746	6,13
Sul	29.975.984	2.978	8.019.637	1.023,15	38	111.595	5,96
Nordeste	57.071.654	3.172	7.395.316	329,97	33	135.569	3,05
Centro-Oeste	16.297.074	3.469	4.351.199	1.145,64	15	66.314	4,86
Norte	18.430.980	1.171	2.913.497	401,07	10	51.740	2,05

Fonte: `https://infoms.saude.gov.br/extensions/covid-19_html/covid-19_html.html`

Ao apresentar os dados desta forma, por categorias, gerando linhas e colunas, é possível realizar uma análise mais apropriada acerca da Covid-19, pois fornece uma maneira estruturada e visualmente organizada dos dados. Desta forma, se torna mais simples comparar os dados, sendo possível identificar a região com maior aumento de casos, e realizar intervenções para combater o vírus, por exemplo.

Esse tipo de organização é importante, pois facilita a interpretação e permite realizar uma análise qualitativa dos dados, podendo os mesmos serem representados de maneira sistemática. Além do mais, permite localizar informações específicas, sem a necessidade de ler todas as informações.

Tal organização, que possibilita a distribuição dos dados em linhas horizontais e colunais verticais, gera uma tabela que recebe o nome de matriz, e no decorrer deste capítulo iremos estudar mais detalhadamente a respeito.

3.1 Noção de matriz

Dados dois números m e n naturais e não nulos, chama-se matriz m por n (indica-se $m \times n$) toda tabela M retangular formada por números reais distribuídos em m linhas horizontais e n colunas verticais.

Exemplo 3.1. $M = \begin{bmatrix} \frac{2}{11} & 5 & 8 \\ 9 & 7 & \sqrt{12} \end{bmatrix}$ é um matriz 2×3.

Em uma matriz M, cada elemento é indicado por a_{ij}. O índice i indica a linha e o índice j a coluna às quais o elemento pertence. Com a convenção de que as linhas sejam numeradas de cima para baixo (de 1 até m) e as colunas, da esquerda para a direita (de 1 até n), uma matriz $m \times n$ pode ser representada de três formas:

$$M = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \text{ ou } M = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \text{ ou } M = \begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{Vmatrix}$$

Neste trabalho, adotaremos a primeira forma, na qual os dados são representados entre colchetes.

Uma matriz M do tipo $m \times n$ também pode ser indicada por $M = (a_{ij}); i \in \{1, 2, 3, \ldots, m\}$ e $j \in \{1, 2, 3, \ldots, n\}$ ou simplesmente $M = (a_{ij})_{m \times n}$.

3.2 Tipos de matrizes

Nesta seção, abordaremos os principais tipos de matrizes, que por apresentarem uma utilidade maior nesta teoria, recebem nomes especiais. Para uma melhor compreensão, cada definição é seguida de um exemplo.

Definição 3.1. Matriz linha é toda matriz do tipo $1 \times n$, com n natural.

Exemplo 3.2. $M = \begin{bmatrix} \sqrt{2} & -5 & \dfrac{7}{3} & 80 \end{bmatrix}$ é uma matriz linha do tipo 1×4.

Definição 3.2. Matriz coluna é toda matriz do tipo $m \times 1$, com m natural.

Exemplo 3.3. $M = \begin{bmatrix} 55,3 \\ -97 \\ 31 \end{bmatrix}$ é uma matriz coluna do tipo 3×1.

Definição 3.3. Matriz nula é toda matriz que tem todos os elementos iguais a zero.

Exemplo 3.4. $M = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ é uma matriz nula do tipo 2×3.

Definição 3.4. Matriz quadrada de ordem n é toda matriz do tipo $n \times n$, isto é, é uma matriz que tem igual o número de linhas e colunas:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Chama-se diagonal principal de uma matriz quadrada de ordem n o conjunto dos elementos que tem os dois índices iguais, isto é:

$$\{a_{ij} \mid i = j\} = \{a_{11}, a_{22}, a_{33}, \ldots, a_{nn}\}.$$

Chama-se diagonal secundária de uma matriz quadrada de ordem n o conjunto dos elementos que têm a soma dos índices igual a $n+1$, isto é:

$$\{a_{ij} \mid i + j = n + 1\} = \left\{a_{1n}, a_{2(n-1)}, a_{3(n-2)}, \ldots, a_{n1}\right\}.$$

Exemplo 3.5. $M = \begin{bmatrix} 29 & 31^5 & \dfrac{71}{4} & 55 \\ 0,33 & 111 & 6 & -7 \\ 77 & -4 & 41 & 2 \\ \dfrac{13}{7} & \sqrt{8} & 15 & 99 \end{bmatrix}$ é uma matriz quadrada de ordem 4.

Sua diagonal principal é formada pelos elementos $D_1 = \{29, 111, 41, 99\}$ e sua diagonal secundária é formada pelos elementos $D_2 = \left\{55, 6, -4, \dfrac{13}{7}\right\}$.

Definição 3.5. Matriz diagonal é toda matriz quadrada em que os elementos que não pertencem à diagonal principal são iguais a zero.

Exemplo 3.6. $M = \begin{bmatrix} 183 & 0 \\ 0 & -65 \end{bmatrix}$ é uma matriz diagonal de ordem 2.

Definição 3.6. Matriz unidade de ordem n (matriz identidade) é toda matriz diagonal em que os elementos da diagonal principal são iguais a 1 (indica-se I_n).

Exemplo 3.7. $I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ é uma matriz identidade de ordem 3.

Definição 3.7. Matriz triangular superior é toda matriz quadrada, cujos elementos $a_{ij} = 0; i > j$.

Exemplo 3.8. $M = \begin{bmatrix} 1 & 20 & 59 \\ 0 & -9 & -31 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \end{bmatrix}$ é uma matriz triangular superior de ordem 3.

Definição 3.8. Matriz triangular inferior é toda matriz quadrada, cujos elementos $a_{ij} = 0; i < j$.

Exemplo 3.9. $M = \begin{bmatrix} 11 & 0 & 0 & 0 \\ -136 & 702 & 0 & 0 \\ 597 & 0 & \sqrt{2} & 0 \\ \dfrac{77}{25} & 2 & 3 & 99 \end{bmatrix}$ é uma matriz triangular inferior de ordem 4.

3.3 Igualdade e operações entre matrizes

Nesta seção, é apresentada a igualdade entre matrizes, e logo em seguida, as operações de adição, produto de um número real por uma matriz e o produto entre matrizes. Citaremos no decorrer da seção alguns dos principais teoremas que caracterizam essas operações.

Definição 3.9. Duas matrizes $A = (a_{ij})_{m \times n}$ e $B = (b_{ij})_{m \times n}$ são iguais quando $a_{ij} = b_{ij}$ para todo i ($i \in \{1, 2, 3, \ldots, m\}$) e todo j ($j \in \{1, 2, 3, \ldots, n\}$). Isto significa que para serem iguais duas matrizes devem ser do mesmo tipo e apresentar todos os elementos correspondentes iguais (elementos com índices iguais).

Exemplo 3.10. $\begin{bmatrix} 13 & \sqrt{5} \\ -9 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13 & \sqrt{5} \\ -9 & 7 \end{bmatrix}$ pois $a_{11} = b_{11}$, $a_{12} = b_{12}$, $a_{21} = b_{21}$, $a_{22} = b_{22}$.

3.3.1 Adição

Na tabela a seguir, estão representados dados referentes a Covid-19 nos estados da região Sul do Brasil, até a semana 27/2023.

Tabela 1 – Casos e óbitos

-	Paraná	Santa Catarina	Rio Grande do Sul
Casos confirmados	2.947.330	3.049.322	2.027.181
Óbitos	46.428	42.382	22.841

Fonte: Adaptado de
https://infoms.saude.gov.br/extensions/covid-19_html/covid-19_html.html

Diante disto, é possível determinar o total de casos confirmados e óbitos na região Sul, até semana mencionada, somando os dados referentes aos três estados. Ou seja,

Paraná		Santa Catarina		Rio Grande do Sul		Região Sul
2.947.330	+	3.049.322	+	2.027.181	=	8.023.833
46.428		42.382		22.841		111.651

Desta forma, fica evidente a relação dos dados da região Sul com os dados de cada estado, de modo que o total de casos confirmados na região Sul sempre é correspondente a soma dos casos nos estados do Paraná, Santa Catarina e Rio Grande do Sul, assim como também acontece com os óbitos.

A adição entre matrizes apresenta a mesma característica, uma vez que cada elemento é resultante da soma de outros elementos correspondentes.

Definição 3.10. Dadas duas matrizes $A = (a_{ij})_{m \times n}$ e $B = (b_{ij})_{m \times n}$, chama-se soma $A + B$ a matriz $C = (c_{ij})_{m \times n}$ tal que $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$, para todo i e todo j. Isso significa que a soma de duas matrizes A e B do tipo $m \times n$ é uma matriz C do mesmo tipo em que cada elemento é a soma dos elementos correspondentes em A e B.

Exemplo 3.11. $\begin{bmatrix} 16 & 0 \\ \sqrt{2} & -15 \\ \dfrac{2}{3} & 88 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 22 & -9 \\ \sqrt{2} & 1 \\ \dfrac{5}{3} & -18 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 16+22 & 0+(-9) \\ \sqrt{2}+\sqrt{2} & -15+1 \\ \dfrac{2}{3}+\dfrac{5}{3} & 88+(-18) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 38 & -9 \\ 2\sqrt{2} & 14 \\ \dfrac{7}{3} & 70 \end{bmatrix}$

Teorema 3.1. *A adição de matrizes do tipo $m \times n$ apresenta as seguintes propriedades:*

1) Associativa: $(A+B)+C = A+(B+C)$ quaisquer que sejam A, B e C do tipo $m \times n$;

2) Comutativa: $A+B = B+A$ quaisquer que sejam A e B, do tipo $m \times n$;

3) Elemento neutro: existe uma matriz O tal que $A+O = A$ qualquer que seja a matriz A do tipo $m \times n$;

4) Elemento simétrico ou oposto: para todo A do tipo $m \times n$ existe uma matriz A' tal que $A + A' = O$

A demonstração desses resultados podem ser encontrados em (Iezzi e Hazzan, 2013 p. 51)

Definição 3.11. Dada a matriz $A = (a_{ij})_{m \times n}$ chama-se oposta de A à matriz $-A$ tal que $A + (-A) = O$.

Exemplo 3.12. $A = \begin{bmatrix} \sqrt{33} & \frac{15}{14} \\ -16 & 444 \end{bmatrix} \Rightarrow -A = \begin{bmatrix} -\sqrt{33} & -\frac{15}{14} \\ 16 & -444 \end{bmatrix}$

Definição 3.12. Dadas duas matrizes, $A = (a_{ij})_{m \times n}$ e $B = (b_{ij})_{m \times n}$, chama-se diferença $A - B$ à matriz soma de A com a oposta de B.

Exemplo 3.13. $A = \begin{bmatrix} 5 & 11 & 1 & -2 \\ -9 & 7 & 8 & 12 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 2 & -7 & 8 & -2 \\ -22 & 6 & 3 & 30 \end{bmatrix}$

$$\Rightarrow A + (-B) = \begin{bmatrix} 5 & 11 & 1 & -2 \\ -9 & 7 & 8 & 12 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 & 7 & -8 & 2 \\ 22 & -6 & -3 & -30 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 18 & -7 & 0 \\ 13 & 1 & 5 & -18 \end{bmatrix}$$

3.3.2 Produto de número real por uma matriz

Nesta subseção, trataremos do produto de um número real por uma matriz, elencando as propriedades desta operação.

Definição 3.13. Dados um número k e uma matriz $A = (a_{ij})_{m \times n}$, chama-se produto kA a matriz $B = (b_{ij})_{m \times n}$ tal que $b_{ij} = k \cdot a_{ij}$ para todo i e todo j. Isso significa que multiplicar uma matriz A por um número k é construir uma matriz B formada pelos elementos de A todos multiplicados por k.

Exemplo 3.14. Sejam $k = 7$ e $A = \begin{bmatrix} 112 & 0 & -21 \\ 7 & 49 & 70 \\ -\frac{7}{2} & 126 & 357 \end{bmatrix}$, tem-se:

$$k \cdot A = 7 \cdot \begin{bmatrix} 16 & 0 & -3 \\ 1 & 7 & 10 \\ -\frac{1}{2} & 18 & 51 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 112 & 0 & -21 \\ 7 & 49 & 70 \\ -\frac{7}{2} & 126 & 357 \end{bmatrix}$$

Teorema 3.2. *O produto de um número por uma matriz possui as seguintes propriedades:*

1) $a \cdot (b \cdot A) = (a \cdot b) \cdot A$;

2) $a \cdot (A + B) = a \cdot A + a \cdot B$;

3) $(a + b) \cdot A = a \cdot A + b \cdot A$;

4) $1 \cdot A = A$.

A demonstração desse teorema pode ser encontrado em Silva (2018, p. 20)

3.3.3 Produto de matrizes

Nesta subseção apresentamos o produto entre matrizes, destacando algumas observações importantes sobre a operação, assim como, um teorema, seguido da demonstração.

Definição 3.14. Dadas duas matrizes, $A = (a_{ij})_{m\times n}$ e $B = (b_{jk})_{n\times p}$, chama-se produto AB a matriz $C = (c_{ik})_{m\times p}$ tal que

$$c_{ik} = a_{i1} \cdot b_{1k} + a_{i2} \cdot b_{2k} + a_{i3} \cdot b_{3k} + \cdots + a_{in} \cdot b_{nk} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_{jk}$$

para todo $i \in \{1, 2, \ldots, m\}$ e todo $k \in \{1, 2, \ldots, p\}$.

Observação 3.1.

1ª) A definição dada garante a existência do produto AB somente se o número de colunas de A for igual ao número de linhas de B, pois A é do tipo $m \times n$ e B é do tipo $n \times p$.

2ª) A definição dada afirma que o produto AB é uma matriz que tem o número de linhas de A e o número de colunas de B, pois $C = AB$ é do tipo $m \times p$.

3ª) Ainda pela definição, um elemento c_{ik} da matriz AB deve ser obtido pelo procedimento seguinte:

(I) Toma-se a linha i da matriz A:

$$a_{i1}\ a_{i2}\ a_{i3}\ \cdots\ a_{in}\ (n \text{ elementos}).$$

(II) Toma-se a coluna k da matriz B:

$$\begin{matrix} b_{1k} \\ b_{2k} \\ b_{3k} \\ \vdots \\ b_{nk} \end{matrix}\quad (n \text{ elementos}).$$

(III) Coloca-se a linha i de A na "vertical" ao lado da coluna k de B (conforme esquema):

$$\begin{matrix} a_{i1} & b_{1k} \\ a_{i2} & b_{2k} \\ a_{i3} & b_{3k} \\ \vdots & \vdots \\ a_{in} & b_{nk} \end{matrix}$$

(IV) Calculam-se os n produtos dos elementos que ficaram lado a lado (conforme esquema):

$$\begin{matrix} a_{i1} \cdot b_{1k} \\ a_{i2} \cdot b_{2k} \\ a_{i3} \cdot b_{3k} \\ \vdots \\ a_{in} \cdot b_{nk} \end{matrix}$$

(V) Somam-se esses n produtos, obtendo c_{ik}.

Exemplo 3.15. Dadas $A = \begin{bmatrix} 10 & 3 & 12 \\ 41 & 5 & 6 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 7 \\ 8 \\ 9 \end{bmatrix}$, calcular AB.

Sendo A do tipo 2×3 e B do tipo 3×1, decorre que o produto AB está bem definido e é do tipo 2×1. Fazendo $AB = C$, devemos calcular c_{11} e c_{21}:

$$C = \begin{bmatrix} c_{11} \\ c_{21} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (1^{\underline{a}} \text{ linha de } A \cdot 1^{\underline{a}} \text{ coluna de } B) \\ (2^{\underline{a}} \text{ linha de } A \cdot 1^{\underline{a}} \text{ coluna de } B) \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} (10 \cdot 7 + 3 \cdot 8 + 12 \cdot 9) \\ (41 \cdot 7 + 5 \cdot 8 + 6 \cdot 9) \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} (70 + 24 + 108) \\ (287 + 40 + 63) \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} 202 \\ 354 \end{bmatrix}$$

Teorema 3.3. *A multiplicação de matrizes possui as seguintes propriedades:*

1) Associativa: $(AB)C = A(BC)$ quaisquer que sejam as matrizes $A = (a_{ij})_{m \times n}, B = (b_{jk})_{n \times p}$ e $C = (c_{kl})_{p \times r}$.

   Demonstração: Fazendo $D = AB = (d_{ik})_{m \times p}, E = (AB)C = (e_{il})_{m \times r}$ e $F = BC = (f_{jl})_{n \times r}$, tem-se:

$$e_{il} = \sum_{k=1}^{p} d_{ik} \cdot c_{kl} = \sum_{k=1}^{p} \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot b_{jk} \right) \cdot c_{kl} =$$
$$= \sum_{k=1}^{p} \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot b_{jk} \cdot c_{kl} \right) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot \left(\sum_{k=1}^{p} b_{jk} \cdot c_{kl} \right) =$$
$$= \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot f_{jl}.$$

   Então, $(AB)C = A(BC)$.

2) Distributiva à direita em relação à adição: $(A + B)C = AC + BC$ quaisquer que sejam as matrizes $A = (a_{ij})_{m \times n}$, $B = (b_{ij})_{m \times n}$ e $C = (c_{jk})_{n \times p}$.

   Demonstração: Fazendo $D = (A + B)C = (d_{ik})_{m \times p}$, tem-se:

$$d_{ik} = \sum_{j=1}^{n} (a_{ij} + b_{ij}) \cdot c_{jk} = \sum_{j=1}^{n} (a_{ij} \cdot c_{jk} + b_{ij} \cdot c_{jk}) =$$
$$= \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot c_{jk} + \sum_{j=1}^{n} b_{ij} \cdot c_{jk}.$$

   Então, $(A + B)C = AC + BC$.

3) Distributiva à esquerda: $C(A+B) = CA + CB$ quaisquer que sejam as matrizes $A = (a_{ij})_{m\times n}, B = (b_{ij})_{m\times n}$ e $C = (c_{ki})_{p\times m}$.

   Demonstração: Análoga a 2).

4) $(kA)B = A(kB) = k(AB)$ qualquer que seja o número k e quaisquer que sejam as matrizes $A = (a_{ij})_{m\times n}$ e $B = (b_{jk})_{n\times p}$.

   Demonstração: Fazendo $C = kA = (c_{ij})_{m\times n}, D = kB = (d_{jk})_{n\times p}$ e $E = AB = (e_{ik})_{m\times p}$, vem:

$$\sum_{j=1}^{n} c_{ij}\cdot b_{jk} = \sum_{j=1}^{n}(k\cdot a_{ij})\cdot b_{jk} = k\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\cdot b_{jk}.$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\cdot d_{jk} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\cdot(k\cdot b_{jk}) = k\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\cdot b_{jk}.$$

   Então, $(kA)B = A(kB) = k(AB)$.

Observação 3.2.

1ª) É muito importante notar que a multiplicação de matrizes em geral não é comutativa, isto é, para duas matrizes quaisquer A e B é geralmente falso que $AB = BA$.

a) Há casos em que existe AB e não existe BA. Isso ocorre quando A é $m\times n$, B é $n\times p$ e $m \neq p$.

   Exemplo 3.16. $A = (a_{ij})_{2\times 2}$ e $B = (b_{ij})_{2\times 3} \Rightarrow \exists\ AB$.

   $B = (b_{ij})_{2\times 3}$ e $A = (a_{ij})_{2\times 2} \Rightarrow \nexists\ BA$, pois o número de colunas de B é diferente do número de linhas de A.

b) Há casos em que existem AB e BA, porém são matrizes de tipos diferentes e, portanto, $AB \neq BA$. Isso ocorre quando A é $m\times n$, B é $n\times m$ e $m \neq n$.

   Exemplo 3.17. $A = (a_{ij})_{2\times 3}$ e $B = (b_{ij})_{3\times 2} \Rightarrow \exists\ AB = C = (c_{ij})_{2\times 2}$.

   $B = (b_{ij})_{3\times 2}$ e $A = (a_{ij})_{2\times 3} \Rightarrow \exists\ BA = D = (d_{ij})_{3\times 3}$.

c) Mesmo nos casos em que AB e BA são do mesmo tipo (o que ocorre quando A e B são quadradas e de mesma ordem), temos quase sempre $AB \neq BA$.

   Exemplo 3.18. Se $A = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 9 \\ 2 & 8 & 3 \\ 7 & 5 & 2 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} -3 & 6 & 1 \\ 4 & 9 & 5 \\ -8 & 2 & -7 \end{bmatrix}$, tem-se

$$AB = \begin{bmatrix} -86 & 51 & -54 \\ 2 & 90 & 21 \\ -17 & 91 & 18 \end{bmatrix} \text{ e } BA = \begin{bmatrix} 7 & 50 & -7 \\ 69 & 101 & 73 \\ -77 & -27 & -80 \end{bmatrix}$$

2ª) Quando A e B são tais que $AB = BA$, dizemos que A e B comutam. Notemos que uma condição necessária para A e B comutarem é que sejam quadradas e de mesma ordem.

Exemplo 3.19. $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ comuta com $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ comuta com $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ comuta com $\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ comuta com $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$

3ª) É importante observar também que a implicação $AB = 0 \Rightarrow A = 0$ ou $B = 0$ não é válida para matrizes, isto é, é possível encontrar duas matrizes não nulas cujo produto é a matriz nula.

Exemplo 3.20. $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

3.4 Matriz transposta

Definição 3.15. Dada uma matriz $A = (a_{ij})_{m\times n}$, chama-se transposta de A a matriz $A^t = (a'_{ji})_{n\times m}$ tal que $a'_{ji} = a_{ij}$, para todo i e todo j. Isso significa que, por exemplo, $a'_{11}, a'_{21}, a'_{31}, \cdots, a'_{n1}$ são respectivamente iguais a $a_{11}, a_{12}, a_{13}, \cdots, a_{1n}$; vale dizer que a 1ª coluna de A^t é igual a 1ª linha de A. Repetindo o raciocínio, chegaríamos à conclusão de que as colunas de A^t são ordenadamente iguais às linhas de A.

Exemplo 3.21. $A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{bmatrix} \Rightarrow A^t = \begin{bmatrix} a & d \\ b & e \\ c & f \end{bmatrix}$

Teorema 3.4. *A matriz transposta possui as seguintes propriedades:*

1) $(A^t)^t = A$ para toda matriz $(a_{ij})_{m\times n}$;

2) Se $A = (a_{ij})_{m\times n}$ e $B = (b_{ij})_{m\times n}$, então $(A+B)^t = A^t + B^t$;

3) Se $A = (a_{ij})_{m\times n}$ e $k \in \mathbb{R}$, então $(kA)^t = kA^t$;

4) Se $A = (a_{ij})_{m\times n}$ e $B = (b_{ij})_{m\times p}$, então $(AB)^t = B^tA^t$.

A demonstração desse teorema pode ser encontrada em Iezzi e Hazzan (2013, p. 69).

Definição 3.16. Chama-se matriz simétrica toda matriz quadrada A, de ordem n, tal que $A^t = A$.

Decorre da definição que, se $A = (a_{ij})$ é uma matriz simétrica, temos: $a_{ij} = a_{ji}; \forall\ i, \forall\ j \in \{1, 2, 3, \ldots, n\}$ isto é, os elementos simetricamente dispostos em relação à diagonal principal são iguais.

Exemplo 3.22. São simétricas as matrizes: $\begin{bmatrix} a & b \\ b & d \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} a & b & c \\ b & d & e \\ c & e & f \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} a & b & c & d \\ b & e & f & g \\ c & f & h & i \\ d & g & i & j \end{bmatrix}$

Definição 3.17. Chama-se matriz antissimétrica toda matriz quadrada A, de ordem n, tal que $A^t = -A$.

Decorre da definição que, se $A = (a_{ij})$ é uma matriz antissimétrica, temos: $a_{ij} = -a_{ji}; \forall\ i, \forall\ j \in \{1, 2, 3, \ldots, n\}$ isto é, os elementos simetricamente dispostos em relação à diagonal principal são inversos aditivos um do outro.

Exemplo 3.23. São antissimétricas as matrizes: $\begin{bmatrix} 0 & a \\ -a & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 \\ -2 & 3 & 8 \\ -5 & -8 & 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & -a & b & -c \\ a & 0 & d & e \\ -b & -d & 0 & f \\ c & -e & -f & 0 \end{bmatrix}$

3.5 Matrizes inversíveis

Definição 3.18. Seja A uma matriz quadrada de ordem n. Dizemos que A é matriz inversível se existir uma matriz B tal que $AB = BA = I_n$. Se A não é inversível, dizemos que A é uma matriz singular.

Teorema 3.5. *Se A é inversível, então é única a matriz B tal que $AB = BA = I_n$.*

Demonstração: Admitamos que exista uma matriz C tal que $AC = CA = I_n$. Tem-se:

$$C = I_nC = (BA)C = B(AC) = BI_n = B.$$

Definição 3.19. Dada uma matriz inversível A, chama-se inversa de A a matriz A^{-1} (que é única) tal que $AA^{-1} = A^{-1}A = I_n$.
É evidente que A^{-1} deve ser também quadrada de ordem n, pois A^{-1} comuta com A.

Exemplo 3.24. A matriz $\begin{bmatrix} 3 & 7 \\ 5 & 11 \end{bmatrix}$ é inversível e $A^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{11}{2} & \frac{7}{2} \\ \frac{5}{2} & -\frac{3}{2} \end{bmatrix}$ pois:

$$AA^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & 7 \\ 5 & 11 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{11}{2} & \frac{7}{2} \\ \frac{5}{2} & -\frac{3}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I_2.$$

$$A^{-1}A = \begin{bmatrix} -\frac{11}{2} & \frac{7}{2} \\ \frac{5}{2} & -\frac{3}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 7 \\ 5 & 11 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I_2.$$

E assim, finalizamos o referencial teórico deste trabalho. No capítulo seguinte, propomos algumas sugestões de atividades destinadas a turmas de Ensino Médio, de modo que possa tornar o ensino de matrizes mais significativo.

4 SUGESTÃO DE ATIVIDADES PARA A SALA DE AULA

Neste capítulo, apresentamos sugestões de atividades que possibilitem uma assimilação significativa do conteúdo de Matriz, tendo em vista que geralmente esse conteúdo é ministrado através da memorização de regras e com repetições de exercícios do livro didático, o que pode dificultar o processo de aprendizagem dos alunos.

De acordo com a Base Nacional Comum Curricular - BNCC, "Um dos desafios para a aprendizagem da Matemática no Ensino Médio é exatamente proporcionar aos estudantes a visão de que ela não é um conjunto de regras e técnicas, mas faz parte de nossa cultura e de nossa história." (Brasil, 2018, p. 522). Assim, esperamos que essas propostas possam servir de suporte para que professores consigam despertar no aluno o interesse e a curiosidade sobre o estudo das Matrizes.

Buscamos apresentar atividades na qual os alunos pudessem participar ativamente para tornar mais fácil o processo de aprendizagem, assim como, aprofundar seus conhecimentos sobre o objeto estudado. Para Bezerra e Madruga (2020) é fundamental orientar o aluno para que ele próprio desenvolva seu conhecimento, e instigá-lo a compreender os cálculos matriciais.

As Orientações Curriculares Nacionais para o Ensino Médio enfatizam que "a contextualização aparece não como uma forma de ilustrar o enunciado de um problema, mas como uma maneira de dar sentido ao conhecimento matemático na escola". (Brasil, 2006, p. 83).

4.1 Proposta 1: Comércio

Para esta proposta, foi pensando em um problema de simples compreensão para os alunos, como forma de introduzir a operação de adição entre matrizes.

- Habilidade: (EM13MAT301) Resolver e elaborar problemas do cotidiano, da Matemática e de outras áreas do conhecimento, que envolvem equações lineares simultâneas, usando técnicas algébricas e gráficas, com ou sem apoio de tecnologias digitais.

- Objetivos: Introduzir o conceito de adição de matrizes.

- Pré-requisitos: Leitura e interpretação de tabelas

- Duração: Aproximadamente 45 minutos.

- Recursos necessários: Cópias com o problema a ser estudado.

- Procedimentos:

  1) De início, o professor deve distribuir para os alunos o seguinte problema:

Um empresário possui duas lojas no centro de Campina Grande, Divas da Moda (Loja 1) e Elegância Feminina (Loja 2). Uma fábrica de blusas femininas fornece semanalmente mercadorias para duas lojas, e buscando uma melhor lucratividade, o empresário lançou uma pesquisa sobre as vendas de dois novos modelos lançados para o mês de Janeiro de 2024, e obteve o seguinte resultado:

Tabela 2 – Loja 1

Total de vendas no mês de Janeiro				
-	1ª semana	2ª semana	3ª semana	4ª semana
Modelo A	30	24	13	25
Modelo B	21	33	18	40

Fonte: Elaborada pela autora, 2024

Tabela 3 – Loja 2

Total de vendas no mês de Janeiro				
-	1ª semana	2ª semana	3ª semana	4ª semana
Modelo A	14	11	30	19
Modelo B	25	23	16	9

Fonte: Elaborada pela autora, 2024

2) O professor neste momento orientará os alunos para realizarem uma análise dos dados apresentados. Posteriormente, lançará o seguinte questionamento:

"Como pode ser possível determinar o total de vendas de cada modelo em cada semana do mês de janeiro?"

3) No terceiro momento, os alunos devem responder a pergunta de acordo com seus conhecimentos prévios. Em seguida, o professor conduzirá uma discussão coletiva para socialização dos resultados obtidos, e juntos, determinar uma solução.

Se considerar pertinente, no momento da discussão, o professor poderá convidar alguns alunos para apresentarem a solução encontrada na lousa.

4) Em seguida, o professor deve destacar a relação das tabelas com as matrizes, e questioná-los sobre algumas propriedades, como, por exemplo, se é possível somar matrizes de ordens diferentes. Ao final, realizar a apresentação formal da operação de adição de matrizes.

- Possível solução:

  Espera-se que os alunos compreendam que para determinar a quantidade de mercadoria vendida em cada semana, se faz necessário a soma das vendas referentes as duas lojas.

Exemplo 4.1. Vendas do modelo A:

- 1ª semana: 30+14 = 44
- 2ª semana:24+11 = 35
- 3ª semana: 13+30 = 43
- 4ª semana: 25+19 = 44

Exemplo 4.2. Vendas do modelo B:

- 1ª semana: 21+55 = 46
- 2ª semana: 33+23 = 56
- 3ª semana: 18+16 = 34
- 4ª semana: 40+9 = 49

Para formalização, o professor poderá apresentar os dados das lojas em forma de matrizes, conforme exemplo:

Exemplo 4.3. Loja 1 = $\begin{bmatrix} 30 & 24 & 13 & 25 \\ 21 & 33 & 18 & 40 \end{bmatrix}$ e Loja 2 = $\begin{bmatrix} 14 & 11 & 30 & 19 \\ 15 & 23 & 16 & 9 \end{bmatrix}$

Para determinar o total de vendas de cada modelo, o professor deve destacar que basta realizar a soma dos respectivos elementos dessas matrizes, ou seja,

$$\text{Total de vendas} = \begin{bmatrix} 30+14 & 24+11 & 13+30 & 25+19 \\ 21+25 & 33+23 & 18+16 & 40+9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 44 & 35 & 43 & 44 \\ 46 & 56 & 34 & 49 \end{bmatrix}$$

Reorganizando os dados em tabela, podemos identificar a quantidade de blusas vendidas de acordo com o modelo e semana.

Tabela 4 – Total de mercadorias

Vendas no mês de Janeiro				
-	1ª semana	2ª semana	3ª semana	4ª semana
Modelo A	44	35	43	44
Modelo B	46	56	34	49

Fonte: Elaborada pela autora, 2024

Esta sugestão de atividade foi uma adaptação de Marcelino (2021, p.29)

4.2 Proposta 2: Campeonato de futebol

Na seguinte proposta, faremos uso de tabelas de classificação de um campeonato de futebol, de modo que ao final, seja possível determinar os pontos obtidos por cada equipe.

- Habilidade: (EM13MAT301) Resolver e elaborar problemas do cotidiano, da Matemática e de outras áreas do conhecimento, que envolvem equações lineares simultâneas, usando técnicas algébricas e gráficas, com ou sem apoio de tecnologias digitais.
- Objetivos: Associar os elementos de uma tabela com uma matriz; Aplicar o Produto de Matrizes.
- Pré-requisitos: Conhecimento prévio sobre elementos de uma matriz e produto de matrizes.
- Duração: Aproximadamente 60 minutos.
- Recursos necessários: Tabelas que simulem a classificação de um campeonato de futebol.
- Procedimentos:

  1) Dividir a turma em grupos de até 3 alunos.

  2) Cada grupo receberá uma tabela do campeonato de futebol.

  3) Cada grupo deverá associar os dados da tabela com elementos de uma matriz, essa matriz será chamada de A.

  4) Nesta etapa, o professor enfatizará que após cada disputa do campeonato, são acrescentados 3 pontos para equipe vencedora e 0 pontos para a equipe perdedora, se houver empate, ambas as equipes recebem 1 ponto.

  5) Com a orientação repassada pelo professor, e observando a ordem das informações apresentadas na tabela, cada grupo deve formar uma nova matriz B.

  6) Nesta etapa, o professor pedirá que cada grupo determine os pontos obtidos por cada equipe de futebol durante o campeonato. Para isso, farão o produto entre as matrizes A e B.

  7) Após realizar o produto AB, o grupo deverá determinar os pontos atingidos por cada equipe, e socializar com os demais grupos seus resultados.

Vale destacar que, a quantidade de equipes de futebol que formarão esse campeonato fica a critério do professor, bem como, se os grupos de alunos receberão tabelas iguais ou diferentes.

Para um melhor entendimento, apresentaremos um exemplo desta aplicação a seguir.

Exemplo 4.4. Considere a tabela abaixo, que traz informações sob a classificação final do Campeonato Brasileiro de Futebol série A 2023.

Tabela 5 – Campeonato Brasileiro de Futebol 2023

Equipes	**Vitórias**	**Empates**	**Derrotas**
Palmeiras	20	10	8
Grêmio	21	5	12
Atlético-MG	19	9	10
Flamengo	19	9	10
Botafogo	18	10	10

Fonte: Adaptado de https://ge.globo.com/futebol/brasileirao-serie-a/

A matriz associada a esta tabela é:

$$A = \begin{bmatrix} 20 & 10 & 8 \\ 21 & 5 & 12 \\ 19 & 9 & 10 \\ 19 & 9 & 10 \\ 18 & 10 & 10 \end{bmatrix}$$

Seja B a matriz determinada pela etapa 5, que neste caso, obedece a ordem apresentada na tabela 5 (vitórias - empates - derrotas)

$$B = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Note que, a matriz A é do tipo 5×3, e a matriz B do tipo 3×1. Desta forma, o produto AB existe, e é do tipo 5×1.

$$AB = \begin{bmatrix} 20 & 10 & 8 \\ 21 & 5 & 12 \\ 19 & 9 & 10 \\ 19 & 9 & 10 \\ 18 & 10 & 10 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 70 \\ 68 \\ 66 \\ 66 \\ 64 \end{bmatrix}$$

A partir do produto AB, é possível assim determinar os pontos alcançados por cada equipe no campeonato, seguindo a respectiva ordem de classificação.

Tabela 6 – Pontuação final

Equipes	Pontos
Palmeiras	70
Grêmio	68
Atlético-MG	66
Flamengo	66
Botafogo	64

Fonte: Adaptado de https://ge.globo.com/futebol/brasileirao-serie-a/

Esta atividade pode ser desenvolvida logo após a apresentação formal do produto de matrizes, como forma de instigar os alunos a praticarem essa operação. Sugerimos que se assim for acatado pelo professor, que utilize uma quantidade pequena de times de futebol, pois os alunos ainda não estarão habituados com os cálculos.

Esta sugestão de atividade foi uma adaptação de Moura (2014, p. 55)

4.3 Proposta 3: Conta de energia elétrica

Para esta proposta de atividade, utilizaremos o produto entre matrizes para determinar o quanto foi gasto com energia elétrica em uma residência, no período de três meses.

- Habilidade: (EM13MAT301) Resolver e elaborar problemas do cotidiano, da Matemática e de outras áreas do conhecimento, que envolvem equações lineares simultâneas, usando técnicas algébricas e gráficas, com ou sem apoio de tecnologias digitais.

- Objetivos: Determinar o preço gasto com energia elétrica através do produto entre matrizes.

- Pré-requisitos: Conhecimento prévio sobre produto de matrizes; Leitura e interpretação de tabelas.

- Duração: Aproximadamente 60 minutos.

- Recursos necessários: Contas de energia elétrica e calculadoras.

- Procedimentos:

  1) Em um momento anterior a aplicação da atividade, o professor deve solicitar aos alunos que levem para o próximo encontro, três contas de energia elétrica e calculadoras.

  2) No momento da aplicação da atividade, os alunos serão divididos em duplas.

  3) Formada as duplas, o professor orientará os alunos sobre os procedimentos para realização da atividade. De início, cada aluno deverá elaborar duas tabelas.

4) A primeira tabela constará o consumo em kWh de cada mês, e a segunda tabela o preço unitário com tributos.

5) Cada aluno formará duas matrizes com os dados das respectivas tabelas. Feito isso, haverá a troca de matrizes entre as duplas.

6) Ao receber o par de matrizes, o aluno realizará o produto entre essas matrizes. Neste momento, poderá utilizar a calculadora, para ajudar nos cálculos decimais.

7) Para finalizar, cada aluno deve determinar o preço das contas de energia do outro aluno, com quem formou dupla.

Nesta atividade não iremos considerar serviços adicionais, como por exemplo, iluminação pública.

Vejamos um exemplo:

Exemplo 4.5. Suponhamos a dupla formada pelos alunos Alan e Vinícius. Analisando as três contas de energia que trouxe de sua casa, Alan organizou as tabelas 7 e 8.

Tabela 7 – Consumo em kWh

Aluno	**Janeiro**	**Fevereiro**	**Março**
Alan	131	146	158

Fonte: Elaborada pela autora, 2024

Tabela 8 – Preço unitário com tributos

Mês	**Preço**
Janeiro	0,773670
Fevereiro	0,70872
Março	0,70078

Fonte: Elaborada pela autora, 2024

Após organizar os dados referentes a cada tabela, é obtido as seguintes matrizes,

$$\begin{bmatrix} 131 & 146 & 158 \end{bmatrix} \text{ e } \begin{bmatrix} 0,77367 \\ 0,70872 \\ 0,70078 \end{bmatrix}$$

Neste momento, Alan repassa suas matrizes para o aluno Vinícius, que ao receber, deverá efetuar o produto entre as mesmas.

Realizando este produto, tem-se:

$$\begin{bmatrix} 131 & 146 & 158 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0,77367 \\ 0,70872 \\ 0,70078 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 101,35077 + 103,47312 + 110,72324 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 315,54713 \end{bmatrix}$$

Fazendo a aproximação para duas casas decimais, Vinícius deve concluir que, no mês de Janeiro a conta custou R$ 101, 35 , em Fevereiro R$ 103,47 e Março R$ 110,72. Ao final dos trimestre, foi gasto R$ 315,55.

De forma análoga, acontece o mesmo procedimento, simultaneamente, com o outro componente da dupla.

Destacamos que a quantidade de contas de energia pode ser alterada, e se o professor achar necessário, cada aluno entregará ao final, os procedimentos realizados durante a atividade.

Para construção desta proposta, realizamos uma adaptação do trabalho realizado por Costa; Alves e Cordeiro (2018).

4.4 Proposta 4: Criptografia

Nesta proposta de atividade, apresentamos a Criptografia associada ao Produto de Matrizes. A criptografia é utilizada como recurso para manter a segurança das informações por meio de codificação e decodificação. A palavra criptografia vem do grego *kryptós* (segredo) e *graphéin* (escrever) que se refere ao ato de escrever mensagens de forma secreta.

A proposta 4 foi uma adaptação de Cavalcanti (2022, p. 36)

- Habilidade: (EM13MAT301) Resolver e elaborar problemas do cotidiano, da Matemática e de outras áreas do conhecimento, que envolvem equações lineares simultâneas, usando técnicas algébricas e gráficas, com ou sem apoio de tecnologias digitais.

- Objetivos: Aplicar o Produto de Matrizes na Criptografia.

- Pré-requisitos: Conhecimento prévio sobre matrizes inversas e produto de matrizes.

- Duração: Aproximadamente 90 minutos.

- Recursos necessários: Fichas com duas matrizes quadradas, de elementos inteiros e inversas uma da outra e tabela associativa entre letras e números.

- Procedimentos:

  1) Inicialmente dividir a turma em grupo de até quatro alunos e distribuir entre os grupos uma ficha com um par de matrizes inversas e tabela para codificação, conforme modelo apresentado a seguir:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 5 & 6 & 0 \end{bmatrix} \text{ e } A^{-1} = \begin{bmatrix} -24 & 18 & 5 \\ 20 & -15 & -4 \\ -5 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$

Tabela 9 – Associação entre letras e números.

A	**B**	**C**	**D**	**E**	**F**	**G**	**H**	**I**	**J**	**K**	**L**	**M**	**N**
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
O	**P**	**Q**	**R**	**S**	**T**	**U**	**V**	**W**	**X**	**Y**	**Z**	**.**	**#**
15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28

Fonte: Elaborada pela autora, 2024.

As matrizes ficam a critério do professor, podendo ser alterada a ordem e os elementos.

2) Cada grupo deverá elaborar uma frase curta, e logo em seguida converter a frase para a forma numérica, associando cada letra com a correspondência apresentada na Tabela 9. O símbolo # deverá ser usado para representar o espaço entre as palavras, e a acentuação gráfica não será levada em consideração. É importante destacar que, caso a quantidade de caracteres seja um número ímpar (levando em consideração também o espaço entre as palavras), deve-se adicionar o ponto final (correspondente ao número 27). Caso contrário, não utilizá-lo, mantendo assim uma quantidade par de caracteres.

3) Feita a associação, o grupo deve ordenar a sequência obtida em uma matriz. A quantidade de linhas dessa matriz deverá ser igual à quantidade de linhas das matrizes entregue pelo professor.

4) Nesta etapa, o grupo deverá codificar a mensagem para poder enviá-la a outro grupo. Para isso, deve realizar o produto entre a matriz determinada pelo professor, e a matriz obtida pelo grupo. Podemos chamar de matriz codificada a matriz encontrada através desse produto.

5) Após cada grupo encontrar sua matriz codificada, deverá ser feito a troca aleatória de matrizes entre os grupos. Com isso, cada grupo envia e recebe uma “frase secreta”.

6) Para decodificar a frase recebida, os grupos devem realizar o produto entre a matriz recebida e a matriz inversa, determinada inicialmente pelo professor.

7) Na última etapa, basta cada grupo utilizar a tabela inicial e fazer a associação dos elementos da matriz com a tabela. Feito isso, a frase é decifrada.

Para uma melhor compreensão apresentaremos um exemplo dessa aplicação.

Exemplo 4.6. Tomemos como exemplo as matrizes quadradas apresentadas anteriormente A e A^{-1}, a Tabela 9 e a frase "MATRIZES NO ENSINO MÉDIO".

Ao realizar a conversão da frase para a forma numérica, obtemos a seguinte sequência:

13 1 20 18 9 26 5 19 28 14 15 28 5 14 19 9 14 15 28 13 5 4 9 15

Como as matrizes iniciais são de ordem 3, iremos distribuir os elementos encontrados em uma matriz de 3 linhas. Chamaremos essa matriz de M.

$$M = \begin{bmatrix} 13 & 1 & 20 & 18 & 9 & 26 & 5 & 19 \\ 28 & 14 & 15 & 28 & 5 & 14 & 19 & 9 \\ 14 & 15 & 28 & 13 & 5 & 4 & 9 & 15 \end{bmatrix}$$

Para realizar a codificação da frase, é feito o produto entre as matrizes A e M. Chamaremos de N a matriz encontrada após realizar esse produto.

$$AM = N = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 5 & 6 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 13 & 1 & 20 & 18 & 9 & 26 & 5 & 19 \\ 28 & 14 & 15 & 28 & 5 & 14 & 19 & 9 \\ 14 & 15 & 28 & 13 & 5 & 4 & 9 & 15 \end{bmatrix}$$

$$N = \begin{bmatrix} 111 & 74 & 134 & 113 & 34 & 66 & 70 & 82 \\ 84 & 74 & 127 & 80 & 25 & 30 & 55 & 69 \\ 233 & 89 & 190 & 258 & 75 & 214 & 139 & 149 \end{bmatrix}$$

Na etapa final, após a troca entre os grupos, é realizada a decodificação da frase, através do produto entre as matrizes A^{-1} e N:

$$\begin{aligned} A^{-1}N &= \begin{bmatrix} -24 & 18 & 5 \\ 20 & -15 & -4 \\ -5 & 4 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 111 & 74 & 134 & 113 & 34 & 66 & 70 & 82 \\ 84 & 74 & 127 & 80 & 25 & 30 & 55 & 69 \\ 233 & 89 & 190 & 258 & 75 & 214 & 139 & 149 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 13 & 1 & 20 & 18 & 9 & 26 & 5 & 19 \\ 28 & 14 & 15 & 28 & 5 & 14 & 19 & 9 \\ 14 & 15 & 28 & 13 & 5 & 4 & 9 & 15 \end{bmatrix} \\ &= M. \end{aligned}$$

Note que, $A^{-1}N = M$, e através da Tabela 9 é possível descobrir a frase inicial.

Tabela 10 – Frase decodificada.

13	1	20	18	9	26	5	19	28	14	15	28	5	14	19	9	14	15	28	13	5	4	9	15
M	**A**	**T**	**R**	**I**	**Z**	**E**	**S**	#	**N**	**O**	#	**E**	**N**	**S**	**I**	**N**	**O**	#	**M**	**E**	**D**	**I**	**O**

Fonte: Elaborada pela autora, 2024.

Sabemos que cada sala de aula apresenta uma realidade específica, e para um melhor aproveitamento durante realização dessa proposta, sugerimos que cada professor analise a sua realidade. Se porventura, considerar curto tempo para realização de todas as etapas, poderá então, vir a realizá-la em dois momentos, ficando como sugestão para o primeiro momento as etapas de 1 a 4, e no segundo momento de 5 a 7.

É interessante que antes de realizar tal proposta, o professor aborde com os alunos o conceito de matrizes inversas, e utilize tal proposta como fechamento para o produto entre matrizes.

Uma outra sugestão para complementar esta atividade, se caso os alunos tenham acesso à internet em sala de aula, é utilizar o *site* `https://matrixcalc.org/pt/` para conferência do produto entre matrizes nas etapas 4 e 6.

As atividades aqui propostas, visam possibilitar aos alunos uma aproximação, embora superficial, entre a teoria matricial e a prática.

Assim, finalizamos este capítulo, destacando a importância dos docentes utilizarem, sempre que possível, estratégias para inovarem nas aulas de Matemática. No próximo capítulo, temos as considerações finais deste trabalho, seguido de sugestões para futuras pesquisas.

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Neste trabalho, buscamos apresentar uma proposta metodológica para o ensino de matrizes na Educação Básica, por meio de atividades voltadas à aplicação prática de matrizes. Para atingir o objetivo geral do trabalho, fizemos um estudo dos aspectos históricos e epistemológicos do conceito de matriz, como também, investigamos os principais tipos e operações.

No que se refere aos aspectos históricos, foi possível identificar que o estudo do determinante precedeu o de matrizes, diferente do que ocorre no âmbito escolar. Identificamos também, os principais nomes que contribuíram para o surgimento da teoria matricial.

Para construção da proposta metodológica, realizamos uma pesquisa bibliográfica, adaptando algumas ideias para que assim pudessem ser aplicadas em sala de aula.

Na proposta 1, apresentamos uma forma prática para introdução da operação de adição entre matrizes.

Para a proposta 2, sugerimos a utilização de tabelas de um campeonato de futebol, afim de relacionar os elementos da tabela com uma matriz, e ao final, utilizar o produto de matrizes para determinar a pontuação obtida por cada time de futebol.

Na proposta 3, utilizamos dados presentes em contas de energia elétrica associados com o produto entre matrizes.

Já para a proposta 4, vinculamos a criptografia como recurso para praticar o produto entre matrizes. Essa proposta consiste no envio e recebimento de mensagens de forma secreta.

As propostas foram pensadas de modo que seja possível engajar os alunos na realização das atividades, fazendo-os socializar seus resultados, e discutirem sobre o assunto, e não apenas realizar dezenas de exercícios repetitivos cujo enunciado já determina o que deve ser feito.

Embora o professor tenha uma ementa a cumprir, e na maioria das vezes o tempo se torne curto, acreditamos que atividades como as que foram propostas neste trabalho, estimulem nos alunos a curiosidade sobre as Matrizes e pela Matemática, para quem sabe, vir a melhorar o rendimento.

5.1 Sugestões para futuras pesquisas

Diante da limitação do tempo, não foi possível realizar a aplicação e avaliação das propostas metodológicas aqui apresentadas, assim, esperamos em trabalhos futuros concretizá-las efetivamente.

Por se tratar de âmbito escolar, é possível que ocorra adaptações antes ou durante cada aplicação. No que se refere a avaliação, analisaremos se a proposta atingiu cada objetivo, e se de fato, auxiliou os alunos na compreensão do conceito de matrizes e suas operações.

Para todos aqueles que se interessarem por esta pesquisa e desejem aplicá-la, enfatizamos que o tempo, objetivos, recursos necessários e os procedimentos na realização de cada proposta, podem ser adaptados de acordo com a realidade em que será inserida.

REFERÊNCIAS

[1] BEZERRA, Maria do Socorro Silva; MADRUGA, Zulma Elizabete de Freitas. **Ensino de matrizes: mapeamento de pesquisas acadêmicas que apresentam contextualização no Ensino Médio**. Revista Insignare Scientia-RIS, v. 3, n. 2, p. 349-367, 2020.

[2] BOYER, Carl Bejamin. **História da Matemática.** Tradução: Elza F. Gomide. São Paulo, Edgard Blucher, Ed. da Universidade de São Paulo, 1974.

[3] BRASIL, Ministério da Educação, Secretaria de Educação Básica. **Orientações curriculares para o Ensino Médio**: Ciências da natureza, matemática e suas tecnologias. Brasília, Secretaria de Educação Básica, 2006. Disponível em http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/book_volume_02_internet.pdf. Acesso 24/11/2003.

[4] BRASIL, Ministério da Educação, Secretaria de Educação Média e Tecnológica – **Base Nacional Comum Curricular** - Brasília, 2018.

[5] CAVALCANTI, Maria da Guia Sarinho. **Matrizes: Um passeio pela história e a contemplação de algumas aplicações**. Orientadora: Kátia Suzana Medeiros Graciano. 2022. 45p. Trabalho de conclusão de curso (Graduação em Matemática) – Centro de Ciências e Tecnologias, Universidade Estadual da Paraíba, Campina Grande, 2022.

[6] COSTA, A. R. F. da; ALVES, V. S.; CORDEIRO, N. J. N. **UTILIZANDO A CONTA DE ENERGIA ELÉTRICA PARA O ENSINO DO PROCESSO DE MULTIPLICAÇÃO ENTRE MATRIZES**. Boletim Cearense de Educação e História da Matemática, v. 4, n. 12, p. 52–65, 2018. DOI: 10.30938/bocehm.v4i12.26. Disponível em: https://revistas.uece.br/index.php/BOCEHM/article/view/26. Acesso em: 25 fev. 2024

[7] EVES, Howard. **Introdução à história da matemática.** Tradução Hygino H. Domingue. 5 ed. – Campinas, SP: Editora da Unicamp, 2011.

[8] GIL, Antonio Carlos. **Métodos e técnicas de pesquisa social**. 6. ed. Editora Atlas SA, 2008.

[9] IEZZI, Gelson; HAZZAN, Samuel. **Fundamentos de matemática elementar 4:** sequências, matrizes, determinantes, sistemas. São Paulo: Atual, 8. ed, 2013.

[10] MARCELINO, Ayumi Tamaki. **Matrizes e operações através da resolução de problemas: uma sequência didática**. Orientadora: Andresa Maria Justulin. 43p.

Trabalho de conclusão de curso (Graduação em Matemática) – Universidade Tecnológica Federal do Paraná – UTFPR, Cornélio Procópio-PR, 2021.

[11] MOURA, Íris Martins de. **Contextualização de Matrizes Para o Ensino Médio**. Dissertação de Mestrado Profissional em Matemática pela Universidade Federal de Goiás, Jataí - GO, 2014.

[12] PEREIRA, Nilce Maria de Oliveira. **Uma proposta para o Ensino de Matrizes em Ambiente computacional**. Dissertação em Ensino de Ciências Exatas Matemática pela Universidade Federal de São Carlos, Sorocaba - SP, 2015.

[13] PRODANOV, Cleber Cristiano; DE FREITAS, Ernani Cesar. Metodologia do trabalho científico: métodos e técnicas da pesquisa e do trabalho acadêmico. 2ª Edição. Editora Feevale, 2013.

[14] SANCHES, M. H. F. **Efeitos de uma estratégia diferenciada do ensino dos conceitos de matrizes.** Dissertação (Mestrado) – Universidade Estadual de Campinas, Faculdade de Educação (Unicamp), Campinas, 2002.

[15] SANTIAGO, Natália Aparecida Sylvestrino Pereira. **Aplicações de Matrizes e Sistemas Lineares utilizando o Scilab e o GeoGebra**. Dissertação de Mestrado Profissional em Matemática pela Universidade Federal de Mato Grosso do Sul, Três Lagoas - MS, 2021.

[16] SILVA, Gregório Pires da. **Matrizes: da história às aplicações**. Orientadora: Kátia Suzana Medeiros Graciano. 2018. 36p. Trabalho de conclusão de curso (Graduação em Matemática) – Centro de Ciências e Tecnologias, Universidade Estadual da Paraíba, Campina Grande, 2018.

SITES CONSULTADOS

https://l1nk.dev/N4Vs3. Acesso em 19/06/2023 às 20h45min.

https://acesse.one/YzMbP. Acesso em 19/06/2023 às 20h55min.

https://infoms.saude.gov.br/extensions/covid-19_html/covid-19_html.html. Acesso em 26/06/2023 às 22h10min

https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/HistTopics/Matrices_and_determinants/. Acesso em 27/12/2023 às 01h30min.

https://ge.globo.com/futebol/brasileirao-serie-a/. Acesso em 02/02/2024 às 23h15min.

INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA DA PARAÍBA
Campus Campina Grande - Código INEP: 25137409
R. Tranqüilino Coelho Lemos, 671, Dinamérica, CEP 58432-300, Campina Grande (PB)
CNPJ: 10.783.898/0003-37 - Telefone: (83) 2102.6200

Documento Digitalizado Ostensivo (Público)

Entrega da monografia

Assunto:	Entrega da monografia
Assinado por:	Maria Cavalcanti
Tipo do Documento:	Dissertação
Situação:	Finalizado
Nível de Acesso:	Ostensivo (Público)
Tipo do Conferência:	Cópia Simples

Documento assinado eletronicamente por:

- **Maria da Guia Sarinho Cavalcanti, DISCENTE (202221280006) DE ESPECIALIZAÇÃO EM ENSINO EM MATEMÁTICA - CAMPINA GRANDE**, em 15/07/2024 23:51:30.

Este documento foi armazenado no SUAP em 15/07/2024. Para comprovar sua integridade, faça a leitura do QRCode ao lado ou acesse https://suap.ifpb.edu.br/verificar-documento-externo/ e forneça os dados abaixo:

Código Verificador: 1190674
Código de Autenticação: f7842c4e9e