INSTITUTO FEDERAL DA PARAÍBA
CAMPUS CAJAZEIRAS
CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

MARIA FERNANDA ARAGÃO DE LIMA

ENTRE CURVAS: UM ESTUDO SOBRE A CATENÁRIA, DIFERENÇAS EM RELAÇÃO À PARÁBOLA E APLICAÇÕES

CAJAZEIRAS
2024

MARIA FERNANDA ARAGÃO DE LIMA

ENTRE CURVAS: UM ESTUDO SOBRE A CATENÁRIA, DIFERENÇAS EM RELAÇÃO À PARÁBOLA E APLICAÇÕES

Monografia apresentada junto ao **Curso de Licenciatura em Matemática** do **Instituto Federal da Paraíba**, como requisito parcial à obtenção do título de **Licenciado em Matemática**.

Orientadora: Prof(a) Me. Lilia Santos Gonçalves.

Coorientadora: Prof(a) Me. Kíssia Carvalho.

CAJAZEIRAS

2024

MARIA FERNANDA ARAGÃO DE LIMA

ENTRE CURVAS: UM ESTUDO SOBRE A CATENÁRIA, DIFERENÇAS EM RELAÇÃO À PARÁBOLA E APLICAÇÕES

Monografia apresentada ao programa de **Curso de Licenciatura em Matemática** do **Instituto Federal da Paraíba**, como requisito à obtenção do título de **Licenciado em Matemática**.

Data de aprovação: 03/10/2024

Banca Examinadora:

Documento assinado digitalmente
LILIA SANTOS GONCALVES
Data: 07/10/2024 16:35:03-0300
Verifique em https://validar.iti.gov.br

Prof(a). Me. Lilia Santos Gonçalves
Orientadora - Instituto Federal da Paraíba - IFPB - Cajazeiras

Documento assinado digitalmente
KISSIA CARVALHO
Data: 09/10/2024 17:16:16-0300
Verifique em https://validar.iti.gov.br

Prof(a). Me. Kíssia Carvalho
Coorientadora - Instituto Federal da Paraíba - IFPB - Campina Grande

Documento assinado digitalmente
BARBARA KALINE DE SOUSA
Data: 07/10/2024 18:29:43-0300
Verifique em https://validar.iti.gov.br

Prof(a). Me. Barbara Kaline de Sousa
Secretaria de Estado da Educação da Paraíba - Sousa

Documento assinado digitalmente
JOSE DOVAL NUNES MARTINS
Data: 09/10/2024 15:09:34-0300
Verifique em https://validar.iti.gov.br

Prof(a). Me. José Doval Nunes Martins
Instituto Federal da Paraíba - IFPB - Cajazeiras

IFPB / Campus Cajazeiras
Coordenação de Biblioteca
Biblioteca Prof. Ribamar da Silva
Catalogação na fonte: Cícero Luciano Félix CRB-15/750

L732e Lima, Maria Fernanda Aragão de.

Entre curvas : um estudo sobre a catenária, diferenças em relação à parábola e aplicações / Maria Fernanda Aragão de Lima. – 2024.

59f. : il.

Trabalho de Conclusão de Curso (Licenciatura em Matemática) - Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia da Paraíba, Cajazeiras, 2024.

Orientador(a): Profª. Me. Lilia Santos Gonçalves.
Coorientador(a): Prof(a) Me. Kíssia Carvalho.

1. Geometria. 2. Curva catenária. 3. Parábola. 4. Aplicação matemática. I. Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia da Paraíba. II. Título.

IFPB/CZ CDU: 514(043.2)

Dedico este trabalho aos meus pais Francisco (in memorian) e Francinete e ao meu irmão Felipe, com todo amor e gratidão.

AGRADECIMENTOS

Em primeiro lugar, à Deus, pela minha vida e por ter feito com que meus objetivos fossem sendo alcançados durante todos esses anos de estudo. Também por permitir que eu tivesse saúde e determinação para ultrapassar os obstáculos encontrados e não desaminar durante a realização deste trabalho. À Santíssima Virgem Maria, por sempre me acolher e por toda a interseção.

Aos meus pais Francisco Pereira (Chico) e Francinete Aragão (Netinha) e ao meu irmão Felipe Lima, que nunca mediram esforços e nem incentivos para me encorajarem a conseguir alcaçar esse sonho, também por compreenderem a minha ausência enquanto eu me dedicava à realização deste trabalho.

À minha orientadora Lilia Santos, por todos os conselhos, ajuda e paciência. Todas às suas contribuições foram essenciais para o meu crescimento, tanto profissional, quanto pessoal. És um ser humano muito iluminado. Assim como à minha coorientadora Kissia Carvalho, que desde o princípio me incentivou e sempre esteve disponível quando eu precisei. Saiba que és muito especial para mim.

À todos os professores de matemática que eu tive durante o ensino fundamental e médio, em especial à Júnior Monteiro, meu professor do 3^o ano do ensino médio, que me impulsionou com muito entusiasmo a ir em busca desse sonho.

Aos meus professores do IFPB - Campus Cjazeiras, por terem contribuido de forma muito significativa para a minha formação profissional, em especial à Clebson Huan, Ana Paula, Liane Veloso, Geraldo Herbetet, José Doval, Barbara Kaline e Rodiney Marcelo.

Aos meus colegas de trabalho, em especial à área de Ciências da Natureza e Matemática, nas pessoas de Cleidinea Carvalho, Mariana Moreira, Érica Moreira, Felinto Antonio, Gival Pordeus, Anna Karolyna e José Welder, por terem sido extremamente compreensíveis principalmente nesta reta final de conclusão do trabalho.

À Patrícia Gonçalves, que esteve comigo até pouco mais da metade do curso. Obrigada por ter sido minha dupla em tantos trabalhos, por sempre tentar me arrancar uma risada, por sempre me ouvir e por me incentivar. Também à Raynara Santos e Felipe Mendes, por toda a ajuda que me foi dada desde que começamos a estudar juntos, em especial nessa reta final.

À Marcos Antonio, que praticamente se tornou um irmão para mim, por todos os nossos momentos juntos, não só dentro do IF, mas também fora dele. Foram muitas risadas, muitas palhaçadas, muito estresse (isso não poderia faltar), muito desespero também e, o mais importante, muito companheirismo. Saiba que, apesar de tudo, você tornava as minhas noites muito mais leves.

Enfim, à todos que participaram direta ou indiretamente do desenvolvimento deste trabalho e que contribuíram de alguma forma para a realização do mesmo.

"A matemática, vista corretamente, possui não apenas verdade, mas também suprema beleza - uma beleza fria e austera, como a da escultura."

Bertrand Russell

RESUMO

O estudo das curvas catenárias e parábolas é essencial para compreender as formas geométricas presentes em diversas aplicações práticas e teóricas. Contudo, a distinção entre essas curvas nem sempre é clara, o que gera confusão e desafios em várias disciplinas. Essa confusão surge principalmente devido às suas semelhanças visuais e ao contexto em que são frequentemente estudadas. Ambos os tipos de curvas têm uma aparência semelhante, especialmente quando vistas em pequenas escalas, e são encontradas em contextos físicos e matemáticos relacionados a forças e estruturas. No entanto, as origens matemáticas e as aplicações das mesmas são bem diferentes.Frente a essa problemática, o objetivo deste trabalho é investigar a distinção entre curvas catenárias e parábolas, explorando suas propriedades matemáticas, físicas e aplicações em diferentes contextos,a fim de fornecer uma compreensão clara e abrangente dessas formas geométricas e suas implicações. A metodologia empregada envolve uma abordagem qualitativa, combinando pesquisa bibliográfica, análise documental e estudos de caso. Os resultados destacam que é imperativo implementar estratégias eficazes para abordar e mitigar a confusão entre curvas catenárias e parábolas. Isso inclui não apenas aprimorar os métodos de ensino e pesquisa para promover uma compreensão mais profunda dessas curvas, mas também desenvolver ferramentas e recursos que auxiliem na identificação precisa e na aplicação correta em contextos práticos.

Palavras-chave: Curvas catenárias; Parábolas; Confusão.

ABSTRACT

The study of catenary curves and parabolas is essential to understand the shapes geometric elements present in various practical and theoretical applications. However, the distinction between these curves is not always clear, which creates confusion and challenges in several disciplines. This confusion arises mainly due to their visual similarities and the context in which they are frequently studied. Both types of curves have an appearance similar, especially when viewed on small scales, and are found in physical and mathematical contexts related to forces and structures. However, the origins mathematics and their applications are very different. Faced with this problem, The objective of this work is to investigate the distinction between catenary curves and parabolas, exploring its mathematical and physical properties and applications in different contexts, order to provide a clear and comprehensive understanding of these geometric shapes and their implications. The methodology employed involves a qualitative approach, combining bibliographical research, document analysis and case studies. The results highlight that it is imperative to implement effective strategies to address and mitigate confusion between curves catenaries and parables. This includes not only improving teaching and research methods to promote a deeper understanding of these curves, but also develop tools and resources that assist in the accurate identification and correct application in practical contexts.

Keywords: Catenary curves, Parables, Confusão.

LISTA DE FIGURAS

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

O estudo das curvas catenárias e parábolas remonta a séculos de investigação em Matemática, Física e Engenharia, proporcionando uma compreensão profunda das formas geométricas que permeiam nossa realidade física e teórica. No entanto, a distinção entre essas curvas nem sempre é clara, levando a uma série de desafios e consequências em várias disciplinas, desde a Engenharia até a Matemática Aplicada.

A justificativa para a análise detalhada da diferenciação entre curvas catenárias e parábolas reside na importância crítica dessas formas geométricas em uma ampla gama de aplicações práticas e teóricas. Desde o design de estruturas arquitetônicas até a modelagem de fenômenos físicos complexos, a correta identificação e compreensão dessas curvas são essenciais para garantir a segurança, eficácia e precisão em diversos contextos.

Talavera (2008) aponta que uma das causas da confusão entre a catenária e a parábola é a semelhança visual entre essas curvas em alguns contextos práticos. Ambas têm formatos “arqueados”, e isso leva muitos professores e alunos a tratá-las como se fossem a mesma coisa. No entanto, destaca que, apesar da semelhança superficial, essas curvas têm origens matemáticas e físicas completamente distintas. A parábola resulta de projeções balísticas sob a ação da gravidade em movimento uniformemente acelerado, enquanto a catenária é a curva formada por um cabo suspenso apenas pelo seu próprio peso.

O objetivo deste trabalho é investigar a distinção entre curvas catenárias e parábolas, explorando suas propriedades matemáticas, físicas e aplicações em diferentes contextos, a fim de fornecer uma compreensão clara e abrangente dessas formas geométricas e suas implicações. Para alcançar esse objetivo geral, iremos analisar as características intrínsecas das curvas catenárias e parábolas, incluindo suas equações matemáticas, propriedades físicas e históricas, além de explorar as implicações da confusão entre essas curvas em áreas como Engenharia Civil, Arquitetura, Física e Matemática Aplicada. Além de identificar e avaliar métodos matemáticos e físicos para distinguir entre curvas catenárias e parábolas, destacando sua aplicabilidade e eficácia em diferentes contextos. Propor estratégias e recomendações para mitigar a confusão entre essas curvas, no de promover uma compreensão mais clara e precisa em diversas disciplinas e aplicações práticas.

A metodologia empregada neste trabalho é baseada numa abordagem qualitativa, utilizando o método dedutivo, reunindo elementos da pesquisa bibliográfica e da análise documental, culminando em uma discussão crítica. Inicialmente, será realizada uma revisão abrangente da literatura para explorar as características matemáticas e físicas dessas curvas, bem como suas aplicações em diferentes áreas do conhecimento.

Em seguida, serão analisados casos de estudo específicos em Engenharia Civil, Arquitetura, Física e Matemática Aplicada para examinar as consequências da confusão entre essas curvas em contextos reais. Por fim, com base nas descobertas da análise teórica e prática, serão propostas recomendações e estratégias para mitigar a confusão entre essas curvas e promover uma compreensão mais clara e precisa em diversas disciplinas e aplicações práticas.

O presente trabalho está estruturado em três capítulos, cada um abordando aspectos específicos relacionados à distinção entre curvas catenárias e parábolas. No primeiro capítulo, foi realizada uma revisão bibliográfica abrangente sobre os fundamentos teóricos dessa curva, conhecida como catenária, explorando suas definições matemáticas, propriedades geométricas e aplicações em engenharia e arquitetura.

Em seguida, no segundo capítulo, foram discutidas as características geométricas e físicas das duas curvas, bem como as situações do mundo real em que a parábora aparece. Além disso, destacou-se a intrigante semelhança visual que existe entre essas duas curvas.

Finalmente, no terceiro capítulo, foram exploradas a confusão entre a catenária e a parábola, os fatores que contribuem para essa confusão e as consequências em diversos campos, incluindo engenharia civil, arquitetura, física e matemática aplicada. Além disso, foram apresentadas possíveis estratégias de ensino, a fim de que haja a identificação pecisa dessas curvas em diferentes contextos.

A análise abrangente desses três capítulos oferece uma compreensão mais clara e aprofundada das complexidades envolvidas na diferenciação entre curvas catenárias e parábolas, contribuindo para uma abordagem mais precisa e informada em diversas áreas de aplicação. Além disso, foram examinados diversos métodos de distinção entre essas curvas, destacando tanto abordagens geométricas quanto matemáticas para essa diferenciação.

1 CURVAS CATENÁRIAS

A história das curvas catenárias é um fascinante percurso que remete-se à Antiguidade, com alguns dos primeiros estudos datando a Era Clássica Grega. Desde então, uma sucessão de notáveis matemáticos e engenheiros têm contribuído para desvendar os segredos dessas formas matemáticas complexas e sua aplicação prática na engenharia. Dos pioneiros como Arquimedes (288-212 a.C.) e Galileu Galilei (1564-1642) até os mestres modernos como Euler (1707-1783), Lagrange (1736-1813), Cauchy (1789-1857), Beltrami (1835-1900) e Eiffel (1832-1923), cada um deixou sua marca na compreensão e na utilização das curvas catenárias. Suas investigações, teorias e aplicações demonstram a intrínseca ligação entre a matemática pura e a engenharia prática, destacando a importância destes conceitos ao longo dos séculos.

1.1 ORIGENS E PRIMEIROS ESTUDOS

Segundo Assis (1997), os primeiros estudos sobre as curvas catenárias surgem na Antiguidade, com destaque para a era clássica grega. Arquimedes (Figura 1.1), que estudou com os discípulos e Euclides, por um tempo, não abordou diretamente as curvas catenárias, em seu livro, “Sobre o Equilíbrio dos Planos”, mas discute os princípios fundamentais da estática e equilíbrio [1] e o conceito de centro de gravidade [2].

Figura 1.1 – Arquimedes de Siracusa

Fonte: Wikipedia (2024a)

[1] Lei da alavanca - Um princípio que diz que dois pesos se equilibram em uma alavanca quando estão em posições inversamente proporcionais às suas distâncias do ponto de apoio.

[2] Todo objeto possui um ponto específico onde o peso do objeto pode ser considerado concentrado para fins de cálculo, aplicando este conceito ao estudo de formas geométricas, como triângulos e paralelogramos, determinando o centro de gravidade de cada uma.

Arquimedes contribuiu significativamente para a estática e a mecânica, porém, a descrição matemática da catenária surgiu muito tempo depois, no século XVII, juntamente com o estudo formal dessa curva, quando o cálculo diferencial começou a ser desenvolvido. Mas, vale ressaltar que seus resultados contribuíram para o progresso posterior sobre o tema.

O estudo das curvas catenárias em si teve início com Galileu Galilei (Figura 1.2), apontado como um grande astrônomo, matemático e físico dos séculos XVI e XVII. Filho de uma família nobre, porém empobrecida de Florença, nasceu em Pisa em 1564. Aos 17 anos, seus pais o enviaram para a Universidade de Pisa para estudar medicina.

Figura 1.2 – Galileu Galilei

Fonte: Wikipedia (2024c)

Durante um serviço religioso na Catedral de Pisa, ele se distraiu observando um lustre de bronze que oscilava após ter sido deslocado. Ao marcar o tempo com as batidas de seu pulso, Galileu notou que o tempo de oscilação do lustre não dependia da amplitude do movimento. Mais tarde, ele comprovou por experimentos que o período de um pêndulo é independente do peso da massa, sendo determinado apenas pelo comprimento da haste. Esse episódio despertou em Galileu um forte interesse pela ciência e matemática, que foi reforçado por um curso de geometria na universidade. Como resultado, ele convenceu sua família a permitir que abandonasse a medicina para se dedicar a esses campos, nos quais tinha grande talento (Eves, 2008).

Galileu fez algumas considerações sobre a forma que uma corda suspensa assume, acreditando, incorretamente, que seria um arco de parábola.

> Galileu, erradamente supôs ter encontrado outra aplicação da parábola na curva de suspensão de uma corda ou corrente (catena) flexível, mas mais tarde, ainda no mesmo século, os matemáticos demonstraram que

> essa curva, a catenária, não só não é uma parábola como nem sequer é álgebra (Boyer, 2012, p. 239).

Essa busca por entender as propriedades das curvas foi uma preocupação central na Matemática da época, refletindo o espírito investigativo que também caracterizou a vida do brilhante gênio holandês Christian Huygens (1629-1695), que teve uma vida tranquila, mas extremamente produtiva. Nascido em Haia em 1629, ele estudou em Leiden sob a tutela de Frans van Schooten, o filho. Aos 22 anos, em 1651, publicou um artigo em que criticava os erros cometidos por Saint-Vicent em seu trabalho sobre a quadratura do círculo (Eves, 2008).

Figura 1.3 – Christiaan Huygens

Fonte: Wikipedia (2024b)

Além disso, ainda segundo Eves (2008), Huygens "... investigou a geometria da catenária (a curva assumida por uma corrente perfeitamente flexível e inextensível, de densidade linear uniforme, pendurada em dois ganchos não situados na mesma vertical)", conseguindo provar que a afirmação feita por Galileu era falsa, já que a curva não dizia respeito a uma parábola.

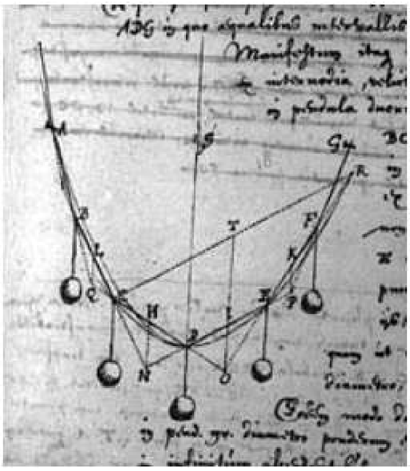
Esses pioneiros da matemática e da física desempenharam papéis cruciais na compreensão inicial das curvas catenárias, estabelecendo as bases para estudos posteriores e aplicações práticas em engenharia e física, na qual veremos um pouco mais a seguir.

1.1.1 Contribuições de matemáticos e engenheiros ao longo do tempo

O estudo das curvas catenárias ao longo da história foi marcado por contribuições significativas de diversos matemáticos e engenheiros, cada um adicionando novas perspectivas e avanços para a compreensão dessas formas fascinantes.

Conforme vimos no tópico anterior, o estudo da curva atualmente conhecida como catenária teve início com o matemático italiano, Galileu Galilei, apontado como um grande astrônomo, matemático e físico dos séculos XVI e XVII, que, erroneamente, interpretou a catenária como uma parábola. Porém, o holandês Christiaan Huygens conseguiu verificar que tal interpretação havia sido feita de forma errada. A imagem apresentada na Figura 1.4 nos mostra como Huygens observava a catenária.

Figura 1.4 – Anotações de Huygens



Fonte: Nunes (2016) *apud* Mendes (2017)

Apesar de nos mostrar um pensamento geométrico em suas anotações sobre a curva catenária, esse não foi o seu único trabalho, muito menos o único que existiu em relação a tal curva.

> "Durante toda sua vida conservou grande interesse por tudo que era matemática, mas especialmente por curvas planas de grau superior. Enquanto Galileu julgava ser uma catenária uma parábola, Huygens mostrou que ela é uma curva não algébrica. Em 1956, tinha aplicado uma análise infinitesimal às cônicas, reproduzindo a retificação da parábola à quadratura da hipérbole (isto é, a achar um logaritmo)" (Boyer, 2012, p. 262).

Após os estudos de Huygens, vieram as contribuições de Leibniz. Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716) nasceu em Leipzig e ingressou na universidade aos quinze anos, obtendo seu diploma de bacharel aos dezessete. Durante seus estudos, dedicou-se a teologia, direito, filosofia e matemática, sendo muitas vezes considerado o último sábio com conhecimento enciclopédico (Boyer, 2012).

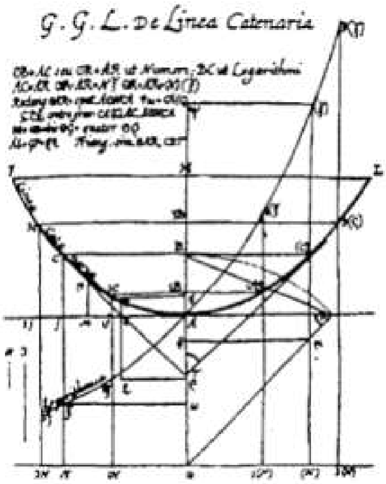
Ainda segundo Boyer (2012), Leibniz, como um influente funcionário do governo, viajou extensivamente. Em 1672, foi a Paris com o intuito de neutralizar as ambições territoriais francesas em relação à Alemanha, propondo uma "guerra santa" liderada pelo

Egito. Em Paris, conheceu Huygens, que o aconselhou a estudar os tratados de Pascal, escritos entre 1658 e 1659, caso quisesse se tornar matemático. “Foi Huygens quem o introduziu no reino da Rainha das Ciências e, algum tempo depois de começar a ensinar-lhe Matemática, propôs a Leibniz o cálculo da soma da série infinita” (Garbi, 2007).

> “Fechando nossos comentários sobre Leibniz com uma espécie de hino ao seu talento único. A matemática se compõe de dois domínios amplos e antitéticos, o contínuo e o discreto; e em toda a história da matemática o único homem a transitar nesses dois domínios com soberbo desembaraço foi Leibniz.” (Eves, 2008, p. 445).

Um exemplo do talento e da mente brilhante de Leibniz pode ser observado em seus estudos sobre a catenária (Figura 1.5), publicados em 1961. Esta é apenas uma das muitas descobertas e contribuições desse matemático, que continua a impressionar o mundo até os dias de hoje por sua genialidade.

Figura 1.5 – Anotações de Leibniz



Fonte: Maor (2008) *apud* Pires (2022)

De acordo com Boyer (2012), Leibniz ainda encontrou vários discípulos que eram dedicados e estavam ansiosos para aprender e transmitir os conhecimentos sobre o cálculo diferencial e integral. Na primeira linha estavam dois irmãos suíços, Jacques Bernoulli (1654-1705) e Jean Bernoulli (1667-1748), que, não se trata de dois irmãos matemáticos, mas de uma grande família do qual “nenhuma família na história da Matemática produziu tantos matemáticos céleres quanto a família Bernoulli”.

Jacques Bernoulli é amplamente reconhecido por suas contribuições ao cálculo, à teoria das probabilidades e ao estudo das séries infinitas. Um de seus maiores legados foi a análise da curva catenária, na qual ele demonstra que ela possui uma forma específica descrita por uma função hiperbólica. Em 1691, ele publicou suas descobertas sobre a catenária, que se tornou uma das curvas mais estudadas no campo da matemática e da física. Suas análises ajudaram a consolidar o estudo da mecânica e o desenvolvimento do cálculo (Boyer, 2012; Eves, 2008).

> "Correspondendo-se frequentemente com outros matemáticos de seu tempo, Jacques Bernoulli estava a par dos problemas populares, muitos dos quais ele resolveu independentemente. Entre esses estava os de achar as equações da catenária da tratiz e da isócrona, todos os problemas tratados por Huygens e Leibniz" (Boyer, 2012, p. 292).

Jean Bernoulli, também conhecido como Johann Bernoulli, era o irmão mais novo de Jacques Bernoulli. Ele destacou-se por seus trabalhos no desenvolvimento do cálculo diferencial e integral e por suas contribuições à física e à matemática aplicada. Em relação à curva catenária, Jean desempenhou um papel importante ao aprofundar os estudos iniciados por seu irmão Jacques. Ele contribuiu para a caracterização matemática dessa curva, demonstrando também que sua equação é uma função hiperbólica e não uma parábola, como se acreditava inicialmente, antes dos estudos de Huygens. Suas contribuições ajudaram a resolver problemas práticos de engenharia e arquitetura, já que a catenária descreve a forma ideal para pontes suspensas e arcos de sustentação. Sua colaboração com Jacques foi crucial para o entendimento completo dessa curva no final do século XVII (Boyer, 2012; Eves 2008).

Finalmente, a equação hiperbólica que descreve a curva catenária foi formulada em 1757 pelo matemático italiano Vincenzo Riccati (1707–1775), um jesuíta que lecionava Matemática e se dedicou ao desenvolvimento de equações diferenciais, séries infinitas, quadraturas e funções hiperbólicas (Eves, 2008).

Sengundo Mendes (2017), ao analisar essa trajetória histórica, percebe-se o caminho entre a observação inicial da catenária feita por Galileu em 1646 e a obtenção de sua expressão algébrica por Riccati em 1757. Esse intervalo de 111 anos foi marcado por descobertas, desafios, debates e colaborações entre grandes matemáticos, refletindo as significativas contribuições da catenária para a história da Matemática .

Leonhard Euler, renomado matemático do século XVIII, desempenhou um papel crucial na formalização da teoria das curvas catenárias e foi o responsável por fornecer uma formulação mais geral e precisa para a equação diferencial que descreve essa curva. Especificamente, ele explorou a catenária e suas propriedades no livro "*Methodus Inveniendi Lineas Curvas Maximi Minimive Proprietate Gaudentes*" (Método para Encontrar Curvas que Gozam de Propriedades de Máximos ou Mínimos), publicado em 1744.[3]

Esse livro é considerado um marco no desenvolvimento do cálculo variacional [4], nele Euler resolve problemas envolvendo curvas que otimizam certas propriedades, como a minimização de energia potencial. Ele ainda traz a catenária como uma dessas curvas de

[3] Isso pode ser encontrado no trabalho de Euler (1744).
[4] Problema matemático que consiste em buscar máximos e mínimos

otimização, sendo a solução do problema de um fio suspenso sob seu próprio peso. Ele também discute a catenária em outros textos sobre mecânica e cálculo, mas o "*Methodus Inveniendi*" é o trabalho em que ele aplica sistematicamente seus métodos variacionais ao estudo dessa curva e outras que surgem de problemas físicos.

De acordo com Hankins (1985), Joseph-Louis Lagrange fez importantes contribuições para o estudo das catenárias, particularmente no desenvolvimento de métodos matemáticos que se aplicam a problemas de otimização e mecânica, aprofundando o uso de métodos variacionais para analisar a catenária. Ele utilizou o cálculo variacional para estudar como diferentes curvas podem ser otimizadas, o que inclui a curva catenária como um exemplo de solução que minimiza a energia potencial.

Embora Euler já tivesse descrito a forma da catenária, Lagrange contribuiu para a compreensão de sua equação diferencial e suas propriedades por meio de métodos mais gerais e refinados do cálculo variacional. Também examinou a catenária em contextos de engenharia e mecânica, contribuindo para a análise de estruturas e otimização de formas, um campo que inclui o estudo de arcos e suportes suspensos.

Lagrange abordou esses temas em seu trabalho "*Mécanique Analytique*" (Mecânica Analítica), publicado em 1788. Nesse livro, é apresentado uma abordagem sistemática para a mecânica e o cálculo variacional, que inclui a análise de curvas como a catenária em um contexto mais amplo de otimização e problemas físicos. Essa obra é um marco na matemática e na física, proporcionando uma abordagem profunda e geral ao cálculo variacional e suas aplicações em diferentes problemas, incluindo a catenária[5].

Augustin-Louis Cauchy fez importantes contribuições ao estudo das catenárias, particularmente na formalização e generalização dos conceitos relacionados a essas curvas. Ele forneceu uma análise mais rigorosa das propriedades das catenárias, utilizando suas abordagens metódicas e precisas para explorar questões de cálculo e análise matemática que envolvem essas curvas. Ajudou a formalizar a teoria das catenárias dentro do contexto mais amplo da análise matemática e do cálculo diferencial (Grattan-Guinness, 2000).

Em seus estudos, Cauchy aplicou métodos avançados de análise para explorar as soluções das equações diferenciais que descrevem a catenária, incluindo o uso de integrais e séries. Ele refinou a compreensão de como essas soluções se comportam e como podem ser aplicadas a problemas físicos e geométricos.

A principal obra de Cauchy em que ele aborda aspectos relacionados à catenária é: " *Cours d'Analyse de l'École Royale Polytechnique*" (Curso de Análise na *École Royale Polytechnique*), publicado em Paris no ano de 1821. Neste livro, Cauchy desenvolve teorias fundamentais de análise matemática e cálculo, que incluem discussões sobre curvas e superfícies, como a catenária, e aplica seus métodos para resolver problemas complexos relacionados a elas. Cauchy também discutiu temas relacionados à catenária em outros

[5] Essas informações podem ser encontradas em Lagrange (1788).

textos e artigos, contribuindo significativamente para o avanço da teoria matemática e das suas aplicações práticas.

Eugenio Beltrami, matemático italiano, trouxe uma nova perspectiva para o estudo das curvas catenárias por meio de suas investigações em geometria diferencial e geometria não euclidiana. Com suas contribuições, trouxe novas possibilidades para o estudo dessas curvas em contextos geométricos mais amplos, como por exemplo a aplicação da catenária em superfícies mínimas. Ele concluiu que a aplicação de métodos de geometria diferencial permitiu uma análise mais profunda das curvas catenárias em espaços curvos, ampliando significativamente o alcance de sua aplicação em geometria e física[6].

Gustave Eiffel, conhecido principalmente por sua famosa torre em Paris, também fez contribuições importantes ao estudo das catenárias, especialmente em relação à engenharia estrutural. Ele aplicou o conceito de catenária ao design de estruturas metálicas, como pontes e torres e reconheceu que a forma catenária, com suas propriedades de otimização de cargas, poderia ser útil para a construção de arcos e outros elementos estruturais que precisam suportar cargas de maneira eficiente[7].

No design de pontes e arcos, ele usou a forma da catenária para calcular a distribuição de forças e a estabilidade das estruturas. Sua compreensão da catenária ajudou a melhorar a eficiência e a segurança de suas construções. Também publicou vários artigos e estudos sobre engenharia estrutural, mas suas discussões sobre a catenária podem ser encontradas em suas obras sobre a teoria das estruturas e a mecânica dos materiais.

Dessa forma, as contribuições de todos esses matemáticos/físicos/engenheiros para o estudo e aplicação das curvas catenárias refletem a importância dessas formas Matemáticas na História da Matemática e da Engenharia, destacando a interdisciplinaridade e a relevância desses conceitos ao longo do tempo.

1.2 EQUAÇÃO DA CATENÁRIA

Na seção anterior, vimos a origem e os primeiros estudos com relação à curva catenária, assim como algumas contribuições de matemáticos e engenheiros ao longo do tempo. Nesta seção, introduziremos a modelagem dessas curvas e, em seguida, traremos a derivação de sua equação, bem como a solução diferencial.

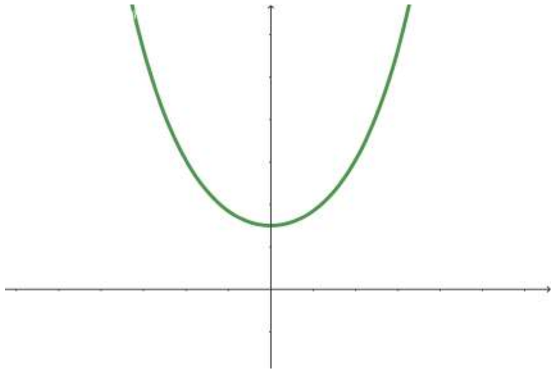
1.2.1 Introdução às curvas catenárias

A introdução às curvas catenárias mergulha em um fascinante universo matemático e físico, revelando uma trajetória marcada pela beleza e pela utilidade prática. Originando-se do latim "*catena*", que significa "corrente", essas curvas surgem da imagem de um

[6] Isso ser encontrado em Beltrami (1868).
[7] Informações apresentadas no trabalho de Eiffel (1897).

fio flexível suspenso por suas extremidades sob a influência da gravidade, adotando uma forma única e elegante. A Figura 1.6 exibe a curva catenária.

Figura 1.6 – A curva catenária



Fonte: Elaborado pela autora, 2024

As curvas catenárias têm ocupado um lugar de destaque em diversas disciplinas, desde a arquitetura até a física teórica, revelando propriedades intrigantes e aplicabilidades práticas impressionantes.

Ao investigar a derivação da equação que descreve a catenária, nos deparamos com a interseção entre matemática e física, onde se revelam os princípios básicos que definem essa curva singular. A análise do problema envolve a consideração das forças de tensão em um fio suspenso, além de sua relação com a densidade linear do material e a aceleração gravitacional. Ao buscarmos a minimização da energia potencial, começamos a apreciar a beleza matemática que se esconde na forma da catenária, a qual surge como solução de uma equação diferencial essencial.

Ao resolver essa equação, obtemos a expressão da catenária, manifestando-se como uma função do cosseno hiperbólico, com um único parâmetro que a caracteriza. Assim, ao nos aprofundarmos no estudo das curvas catenárias, não apenas somos presenteados com a elegância matemática e a complexidade física desse fenômeno, mas também adquirimos uma compreensão mais ampla das leis fundamentais que governam nosso universo.

1.2.2 Derivação

A curva catenária é uma das formas mais fundamentais na natureza e na matemática. Ela é a forma que um fio flexível e homogêneo assume quando suspenso por suas extremidades sob a influência da gravidade. A equação que descreve essa curva é derivada das leis fundamentais da física. Nesta seção apresentaremos a derivação conforme Pires (2022).

Antes de abordarmos a dedução em si, se faz necessário sabermos alguns conceitos:

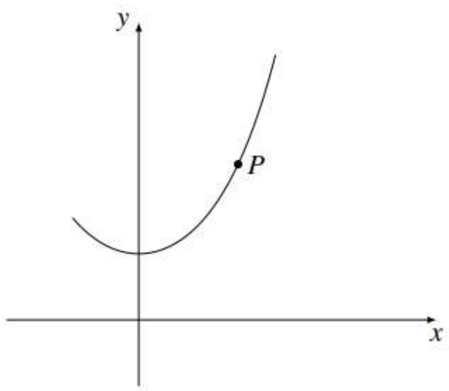
- Tensão: a força exercida pela corda.

- Densidade linear: a relação da massa por comprimento.

- A primeira lei de Newton: segundo Mckelvey e Grotch (1979) *apud* (Pires, 2022), quando um objeto está em equilíbrio estático, a soma da força resultante é nula, não havendo nem aceleração, nem velocidade.

Como a catenária é uma curva plana, deve-se considerar que o eixo y intercepta a curva no ponto mínimo e que $P(x, y)$ seja um ponto qualquer da curva, como apresentado na imagem da Figura 1.7. Este sistema de coordenadas se encontra em equilíbrio, pois não há força externa, logo a força resultante de toda tensão exercida no cabo é nula. Como não ocorrem forças internas na curva, ou seja, é flexível, não encontra-se resistência para curvar-se na direção da tangente à curva.

Figura 1.7 – Curva Catenária



Fonte: Pires (2022)

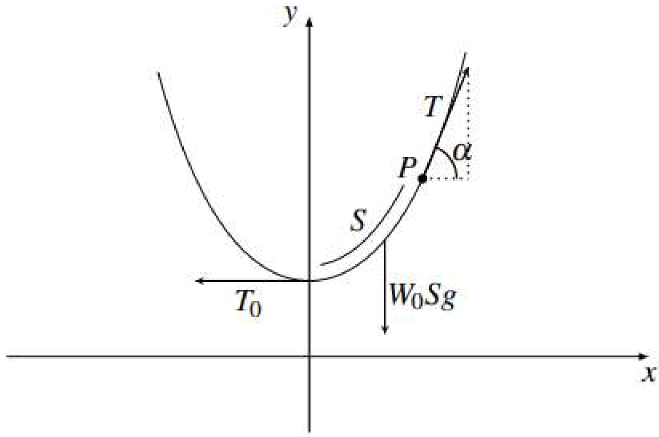
A equação da catenária será modelada por meio de sua forma como equação diferencial. Partindo do ponto mínimo da curva até o ponto, $P(x, y)$, existem três forças, que denotaremos da seguinte maneira (veja a imagem apresentada na Figura 1.8):

- T_0 é a tensão do arco no ponto mínimo, que age horizontalmente, da direita para a esquerda;

- W_0Sg, é o peso do arco entre estes pontos, que atua paralelamente ao eixo y, mas no sentido contrário, sendo W_0 a densidade linear, S é o comprimento de tal arco e g a gravidade;

- T é a tensão que age na direção da tangente em P e forma um ângulo α com o eixo x.

Figura 1.8 – Curva Catenária



Fonte: Pires (2022)

Pelo fato do sistema está em equilíbrio estático tem-se que:

$$\overrightarrow{T} + \overrightarrow{W_0Sg} + \overrightarrow{T_0} = 0 \tag{1}$$

Ao decompor a equação de equilíbrio (1) obtém-se:

$$Tsen(\alpha) = W_0Sg \tag{2}$$

$$Tcos(\alpha) = T_0 \tag{3}$$

Dividindo a equação 2 pela equação 3 temos:

$$\tan(\alpha) = \frac{W_0Sg}{T_0}. \tag{4}$$

Como T age na direção da tangente, tem-se que $\tan(\alpha) = \dfrac{dy}{dx}$ (coeficiente angular da reta tangente a curva no ponto P).

Além disto, considerando que $\dfrac{W_0g}{T_0}$ é uma constante (constante de especificidade do cabo), a equação (4) pode ser reescrita como:

$$\frac{dy}{dx} = aS, \; onde \; a = \frac{W_0g}{T_0}. \tag{5}$$

Sabe-se que o comprimento de uma curva [8], gráfico da função real $y = f(t)$, é dado por:

[8] A demosntração dessa fórmula encontra-se em (Stewart, 2015a).

$$S = \int_b^x \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\, dt. \tag{6}$$

Assim, substituindo (6), em (5), temos:

$$\frac{dy}{dx} = a \cdot \left(\int_b^x \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\, dt \right). \tag{7}$$

Derivando ambos os lados da equação (7) em relação a x, temos:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = a \cdot \left(\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} \right). \tag{8}$$

A equação (8) é a equação diferencial não linear de 2^a ordem da catenária.

Para buscar sua solução, precisamos considerar o modelo e observar suas condições iniciais associadas, transformando-a em um Problema de Valor Inicial (PVI) (Boyce; Richard, 1979):

1. $y(0) = \dfrac{1}{a}$. Coloca-se a origem do sistema de coordenadas, de modo que quando $x = 0$, então $y = \dfrac{1}{a}$.
2. $y'(0) = 0$. Em $x = 0$ tem-se ponto de mínimo, logo a derivada neste ponto é nula.

Assim, tem-se o problema de valor inicial (PVI):

$$\frac{d^2y}{dx^2} = a \cdot \left(\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} \right), \quad y(0) = \frac{1}{a}, \quad y'(0) = 0. \tag{9}$$

1.2.3 Solução diferencial

Nesta subseção vamos determinar a função cujo gráfico é a catenária. Tal função é chamada "equação da catenária". Para determiná-la, vamos calcular a solução do PVI (9) dado na Subseção 1.2.2.

Para determinar a solução da equação diferencial, dada no PVI (9), faremos uma mudança de variável, utilizando o seguinte artifício:

$$p = \frac{dy}{dx}. \tag{10}$$

Portanto:

$$\frac{dp}{dx} = \frac{d^2y}{dx^2}.$$

Substituindo na equação diferencial dada no PVI (9), temos:

$$\frac{dp}{dx} = a.\sqrt{1+p^2}.$$

Dessa forma obtém-se uma equação diferencial de 1^a ordem de variáveis separáveis (Boyce; Richard, 1979), que pode ser resolvida integrando ambos os lados:

$$\int \frac{dp}{\sqrt{1+p^2}} = \int a\,dx. \tag{11}$$

Resolvendo a integral do primeiro membro da equação (11), utilizando a técnica da substituição trigonométrica (Stewart, 2015a), temos:

$$p = \tan(\alpha),\ \text{com} \quad -\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{\pi}{2}$$
$$dp = sec^2(\alpha)d\alpha.$$
$$\sqrt{1+p^2} = sec(\alpha).$$

Substituindo, temos:

$$\int \frac{dp}{\sqrt{1+p^2}} = \int \frac{sec^2(\alpha)}{sec(\alpha)}d\alpha$$

$$\int \frac{dp}{\sqrt{1+p^2}} = \int sec(\alpha)d\alpha$$

$$\int \frac{dp}{\sqrt{1+p^2}} = ln\Big(sec(\alpha)+\tan(\alpha)\Big)+k_1$$

$$\int \frac{dp}{\sqrt{1+p^2}} = ln\Big(\sqrt{1+p^2}+p\Big)+k_1. \tag{12}$$

Para a integral do segundo membro da equação (11), temos:

$$\int a\,dx = ax + k_2. \tag{13}$$

Substituindo as equações (12) e (13) na equação (11), e definindo $k_2 - k_1 = c_1$:

$$ln\Big(\sqrt{1+p^2}+p\Big) = ax + c_1. \tag{14}$$

.

Para determinar o valor de c_1 note que, considerando a condição inicial $y'(0) = 0$, dada no PVI (9), e o artifício (10), temos:

$$p(0) = \left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=0}$$

$$p(0) = 0.$$

Assim, considerando $x = 0$ na equação (14) tem-se:

$$ln(1) = c_1 \quad \rightarrow \quad c_1 = 0.$$

Portanto:

$$ln(\sqrt{1+p^2}+p) = ax.$$

Isolando p:

$$(\sqrt{1+p^2}+p) = e^{ax}$$

$$\left(\sqrt{1+p^2}\right)^2 = (e^{ax}-p)^2$$

$$1+p^2 = e^{2ax} - 2pe^{ax} + p^2$$

$$1 = e^{2ax} - 2pe^{ax}$$

$$1 - e^{2ax} = -2pe^{ax}$$

$$p = \frac{1-e^{2ax}}{-2e^{ax}}$$

$$p = \frac{-e^{2ax}}{-2e^{ax}} - \frac{1}{2e^{ax}}$$

$$p = \frac{e^{ax}}{2} - \frac{1}{2e^{ax}}$$

$$p = \frac{e^{ax}-e^{-ax}}{2}. \tag{15}$$

Como $p = \dfrac{dy}{dx}$, segue-se que

$$\frac{dy}{dx} = \frac{e^{ax} - e^{-ax}}{2}.$$

Em seguida, integrando ambos os lados em relação a x, temos:

$$\int \frac{dy}{dx} dx = \int \frac{e^{ax} - e^{-ax}}{2} dx$$

$$y = \frac{1}{2}\left(\int e^{ax} dx - \int e^{-ax} dx\right)$$

$$y = \frac{1}{2}\left(\frac{e^{ax}}{a} + \frac{e^{-ax}}{a}\right) + c_2$$

$$y = \frac{1}{2}\left(\frac{e^{ax} + e^{-ax}}{a}\right) + c_2$$

$$y = \frac{e^{ax} + e^{-ax}}{2a} + c_2.$$

Considerando a condição inicial $y(0) = \frac{1}{a}$, dada no PVI (9), tem-se:

$$c_2 = 0.$$

Portanto, a solução do PVI (9), é:

$$y = \frac{e^{ax} + e^{-ax}}{2a}. \tag{16}$$

A equação (16) é a **Equação da Catenária**.

Como a definição de $\cosh(\theta) = \frac{e^{\theta} + e^{-\theta}}{2}$, a equação (16) também pode ser escrita como:

$$y = \frac{\cosh(ax)}{a}. \tag{17}$$

1.3 PROPRIEDADES DAS CURVAS CATENÁRIAS

Em sua tese, John Allen Ochsendorf (Ochsendorf, 2002) mostra que as curvas catenárias possuem uma série de propriedades matemáticas e físicas. Aqui citamos algumas destas propriedades:

Propriedade da tensão: Uma das características mais distintivas das curvas catenárias é a maneira como a tensão no fio se alinha perfeitamente com a reta tangente à curva em qualquer ponto. Essencialmente, isso significa que a força exercida pelo fio está sempre direcionada ao longo da própria curva, em vez de ser perpendicular a ela. Esta peculiaridade é de suma importância para a estabilidade de estruturas suspensas, como pontes suspensas e cabos de energia.

Propriedade da forma invariante: A invariância sob escala: Em outras palavras, se você ampliar ou reduzir uma curva catenária, a forma resultante continua sendo uma curva catenária. Este fenômeno, conhecido como auto-similaridade, é uma característica comum em muitas formas encontradas na natureza. Esta propriedade confere às curvas catenárias implicações práticas em diversas áreas, desde a engenharia até a física fundamental.

Curva de equilíbrio mínimo: A curva catenária é conhecida como a forma de equilíbrio mais estável para um cabo flexível e uniforme sob a ação da gravidade. Em outras palavras, entre todas as possíveis formas que o cabo poderia adotar, a catenária é aquela que reduz ao máximo a energia potencial do sistema. Essa propriedade é essencial para entender porque as catenárias são amplamente usadas em estruturas suspensas. Sua habilidade de distribuir a carga de forma eficiente, reduzindo a tensão nos materiais, faz com que sejam uma opção ideal para diversas aplicações estruturais.

1.4 APLICAÇÕES

A beleza matemática da curva catenária é incomparável, e suas propriedades intrigantes a tornam relevante em diversas práticas, desempenhando um papel significativo tanto na engenharia civil e arquitetura quanto na física teórica.

Em estruturas suspensas como pontes e arcos, a forma catenária é preferida devido à sua eficiência na distribuição de carga, sendo a mais adequada para suportar a influência da gravidade. Esta forma é especialmente crucial em pontes suspensas, onde os cabos assumem a forma catenária para maximizar a capacidade de suporte, diminuindo a tensão nos pontos de ancoragem em direção ao centro da ponte. Além disso, na arquitetura de edifícios históricos, arcos em forma de catenária são valorizados por sua resistência superior em comparação com outras formas, sendo comuns em estruturas como catedrais e arquedutos.

Na física teórica, as curvas catenárias aparecem em diversas áreas. Na teoria das cordas[9], por exemplo, as cordas são modeladas como curvas catenárias, surgindo naturalmente ao se considerar a energia mínima de uma corda vibrante em um espaço-tempo curvo.

Além disso, na teoria da relatividade geral[10] de Einstein, a equação da catenária

[9] A teoria das cordas é uma tentativa de unificar a teoria da relatividade e a mecânica quântica. Ela afirma que todas as partículas do Universo são formadas por cordas.

[10] Generalização da Teoria da Relatividade Restrita, também da autoria de Einstein.

descreve a trajetória de um objeto em queda livre sob a influência de um campo gravitacional, sendo relevante para a compreensão de fenômenos como buracos negros, onde a curvatura do espaço-tempo é extrema. [11]

Essa curva também desperta interesse em outras áreas, como na economia, onde é aplicada na análise de estruturas de custos e otimização de processos logísticos. Em suma, a curva catenária não apenas encanta pela sua elegância matemática, mas também pela sua versatilidade e utilidade prática em uma variedade de campos do conhecimento humano.

A seguir, temos alguns exemplos de aplicações das curvas catenárias na engenharia e na arquitetura, de acordo com (Rocha et al., 2023):

- O primeiro exemplo refere-se a um imponente edifício em Barcelona, conhecido como Casa Mila, uma notável criação do arquiteto espanhol Antoni Gaudí (1852-1926). Essa obra fascinante e cativante destaca-se pelos seus belíssimos arcos construídos no formato de uma catenária (ver Figura 1.9).

Figura 1.9 – Casa Mila

Fonte: Quatro cantos do mundo (2015) *apud* Rocha et al. (2023)

- Outro exemplo a ser destacado é a Gaudí Chair, uma cadeira criada pelo designer Bram Geenen em 2010. Conforme observa Roberto (2016), a peça é fabricada com fibras de carbono, náilon e vidro, utilizando tecnologia de jato a laser para unir os materiais. O autor também ressalta que a teoria da catenária é aplicada na construção do "esqueleto" da cadeira, e o nome da obra foi escolhido como uma homenagem

[11] Abordagens como essa, podem ser encontradas na obra de Novello (2012).

ao arquiteto Antoni Gaudí, que explorou amplamente o uso da catenária em suas criações (ver Figura 1.10).

Figura 1.10 – Gaudí Chair, cadeira projetada por Bram Geenen

Fonte: Bram Geenen *apud* Rocha et al. (2023)

- Em nosso terceiro exemplo, vamos destacar o fato de a catenária estar presente em pontes, principalmente nas pontes pênseis. De acordo com Talavera (2008), essa ponte pode ser caracterizada como uma estrutura de concreto que conecta duas margens, com cabos tensionados dispostos em arcos invertidos. No Brasil, conforme mencionado por Talavera (2008), a ponte pênsil mais antiga é a Ponte Pênsil de São Vicente, elaborada pelo engenheiro Francisco Saturnino Rodrigues de Brito (1864-1929). Construída em 1914, essa estrutura está localizada na cidade de São Vicente, em São Paulo, e foi projetada para melhorar o sistema de saneamento básico da cidade (ver Figura 1.11).

Figura 1.11 – Ponte Pênsil de São Vicente

Fonte: BNDES *apud* Rocha et al. (2023)

- Por último, outro arquiteto renomado que se destaca pelo uso da catenária em seus projetos é Eero Saarinen (1910-1961), natural da Finlândia e filho do arquiteto Eliel Saarinen. Sua obra, o Arco do Portal, conhecido como Gateway Arch, é uma das obras mais icônicas projetadas por ele e um marco significativo da arquitetura moderna. Localizado em St. Louis, Missouri, nos Estados Unidos, o arco foi concluído em 1965 e se tornou o ponto central do *Jefferson National Expansion Memorial*, um monumento em homenagem à expansão para o oeste dos Estados Unidos. Além de seu valor arquitetônico, o Arco do Portal é um dos principais destinos turísticos dos Estados Unidos, com um elevador interno que permite aos visitantes chegar ao topo e ter uma vista panorâmica da cidade e do Rio Mississippi (ver Figura 1.12).

Figura 1.12 – Arco do Portal

Fonte: Lemare Moveis (2022) *apud* Rocha et al. (2023)

2 A PARÁBOLA E A CATENÁRIA: CARACTERÍSTICAS FÍSICAS E GEOMÉTRICAS

O presente capítulo propõ a explorar as diferenças e semelhanças entre a parábola e a catenária, duas curvas que, apesar de suas origens distintas, compartilham características intrigantes e possuem aplicações importantes em diferentes campos do conhecimento. Por meio de uma análise comparativa detalhada, pretendemos elucidar as propriedades matemáticas e físicas dessas curvas, destacando suas implicações teóricas e práticas.

Desde os primórdios da ciência matemática e da engenharia, a parábola tem sido objeto de fascínio e estudo. Sua elegância geométrica e a presença marcante de fenômenos naturais e construções humanas conferem-lhe um papel central na história do conhecimento humano. Aristóteles, em sua obra "Física", já contemplava a trajetória das estrelas e dos planetas como movimentos parabólicos, lançando as bases para a compreensão moderna dos movimentos curvilíneos.

Por outro lado, a catenária, embora menos conhecida pelo público geral, desempenha um papel fundamental na engenharia civil e na física aplicada. Sua forma natural, resultante do equilíbrio entre tensão e peso, a torna ideal para a construção de estruturas suspensas, como pontes e cabos de sustentação. A trajetória de uma corrente suspensa, como a de um fio elétrico ou uma corrente de aço, é descrita com precisão por uma catenária, e seu estudo remonta a séculos de desenvolvimento científico e tecnológico.

Ao compreender as peculiaridades de cada uma dessas curvas e suas aplicações específicas, esperamos auxiliar na compreensão destas curvas.

2.1 DEFINIÇÃO E CARACTERÍSTICAS DA PARÁBOLA

Antes de partirmos para a definição e caracterização da parábola em si, apresentaremos um pouco da sua trajetória histórica, destacando quais matemáticos que estudaram sobre o assunto e suas respectivas contribuições.

2.1.1 Cronologia da parábola

A parábola é uma curva cônica que desempenha um papel significativo em várias áreas da matemática e das ciências aplicadas. Geometricamente, é definida como o conjunto de todos os pontos em um plano que estão equidistantes de um único ponto fixo (foco) e de uma reta fixa (diretriz). Essa definição geométrica permite uma compreensão intuitiva da forma da parábola, que é uma curva suave e simétrica em relação a um eixo. Sua forma característica de "U" é observada em muitos fenômenos naturais e construções humanas, tornando-a uma das curvas mais reconhecidas e estudadas na matemática.

Diversos autores abordam o estudo das cônicas e sua importância histórica e científica. As obras de Boyer (2012) e Eves (2008) são fundamentais para compreender a evolução do estudo das cônicas desde a antiguidade até a era moderna. Boyer apresenta uma conexão entre as cônicas e os fenômenos naturais, destacando contribuições de Galileu, Kepler e Newton, enquanto Eves explora o papel de matemáticos antigos como Euclides e Apolônio de Perga. Com base nessas leituras, passaremos agora a fazer um apanhado das informações extraídas, destacando as principais contribuições desses matemáticos e cientistas ao longo da história e a relevância de suas descobertas para a matemática e as ciências naturais.

De acordo com Euclides (325-265 a.C.), em sua obra “Os Elementos”, a parábola era estudada principalmente em seu contexto geométrico. Ele descreve a parábola como uma das curvas formadas pela interseção de um plano com um cone reto e discutiu algumas propriedades geométricas dela, principalmente no contexto da geometria. Essa abordagem geométrica permitiu a Euclides estabelecer as propriedades básicas da parábola e sua relação com outras formas geométricas, lançando as bases para o estudo posterior dessa curva por matemáticos como Apolônio de Perga.

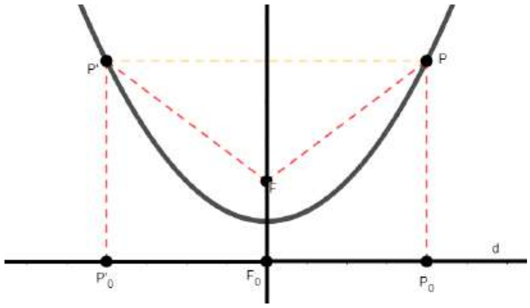
Apolônio de Perga (262-194 a.C.), em sua obra “Cônicas”, desempenhou um papel crucial na sistematização do estudo das curvas cônicas incluindo a parábola. Ele desenvolveu métodos de construção da curva e explorou suas propriedades matemáticas fundamentais, contribuindo significativamente para a compreensão da parábola e seu papel na matemática e na ciência.

Por volta de 350 a.C., Menaecmus foi o pioneiro no estudo das seções cônicas, ao realizar cortes em cones usando planos perpendiculares à sua linha geratriz. Mais tarde, por volta de 225 a.C., Apolônio de Perga aprofundou essa investigação, analisando as curvas das seções cônicas a partir de superfícies cônicas duplas e linhas retas – uma abordagem que permanece relevante até os dias de hoje. Embora essas curvas fossem conhecidas desde a antiguidade, foi apenas no século XVII que seu estudo adquiriu grande destaque, principalmente devido às contribuições de Gérard Desargues (1593-1661), Blaise Pascal (1623-1662), Johannes Kepler (1571-1630) e Galileu Galilei (1564-1642) (Boyer, 2012; Eves, 2008).

Os primeiros estudos sobre as cônicas foram conduzidos por Galileu (1564-1642), que identificou que a trajetória das balas de canhão descreve uma parábola. Kepler (1571-1630) e Newton (1643-1727) também contribuíram significativamente, mostrando que as órbitas dos planetas seguem a forma de uma elipse. As teorias de Galileu foram posteriormente confirmadas por Newton por meio de sua Lei da Gravitação Universal. Como mencionado por Boyer (2012), essas descobertas estabeleceram uma conexão entre as cônicas e diversos fenômenos naturais, como as órbitas dos planetas e cometas no sistema solar, expandindo o campo de estudo das cônicas para além da Matemática tornando-as essenciais em áreas como Astronomia e Física.

Em relação à parábola, Lima (2014) a descreve como sendo formada por uma reta d e um ponto F que está localizado fora dessa reta. No plano determinado por d e F, a parábola é composta pelo conjunto de todos os pontos que possuem a mesma distância tanto de d quanto de F. Essa definição pode ser visualizada na Figura 2.1

Figura 2.1 – A parábola, segundo Lima (2014)



Fonte: Elaborado pela autora, 2024

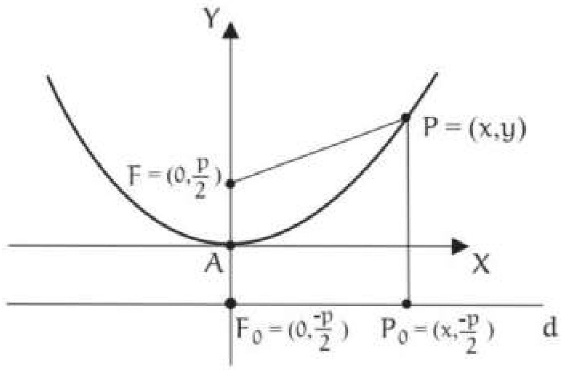
Lima (2014) esclarece que o ponto P pertence à parábola com foco F e diretriz d, porque a distância de P a F é igual à distância entre P e P_0. Em outras palavras, a $d(P,F) = d(P,P_0)$, com o segmento $\overline{PP_0}$ perpendicular à diretriz d e a perpendicular $\overline{FF_0}$ baixada do foco sobre a diretriz configura-se em um eixo de simetria. Os componentes fundamentais de uma parábola incluem o foco (F), a diretriz (d), o vértice (V), o parâmetro (p), que representa distância do foco à diretriz, e a reta que é seu eixo de simetria.

Além da definição geométrica, as parábolas são frequentemente estudadas em um contexto algébrico. A representação algébrica padrão de uma parábola no plano cartesiano é dada pela equação $y = ax^2 + bx + c$, onde a, b e c são constantes e $a \neq 0$. Essa equação expressa a relação entre as coordenadas x e y dos pontos na curva, permitindo análises detalhadas de suas propriedades matemáticas. A seguir, faremos a dedução da equação geral que descreve a representação algébrica da parábola.

2.1.2 Dedução da equação da parábola

Conforme vimos anteriormente, uma parábola é o conjunto de todos os pontos que equidistam de um ponto (foco) e um reta (diretriz). Frente a isso, traremos a dedução da equação de uma parábola com foco F e reta diretriz d, com $p > 0$ sendo a distância entre o foco e a diretriz, segundo Lima (2014) a partir do esquema a seguir (Figura 2.2).

Figura 2.2 – Dedução da equação da parábola



Fonte: Lima (2014)

Na dedução feita por Lima (2014), inicialmente toma-se um sistema de eixos em que o vértice da parábola é a origem do sistema e o eixo vertical é a reta FF_0, eixo de simetria da parábola. Observe que o ponto F tem coordenadas $F = \left(0, \frac{p}{2}\right)$ e a equação da diretriz d é $y = -\frac{p}{2}$. Se o ponto $P = (x,y)$ é um ponto pertencente à parábola, então teremos que $y \geq 0$. Sendo o eixo vertical (eixo y) o eixo de simetria e como o ponto P pertence à parábola, então $P' = (x,y)$ também vai pertencer.

Desse modo, sendo o ponto $P = (x,y)$ um ponto genérico da parábola, temos que a distância de P à diretriz d é igual a $y + \frac{p}{2}$, enquanto que a distácia de P ao foco F da parábola é igual a $\sqrt{x^2 + \left(y - \frac{p}{2}\right)^2}$. Com isso, essas duas distâncias se igualam, pela definição, já que P pertence à parábola. Então temos que:

$$y + \frac{p}{2} = \sqrt{x^2 + \left(y - \frac{p}{2}\right)^2}.$$

Elevando ambos os membros da igualdade ao quadrado, temos:

$$\left(y + \frac{p}{2}\right)^2 = x^2 + \left(y - \frac{p}{2}\right)^2.$$

Desenvolvendo a expressão, vem:

$$y^2 + py + \frac{p^2}{4} = x^2 + y^2 - py + \frac{p^2}{4}.$$

Reduzindo os termos semelhantes, obtemos a equação canônica da parábola com vértice na origem e eixo de simetria sendo FF_0, que é:

$$x^2 = 2py \;\text{ ou }\, y = \frac{x^2}{2p}. \tag{18}$$

Observe que as equações apresentadas em (18) estão considerando o vértice no ponto $(0,0)$, e o eixo de simetria paralelo ao eixo x. Em seu trabalho (Sousa, 2019), apresenta a dedução das equações da parábola, tanto para equações cartesianas com vértices em $(x,y) \neq (0,0)$, e eixo de simetria paralelo a y, ainda apresenta as equações polares e paramétricas da parábola.

Também podemos representar a parábola como o gráfico de uma função quadrática, com a equação explícita $y = ax^2 + bx + c$, com $a \neq 0$, ou escrita em função das coordenadas de seu vértice, trazendo-a por meio da expressão $f(x) = a \cdot (x-h)^2 + k$, com $a \neq 0$.

2.1.3 Propriedades matemáticas fundamentais

As propriedades únicas da parábola, como o foco e a diretriz, desempenham papéis fundamentais em suas caracterizações. O foco é um ponto fixo que, junto com a diretriz, estabelece a característica da curva; para qualquer ponto P na parábola, a distância até o foco F é igual à distância até a diretriz d. A diretriz, por sua vez, é uma linha reta fixa e perpendicular ao eixo de simetria da parábola, que também é equidistante do foco. Essas características geométricas fornecem percepções importantes sobre o comportamento e a forma da parábola em diferentes contextos, desde aplicações físicas até construções arquitetônicas.

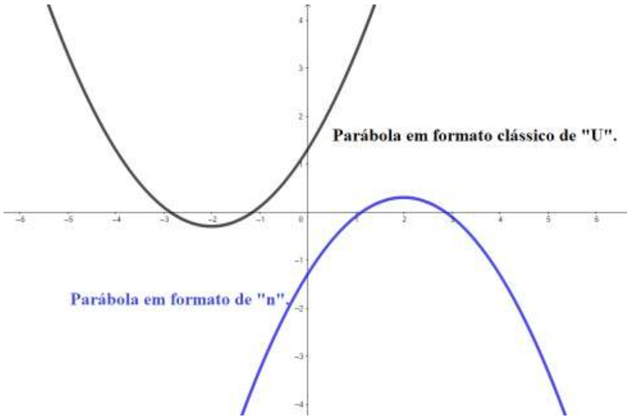
Segundo Eves (2008), Apolônio nos traz que a parábola é uma curva plana de grande importância na geometria analítica e na matemática em geral. Suas propriedades matemáticas fundamentais são estudadas em detalhes, fornecendo uma compreensão profunda de seu comportamento e características distintivas.

Uma das características mais proeminentes da parábola é seu foco F e sua diretriz d. O foco é um ponto fixo que está localizado na metade do segmento de linha perpendicular à diretriz, a uma distância chamada de parâmetro (p) da parábola. Por sua vez, a diretriz é uma linha reta fixa que, junto com o foco, define a parábola, e a distância entre a diretriz e o vértice da parábola é igual à distância entre o vértice e o foco. Também temos o vértice da parábola, representado por V, que é o ponto mais próximo da diretriz, e o eixo de simetria (ou eixo focal) é uma reta vertical que passa pelo vértice e pelo foco. Essa reta divide a parábola em duas partes simétricas, refletindo sua simetria característica.

A equação geral da parábola pode ser expressa como $y = ax^2 + bx + c$, onde a, b e c são constantes reais e $a \neq 0$ (Stewart, 2015). Essa forma padrão da equação parabólica descreve a relação entre a coordenada x e a coordenada y de pontos pertencentes a parábola.

Considerando a abordagem da sua equação geral, a parábola exibe diferentes formas dependendo do sinal do coeficiente a . Quando $a > 0$, a parábola tem o formato clássico de "U", enquanto que quando a <0, sua forma é invertida, ficando em formato de "n" (ver a Figura 2.3). Essa distinção determina se a concavidade da parábola será voltada para cima ou para baixo, influenciando seu comportamento global (Anton et al., 2013).

Figura 2.3 – Alguns formatos da parábola



Fonte: Elaborado pela autora, 2024.

Em resumo, a parábola é uma figura geométrica de grande interesse matemático, cujas propriedades incluem sua equação geral, foco, diretriz, vértice, eixo de simetria e formato. Seu estudo é essencial em diversas áreas da matemática, proporcionando percepções valiosas sobre padrões, relações e fenômenos em contextos geométricos e analíticos. A seguir, discutiremos algumas situações do mundo real nas quais podemos observar a presença de parábolas.

2.2 SITUAÇÕES DO MUNDO REAL EM QUE A PARÁBOLA APARECE

a) Física

Na física, as parábolas desempenham um papel crucial na descrição do movimento de projéteis. Quando um objeto é lançado no ar com uma velocidade inicial e sujeito à gravidade, sua trajetória corresponde uma parábola. Essa característica é amplamente estudada e aplicada em diversas áreas, desde o esporte até a engenharia. De acordo com Halliday et al. (2018), em "Fundamentos de Física", a trajetória de um projétil pode ser modelada pela equação da parábola. Esta equação descreve como a altura do projétil varia com o tempo e a distância percorrida horizontalmente. A forma parabólica da trajetória é resultado da combinação da velocidade inicial do projétil e da aceleração devido à gravidade.

Um exemplo prático dessa aplicação pode ser observado em esportes como o basquete e o baseball. Quando um jogador arremessa a bola em direção à cesta ou ao alvo, a trajetória da bola segue uma parábola, determinada pela força e ângulo do lançamento, junto com a gravidade. Além disso, o projeto de sistemas de navegação e controle de mísseis requer uma compreensão precisa das trajetórias parabólicas para garantir que o alvo seja atingido com precisão.

Em resumo, a aplicação das parábolas na física é essencial para entender e prever o movimento de objetos lançados no ar, sendo fundamental em diversas áreas, desde o esporte até a tecnologia de defesa.

b) Arquitetura

A presença de parábolas na arquitetura é notável em diversas estruturas ao redor do mundo, especialmente em arcos e cúpulas. Essas formas geométricas não apenas conferem beleza estética aos edifícios, mas também desempenham um papel fundamental na estabilidade e na distribuição de carga. Como mencionado por Watkin (2005) em "*A History of Western Architecture*", um dos exemplos mais emblemáticos da aplicação de parábolas na arquitetura é a Cúpula de Brunelleschi, localizada na Catedral de Santa Maria del Fiore, em Florença, Itália. Projetada por Filippo Brunelleschi no século XV, esta cúpula é uma obra-prima da engenharia renascentista, caracterizada pela sua forma de parábola invertida, que distribui o peso da estrutura de forma eficiente e elegante.

Além disso, os arcos parabólicos são comumente utilizados em pontes e edifícios históricos, proporcionando uma solução estrutural eficaz para vencer grandes vãos. A Ponte de San Martín, em Toledo, Espanha, é um exemplo notável de uma ponte com arcos parabólicos que resistiu ao teste do tempo. A aplicação de parábolas na arquitetura moderna também é evidente em edifícios contemporâneos. Muitos arquitetos incorporam elementos parabólicos em suas criações, não apenas por razões estruturais, mas também por seu apelo estético e simbólico.

Em resumo, as parábolas desempenham um papel significativo na arquitetura, desde as grandes obras renascentistas até as construções contemporâneas, demonstrando sua versatilidade e importância na prática arquitetônica.

c) Economia

Em economia, as parábolas são utilizadas para descrever relações entre variáveis econômicas e para modelar diversos fenômenos econômicos. Essa aplicação é especialmente relevante na microeconomia, onde as teorias de produção e custos são fundamentais para entender o comportamento das empresas e a alocação de recursos. Conforme discutido por Pindyck e Rubinfeld (2013) em "Microeconomia", as curvas de custo médio em relação à quantidade produzida muitas vezes seguem uma forma parabólica. Essa relação é explicada pelo conceito de economias de escala e de escopo, onde os custos médios diminuem à medida que a produção aumenta, atingindo um mínimo e, em seguida, aumentando novamente.

Um exemplo prático disso pode ser observado na indústria de produção em massa, onde as empresas buscam otimizar a produção para minimizar os custos médios por unidade produzida. À medida que a produção aumenta, os custos médios tendem a diminuir devido à diluição dos custos fixos e ganhos de eficiência. No entanto, além de um certo ponto, os custos médios começam a aumentar devido a limitações de capacidade e outros fatores.

Além disso, as parábolas também são aplicadas em modelos de demanda e oferta, onde as curvas de oferta e demanda podem assumir formas parabólicas em certas condições de mercado. Esses modelos são usados para prever o equilíbrio de mercado e os efeitos de políticas econômicas sobre os preços e quantidades de bens e serviços.

Em resumo, as parábolas desempenham um papel importante na modelagem e análise de fenômenos econômicos na microeconomia, fornecendo compreensões valiosas sobre a relação entre produção, custos e comportamento do mercado.

d) Astronomia

Na astronomia, as parábolas desempenham um papel importante na descrição das órbitas de alguns corpos celestes e no estudo de fenômenos astrofísicos específicos. Conforme explicado por Tyson (2017) em "*Astrophysics for People in a Hurry*" (Astrofísica para pessoas apressadas), as órbitas dos cometas em torno do Sol podem ser aproximadas por parábolas em pequena escala. Quando um cometa se aproxima do Sol vindo de regiões distantes do Sistema Solar, sua trajetória segue uma forma parabólica devido à influência gravitacional do Sol. No entanto, para cometas que estão mais próximos do Sol e cujas velocidades são maiores, as órbitas podem se aproximar mais de uma elipse.

Um exemplo famoso é o Cometa Halley, que retorna ao Sistema Solar interno a cada 76 anos. A trajetória desse cometa ao redor do Sol é aproximadamente parabólica em sua fase inicial de aproximação e afastamento do Sol. Além disso, as parábolas também são encontradas em fenômenos astrofísicos, como a formação de imagens em espelhos parabólicos usados em telescópios e radiotelescópios. Os espelhos parabólicos são projetados para focalizar a luz ou radiação eletromagnética incidente em um ponto focal, proporcionando imagens nítidas e detalhadas de objetos distantes no espaço. Essa aplicação é essencial em pesquisas astronômicas, onde a capacidade de capturar e analisar imagens precisas do cosmos é fundamental para avançar em nosso entendimento do universo.

Em resumo, as parábolas desempenham um papel significativo na astronomia, desde a descrição das órbitas dos cometas até o design de instrumentos ópticos para a observação do espaço profundo.

e) Engenharia

As parábolas desempenham um papel crucial na engenharia, especialmente na concepção e análise de estruturas complexas, como arcos e antenas parabólicas. Como destacado por Connor e Faraji (2018) em "*Fundamentals of Structural Engineering*", os arcos parabólicos são comumente utilizados em pontes, viadutos e edifícios históricos devido à sua capacidade de vencer grandes vãos sem a necessidade de suportes intermediários. A forma parabólica do arco distribui uniformemente as cargas aplicadas, minimizando os esforços de flexão e garantindo a estabilidade estrutural da ponte ou edifício. Um exemplo notável é a Ponte da Baía de Sydney, na Austrália, cujo design incorpora arcos parabólicos que suportam a plataforma rodoviária acima da água. Essa ponte é um marco da engenharia civil, destacando a eficácia e a elegância das formas parabólicas em estruturas de grande porte.

Além disso, as parábolas são amplamente empregadas no design de antenas parabólicas, utilizadas em comunicações via satélite, radares e telescópios. Conforme discutido por Connor e Faraji (2018), as antenas parabólicas são projetadas para focalizar sinais eletromagnéticos incidentes em um ponto focal, proporcionando uma recepção ou transmissão eficiente de dados. Por exemplo, as antenas parabólicas usadas em redes de satélites de comunicação têm a forma de uma parábola, com o receptor ou transmissor posicionado no ponto focal. Isso permite capturar ou direcionar sinais provenientes de satélites de comunicação em órbita terrestre, facilitando a transmissão de dados em larga escala em todo o mundo.

Em resumo, as parábolas são fundamentais na engenharia, desde o projeto de estruturas de grande porte até o desenvolvimento de sistemas de comunicação avançados, demonstrando sua versatilidade e eficácia em diversas aplicações tecnológicas.

Frente a isso, vamos relembrar um pouco o que foi falado no Capítulo 1 sobre as catenárias, para, em seguida, fazermos a comparação entre as duas curvas.

2.3 DEFINIÇÃO E CARACTERÍSTICAS DA CATENÁRIA

Catenária, derivada do latim “catena”, refere-se à curva formada por um fio ou corrente flexível, cuja densidade permanece constante ao longo de seu comprimento, suspensa exclusivamente por seus extremos e sujeita apenas à força gravitacional.

Os primeiros estudos sobre catenárias foram realizados por Galileu Galilei, que tentou descrevê-las de maneira analítica, erroneamente sugerindo que se assemelhavam a parábolas, como a trajetória de um projétil (Yates, 1974; Talavera, 2008; Mendes, 2017; Lima e Miranda, 2021). No entanto, a compreensão de que a forma de uma catenária é assumida por uma corda inextensível, sujeita a uma carga uniformemente distribuída verticalmente, só foi abordada por Huygens no século XVII, após o equívoco de Galileu. Huygens examinou a geometria da catenária, considerando-a como a curva assumida por uma corrente perfeitamente flexível e inextensível, com densidade linear uniforme, pendurada em dois pontos não alinhados verticalmente, demonstrando, com argumentos físicos, a incorreção da conjectura de Galileu, embora não tenha apresentado a expressão analítica da curva (Eves, 2008).

A catenária apresenta diversas características geométricas e físicas que a tornam uma curva única e de grande importância em diversas áreas do conhecimento. Entre suas principais características estão a relação entre tensão e peso, sua forma natural e suas aplicações práticas. Uma das suas características mais marcantes é a relação entre a tensão no fio e o peso do próprio fio. Em um sistema em equilíbrio, a tensão em cada ponto da catenária é diretamente proporcional à componente vertical do peso do fio nesse ponto. Isso significa que, à medida que o peso do fio aumenta, a tensão no fio também aumenta, resultando em uma curva mais esticada.

Como foi visto no Capítulo 1, a forma natural da catenária é determinada unicamente pelas forças gravitacionais e de tensão no fio, sendo uma solução para a equação diferencial que descreve o equilíbrio entre essas forças. Essa forma distinta, que se assemelha a de uma corrente suspensa, confere à catenária características únicas de estabilidade e resistência, tornando-a uma escolha comum em estruturas suspensas e sistemas de transporte.

Em resumo, as principais características geométricas e físicas da catenária, como a relação entre tensão e peso, sua forma natural e suas aplicações práticas, tornam essa curva uma ferramenta fundamental em várias áreas da engenharia e da ciência.

2.4 COMPARAÇÃO ENTRE AS CURVAS CATENÁRIAS E PARÁBOLAS

A comparação entre as curvas catenárias e parábolas oferece uma oportunidade para entender suas características distintas e suas implicações em diversas áreas do conhecimento, desde a matemática até a física aplicada. A equação que descreve uma parábola na forma canônica (que é a mais comumente usada) é $y = x^2 + x + 1$, sendo uma fundamental na geometria analítica e na resolução de problemas relacionados a trajetórias de projéteis e gráficos de funções quadráticas. Por outro lado, a equação da catenária, mais utilizada é a polar, e pode ser expressa como $y = \frac{cosh(ax)}{a}$, onde a é uma constante que determina a escala da curva. Essa equação é uma solução para uma equação diferencial que descreve o equilíbrio entre a força da gravidade e a tensão no cabo.

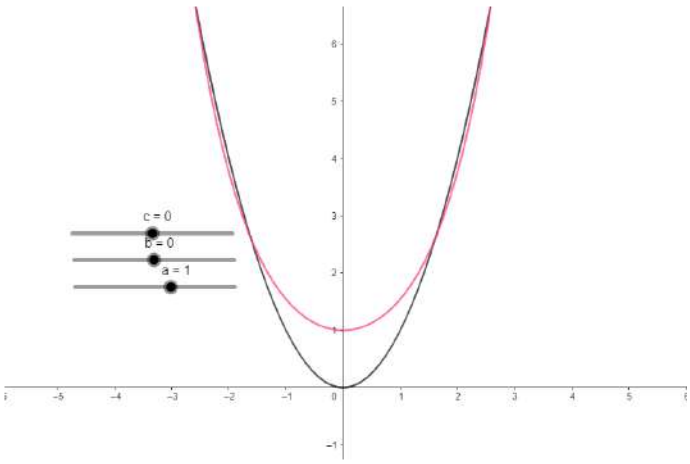
A forma da parábola é conhecida por sua simetria em relação ao eixo vertical ou horizontal, dependendo da orientação da curva. Essa simetria é uma característica fundamental que define a parábola e influencia suas propriedades geométricas. Por outro lado, a catenária tem uma forma mais suave e assimétrica, semelhante à de uma corrente suspensa.

As propriedades físicas das curvas catenárias e parábolas refletem suas equações e formas únicas. A parábola é frequentemente encontrada em fenômenos físicos, como o movimento de projéteis em um campo gravitacional uniforme. Por outro lado, a catenária é a curva formada por um cabo flexível sob a ação da gravidade, sendo amplamente utilizada em estruturas suspensas, como postes e viadutos. Essas propriedades físicas têm aplicações práticas em diversas áreas da engenharia e da física aplicada.

As propriedades matemáticas das curvas catenárias e parábolas são estudadas em diferentes áreas da matemática, como geometria analítica e cálculo diferencial. A parábola, por exemplo, é uma curva importante na teoria das equações quadráticas e na geometria euclidiana, enquanto a catenária é estudada em equações diferenciais e análise funcional. Essas propriedades matemáticas são fundamentais para entender o comportamento das curvas em diferentes contextos e aplicá-las de forma eficaz em problemas teóricos e práticos.

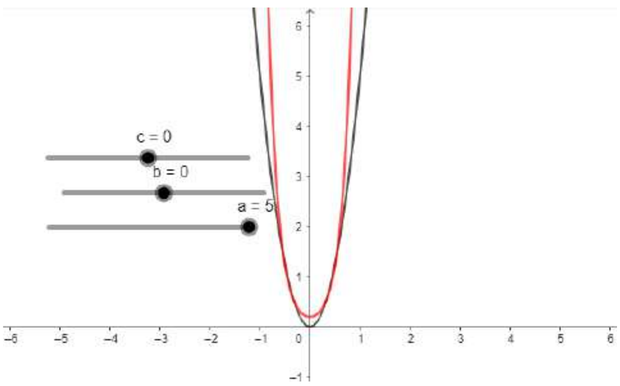
Além disso, a catenária e a parábola apresentam similaridades visuais marcantes, embora tenham origens matemáticas diferentes. Ambas as curvas possuem um ponto mínimo em seu vértice, criando uma aparência estética semelhante, especialmente em representações gráficas, conforme apresentado nas Figuras 2.4 e 2.5. A Figura 2.4 mostra os dois gráficos sobrepostos (o da catenária na cor vermelha e o da parábola na cor preta), com o parâmetro $a = 1$. A Figura 2.5, também mostra os dois gráficos sobrepostos e nas mesmas cores da anterior, porém com o parâmetro $a = 5$.

Figura 2.4 – Parábola e Catenária



Fonte: Elaborado pela autora, 2024.

Figura 2.5 – Parábola e Catenária



Fonte: Elaborado pela autora, 2024.

A similaridade visual entre curvas catenárias e parábolas é um dos fatores mais significativos que contribuem para a confusão entre elas em projetos arquitetônicos e de engenharia. Ambas as curvas compartilham uma característica fundamental: uma forma curva suave e contínua. Como resultado, pode ser desafiador distinguir entre uma catenária e uma parábola em certos contextos.

Em resumo, a comparação entre as curvas catenárias e parábolas revela suas diferenças em termos de equações, formas, propriedades físicas e matemáticas, mas também nos mostra a sua similaridade visual. Embora ambas as curvas sejam importantes em diferentes contextos, é sua compreensão das características únicas de cada uma que permite sua aplicação eficaz em uma variedade de situações práticas e teóricas.

3 CONFUSÃO ENTRE CATENÁRIAS E PARÁBOLAS

No terceiro capítulo deste trabalho, adentramos na parte central das consequências geradas pela confusão entre curvas catenárias e parábolas em diversos contextos. Exploramos de maneira abrangente como essa confusão reflete em áreas tão distintas quanto engenharia civil, arquitetura, física, matemática aplicada, educação e pesquisa. Ao examinar esses impactos, ganhamos uma compreensão mais profunda do alcance dessa confusão e da importância crítica de fazermos a distinção correta entre essas curvas.

Desde a segurança estrutural de pontes e edifícios até a precisão dos modelos matemáticos em física aplicada, cada campo enfrenta desafios únicos quando a confusão entre catenárias e parábolas surge. Neste capítulo, mergulharemos nas implicações específicas em cada uma dessas áreas, destacando não apenas os riscos e problemas causados pela confusão, mas também as oportunidades e soluções para garantir que o conhecimento correto seja aplicado.

Ao fazê-lo, delineamos não apenas a urgência de evitar erros decorrentes dessa confusão, mas também a promessa de avanços significativos quando a distinção entre curvas é feita com precisão.

3.1 ALGUMAS SITUAÇÕES DE CONFUSÃO

A confusão entre catenárias e parábolas ocorre com frequência em várias áreas do conhecimento, especialmente na física, engenharia, arquitetura e até mesmo no ensino de matemática. Apesar de ambas serem curvas que se assemelham em determinadas situações (conforme foi visto no capítulo anterior), suas naturezas e propriedades matemáticas são bastante distintas. Então, entender essa diferença é crucial para evitar erros em cálculos e projeções, além de facilitar a aplicação correta em contextos práticos. Existem vários exemplos reais em que a confusão entre as duas curvas resultou em erros de design, interpretação e aplicação na área mencionada no parágrafo anterior. A seguir temos alguns exemplos dessa confusão.

- **Ponte de Clifton (Bristol, Reino Unido)**

  A Ponte Suspensa de Clifton, construída no século XIX e projetada por Isambard Kingdom Brunel, é um exemplo notável onde houve uma confusão inicial sobre a forma dos cabos que sustentam a ponte. Muitos pensavam que a curva formada pelos cabos era parabólica, mas, na verdade, trata-se de uma catenária. Essa confusão era comum na época, especialmente porque o conceito de catenária ainda não estava amplamente compreendido, e muitos engenheiros usavam aproximações parabólicas para seus cálculos. Projetar os cabos como uma parábola, em vez de uma catenária, poderia ter resultado em uma distribuição inadequada de tensões e, consequentemente em um projeto menos eficiente e seguro.

- **Arco Gateway (St. Louis, EUA)**

  O *Gateway Arch* em *St. Louis*, projetado pelo arquiteto finlandês Eero Saarinen, é um dos exemplos mais famosos de confusão entre uma catenária e uma parábola. Frequentemente descrito erroneamente como uma "parábola", o arco é, na verdade, uma catenária invertida, uma forma que permite suportar seu próprio peso de maneira eficiente. A escolha da catenária invertida foi feita para garantir que a estrutura fosse estável e autoportante. Essa confusão persiste até hoje em textos e materiais de ensino, apesar da precisão técnica do projeto original.

- **Ponte Golden Gate (São Francisco, EUA)**

  A Ponte Golden Gate é outro exemplo icônico onde, por muito tempo, houve confusão sobre a forma dos cabos principais. Muitas pessoas acreditavam que os cabos suspensos seguiam uma parábola, mas, como em todas as pontes suspensas, os cabos principais seguem uma catenária, devido à distribuição uniforme de peso e às forças de tração. Embora essa confusão não tenha afetado a construção da ponte, ela reflete uma compreensão errada que persiste na mente de muitos sobre a forma exata dessas estruturas.

- **Confusão no Ensino de Física e Matemática**

  No ensino de física e matemática, a confusão entre catenária e parábola é bastante comum. Em muitas aulas de física, ao se discutir a trajetória de projéteis, alunos e até alguns professores acabam fazendo uma associação equivocada entre as curvas parabólicas (resultantes de projeções balísticas) e as catenárias (resultantes da suspensão de cordas). No ensino de matemática, a confusão entre catenária e parábola também é frequente, especialmente ao abordar o estudo de funções e curvas. Muitos alunos, ao aprenderem sobre equações quadráticas, assumem que toda curva com uma forma "suspensa" ou "arqueada" segue o formato de uma parábola, ignorando as nuances entre essas duas figuras matemáticas. Isso ocorre porque a parábola é amplamente ensinada desde os níveis iniciais, enquanto a catenária, por sua natureza mais complexa, é abordada mais tarde, com menos ênfase ou, em alguns casos, nem sequer é discutida. Além disso, essa confusão pode ser reforçada por livros didáticos que, ao simplificar certos conceitos, acabam tratando catenárias como se fossem parábolas, sem distinguir suas características distintas. Isso dificulta a compreensão de fenômenos físicos e matemáticos que dependem das propriedades exclusivas de cada curva, perpetuando o equívoco ao longo dos estudos.

- **Erros em Estações de Energia Elétrica**

> A forma dos cabos suspensos em redes de energia elétrica é outro local onde frequentemente ocorre a confusão entre catenárias e parábolas. As linhas de energia suspensas seguem uma catenária devido ao peso distribuído uniformemente ao longo do cabo. Em certos casos, engenheiros menos experientes tentaram usar equações parabólicas para estimar a curvatura desses cabos, levando a erros nos cálculos de tensão e capacidade de carga. Esse tipo de erro pode resultar em falhas no sistema, com possíveis quebras de cabos ou necessidade de manutenção frequente.

A confusão entre catenárias e parábolas não se limita apenas aos exemplos históricos e educacionais, mas também se reflete em abordagens contemporâneas e inovadoras na arquitetura. Oscar Niemeyer (1907-2012), renomado arquiteto brasileiro, é um exemplo notável de como a compreensão correta das curvas catenárias pode ser aplicada de maneira eficiente e esteticamente impactante em projetos arquitetônicos icônicos. Em sua obra "As Curvas do Tempo", Niemeyer compartilha suas experiências ao incorporar essas curvas em obras como o Museu de Arte Contemporânea de Niterói, demonstrando como a escolha consciente de curvas catenárias não apenas contribui para a estética marcante de suas obras, mas também permite uma distribuição eficaz de cargas e uma maior resistência às forças naturais.

Ao contrário da confusão comum entre catenárias e parábolas observada em projetos como a Ponte de Clifton, o Arco Gateway e a Ponte Golden Gate, Niemeyer mostrou uma profunda compreensão das propriedades físicas e matemáticas dessas curvas. Essa abordagem consciente não apenas assegurou a funcionalidade e durabilidade de suas construções, mas também ajudou a moldar uma nova visão na arquitetura moderna, em que a beleza e a funcionalidade caminham lado a lado.

Esses exemplos e considerações reforçam a importância de uma abordagem integrada e holística ao lidar com catenárias e parábolas em projetos de engenharia e arquitetura. Uma compreensão profunda das características e aplicações dessas curvas não apenas garante a segurança e estabilidade das estruturas, mas também contribui para a beleza e funcionalidade das obras construídas. A confusão entre essas duas curvas, como vimos em diversos exemplos históricos e práticos, pode levar a erros de design, enquanto seu uso correto, como demonstrado por Niemeyer, pode resultar em projetos arquitetônicos ousados e duradouros.

3.1.1 Fatores que contribuem para a confusão

A distinção entre catenárias e parábolas, embora essencial para projetos arquitetônicos e de engenharia, muitas vezes é obscurecida por uma gama de fatores que se entrelaçam. Nesta análise, mergulharemos nas complexidades subjacentes a essa confusão, explorando os principais contribuintes e suas interconexões. A falta de conhecimento específico, o contexto histórico e cultural, a terminologia ambígua e a complexidade matemática são elementos intricados que desempenham papéis distintos, porém complementares, nesse fenômeno.

Compreender a fundo esses fatores não apenas é fundamental para discernir corretamente entre catenárias e parábolas, mas também para evitar equívocos em projetos e assegurar uma prática profissional segura e eficaz. Ao adentrar mais profundamente nesses aspectos, é possível desenvolver uma compreensão mais ampla das nuances envolvidas e, assim, identificar estratégias robustas para mitigar essa confusão de forma efetiva, promovendo assim uma abordagem mais informada e precisa na concepção e implementação de estruturas arquitetônicas e de engenharia.

a) Ausência de conhecimento específico

A ausência de conhecimento específico sobre as características distintivas das curvas catenárias e parábolas é um fator crítico que contribui para a confusão entre elas em projetos de engenharia e arquitetura. Em muitos casos, engenheiros, arquitetos e outros profissionais envolvidos em projetos de construção podem não estar completamente familiarizados com as propriedades matemáticas e físicas dessas curvas. Isso pode levar a equívocos na identificação das curvas em estruturas reais, especialmente em situações em que a distinção entre elas não é óbvia. Porém, com o aumento do conhecimento específico, essas diferenças tornam-se mais evidentes, permitindo uma compreensão mais clara de cada conceito.

Para evitar equívocos relacionados à identificação de curvas catenárias e parábolas, é essencial que os profissionais envolvidos em projetos de engenharia e arquitetura recebam uma educação sólida e contínua sobre o assunto. Treinamentos, cursos e workshops específicos podem ajudar a melhorar o entendimento das características distintivas das curvas e fornecer aos profissionais as ferramentas necessárias para tomar decisões informadas durante o processo de projeto e construção.

b) Contexto histórico e cultural

O contexto histórico e cultural desempenha um papel significativo na confusão entre curvas catenárias e parábolas, uma vez que ambas têm raízes profundas na história da matemática, da arquitetura e da engenharia. Historicamente, o desenvolvimento da matemática ocorreu de forma desigual entre diferentes culturas, por exemplo, os antigos gregos estudaram as seções cônicas, mas o conceito de catenária só foi formalizado mais tarde, por matemáticos como Christian Huygens. Essa evolução tardia fez com que a catenária não recebesse a mesma atenção nos textos clássicos, levando a uma falta de distinção clara em alguns contextos educacionais.

Na comunicação cotidiana, muitas vezes os termos matemáticos são usados de forma mais flexível, por exemplo, a palavra “curva” pode se referir a qualquer forma de curva, sem a precisão necessária para distinguir catenárias e parábolas. Isso acaba criando uma confusão adicional, especialmente para aqueles que não tem uma formação técnica em matemática, tornando difícil para o público em geral reconhecer as particularidades de cada uma.

Portanto, a confusão entre as duas curvas não é apenas uma questão de falta de conhecimento técnico, mas também um fenômeno enraizado em contextos históricos e culturais. Com um enfoque educacional mais claro e um diálogo aberto sobre as distinções existentes, é possível mitigar essa confusão e promover uma apreciação mais profunda da matemática.

c) Terminologia ambígua

A terminologia ambígua é um fator significativo que contribui para a confusão entre as curvas catenárias e parábolas, especialmente em contextos em que os termos são usados de forma intercambiável ou imprecisa. Essa ambiguidade[1] pode surgir devido a diferença na definição e na interpretação dos termos, bem como a falta de padronização na linguagem técnica utilizada em diferentes disciplinas. Por exemplo, quando falamos em curva, podemos estar nos referindo a qualquer uma, sem distinção, levando a crer que todas são iguais, quando na verdade não são. Além disso, esse tema é abordado por vários autores em campos como Engenharia, Arquitetura e Matemática.

Cada um explora as diferenças entre essas curvas e suas aplicações em projetos estruturais, destacando os impactos práticos e teóricos da confusão entre ambas. São eles: Eduardo Torroja (1899-1961), David Billington, Leonardo Benevolo (1923-2017), Mario Salvadori (1907-1997) e John Heyman (1925-2021). Esses 5 autores destacam que a ambiguidade entre catenária e parábola traz consequências práticas e teóricas relevantes em diversos campos. Quando mal compreendidas, essas curvas podem levar a projetos estruturais ineficientes[2], curtos elevados, falhas estruturais e impactos estéticos.

d) Complecidade matemática

A complexidade Matemática desempenha um papel significativo na confusão entre catenárias e parábolas, especialmente para pessoas sem formação avançada em Matemática. Há diversos fatores relacionados à natureza das equações e propriedades dessas curvas que tornam difícil diferenciá-las. Por exemplo: possuem equações diferentes, mas não intuitivas; similaridade visual em pequenas escalas; conceitos avançados de física e engenharia; função hiperbólica e geometria analítica; dificuldade em identificar o contexto; e solucionar equações.

[1] Propriedade que apresentam diversas unidades linguísticas (morfemas, palavras, locuções, frases) de significar coisas diferentes, de admitir mais de uma leitura.

[2] Isso pode levar a tensões desnecessárias e o uso excessivo de materiais para compensar a ineficiência estrutural.

Para lidar com esse fato, podem ser usados métodos analíticos como derivadas e análise de curvatura[3], como também métodos computacionais onde a análise gráfica e comparação de dados podem permitir uma visualização mais clara sobre as diferenças.

Em suma, a complexidade Matemática das catenárias, especialmente devido à natureza das funções hiperbólicas e à dificuldade de reconhecer suas propriedades sem ferramentas avançadas, contribui de forma significativa para a confusão com parábolas. Enquanto a parábola é amplamente ensinada e trabalhada desde cedo, a catenária exige um nível de sofisticação matemática que dificulta sua compreensão e distinção para aqueles que não têm formação especializada. Isso torna mais provável que as duas curvas sejam confundidas em contextos visuais ou práticos, sem uma base sólida em Matemática avançada.

3.1.2 Consequência da confusão em diferentes contextos

A confusão entre curvas catenárias e parábolas pode ter impactos profundos e multifacetados em uma variedade de campos, desde a engenharia até a matemática aplicada. Esta confusão pode resultar em erros graves, afetando tanto o aspecto prático quanto o teórico das disciplinas relacionadas. Exploraremos mais detalhadamente as consequências em diferentes contextos.

3.1.2.1 Engenharia Civil e Arquitetura

Na engenharia civil e arquitetura, a correta identificação e compreensão das curvas catenárias e parábolas desempenham um papel crucial no design e na construção de uma variedade de estruturas. A escolha incorreta da curva pode resultar em cálculos imprecisos de tensão e carga, aumentando o risco de falhas estruturais. Por exemplo, em pontes suspensas, a tensão aplicada aos cabos de sustentação deve ser cuidadosamente calculada com base na curvatura correta da catenária. Uma identificação inadequada da curva pode levar a estimativas incorretas de tensão, comprometendo a estabilidade e segurança da ponte. Além dos aspectos estruturais, a confusão também pode afetar a estética e funcionalidade de projetos arquitetônicos, bem como os impactos em segurança e estética, podendo também ter implicações financeiras e de tempo visto que erros de projeto podem levar a custos adicionais de reparo e atrasos na conclusão do projeto.

3.1.2.2 Física e Matemática Aplicada

No campo da física e matemática aplicada, a correta identificação e compreensão das curvas catenárias e parábolas desempenham um papel fundamental na modelagem e análise de uma variedade de fenômenos naturais e sistemas físicos. A confusão entre essas curvas pode levar a interpretações errôneas de fenômenos naturais e limitar o

[3] A análise matemática das derivadas de ambas as curvas revela a diferença na curvatura.

desenvolvimento de teorias científicas, além da identificação incorreta das curvas, que pode resultar em modelos matemáticos inadequados para descrever fenômenos físicos complexos, como também levar a erros em projetos estruturais que dependem da física. Além dos impactos na modelagem física, a confusão entre curvas catenárias e parábolas também pode limitar o desenvolvimento teórico em áreas da matemática aplicada.

Em resumo, a confusão entre curvas catenárias e parábolas pode ter impactos substanciais[4] em física e matemática aplicada, afetando tanto a modelagem física quanto o desenvolvimento teórico nessas áreas. É fundamental que pesquisadores e cientistas tenham um entendimento claro das diferenças entre essas curvas e apliquem métodos adequados para sua identificação e análise corretas, a fim de evitar erros e maximizar o sucesso em suas aplicações.

3.1.2.3 Educação e Pesquisa

No contexto educacional e de pesquisa, a correta compreensão e distinção entre curvas catenárias e parábolas são essenciais para o avanço do conhecimento em várias disciplinas acadêmicas. A confusão entre essas curvas pode apresentar desafios significativos tanto para educadores quanto para pesquisadores, impactando o ensino e a produção de conhecimento em áreas diversas. Por exemplo, em cursos de cálculo diferencial e integral, os alunos podem ter dificuldade em compreender a distinção entre as propriedades dessas curvas e suas aplicações práticas.

Além dos desafios no ensino, a confusão também pode afetar a pesquisa acadêmica em várias disciplinas. Por exemplo, em estudos de engenharia estrutural e matemática aplicada, a identificação incorreta das curvas pode levar a conclusões errôneas e limitar o avanço do conhecimento.

Para lidar com os desafios associados à confusão entre curvas catenárias e parábolas, é fundamental desenvolver e utilizar recursos educacionais adequados que ajudem os alunos a compreender as diferenças entre essas curvas e suas aplicações.

Em resumo, a confusão entre curvas catenárias e parábolas pode apresentar desafios significativos no ensino e na pesquisa em várias disciplinas acadêmicas. É essencial que educadores e pesquisadores tenham um entendimento claro das diferenças entre essas curvas e empreguem métodos adequados para ensinar e pesquisar sobre o tema. O desenvolvimento de recursos educacionais eficazes e a promoção de uma abordagem interdisciplinar podem ajudar a superar esses desafios e promover um melhor entendimento dos conceitos relacionados às curvas catenárias e parábolas.

[4] Na física, esse impactos podem ser erros tanto na modelagem de sistemas físicos quanto erros no cálculo de energia. Com relação à matemática, esses impactos refletem as soluções incorretas em equações diferenciais.

3.1.3 Possíveis estratégias de ensino

Para buscar ensinar de forma eficaz a distinção entre catenárias e parábolas, é essencial desenvolver estratégias que não apenas apresentem as fórmulas e características das duas curvas, mas também demonstrem suas aplicações práticas e relevância em diferentes contextos. Os alunos precisam compreender a existência dessas curvas por diversas razões, que vão além da simples distinção teórica. Abaixo, estão propostas algumas estratégias:

- **Contextualização das Curvas no Mundo Real**

Uma abordagem inicial é mostrar aos alunos onde cada uma dessas curvas aparece no cotidiano e em fenômenos físicos. Entender a diferença entre as duas curvas ajuda os alunos a aplicar corretamente o conhecimento em situações reais. Além disso, ao observar o mundo ao redor, eles podem reconhecer a matemática por trás de estruturas e fenômenos, o que enriquece seu entendimento das ciências físicas e da engenharia.

- **Exploração das Fórmulas**

Ao apresentar as fórmulas e discutir suas aplicações, é importante destacar que, embora ambas tenham formas arqueadas, seus comportamentos e derivações são distintos. Utilizar a tecnologia gráfica para desenhar as curvas e comparar visualmente pode ser uma maneira poderosa de ilustrar a diferença. Compreender as fórmulas e sua representação gráfica não só ajuda na distinção visual das curvas, mas também fortalece o entendimento matemático, possibilitando o desenvolvimento de habilidades de análise e interpretação de equações, que são fundamentais para a resolução de problemas em disciplinas como cálculo e física.

- **Atividades Práticas**

Propor atividades que permitam aos alunos construir ou observar essas curvas de maneira concreta é essencial, pois tais atividades tornam o aprendizado mais tangível e reforçam a diferenciação entre catenárias e parábolas, além de buscar engajar os alunos ativamente no processo de descoberta.

Por exemplo:

Experimentos de suspensão de cordas: Pendurar uma corrente ou corda flexível e pedir aos alunos que comparem a curva gerada com a de uma parábola traçada em papel.

Simulação de trajetórias parabólicas: Usar softwares ou simulações online para visualizar a trajetória de objetos lançados em diferentes ângulos, mostrando como a parábola é a curva que define esses movimentos.

- **Discussão sobre Visibilidade e Aplicações**

Mostrar aos alunos que a compreensão dessas duas curvas é fundamental para várias áreas, como arquitetura, engenharia civil, astronomia e design urbano. A parábola aparece em antenas parabólicas e refletores, enquanto a catenária é usada em pontes e telhados de edifícios icônicos. Explicar que a escolha entre uma curva e outra não é arbitrária, mas baseada em suas propriedades específicas. Além disso, saber onde essas curvas são aplicadas dá aos alunos um sentido de relevância, possibilitando que eles passem a entender que estudar catenárias e parábolas não é apenas um exercício matemático, mas algo que tem impacto direto em soluções tecnológicas e inovadoras no mundo real.

- **Comparação Histórica e Interdisciplinaridade**

Discutir brevemente o papel histórico dessas curvas, como a trajetória parabólica de projéteis estudada por Galileu e as catenárias usadas em arquitetura desde o período medieval, vai ajudar a mostrar que o estudo dessas curvas não é novo, mas parte de um conhecimento que evoluiu e se aplica a várias áreas. Isso fornece uma visão interdisciplinar, mostrando como a matemática e a física se conectam com a história e a cultura, criando uma narrativa mais rica e motivadora para o estudo das cônicas.

- **Trabalhar o Projeto de Vida do aluno**

Além de todos os pontos mencionados, é crucial abordar a importância das catenárias e parábolas para alunos que pretendem seguir carreiras como arquitetura ou engenharia. Como discutido no decorrer deste trabalho, essas áreas estão diretamente ligadas ao uso prático dessas curvas, seja no design estrutural, na construção de pontes ou em projetos de edificações. Mostrar a relevância dessas curvas ajuda a despertar o interesse dos alunos que vislumbram essas profissões, fortalecendo a conexão entre o que aprendem na escola e suas futuras aplicações profissionais. Para esses alunos que aspiram seguir carreiras como arquitetura ou engenharia, entender a diferença entre catenárias e parábolas é mais do que uma questão teórica: é uma habilidade essencial para o sucesso profissional. Ao compreender essas curvas e suas aplicações em estruturas e construções, eles desenvolvem competências fundamentais para projetar obras que aliam estética, segurança e eficiência.

Os alunos precisam entender a existência e as diferenças entre catenárias e parábolas porque isso amplia seu conhecimento matemático e físico, proporcionando uma base sólida para aplicar conceitos em situações práticas. Ao expor as fórmulas, promover a visualização gráfica, realizar atividades práticas e discutir suas aplicações no mundo real, os alunos passam a enxergar essas curvas não apenas como teorias abstratas, mas como ferramentas poderosas para interpretar e moldar o mundo ao seu redor.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

O estudo realizado sobre a distinção entre curvas catenárias e parábolas revelou não apenas a complexidade dessas formas geométricas, mas também a importância crítica de sua correta identificação em uma ampla gama de disciplinas e aplicações práticas. Ao longo deste trabalho, exploramos não apenas as características intrínsecas dessas curvas, mas também as ramificações que a confusão entre elas pode acarretar em diferentes contextos.

Nos capítulos anteriores, pudemos examinar em detalhes as propriedades matemáticas, físicas e históricas das curvas catenárias e parábolas, proporcionando um entendimento sólido de suas diferenças fundamentais e de como elas se manifestam em situações do mundo real. No entanto, mesmo com essa compreensão, a confusão entre essas curvas persiste, resultando em consequências que vão desde erros de projeto até limitações no avanço científico.

A análise das implicações dessa confusão revelou uma série de desafios que permeiam diferentes campos do conhecimento. Na engenharia civil e arquitetura, a escolha errada entre catenárias e parábolas pode comprometer não apenas a segurança e integridade estrutural das construções, mas também sua estética e funcionalidade. Em física e matemática aplicada, a confusão entre essas curvas pode levar a modelos inadequados e análises imprecisas, limitando assim o desenvolvimento teórico e prático nessas áreas.

Além disso, no contexto educacional e de pesquisa, a falta de clareza na diferenciação entre catenárias e parábolas apresenta desafios significativos, prejudicando o ensino e a produção de conhecimento em disciplinas diversas. Os alunos e pesquisadores enfrentam obstáculos ao tentar compreender e aplicar conceitos relacionados a essas curvas, o que pode resultar em equívocos e conclusões errôneas.

A análise abrangente realizada neste estudo revelou percepções significativas sobre a distinção entre curvas catenárias e parábolas, bem como suas implicações em diversos campos. Identificou-se que a confusão entre essas curvas pode ter consequências graves em áreas como Engenharia Civil, Arquitetura, Física e Matemática Aplicada, afetando tanto a segurança estrutural quanto a precisão teórica.

Diante desse cenário, é imperativo implementar estratégias eficazes para abordar e mitigar a confusão entre curvas catenárias e parábolas. Isso inclui não apenas aprimorar os métodos de ensino e pesquisa para promover uma compreensão mais profunda dessas curvas, mas também desenvolver ferramentas e recursos que auxiliem na identificação precisa e na aplicação correta em contextos práticos.

Em suma, este estudo destaca a necessidade premente de uma abordagem mais rigorosa e abrangente no tratamento das curvas catenárias e parábolas. A compreensão clara e distinta dessas formas geométricas é essencial para o avanço do conhecimento e para o desenvolvimento de soluções seguras e eficazes em diversas áreas. É somente através de uma atenção cuidadosa aos detalhes e uma aplicação diligente dos princípios matemáticos e físicos subjacentes que podemos evitar os equívocos que surgem da confusão entre essas curvas e, assim, impulsionar o progresso em nossas respectivas disciplinas.

REFERÊNCIAS

ANTON, Howard; BIVENS, Irl; DAVIS, Stephen. **Cálculo**. 10. ed. Porto Alegre: Bookman Editora, 2013. ISBN 978-8577808780.

ASSIS, André Koch Torres. Sobre o equilíbrio dos planos, tradução comentada de um texto de arquimedes. **Revista da Sociedade Brasileira de História da Ciência**, n. 18, p. 81–94, 1997.

BELTRAMI, Eugenio. **Saggio di Interpretazione della Geometria Non-Euclidea**. Milão: Tipografia del Folchetto, 1868.

BOYCE, William E.; RICHARD, C. Diprima. **Equações Diferenciais Elementares e Problemas de Valor de Contorno**. $3^{a}.ed.RiodeJaneiro : Guanabaradois,$1979.

BOYER, Carl B. História da matemática, revista por uta c. **Merzbach: Traduçao Helena Castro. 3ª ed. Sao Paulo: Edgar Blücher**, 2012.

CONNOR, J. J.; FARAJI, S. **Fundamentals of Structural Engineering**. 3. ed. New York: Springer, 2018.

EIFFEL, Gustave. **La Résistance des Matériaux**. Paris: Librairie Polytechnique, Baudry et Cie, 1897.

EULER, Leonhard. **Methodus Inveniendi Lineas Curvas Maximi Minimive Proprietate Gaudentes**. Lausanne: Marcum-Michaelem Bousquet, 1744.

EVES, Howard. **Introdução à história da matemática**. [S.l.]: Editora da UNICAMP, 2008.

GARBI, Gilberto Geraldo; CIÊNCIAS, A Rainha das. um passeio histórico pelo maravilhoso mundo da matemática. **São Paulo: Editora Livraria da Física**, 2007.

GRATTAN-GUINNESS, Ivor. **The Development of the Foundations of Mathematical Analysis from Euler to Riemann**. Cambridge, MA: MIT Press, 2000.

HALLIDAY, David; RESNICK, Robert; WALKER, Jearl. **Fundamentos de Física**. 10. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2018.

HANKINS, Thomas L. **Lagrange and the Mechanics of Power**. Princeton, NJ: Princeton University Press, 1985.

LAGRANGE, JL de. Méchanique analitique, chez la veuve desaint, libraire, rue du foin s. **Jacques, Paris**, 1788.

LIMA, E. L. **Geometria analítica e álgebra linear**. Rio de Janeiro: IMPA, 2014. (Coleção Matemática Universitária).

LIMA, L. A. M.; MIRANDA, S. R. F. Problema da catenária: história, solução e aplicações. **Revista Matemática e Ciência**, v. 4, n. 1, p. 37–51, 2021.

MENDES, Marlon Freitas. A curva catenária como aplicação da função exponencial. Universidade Federal de São Carlos, 2017.

NOVELLO, Mario. **Além do Espaço-Tempo**. Petrópolis: Vozes, 2012.

OCHSENDORF, John Allen. **Collapse of masonry structures**. Tese (Doutorado), 2002.

PINDYCK ROBERT S E RUBINFELD, Daniel L e Rabasco Esther. **Microeconomia**. [S.l.]: Pearson Educación, 2013.

PIRES, Lillian Moreira. Geometria da curva catenária utilizando conceitos de cálculo diferencial e integral. Universidade Estadual de Goiás, 2022.

ROBERTO, DANTE Luiz. Matemática: contexto e aplicações. **São Paulo: Ática**, 2016.

ROCHA, Josefa Itailma da; SANTOS, Celine Ingrid Gomes dos; RODRIGUES, Laryssa Kely Alves. Catenária: a corda bamba da matemática e suas aplicações. In: **Anais do Conedu**. [S.l.: s.n.], 2023.

SOUSA, Bárbara Kaline de. **Cônicas não degeneradas: dedução de equações**. 158. p. Monografia (Especialização em Matemática) — Instituto Federal de Educação da Paraíba (IFPB), Cajazeiras - PB, 2019.

STEWART, James. **Cálculo, Volume 1**. 8ª edição. ed. São Paulo: Cengage Learning, 2015. ISBN 9788522110502.

STEWART, James. **Cálculo, Volume 2**. 8ª edição. ed. São Paulo: Cengage Learning, 2015. ISBN 9788522110502.

TALAVERA, Leda Maria Bastoni. **Parábola e catenária: história e aplicações.** Tese (Doutorado) — Universidade de São Paulo, 2008.

TYSON, Neil deGrasse. **Astrophysics for People in a Hurry**. [S.l.]: WW Norton & Company, 2017.

WATKIN, David. **A History of Western Architecture**. London: Laurence King Publishing, 2005.

WIKIPEDIA. **Arquimedes**. 2024. Acessado em: 05 out. 2024. Disponível em: <https://pt.wikipedia.org/wiki/Arquimedes>.

WIKIPEDIA. **Chistiaan Huygens**. 2024. Acessado em: 05 out. 2024. Disponível em: <https://pt.wikipedia.org/wiki/Chistiaan_Huygens>.

WIKIPEDIA. **Galileu Galilei**. 2024. Acessado em: 05 out. 2024. Disponível em: <https://pt.wikipedia.org/wiki/Galileu_Galilei>.

YATES, R. C. **Curves and their properties**. New York: National Council of Teachers of America, 1974.

INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA DA PARAÍBA
Campus Cajazeiras - Código INEP: 25008978
Rua José Antônio da Silva, 300, Jardim Oásis, CEP 58.900-000, Cajazeiras (PB)
CNPJ: 10.783.898/0005-07 - Telefone: (83) 3532-4100

Documento Digitalizado Ostensivo (Público)

Trabalho de Conclusão de Curso de Maria Fernanda Aragão de Lima

Assunto:	Trabalho de Conclusão de Curso de Maria Fernanda Aragão de Lima
Assinado por:	Fernanda Lima
Tipo do Documento:	Anexo
Situação:	Finalizado
Nível de Acesso:	Ostensivo (Público)
Tipo do Conferência:	Cópia Simples

Documento assinado eletronicamente por:

- **Maria Fernanda Aragão de Lima, ALUNO (201912020023) DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA - CAJAZEIRAS**, em 09/10/2024 18:16:25.

Este documento foi armazenado no SUAP em 09/10/2024. Para comprovar sua integridade, faça a leitura do QRCode ao lado ou acesse https://suap.ifpb.edu.br/verificar-documento-externo/ e forneça os dados abaixo:

Código Verificador: 1272845
Código de Autenticação: f1abfa7724