



INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA DA PARAÍBA
CURSO SUPERIOR DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

ALLYSSON FERNANDES VIEIRA

**QUATRO MANEIRAS DIFERENTES DE DEMONSTRAR A
FÓRMULA DO CÁLCULO DA ÁREA DE UM TRIÂNGULO
NO PLANO CARTESIANO OXY A PARTIR DAS
COORDENADAS DE SEUS VÉRTICES**

CAMPINA GRANDE – PB

2025

ALLYSSON FERNANDES VIEIRA

**QUATRO MANEIRAS DIFERENTES DE DEMONSTRAR A FÓRMULA
DO CÁLCULO DA ÁREA DE UM TRIÂNGULO NO PLANO
CARTESIANO OXY A PARTIR DAS COORDENADAS DE SEUS
VÉRTICES**

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Curso Superior de Licenciatura em Matemática do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia da Paraíba (IFPB), como requisito parcial para a obtenção do título de Licenciado em Matemática.

Orientador: Prof. Me. Weidson do A. Luna.

CAMPINA GRANDE – PB

2025

Catálogo na fonte:

Ficha catalográfica elaborada por Gustavo César Nogueira da Costa - CRB 15/479

V662q Vieira, Allysson Fernandes

Quatro maneiras diferentes de demonstrar a fórmula do cálculo da área de um triângulo no plano cartesiano OXY a partir das coordenadas de seus vértices / Allysson Fernandes Vieira. - Campina Grande, 2025.
31f. : il.

Trabalho de Conclusão de Curso (Curso Superior de Licenciatura em Matemática.) - Instituto Federal da Paraíba, 2025.

Orientador: Prof. Me. Weidson do A. Luna.

1. Ensino de Matemática 2. Geometria analítica 3. Área de triângulos 4. Demonstração matemática I. Luna, Weidson do A. II. Título.

CDU 51:371

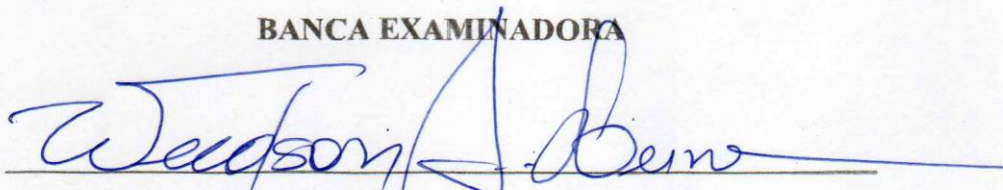
**QUATRO MANEIRAS DIFERENTES DE DEMONSTRAR A FÓRMULA
DO CÁLCULO DA ÁREA DE UM TRIÂNGULO NO PLANO
CARTESIANO OXY A PARTIR DAS COORDENADAS DE SEUS
VÉRTICES**

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado
ao Curso Superior de Licenciatura em
Matemática do Instituto Federal de Educação,
Ciência e Tecnologia da Paraíba (IFPB), como
requisito parcial para a obtenção do título de
Licenciado em Matemática.

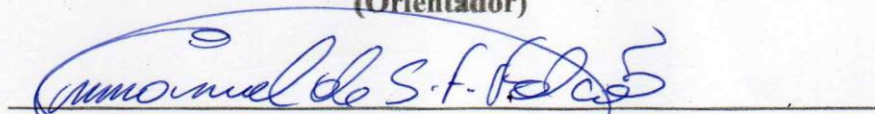
Orientador: Prof. Me. Weidson do A. Luna.

Aprovado em: 16 / 06 / 2025.

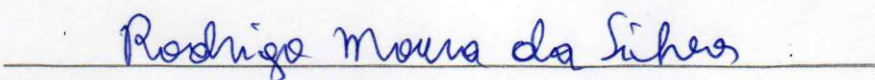
BANCA EXAMINADORA



**Prof. Me. Weidson do Amaral Luna - IFPB.
(Orientador)**



**Prof. Dr. Emmanuel de Sousa Fernandes Falcão - UFPB.
(Membro da Banca)**



**Prof. Dr. Rodrigo Moura da Silva - IFPB.
(Membro da Banca)**

“Dedico esse trabalho à Deus, a minha família, ao meu orientador e a todos que contribuíram de forma direta e indireta na conclusão desse projeto”.

AGRADECIMENTOS

Ao meu Deus que me guia e me fortalece para que eu alcance os meus objetivos.

Aos meus pais que sempre me incentivaram em meus propósitos, principalmente nos meus estudos e me ensinaram sobre humildade e perseverança.

À minha esposa Adeilma Costa Pereira, aos meus filhos Allycia Costa Vieira e Anthony Costa Vieira, que sempre estiveram ao meu lado, dispostos a facilitar minha vida, orando, tendo paciência, me incentivando, me apoiando, dando suporte emocional e por muitas vezes suprido minha ausência em função das longas horas de trabalho e estudo.

Ao meu orientador, amigo e professor Me. Weidson do Amaral Luna, pelo conhecimento compartilhado, pela experiência dividida, pelos importantes momentos de aprendizagem proporcionados, pela agradável companhia, pelas broncas, pelas insistências, por acreditar em mim todos os momentos desse trabalho, pelo seu tempo precioso compartilhado na orientação e construção desse projeto.

Aos professores do curso de licenciatura em matemática do Instituto Federal da Paraíba – IFPB, campus Campina Grande, que em algum momento compartilharam seu conhecimento e suas experiências comigo.

Aos meus amigos de turma, com quem convivi intensamente durante os últimos anos, pelo companheirismo e pela troca de experiências que me permitiram crescer não só como pessoa, mas também como formando.

A banca examinadora, pela confiança do meu trabalho, pelo respeito, por me ensinar, pela compreensão e pelos sábios conselhos sempre que a procurei para conversar.

A Instituição de ensino – IFPB, pela oportunidade e capacitação de uma nova graduação, aos seus funcionários e servidores sempre dispostos e atenciosos comigo.

“Na maior parte das ciências, uma geração põe abaixo o que a outra construiu, e o que a outra estabeleceu a outra desfaz. Somente na Matemática é que cada geração constrói um novo andar sobre a antiga estrutura”.

(Hermann Hankel)

RESUMO

Este trabalho trata-se de um manual de consulta para Professores de matemática e para alunos do curso de Licenciatura em matemática. Nele constam quatro maneiras diferentes de demonstrar a fórmula do cálculo da área de um triângulo qualquer no Plano Cartesiano OXY , a partir das coordenadas dos vértices desse triângulo. Ao mesmo tempo, este trabalho pode ser considerado uma proposta de ensino do conteúdo citado, uma vez que foi empregado todo um raciocínio-lógico nas demonstrações, além de todo um detalhamento das mesmas. Apresenta, ainda, um resgate histórico das contribuições Pierre Fermat e de René Descartes para o desenvolvimento da matemática e, especificamente, da Geometria Analítica. O que diferencia essa proposta de ensino de outras encontradas nos livros didáticos de matemática é o fato de na sua escrita ter sido usada uma linguagem que facilitasse a compreensão por parte do leitor, pelo fato de não haver “pulos” nas etapas nas demonstrações e de ter sido inserido nele um número considerável de figuras, tudo isso na perspectiva de torna o texto fluído e de fácil compreensão.

Palavras-chave: Área, Triângulo, Demonstração.

ABSTRACT

This work is a reference manual for mathematics teachers and undergraduate students in mathematics. It contains four different ways of demonstrating the formula for calculating the area of any triangle on the Cartesian plane OXY, based on the coordinates of the vertices of that triangle. At the same time, this work can be considered a teaching proposal for the aforementioned content, since logical reasoning was used in the demonstrations, in addition to a detailed description of them. It also presents a historical review of the contributions of Pierre Fermat and René Descartes to the development of mathematics and, specifically, of Analytical Geometry. What sets this teaching proposal apart from others found in mathematics textbooks is the fact that it was written in a language that facilitated understanding by the reader, since there were no “skips” in the steps of the demonstrations and a considerable number of figures were included, all with the aim of making the text fluid and easy to understand.

Keywords: Area, Triangle, Demonstration.

SUMÁRIO

1. INTRODUÇÃO	10
1.1. Contextualização	10
1.2. Justificativa	10
1.3. Objetivos	11
1.4. Metodologia	11
1.5. Público Alvo	11
1.6. Conhecimentos Prévios	11
1.7. Estrutura dos Capítulos Subsequentes	11
 2. ASPECTOS HISTÓRICOS	 13
 3. CÁLCULO DA ÁREA DE UM TRIÂNGULO	 18
 4. CONSIDERAÇÕES FINAIS	 29
 REFERÊNCIAS	 31

1. INTRODUÇÃO

Neste capítulo serão apresentados os aspectos iniciais relacionados a este trabalho, abordando, na sequência, os seguintes tópicos: a *contextualização*; a *justificativa*, os *objetivos*; a *metodologia*; o *público alvo* ao qual está direcionado; os *conhecimentos prévios* para o desenvolvimento desta proposta e a *estruturação* dos capítulos subsequentes.

1.1. CONTEXTUALIZAÇÃO

O conhecimento matemático é construído com base em métodos rigorosos de raciocínio lógico que garantem a coerência e a validade das conclusões obtidas. Entre esses métodos, destaca-se o método axiomático, um sistema de organização do saber que tem sido amplamente utilizado desde a antiguidade, especialmente na matemática e na lógica formal. O método axiomático estabelece um conjunto de princípios fundamentais — os axiomas — a partir dos quais todo o restante do conhecimento é desenvolvido. Esses axiomas são as propriedades matemáticas aceitas como verdadeiras sem demonstração. A partir deles, são estabelecidas definições, regras de inferência e, por meio do raciocínio dedutivo, é possível demonstrar proposições mais complexas, conhecidas como teoremas, [12].

Além disso, a demonstração de teoremas desempenha um papel importante na formação do pensamento lógico e crítico. Ao se envolver na demonstração, o estudante de matemática desenvolve habilidades como a análise, a generalização, a abstração e a argumentação rigorosa. É por isso que, no ensino da matemática, a demonstração ocupa um lugar tão relevante: mais do que apenas verificar que algo é verdadeiro, ela mostra por que é verdadeiro e como essa verdade se encaixa dentro de um sistema maior, [8].

1.2. JUSTIFICATIVA

Acreditamos que se tornou muito difícil encontrar nos livros didáticos de matemática do ensino básico definições matemáticas formais, teoremas e, principalmente, demonstrações, impossibilitando ao professor um estudo mais aprofundado dos conteúdos ministrados por eles em sala de aula. Nesta perspectiva, julgamos ser importante a construção de um material que possibilite ao professor de matemática se aprofundar mais na teoria envolvendo o cálculo da área de um triângulo qualquer no Plano Cartesiano OXY , a partir das coordenadas de seus vértices.

1.3. OBJETIVOS

Este trabalho tem por objetivo apresentar quatro maneiras diferentes de demonstrar a fórmula do cálculo da área de um triângulo qualquer no Plano Cartesiano OXY , a partir das coordenadas de seus vértices, tornando este material um manual de consulta para professores de matemática e para alunos do curso de Licenciatura em matemática.

Pensamos que o que diferencia esta proposta dos modelos adotados nos livros didáticos de matemática do ensino básico do nosso país é o fato de:

- Apresentarmos formalismo em toda parte teórica abordada, no entanto, sem usar palavras que prejudique a compreensão por parte do leitor;
- Usarmos todo um raciocínio lógico nas demonstrações dos teoremas;
- Não termos pulado etapas nas demonstrações.

1.4. METODOLOGIA

Para a construção deste material, foi realizada uma pesquisa bibliográfica que permitiu dar todo o embasamento teórico ao presente trabalho, assim como direcionar o trajeto do processo de investigação.

1.5. PÚBLICO-ALVO

O presente trabalho é voltado aos professores de matemática do ensino básico e aos alunos de graduação em Licenciatura em Matemática, como um manual de consulta e, ao mesmo tempo, uma proposta de ensino do conteúdo cálculo da área de um triângulo qualquer no Plano Cartesiano OXY , a partir das coordenadas de seus vértices.

1.6. CONHECIMENTOS PRÉVIOS

Admitiremos que o leitor tenha adquirido, por meio da sua intuição, do seu cotidiano, da sua formação e de sua experiência em sala de aula, conhecimentos básicos de: Álgebra, Geometria Euclidiana Plana e Geometria Analítica.

1.7. ESTRUTURA DOS CAPÍTULOS SUBSEQUENTES

O segundo capítulo – *Aspectos Históricos* – Aborda um resgate histórico das contribuições Pierre Fermat e de René Descartes para o desenvolvimento da matemática e da Geometria Analítica.

O terceiro capítulo – *Cálculo da Área de um Triângulo* – Apresenta o teorema que trata da fórmula do cálculo da área de um triângulo qualquer no Plano Cartesiano OXY , a partir das coordenadas dos vértices desse triângulo, assim como, constam quatro demonstrações diferentes de provar a sua veracidade.

O quarto capítulo – *Considerações Finais* – Concluimos que é perfeitamente possível demonstrar a fórmula do cálculo da área de um triângulo no plano cartesiano OXY , a partir das coordenadas dos vértices desse triângulo, de pelo menos quatro maneiras diferentes, deixando a cargo do Professor escolher qual ou quais levar para apresentar em sua sala de aula.

2. ASPECTOS HISTÓRICOS

Neste capítulo faremos um resgate histórico acerca das contribuições de Pierre Fermat e René Descartes para a Matemática e, principalmente, para a Geometria Analítica.

Profundas transformações científicas e tecnológicas à época em que o método Cartesiano foi desenvolvido, razão pela qual impunha-se uma matemática mais integrada ao mundo operacional. O primeiro grande passo nesse sentido foi à associação da álgebra com a geometria, empreendida independentemente por Fermat e Descartes, na criação da geometria analítica, [1].

2.1. PIERRE FERMAT

Pierre de Fermat, matemático francês do século XVII, é frequentemente lembrado por suas contribuições pioneiras à geometria analítica e à teoria dos números. Embora sua fama seja maior devido à famosa conjectura que ficou conhecida como "Último Teorema de Fermat", sua obra em geometria analítica também teve um impacto duradouro na matemática, moldando os caminhos que seriam seguidos pelos matemáticos nas gerações seguintes, [7].

Figura 2.1 – Pierre de Fermat.



Fonte: EZZI, GELSON, 2020.

Fermat foi um dos primeiros a adotar e desenvolver o uso de coordenadas para representar figuras geométricas, algo que mais tarde se tornaria o alicerce da geometria analítica, um campo que integra a álgebra com a geometria por meio de sistemas de coordenadas. O conceito de coordenadas cartesianas foi popularizado por René Descartes,

mas foi Fermat quem, de maneira mais sistemática, utilizou essas coordenadas para resolver problemas geométricos complexos, o que levou a uma revolução no campo da geometria, [7].

Entre as suas contribuições, destaca-se o uso de coordenadas para encontrar as tangentes às curvas. Fermat desenvolveu um método que permitia determinar a reta tangente a uma curva dada, algo que antes de sua contribuição era um problema consideravelmente desafiador na geometria. A partir das coordenadas de pontos na curva, ele formulou uma maneira de calcular a inclinação da reta tangente, o que o levou a estabelecer uma conexão entre geometria e álgebra de forma mais clara, [7].

Outro feito de Fermat foi ter proporcionado um grande avanço na formulação de equações para as curvas. Ele foi um dos primeiros a estudar a geometria das cônicas (como elipses, hipérbolas e parábolas) utilizando equações algébricas. Este desenvolvimento foi crucial para a matemática, pois permitiu que se desenvolvesse uma linguagem comum para descrever curvas geométricas, um passo fundamental para a geometria analítica, que viria a ser amplamente utilizada nos séculos seguintes, [7].

Fermat também contribuiu para a noção de máximos e mínimos em problemas de otimização, o que mais tarde se tornaria uma parte essencial do cálculo. Embora o cálculo, como o conhecemos hoje, tenha sido formalizado por Isaac Newton e Gottfried Wilhelm Leibniz, o trabalho de Fermat com máximos e mínimos é um precursor importante dessa teoria. Ele aplicou suas descobertas à resolução de problemas geométricos, mostrando como a matemática algébrica podia ser utilizada para abordar questões geométricas de maneira mais precisa, [7].

Em relação ao "Último Teorema de Fermat", embora o foco desse teorema não esteja diretamente na geometria analítica, o trabalho de Fermat nas décadas anteriores ao enunciado de sua conjectura refletia uma mentalidade matemática que buscava explorar e generalizar os conceitos já estabelecidos, o que abriu portas para muitas das inovações que viriam nas gerações seguintes, [7].

As contribuições de Fermat para a geometria analítica são destacadas em várias fontes matemáticas, incluindo o livro de Gelson Iezzi e outros, que exploram como as ideias de Fermat serviram de alicerce para os desenvolvimentos da matemática moderna. Segundo o referido autor, Fermat foi crucial para a transição da geometria clássica para a geometria

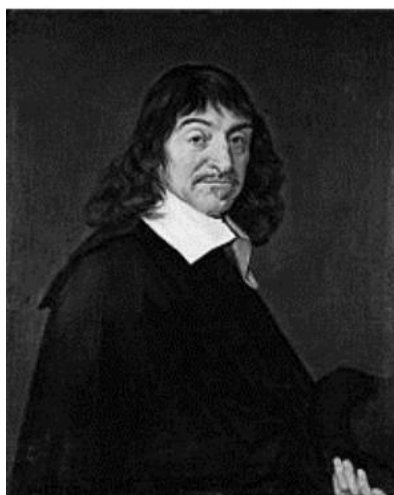
analítica, influenciando o desenvolvimento de outras áreas como o cálculo diferencial e a teoria das curvas, [12].

Em suma, Pierre de Fermat, por meio de suas inovações na geometria analítica, desempenhou um papel essencial na evolução da matemática, especialmente no que diz respeito ao uso de coordenadas e equações para descrever fenômenos geométricos. Seu trabalho, além de ser um marco no desenvolvimento da álgebra e da geometria, ajudou a estabelecer as bases para os cálculos e as análises geométricas que moldaram a matemática moderna, [7].

2.2. RENÉ DESCARTES

Ao inicia-se o século XVII a geometria ainda representava o grosso da matemática. E na geometria a contribuição de Euclides predominava. Além do mais, a geometria grega, carecendo de métodos gerais “só exercitava o entendimento ao custo de fadigar enormemente a imaginação”, conforme palavras de Descartes, [3].

Figura 2.2 - René Descartes.



Fonte: [6].

René Descartes (1596–1650) foi um dos pensadores mais influentes da história da filosofia e da matemática. Nascido em La Haye en Touraine, França, Descartes foi educado no prestigiado Collège Royal Henry-Le-Grand, onde recebeu uma formação humanista e escolástica, base para sua crítica posterior às filosofias tradicionais. Sua vida acadêmica e militar moldou sua visão racionalista e prática do mundo. Em 1618, ele ingressou no exército de Maurício de Nassau nos Países Baixos, onde teve contato mais intenso com aplicações

práticas da matemática e da engenharia. Sua experiência de vida, marcada por viagens e reflexões profundas, culminou no desenvolvimento de um novo método filosófico e científico, que influenciaria todo o pensamento ocidental subsequente, [1].

A filosofia cartesiana está estruturada a partir do princípio da dúvida metódica. Descartes propôs que todo conhecimento deveria ser submetido a uma análise rigorosa, onde apenas as verdades indubitáveis sobreviveriam ao escrutínio da razão. Esta metodologia é exposta em sua obra "Discurso do Método", publicada em 1637. Neste trabalho, Descartes afirma seu famoso cogito, "Penso, logo existo" ("Cogito, ergo sum"), estabelecendo a existência do pensamento como fundamento primeiro do saber. Para ele, a razão humana é capaz de alcançar verdades absolutas, desde que siga um método correto, baseado na análise, decomposição e síntese dos problemas. Sua concepção dualista da realidade, que distingue a substância pensante (*res cogitans*) da substância extensa (*res extensa*), foi essencial para o desenvolvimento da filosofia moderna e influenciou profundamente pensadores como Spinoza, Leibniz e Kant, [3].

No campo da matemática, René Descartes foi igualmente revolucionário. Sua principal contribuição foi a criação da geometria analítica, apresentada na obra "La Géométrie", que acompanhava o "Discurso do Método" de 1637. Antes de Descartes, a geometria e a álgebra eram campos separados da matemática: a geometria estudava figuras no espaço, enquanto a álgebra lidava com operações simbólicas. A inovação cartesiana consistiu em unificar esses dois domínios, introduzindo o conceito de representar curvas geométricas por meio de equações algébricas utilizando um sistema de coordenadas, [1].

A geometria analítica desenvolvida por Descartes foi um dos avanços mais significativos da matemática, pois transformou a abordagem aos problemas geométricos. Em vez de depender apenas de construções com régua e compasso, como na tradição Euclidiana, passou-se a estudar propriedades geométricas a partir de expressões algébricas. Descartes introduziu a ideia de um plano formado por dois eixos perpendiculares — o eixo das abscissas (x) e o eixo das ordenadas (y) — onde cada ponto é determinado por um par de coordenadas numéricas. Essa concepção, posteriormente chamada de "Plano Cartesiano", é um dos fundamentos da matemática moderna, [2].

A importância da geometria analítica reside na possibilidade de se traduzir problemas espaciais em linguagem algébrica, permitindo o uso de técnicas de álgebra para resolver

questões geométricas complexas. Além disso, ela abriu caminho para o desenvolvimento do cálculo diferencial e integral, que seriam sistematizados posteriormente por Isaac Newton e Gottfried Leibniz. Há quem diga que sem a geometria cartesiana, não seria possível construir o arcabouço matemático que sustenta a física moderna, incluindo a mecânica clássica e a teoria da relatividade, [5].

No que se refere ao método científico, Descartes também deixou uma marca permanente. Sua abordagem racionalista, que enfatizava a importância da análise sistemática e da dedução lógica, serviu como base para o método científico moderno. Embora Descartes tenha mantido certo ceticismo quanto à experimentação, sua defesa de um conhecimento fundamentado na razão e não apenas na observação empírica foi essencial para a formação das ciências naturais como as conhecemos hoje, [3].

Descartes também tentou aplicar seus princípios filosóficos e matemáticos à física. Em sua "Princípios da Filosofia", publicada em 1644, ele apresenta uma visão mecanicista do universo, onde os fenômenos naturais são explicados a partir de movimentos e choques de partículas materiais. Apesar de muitas de suas teorias físicas estarem hoje ultrapassadas, sua tentativa de criar uma física baseada em leis matemáticas influenciou decisivamente a ciência subsequente, [4]

O legado de Descartes, tanto na filosofia quanto na matemática, é imenso. Sua insistência na razão como instrumento privilegiado para a obtenção do conhecimento moldou não apenas a filosofia moderna, mas também a prática científica contemporânea. Sua geometria analítica é a base sobre a qual repousam áreas inteiras do conhecimento matemático, como a geometria diferencial, a topologia e a análise matemática.

Em síntese, René Descartes foi um verdadeiro pioneiro, cuja obra transcendeu as fronteiras disciplinares, oferecendo à humanidade um novo paradigma para pensar a realidade e compreender o universo. Seja através de seu "penso, logo existo" ou de seu plano cartesiano, sua influência é sentida até hoje em todas as áreas do saber.

3. CÁLCULO DA ÁREA DE UM TRIÂNGULO

Neste capítulo apresentaremos quatro maneiras diferentes de demonstrar a fórmula do cálculo da área de um triângulo qualquer, plotado no Plano Cartesiano OXY , a partir das coordenadas dos vértices desse triângulo. Na construção desse capítulo foram usadas as referências [6], [9], [10] e [11].

Teorema 3.1. (Cálculo da Área de um Triângulo) *Dados três pontos distintos e não colineares $A(x_A, y_A)$, $B(x_B, y_B)$ e $C(x_C, y_C)$, no Plano Cartesiano OXY , a área do triângulo por eles formado, denotada por $S_{\Delta ABC}$, é dada por:*

$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} \cdot |D_{ABC}|.$$

Em que:

$$D_{ABC} = \begin{vmatrix} x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x_C & y_C & 1 \end{vmatrix}.$$

Demonstração.

Considere o triângulo ABC da *Figura 3.1*, cujos vértices têm coordenadas $A(x_A, y_A)$, $B(x_B, y_B)$ e $C(x_C, y_C)$, inscrito no retângulo $AEFG$. Por construção, note que: $x_E = x_B$ e $y_E = y_A$; $x_F = x_B$ e $y_F = y_C$; $x_G = x_A$ e $y_G = y_C$. Assim, podemos escrever: $E(x_B, y_A)$, $F(x_B, y_C)$ e $G(x_A, y_C)$. Denotando a área do triângulo ABC por $S_{\Delta ABC}$, a área do ACG por $S_{\Delta ACG}$, a área do ABE por $S_{\Delta ABE}$, a área do BCF por $S_{\Delta BCF}$ e a área do retângulo $AEFG$ por $S_{\square AEFG}$, da Geometria Euclidiana Plana, sabemos que:

$$S_{\Delta ABC} = |S_{\square AEFG} - S_{\Delta ACG} - S_{\Delta ABE} - S_{\Delta BCF}|. \quad (3.1)$$

Em que:

- $S_{\square AEFG} = \overline{AE} \cdot \overline{EF} = (x_B - x_A) \cdot (y_C - y_A);$
- $S_{\Delta ACG} = \frac{\overline{CG} \cdot \overline{AG}}{2} = \frac{(x_C - x_A) \cdot (y_C - y_A)}{2};$
- $S_{\Delta ABE} = \frac{\overline{AE} \cdot \overline{BE}}{2} = \frac{(x_B - x_A) \cdot (y_B - y_A)}{2};$

- $S_{\Delta BCF} = \frac{\overline{CF} \cdot \overline{BF}}{2} = \frac{(x_B - x_C) \cdot (y_C - y_B)}{2}.$

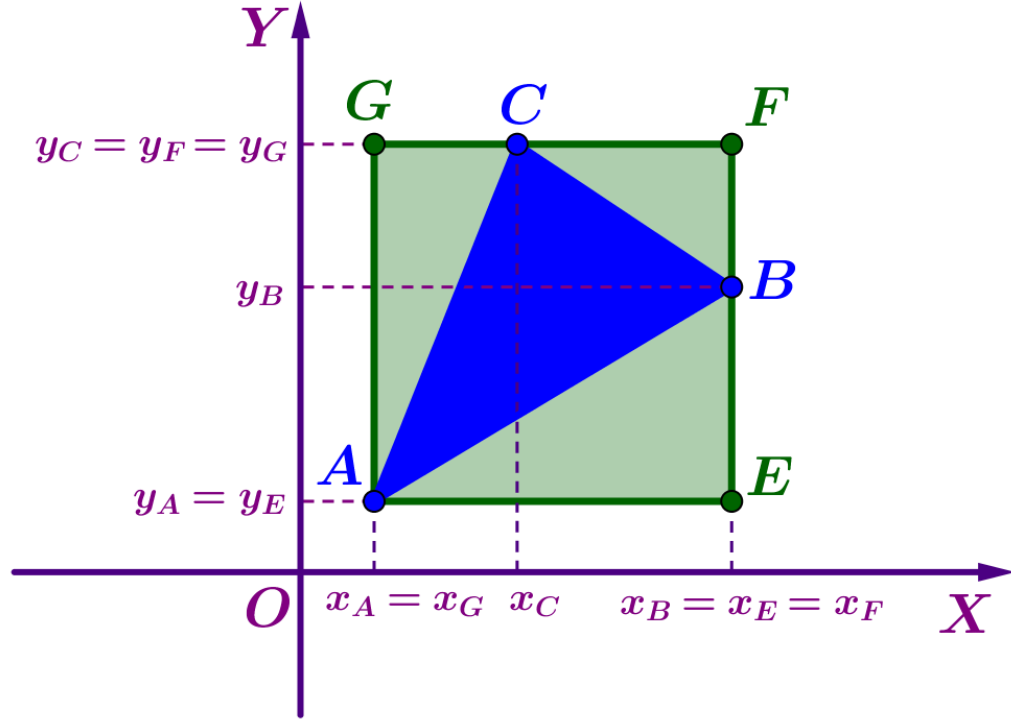


Figura 3.1: Triângulo ABC Inscrito do no Retângulo $AEFG$.

Assim:

- $S_{\square ACFG} = \frac{2x_By_C - 2x_By_A - 2x_Ay_C + 2x_Ay_A}{2};$ (3.2)

- $-S_{\Delta ACG} = \frac{-x_Cy_C + x_Cy_A + x_Ay_C - x_Ay_A}{2};$ (3.3)

- $-S_{\Delta ABE} = \frac{-x_By_B + x_By_A + x_Ay_B - x_Ay_A}{2};$ (3.4)

- $-S_{\Delta BCF} = \frac{-x_By_C + x_By_B + x_Cy_C - x_Cy_B}{2};$ (3.5)

Dáí, somando (3.2), (3.3), (3.4) e (3.5) e substituindo o resultado em (3.1), obtemos:

$$S_{\Delta ABC} = \frac{|x_Ay_B + x_Cy_A + x_By_C - x_Cy_B - x_Ay_C - x_By_A|}{2}.$$

Ou ainda:

$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} \cdot |(x_A y_B + x_C y_A + x_B y_C) - (x_C y_B + x_A y_C + x_B y_A)| \quad (3.6)$$

Agora note que:

$$[(x_A y_B + x_C y_A + x_B y_C) - (x_C y_B + x_A y_C + x_B y_A)] = \begin{vmatrix} x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x_C & y_C & 1 \end{vmatrix}.$$

Façamos, então, a seguinte consideração:

$$[(x_A y_B + x_C y_A + x_B y_C) - (x_C y_B + x_A y_C + x_B y_A)] = \begin{vmatrix} x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x_C & y_C & 1 \end{vmatrix} = D_{ABC}. \quad (3.7)$$

Logo, substituindo (3.7) em (3.6), concluímos que:

$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} \cdot |D_{ABC}|.$$

■

Teorema 3.2. (Cálculo da Área de um Triângulo) Dados três pontos distintos e não colineares $A(x_A, y_A)$, $B(x_B, y_B)$ e $C(x_C, y_C)$, no Plano Cartesiano OXY , a área do triângulo por eles formado, denotada por $S_{\Delta ABC}$, é dada por:

$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} \cdot |D_{ABC}|.$$

Em que:

$$D_{ABC} = \begin{vmatrix} x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x_C & y_C & 1 \end{vmatrix}.$$

Demonstração.

Considere o triângulo ABC da *Figura 3.2*, cujos vértices têm coordenadas $A(x_A, y_A)$, $B(x_B, y_B)$ e $C(x_C, y_C)$:

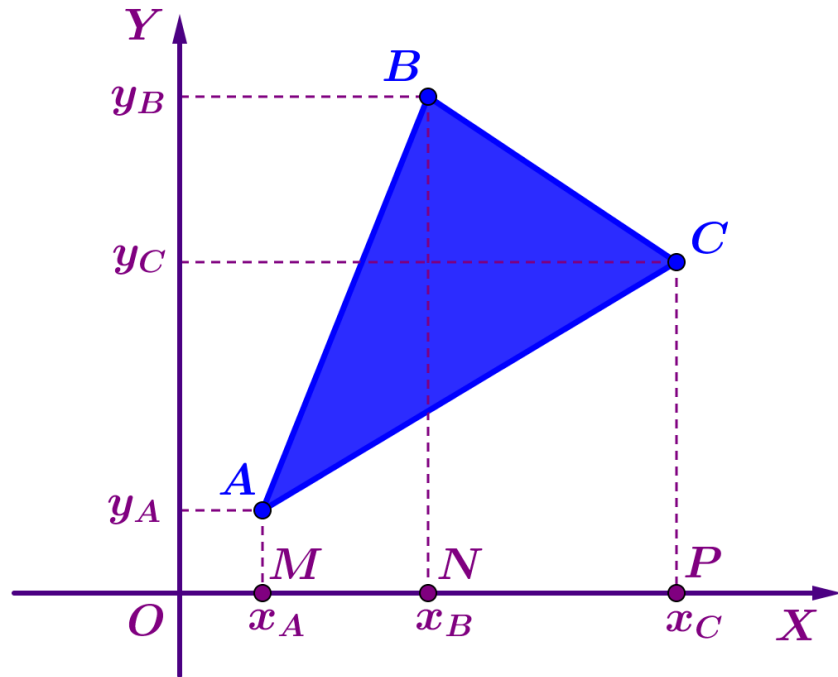


Figura 3.2: Área do Triângulo ABC .

Note que, podemos calcular a área do triângulo ABC , denotada por $S_{\Delta ABC}$, decompondo o polígono $ABCPM$ da *Figura 3.2* em três trapézios, conforme a *Figura 3.3*:

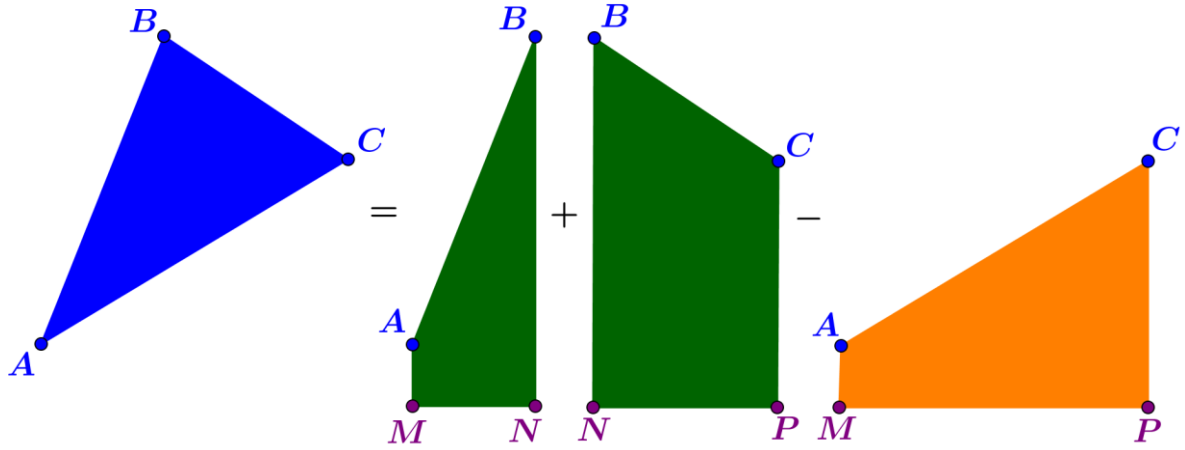


Figura 3.3: Decomposição.

Da Geometria Euclidiana Plana, sabemos que a área de um trapézio, a qual denotaremos por $S_{\text{Trapézio}}$, é dada por:

$$S_{\text{Trapézio}} = \frac{(\text{Base Maior} + \text{Base Menor}) \cdot \text{Altura}}{2}.$$

Então, de acordo com a Figura 3.3, temos:

$$S_{\Delta ABC} = |S_{\text{Trapézio}(MABN)} + S_{\text{Trapézio}(NBPC)} - S_{\text{Trapézio}(MACP)}|.$$

Assim:

$$S_{\Delta ABC} = \left| \frac{(\overline{BN} + \overline{AM}) \cdot \overline{MN}}{2} + \frac{(\overline{BN} + \overline{CP}) \cdot \overline{NP}}{2} - \frac{(\overline{CP} + \overline{AM}) \cdot \overline{MP}}{2} \right|. \quad (3.8)$$

Dáí, usando a fórmula da distância entre dois pontos para calcularmos os comprimentos dos segmentos presentes em (3.8), obtemos:

$$S_{\Delta ABC} = \frac{|[(y_B + y_A) \cdot (x_B - x_A)] + [(y_B + y_C) \cdot (x_C - x_B)] - [(y_C + y_A) \cdot (x_C - x_A)]|}{2}.$$

Por conseguinte:

$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} \cdot |(x_C y_B + x_A y_C + x_B y_A) - (x_A y_B + x_C y_A + x_B y_C)|. \quad (3.9)$$

Colocando (-1) em evidência em (3.9), temos:

$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} \cdot (-1) \cdot [(x_A y_B + x_C y_A + x_B y_C) - (x_C y_B + x_A y_C + x_B y_A)].$$

Consequentemente:

$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} |[(x_A y_B + x_C y_A + x_B y_C) - (x_C y_B + x_A y_C + x_B y_A)]|. \quad (3.10)$$

Dando continuidade, perceba que:

$$[(x_A y_B + x_C y_A + x_B y_C) - (x_C y_B + x_A y_C + x_B y_A)] = \begin{vmatrix} x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x_C & y_C & 1 \end{vmatrix}.$$

Daí, façamos, agora, a seguinte consideração:

$$[(x_A y_B + x_C y_A + x_B y_C) - (x_C y_B + x_A y_C + x_B y_A)] = \begin{vmatrix} x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x_C & y_C & 1 \end{vmatrix} = D_{ABC}. \quad (3.11)$$

Logo, substituindo (3.11) em (3.10), concluimos que:

$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} \cdot |D_{ABC}|.$$

■

Teorema 3.3. (Cálculo da Área de um Triângulo) Dado um triângulo de vértices $P(x_P, y_P)$, $Q(x_Q, y_Q)$ e $R(x_R, y_R)$, num Plano Cartesiano OXY , sua área, denotada por $S_{\Delta PQR}$, é dada por:

$$S_{\Delta PQR} = \frac{1}{2} \cdot |D_{PQR}|.$$

Em que:

$$D_{\Delta PQR} = \begin{vmatrix} x_P & y_P & 1 \\ x_Q & y_Q & 1 \\ x_R & y_R & 1 \end{vmatrix}.$$

Demonstração.

Seja PQR um triângulo qualquer cujos vértices têm coordenadas $P(x_P, y_P)$, $Q(x_Q, y_Q)$ e $R(x_R, y_R)$. Seja H o pé da perpendicular baixada do ponto P sobre a reta determinada pelos pontos Q e R , a qual denotaremos de reta m . Denotando a área desse triângulo por $S_{\Delta PQR}$, da Geometria Euclidiana Plana, sabemos que:

$$S_{\Delta PQR} = \frac{1}{2} \cdot \overline{QR} \cdot \overline{HP}. \quad (3.12)$$

Em que:

$$\overline{QR} = \sqrt{(x_R - x_Q)^2 + (y_R - y_Q)^2} = \sqrt{(y_R - y_Q)^2 + (x_R - x_Q)^2}. \quad (3.13)$$

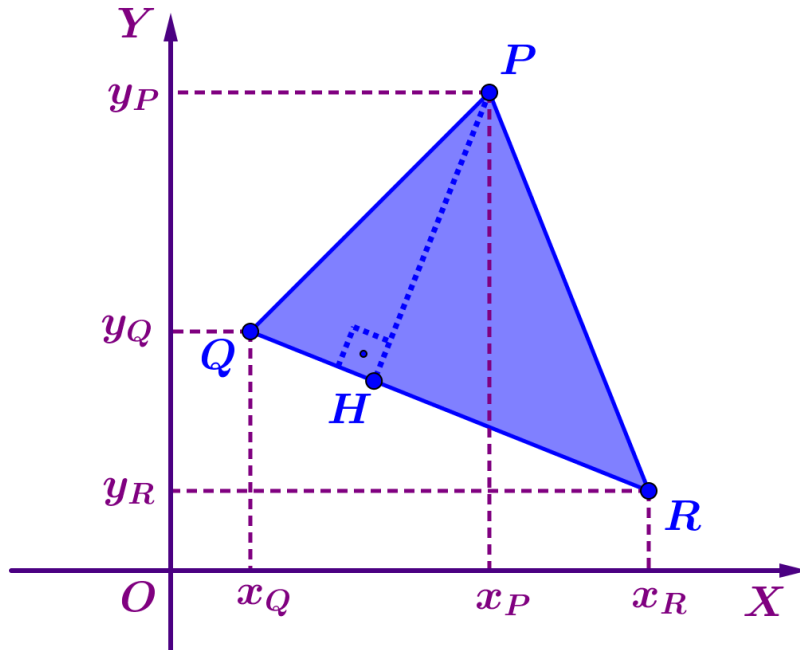


Figura 3.4: Área do Triângulo PQR .

Na perspectiva de calcularmos $\overline{HP}$, a seguir, iremos encontrar a equação geral da reta determinada pelos pontos Q e R , denotada de reta m . Assim:

$$m: \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_Q & y_Q & 1 \\ x_R & y_R & 1 \end{vmatrix} = 0. \quad (3.14)$$

Ou seja:

$$m: \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_Q & y_Q & 1 \\ x_R & y_R & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x & y \\ x_Q & y_Q \\ x_R & y_R \end{vmatrix} = 0.$$

Então:

$$m: x \cdot y_Q + x_R \cdot y + x_Q \cdot y_R - x_R \cdot y_Q - x \cdot y_R - x_Q \cdot y = 0.$$

Ou ainda:

$$m: (y_Q - y_R) \cdot x + (x_R - x_Q) \cdot y + (x_Q \cdot y_R - x_R \cdot y_Q) = 0. \quad (3.15)$$

Da Geometria Analítica, sabemos que a equação geral da reta m é dada por:

$$m: A \cdot x + B \cdot y + C = 0. \quad (3.16)$$

Daí, comparando as equações (3.15) e (3.16), temos:

$$A = (y_Q - y_R) \quad \text{e} \quad B = (x_R - x_Q).$$

Por conseguinte:

$$A^2 = (y_Q - y_R)^2 = [(-1) \cdot (y_R - y_Q)]^2 = (y_R - y_Q)^2 \quad \text{e} \quad B^2 = (x_R - x_Q)^2. \quad (3.17)$$

Na sequência, comparando (3.14) e (3.16), temos:

$$A \cdot x + B \cdot y + C = \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_Q & y_Q & 1 \\ x_R & y_R & 1 \end{vmatrix}. \quad (3.18)$$

Com isso, substituindo x por x_P e y por y_P em (3.18), temos:

$$A \cdot x_P + B \cdot y_P + C = \begin{vmatrix} x_P & y_P & 1 \\ x_Q & y_Q & 1 \\ x_R & y_R & 1 \end{vmatrix}. \quad (3.19)$$

Façamos, então, a seguinte consideração:

$$A \cdot x_P + B \cdot y_P + C = \begin{vmatrix} x_P & y_P & 1 \\ x_Q & y_Q & 1 \\ x_R & y_R & 1 \end{vmatrix} = D_{PQR}. \quad (3.20)$$

Dando continuidade a demonstração, da Geometria Analítica, sabemos que:

$$\overline{HP} = d(P, m) = \frac{|A \cdot x_P + B \cdot y_P + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}. \quad (3.21)$$

Consequentemente, substituindo (3.17) e (3.20) em (3.21), obtemos:

$$\overline{HP} = d(P, m) = \frac{|D_{PQR}|}{\sqrt{(y_R - y_Q)^2 + (x_R - x_Q)^2}}. \quad (3.22)$$

Logo, substituindo (3.13) e (3.22) em (3.12), concluimos que:

$$S_{\Delta PQR} = \frac{1}{2} \cdot \left(\sqrt{(y_R - y_Q)^2 + (x_R - x_Q)^2} \right) \cdot \left(\frac{|D_{PQR}|}{\sqrt{(y_R - y_Q)^2 + (x_R - x_Q)^2}} \right).$$

Portanto:

$$S_{\Delta PQR} = \frac{1}{2} \cdot |D_{PQR}|.$$

Em que:

$$D_{PQR} = \begin{vmatrix} x_P & y_P & 1 \\ x_Q & y_Q & 1 \\ x_R & y_R & 1 \end{vmatrix}.$$

■

Teorema 3.4. (Cálculo da Área de um Triângulo) Dado um triângulo de vértices $A(x_A, y_A, 0)$, $B(x_B, y_B, 0)$ e $C(x_C, y_C, 0)$, num Plano Cartesiano $OXYZ$, sua área, denotada por $S_{\Delta ABC}$, é dada por:

$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} \cdot |D_{ABC}|.$$

Em que:

$$D_{ABC} = \begin{vmatrix} x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x_C & y_C & 1 \end{vmatrix}.$$

Demonstração.

Seja ABC um triângulo cujos vértices têm coordenadas $A(x_A, y_A, 0)$, $B(x_B, y_B, 0)$ e $C(x_C, y_C, 0)$. Denotando a área desse triângulo por $S_{\Delta ABC}$, da Álgebra Vetorial, sabemos que:

$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} \cdot |\vec{AB} \times \vec{AC}|. \quad (3.23)$$

Em que:

$$\vec{AB} = B - A = (x_B - x_A, y_B - y_A, 0) \quad \text{e} \quad \vec{AC} = C - A = (x_C - x_A, y_C - y_A, 0).$$

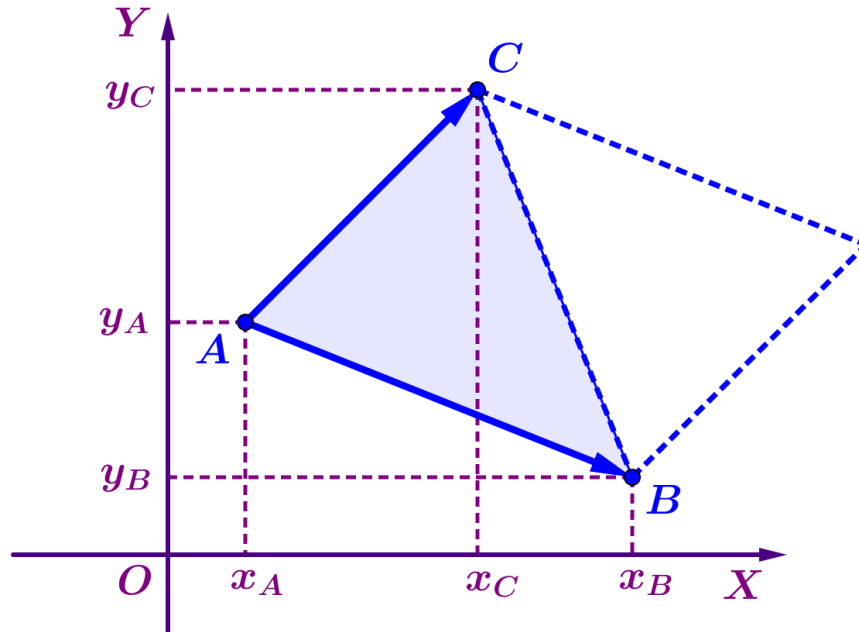


Figura 3.5: Paralelogramo Formado Pelos Vetores $\vec{AB}$ e $\vec{AC}$.

Usando o dispositivo prático para o cálculo do produto vetorial, temos:

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \overline{x_B - x_A} & \overline{y_B - y_A} & \mathbf{0} & x_B - x_A & y_B - y_A \\ \overline{x_C - x_A} & \overline{y_C - y_A} & \mathbf{0} & x_C - x_A & y_C - y_A \end{vmatrix}.$$

Assim:

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = (0, 0, [(x_B - x_A) \cdot (y_C - y_A) - (x_C - x_A) \cdot (y_B - y_A)]).$$

Daí, temos:

$$|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}| = \sqrt{(0)^2 + (0)^2 + [(x_B - x_A) \cdot (y_C - y_A) - (x_C - x_A) \cdot (y_B - y_A)]^2}.$$

Ou seja:

$$|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}| = |[(x_B - x_A) \cdot (y_C - y_A) - (x_C - x_A) \cdot (y_B - y_A)]|. \quad (3.24)$$

Agora, note que:

$$[(x_B - x_A) \cdot (y_C - y_A) - (x_C - x_A) \cdot (y_B - y_A)] = \begin{vmatrix} x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x_C & y_C & 1 \end{vmatrix}.$$

Daí, façamos, agora, a seguinte consideração:

$$[(x_B - x_A) \cdot (y_C - y_A) - (x_C - x_A) \cdot (y_B - y_A)] = \begin{vmatrix} x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x_C & y_C & 1 \end{vmatrix} = D_{ABC}. \quad (3.25)$$

Logo, substituindo (3.25) em (3.24), obtemos:

$$|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}| = |D_{ABC}|. \quad (3.26)$$

Portanto, substituindo (3.26) em (3.23), concluímos que:

$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} \cdot |D_{ABC}|.$$

■

4. CONSIDERAÇÕES FINAIS

Acreditamos que o novo formato dos livros de matemática adotados no país para o ensino básico não só compromete a qualidade do ensino do ponto de vista do aluno, como também prejudica o professor. Esse novo modelo tem se distanciado de um conteúdo teórico robusto e aprofundado, essencial para o desenvolvimento de uma compreensão plena da matemática.

A teoria abordada nesses livros passou a ser mínima, com foco na resolução de problemas práticos e em atividades que priorizam a aplicação imediata, sem a devida explicação das bases teóricas que sustentam os conceitos abordados. Como resultado, o professor é levado a ensinar de maneira superficial, muitas vezes sem o tempo ou os recursos necessários para se aprofundar nos conteúdos matemáticos. Essa superficialidade no conhecimento prejudica tanto o aluno, que não consegue desenvolver uma compreensão profunda dos conceitos, quanto o próprio educador, que não tem uma fonte de consulta adequada para preparar suas aulas com a profundidade que esses conteúdos exigem.

Quando a teoria matemática é abordada de maneira superficial, o aprendizado se torna mais mecanicista, e os alunos podem se limitar a decorar procedimentos sem entender os fundamentos que os sustentam. Isso impede a formação de um raciocínio matemático crítico, que é imprescindível não apenas para o desenvolvimento acadêmico dos estudantes, mas também para sua formação como cidadãos capazes de aplicar a matemática de forma criativa e eficaz em seu cotidiano.

Acreditamos ser fundamental que os livros didáticos e os materiais de ensino voltem a priorizar a teoria e as demonstrações matemáticas no ensino. As demonstrações de teoremas não são apenas uma ferramenta para validar proposições, mas um exercício essencial para o desenvolvimento do pensamento lógico e crítico dos estudantes. Nessa perspectiva de resgatar o ensino de matemática por meio de Definições, Teoremas e Demonstrações, apresentamos, neste trabalho, quatro maneiras de demonstrar a fórmula do cálculo da área de um triângulo qualquer no Plano Cartesiano OXY , a partir das coordenadas de seus vértices.

Ao realizarmos essa abordagem, de apresentar diferentes formas de demonstrar um Teorema, pensamos que não só explicamos o conceito de área, mas também permitimos que o leitor compreenda como a geometria analítica pode ser aplicada em diferentes situações e como ela se relaciona com outras áreas da matemática, como a álgebra e a trigonometria, enriquecendo dessa forma, sua formação, tornando-o mais capaz de compreender e aplicar os

conceitos em contextos diferentes, além de desenvolver habilidades valiosas de pensamento crítico.

Por fim, considerando todo o material desenvolvido, levando em consideração os objetivos propostos, espera-se que este material esteja pronto para ser usado como fonte de consulta por professores de matemática ou alunos de Licenciatura em matemática, além de poder ser aplicado em sala de aula, pois, pois apresenta conceitos matemáticos de forma clara e acessível, preservando o rigor teórico necessário para garantir a compreensão profunda dos conteúdos.

REFERÊNCIAS

- [1] BOYER, C. B.; *História da Matemática*, 2ª edição, Edgard Blücher, São Paulo, 2012.
- [2] DESCARTES, R.; *Princípios da Filosofia*, Coleção os Pensadores, Tradução de J. Guinsburg e Bento Prado Júnior, São Paulo, Nova Cultural, 1991.
- [3] DESCARTES, R.; *Discurso do Método*, Tradução de Maria Ermantina Galvão, São Paulo, Martins Fontes, 1996.
- [4] DESCARTES, R.; *Discurso do Método*, Tradução de José Rodrigues de Almeida, São Paulo, Martin Claret, 2005.
- [5] FIONENTINI, D.; LORENZATO, S.; *Matemática na Escola: Questões e Desafios do Ensino e Aprendizagem*, Ed. Cortez, São Paulo, 2009.
- [6] IEZZI, G.; *Fundamentos de Matemática Elementar: Geometria Analítica*, Vol. 7, 6ª Edição, Editora Atual, São Paulo, 2013.
- [7] IEZZI, G.; *Matemática: Para o Ensino Médio*, 5ª Edição, Ed. Atual, São Paulo, 2020.
- [8] KUNEN, K.; *Set Theory: An Introduction to Independence Proofs*, Amsterdam: North-Holland, 1980.
- [9] LIMA, E. L.; *Coordenadas no Plano*, Coleção do Professor de Matemática, 4ª Edição, Ed. SBM, Rio de Janeiro, 2002.
- [10] SANTOS, F. J.; FERREIRA, S. F.; *Geometria Analítica*, Ed. Bookman, Porto Alegre, 2009.
- [11] SIGNORELLI, C. F.; *Matemática do 2º Grau*, Vol. 3, 2ª Edição, Ed. Ática, São Paulo, 1992.
- [12] SKOVSMOSE, O.; *Mathematics Education and Modernity: Its Impact on Cultural Practices and Society*, Dordrecht: Kluwer, 2000.

	INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA DA PARAÍBA
	Campus Campina Grande - Código INEP: 25137409
	R. Tranquilino Coelho Lemos, 671, Dinamérica, CEP 58432-300, Campina Grande (PB)
	CNPJ: 10.783.898/0003-37 - Telefone: (83) 2102.6200

Documento Digitalizado Ostensivo (Público)

Entrega TCC

Assunto:	Entrega TCC
Assinado por:	Allysson Fernandes
Tipo do Documento:	Dissertação
Situação:	Finalizado
Nível de Acesso:	Ostensivo (Público)
Tipo do Conferência:	Cópia Simples

Documento assinado eletronicamente por:

- Allysson Fernandes Vieira, DISCENTE (202111230041) DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA - CAMPINA GRANDE, em 04/07/2025 14:13:37.

Este documento foi armazenado no SUAP em 04/07/2025. Para comprovar sua integridade, faça a leitura do QRCode ao lado ou acesse <https://suap.ifpb.edu.br/verificar-documento-externo/> e forneça os dados abaixo:

Código Verificador: 1536913
Código de Autenticação: 737cce82d8

