



INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA DA PARAÍBA
CURSO SUPERIOR DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

MIROSLANDIA DIAS GOMES CORREIA DE AMORIM

RAZÕES E PROPORÇÕES, UMA ABORDAGEM TEÓRICA
COM DEMONSTRAÇÕES

CAMPINA GRANDE – PB

2025

MIROSLANDIA DIAS GOMES CORREIA DE AMORIM

**RAZÕES E PROPORÇÕES, UMA ABORDAGEM TEÓRICA COM
DEMONSTRAÇÕES**

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Curso Superior de Licenciatura em Matemática do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia da Paraíba (IFPB), como requisito parcial para a obtenção do título de Licenciado em Matemática.

Orientador: Prof. Me. Weidson do A. Luna.

CAMPINA GRANDE – PB

2025

Catálogo na fonte:
Ficha catalográfica elaborada por Gustavo César Nogueira da Costa - CRB 15/479

A452r Amorim, Miroslândia Dias Gomes Correia de
Razões e proporções, uma abordagem teórica com
demonstrações / Miroslândia Dias Gomes Correia de
Amorim. - Campina Grande, 2025.
38f. : il.

Trabalho de Conclusão de Curso (Curso Superior de
Licenciatura em Matemática.) - Instituto Federal da
Paraíba, 2025.

Orientador: Prof. Me. Weidson do A. Luna.

1. Matemática 2. Ensino de Matemática 3. Geometria
Euclidiana 4. Demonstrações matemática I. Luna,
Weidson do A. II. Título.

CDU 51:37

MIROSLANDIA DIAS GOMES CORREIA DE AMORIM

**RAZÕES E PROPORÇÕES, UMA ABORDAGEM TEÓRICA COM
DEMONSTRAÇÕES**

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado
ao Curso Superior de Licenciatura em
Matemática do Instituto Federal de Educação,
Ciência e Tecnologia da Paraíba (IFPB), como
requisito parcial para a obtenção do título de
Licenciado em Matemática.

Orientador: Prof. Me. Weidson do A. Luna.

Aprovado em: 16 / 06 / 2025.

BANCA EXAMINADORA

Documento assinado digitalmente
 **WEIDSON DO AMARAL LUNA**
Data: 18/07/2025 13:09:54-0300
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

**Prof. Me. Weidson do Amaral Luna - IFPB.
(Orientador)**

Documento assinado digitalmente
 **EMMANUEL DE SOUSA FERNANDES FALCAO**
Data: 18/07/2025 13:48:15-0300
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

**Prof. Dr. Emmanuel de Sousa Fernandes Falcão – UFPB.
(Membro da Banca)**

Documento assinado digitalmente
 **FELIPE BARBOSA CAVALCANTE**
Data: 18/07/2025 14:07:01-0300
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

**Prof. Dr. Felipe Barbosa Cavalcante - IFPB.
(Membro da Banca)**

“Dedico este trabalho a todos que acreditaram em mim e me apoiaram ao longo dessa jornada acadêmica. Aos meus familiares, que sempre me incentivaram e foram meu alicerce nos momentos difíceis. Aos amigos, que compartilharam comigo desafios e conquistas, tornando essa caminhada mais leve e significativa”.

AGRADECIMENTOS

A jornada até a conclusão deste trabalho foi marcada por desafios, aprendizados e, sobretudo, pelo apoio de pessoas incríveis, às quais expresso minha mais profunda gratidão.

Primeiramente, agradeço a Deus, por me dar força e sabedoria para seguir em frente. À minha esposa, Poliana Dantas, por seu amor, paciência e por estar sempre ao meu lado, apoiando-me em cada etapa dessa caminhada. À minha mãe, Miroslava Amorim, por seu carinho incondicional, ensinamentos e incentivo constante. À minha avó, Maria José Dias, por sua sabedoria, apoio e pelo exemplo de força e dedicação que sempre me inspirou.

Aos meus professores e orientadores, pelo conhecimento transmitido, pela dedicação e pelos ensinamentos que ultrapassam os limites acadêmicos. Sua orientação foi fundamental para a construção deste trabalho. Em especial, agradeço ao meu orientador Weidson do Amaral Luna, por sua paciência, conselhos valiosos e por me guiar com maestria ao longo deste processo.

Aos meus amigos e colegas de curso, pelo companheirismo, pelas trocas de conhecimento e pelo apoio mútuo nos momentos mais desafiadores. Ter compartilhado essa caminhada com vocês tornou tudo mais especial.

Ao Instituto Federal da Paraíba (IFPB), por proporcionar uma formação de qualidade, por sua estrutura acolhedora e pelo papel fundamental no meu desenvolvimento acadêmico e pessoal. Tenho orgulho de fazer parte desta instituição.

À CAPES (Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior), meu sincero agradecimento pelo apoio financeiro por meio da bolsa concedida ao longo dos 36 meses, que foi essencial para a continuidade dos meus estudos e para a realização deste trabalho.

Por fim, agradeço a todos que, direta ou indiretamente, contribuíram para que este momento se tornasse realidade. Cada palavra de incentivo, cada gesto de apoio e cada ensinamento recebido foram fundamentais para minha trajetória.

*“A maior glória não é nunca cair, mas sim
levantar-se toda vez que caímos”.*

(Provérbio atribuído a Confúcio)

RESUMO

Este trabalho tem por objetivo resgatar o ensino formal dos conteúdos Razão e Proporção por meio de Definições, Teoremas e Demonstrações, assim como, das aplicações desses conteúdos na Geometria Euclidiana Plana. Justifica-se a relevância desse trabalho frente o desincentivo de documentos oficiais de Educação que estão considerando aplicações práticas como mais contributivas ao desenvolvimento do pensamento matemático do que o pensamento lógico-dedutivo necessário para assimilação da Matemática. Para tanto, desenvolveu-se uma pesquisa básica, qualitativa e descritiva, fundamentada em revisão bibliográfica de onze obras, datadas entre 1991 e 2016, de livre acesso. Acreditamos que as reformas que vem ocorrendo no Ensino brasileiro nas últimas seis décadas tem tornado os livros didáticos de Matemática do Ensino Básico cada vez mais resumidos, com relação às partes teóricas dos conteúdos abordados nesses livros, acarretando em uma escola que tende a omitir demonstrações que desenvolvem o raciocínio lógico, o que pode vir a prejudicar o estudante. Foi conclusivo que é possível demonstrar propriedades Matemáticas em linguagem acessível e o produto dessa pesquisa converte-se em um manual que visa preencher a lacuna citada, oferecendo-se como recurso de consulta e como proposta de ensino. O que diferencia essa proposta de ensino de outras encontradas nos livros didáticos de Matemática do Ensino Básico é o formalismo que usamos na abordagem dos conteúdos citados. Como possibilidades de futuras pesquisas o estudo orienta acompanhamento e sistematização deste material, direcionado aos professores de Matemática do Ensino Básico e aos alunos do curso de Licenciatura em Matemática para que os mesmos façam as devidas adaptações, apliquem em suas turmas e compartilhem com a comunidade científica os achados de suas pesquisas.

Palavras-chave: Razão, Proporção, Teoremas, Demonstrações.

ABSTRACT

This study aims to recover and deepen the formal teaching of the topics of Ratio and Proportion through Definitions, Theorems, and Proofs, as well as their applications in Plane Euclidean Geometry. Its relevance is underscored by the current trend in official educational documents to prioritize practical applications over the logical-deductive theoretical support essential for fully assimilating mathematical concepts. To this end, a basic, qualitative, and descriptive investigation was carried out, grounded in a bibliographical review of eleven freely accessible works published between 1991 and 2016. We contend that educational reforms in Brazil over the past six decades have increasingly condensed the theoretical sections in Basic Education mathematics textbooks, leading schools to omit proofs that foster logical reasoning—an omission that may hinder students' development. Our findings demonstrate that it is possible to present mathematical properties in accessible language, and the product of this research takes the form of a handbook designed to fill the identified gap, serving both as a reference resource and as a teaching proposal. What distinguishes this proposal from others found in Basic Education textbooks is the formal rigor we employ in addressing the topics. As avenues for future research, this study recommends the monitoring and systematization of this material by mathematics teachers in Basic Education and by students in undergraduate mathematics education programs, so that they may adapt it, implement it in their classrooms, and share the outcomes of this research with the scientific community.

Keywords: Ratio; Proportion; Theorems; Demonstrations.

SUMÁRIO

1. INTRODUÇÃO	11
1.1. Contextualização	11
1.2. Justificativa	11
1.3. Objetivos	11
1.4. Metodologia	12
1.5. Público Alvo	12
1.6. Conhecimentos Prévios	13
1.7. Estrutura dos Capítulos Subsequentes	13
 2. RAZÕES	 14
 3. PROPORÇÕES	 20
 4. RAZÕES E PROPORÇÕES NA GEOMETRIA EUCLIDIANA PLANA	 25
 5. CONSIDERAÇÕES FINAIS	 38
 REFERÊNCIAS	 39

1. INTRODUÇÃO

Neste capítulo serão apresentados os aspectos iniciais relacionados a este trabalho, abordando, na sequência, os seguintes tópicos: a *contextualização*; a *justificativa*; os *objetivos*; a *metodologia*; o *público alvo* ao qual está direcionado; os *conhecimentos prévios* para o desenvolvimento desta proposta e a *estruturação* dos capítulos subsequentes.

1.1. CONTEXTUALIZAÇÃO

Em 2022 passou a vigorar no Brasil a Base Nacional Curricular Comum¹ – BNCC. Esta, por sua vez, eliminou quase que completamente aquilo que ainda havia restado nos livros após a reforma chamada de “Matemática Moderna”. Com a implantação da BNCC na educação básica do nosso país, os livros mudaram completamente o foco do ensino de Matemática, deixando de lado as definições, os teoremas e, principalmente, as demonstrações, como se a compreensão das definições e o raciocínio lógico usado nas demonstrações de teoremas não mais contribuíssem com a formação e o desenvolvimento do aluno.

1.2. JUSTIFICATIVA

Com a implantação da BNCC ficou muito difícil encontrar nos livros didáticos, de Matemática do Ensino Básico, definições matemáticas formais, teoremas e, principalmente, demonstrações, impossibilitando ao professor um estudo mais aprofundado dos conteúdos ministrados por eles em sala de aula, em particular dos conteúdos de Razões e Proporções. Diante disso, acreditamos ser importante a construção de um material que possibilite ao professor se aprofundar mais na teoria envolvendo os conteúdos de Razões e Proporções.

1.3. OBJETIVOS

A finalidade deste trabalho é resgatar o ensino formal dos conteúdos razão e proporção por meio de Definições, Teorema e Demonstrações, tornando, desta forma, este material um manual de consulta para professores de Matemática do Ensino Básico e para os alunos do curso de Licenciatura em Matemática. Este trabalho também pode ser considerado uma proposta de ensino dos conteúdos citados, uma vez que a sequência dos conteúdos

¹ Disponível em: <https://basenacionalcomum.mec.gov.br/>. Acesso em: 07/05/2025.

apresentados foi cuidadosamente planejada e construída.

Pensamos que o que diferencia esta proposta dos modelos adotados nos livros didáticos, de Matemática do Ensino Básico do nosso país, é o fato de apresentarmos formalismo em toda parte teórica abordada, no entanto, sem usar palavras que prejudiquem a compreensão por parte do leitor e pelo fato de usarmos todo um raciocínio lógico nas demonstrações dos teoremas.

1.4. METODOLOGIA

Para a construção deste material, foi realizada uma pesquisa² básica, qualitativa, descritiva, com adoção de procedimentos do tipo pesquisa bibliográfica, consultando onze obras totais, subtraindo-se as menções em notas de rodapé. Das onze referências, cinco são literatura bibliográfica, datadas entre 1991 e 2013 e seis são provindas de canais oficiais do Instituto de Matemática Pura e Aplicada (Impa) direcionadas para conteúdo das Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas (OBMEP), de 2016. Os critérios de inclusão foram pesquisas cujos descritores tivessem os termos “Geometria”, “Matemática Elementar”, “Redação Matemática” e “Razão e Proporção” e foram excluídos documentos que não se filiassem a ao interstício de tempo 1990, superior, sem tais descritores.

Quanto as menções em notas de roda pé se priorizou literatura digitalizada disponível para download e acesso online no domínio scholar.google.com.br e conteúdos acessíveis no youtube.com.

Dessa forma, a adoção dos procedimentos permitiu amparar o presente trabalho, no processo de investigação bibliográfico, culminando em um manual que pode ser utilizado para professores e leitores interessados em demonstrações Matemáticas associadas a Razão e Proporção.

1.5. PÚBLICO-ALVO

O presente trabalho é direcionado aos professores de matemática do Ensino Básico e aos alunos de graduação em Lic. em Matemática, como uma proposta de ensino dos conteúdos de Razão e Proporção por meio de definições, teoremas, com suas respectivas demonstrações.

² Dentro da doutrina contemporânea de De Lunetta e Guerra (2024), cujo título é ‘Metodologias e classificação das pesquisas científicas’, e ISSN 2675-6218.
Disponível em: <https://recima21.com.br/index.php/recima21/article/view/5584/3830>; acesso em: 07/05/2025.

1.6. CONHECIMENTOS PRÉVIOS

Admitiremos que o leitor tenha adquirido, por meio de sua intuição, cotidiano, formação e experiência em sala de aula, conhecimentos básicos de Aritmética e Geometria Euclidiana Plana. Esses conhecimentos fundamentais podem ser encontrados em obras clássicas e consagradas, como “Fundamentos de Matemática Elementar” de Gelson Iezzi, Osvaldo Dolce e David Degenszajn, que aborda de forma clara e didática os princípios da Aritmética, e “Geometria Elementar” de David Hilbert, que apresenta os fundamentos da Geometria Euclidiana com rigor e profundidade.

1.7. ESTRUTURA DOS CAPÍTULOS SUBSEQUENTES

O segundo capítulo – **Razões** – Aborda a teoria envolvendo o conteúdo de Razões, com Definições, Teoremas e Demonstrações.

O terceiro capítulo – **Proporções** – Apresenta a teoria envolvendo o conteúdo de Proporções, com Definições, Teoremas e Demonstrações.

O quarto capítulo – **Razão e Proporções na Geometria Euclidiana Plana** – Constam alguns Teoremas da Geometria Euclidiana Plana, com suas respectivas Demonstrações, que envolvem Razões e Proporções.

O quinto capítulo – **Considerações Finais** – Conclui-se que, com criação e implantação da BNCC no Brasil, os livros didáticos de Matemática do Ensino Básico passaram a focar nas aplicações dos conteúdos de Matemática e não mais na teoria, sendo, portanto, importante à construção de materiais que abordem mais profundamente os conteúdos estudados neste trabalho, tornando este material um manual de consulta para Professores de Matemática do Ensino Básico e para discentes do curso de Licenciatura em Matemática.

2. RAZÕES

A razão matemática, frequentemente introduzida nos anos finais do Ensino Fundamental e retomada no Ensino Médio, é um conceito fundamental para a compreensão de diversos tópicos subsequentes da Matemática, como proporções, escalas, funções e geometria. No entanto, a forma como esse conteúdo é apresentado nos materiais didáticos atuais, em geral, privilegia aplicações práticas e situações do cotidiano, deixando em segundo plano o rigor conceitual e a fundamentação teórica que sustentam esses conhecimentos.

Diante do exposto, neste capítulo abordaremos o conteúdo de Razões propondo um olhar mais aprofundado sobre esse conteúdo, destacando suas definições formais, os teoremas associados e suas respectivas demonstrações. Nosso objetivo contribuir para a formação de um pensamento matemático mais sólido.

Na construção deste Capítulo foram usadas as referências: [3] e [4].

Definição 2.1. (*Grandezas*) Tudo que é possível contar, pesar ou medir, ou seja, tudo que é possível enumerar é chamado de grandeza.

Existem dois tipos de grandezas, a saber: *Grandezas Escalares* e *Grandezas Vetoriais*.

Definição 2.2. (*Grandezas Escalares*) Chamam-se de grandezas escalares aquelas que ficam completamente caracterizadas por apenas um número real acompanhado de uma unidade de medida.

Como exemplos de grandezas escalares, podemos citar: *comprimento, área, volume, massa, temperatura, densidade*, etc.

Definição 2.3. (*Grandezas Vetoriais*) Chamam-se de grandezas vetoriais aquelas que não ficam completamente caracterizadas apenas por um número real acompanhado de uma unidade de medida, chamado de *módulo*, mas que para ficarem perfeitamente caracterizadas são necessários também conhecer sua *direção* e seu *sentido*.

Como exemplos de grandezas vetoriais, podemos citar: *força, velocidade, aceleração*, etc.

Definição 2.4. (Razão) Dados dois números reais a e b , em que $b \neq 0$, chama-se de razão de a por b , indicada por $\frac{a}{b}$ ou $a:b$, ao quociente da divisão de a por b . O número a é chamado de *antecedente* e o número b de *consequente*.

Chamamos a atenção do leitor para a noção intuitiva de Razão: *é uma maneira de comparar duas grandezas*. Nessa comparação, as grandezas podem possuir as mesmas unidades de medida ou diferentes unidades de medida. Também pode ser uma delas vetorial e outra escalar.

No Ensino Básico, as razões surgem, inicialmente no 6º Ano do Ensino Fundamental II, como uma comparação de grandezas cujos valores são números naturais. No segundo momento, no 7º Ano do Ensino Fundamental II, essas razões passam para uma comparação de números racionais. Num terceiro momento, 9º Ano do Ensino Fundamental II, as razões passam a relacionar números irracionais com números reais, quando se está trabalhando com a trigonometria no triângulo retângulo, mais especificamente, seno, cosseno e tangente dos ângulos notáveis: 30°, 45° e 60°.

Teorema 2.5. *Se a e b são dois números reais positivos, tal que $a < b$, então:*

$$0 < \frac{a}{b} < 1.$$

Demonstração. Por hipótese, temos:

$$0 < a < b. \quad (2.1)$$

Dividindo todos os termos (2.1) por b , obtemos:

$$\frac{0}{b} < \frac{a}{b} < \frac{b}{b}.$$

Logo:

$$0 < \frac{a}{b} < 1.$$

■

Teorema 2.6. *Se a, b, c e d são quatro números reais positivos, tal que $a < b$ e $c < d$ então:*

$$0 < \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} < \frac{a}{b} \quad e \quad 0 < \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} < \frac{c}{d}.$$

Demonstração. Por hipótese, temos:

$$0 < \frac{a}{b} < 1. \quad (2.2)$$

e

$$0 < \frac{c}{d} < 1. \quad (2.3)$$

Multiplicando todos os termos (2.2) por $\left(\frac{c}{d}\right)$ e todos os termos de (2.3) por $\left(\frac{a}{b}\right)$, temos:

$$0 \cdot \frac{c}{d} < \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} < 1 \cdot \frac{c}{d} \quad e \quad \frac{a}{b} \cdot 0 < \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} < \frac{a}{b} \cdot 1.$$

Logo:

$$0 < \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} < \frac{c}{d} \quad e \quad 0 < \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} < \frac{a}{b}.$$

■

A seguir serão apresentados dois Teoremas que correlacionam dízimas periódicas e razões.

Teorema 2.7. *Se x é uma dízima periódica escrita da seguinte forma:*

$$x = a, b_1 b_2 \cdots b_m \overline{c_1 c_2 \cdots c_n},$$

em que os números: $a, b_1 b_2 \cdots b_m$ e $c_1 c_2 \cdots c_n$ são naturais e $\overline{c_1 c_2 \cdots c_n}$ é o período da dízima, $m, n \in \mathbb{N}^$, então x é um número racional que pode ser escrito da seguinte forma:*

$$x = \frac{(ab_1 b_2 \cdots b_m c_1 c_2 \cdots c_n) - (ab_1 b_2 \cdots b_m)}{\underbrace{99 \cdots 9}_n \underbrace{00 \cdots 0}_m}.$$

Demonstração. Por hipótese, temos:

$$x = a, b_1 b_2 \cdots b_m \overline{c_1 c_2 \cdots c_n}. \quad (2.4)$$

Em que os números: $a, b_1, b_2, \dots, b_m$ e $c_1, c_2, \dots, c_n$ são naturais e $\overline{c_1 c_2 \dots c_n}$ é o período da dízima. Assim, multiplicando ambos os membros de (2.4) por 10^m , $m, n \in \mathbb{N}^*$, note que a vírgula será deslocada m casas decimais direita. Com isso, obtemos:

$$10^m \cdot x = ab_1 b_2 \dots b_m, \overline{c_1 c_2 \dots c_n}. \quad (2.5)$$

Multiplicando, agora, ambos os membros de (2.5) por 10^n , note que a vírgula será deslocada n casas decimais para direita, englobando de forma um período da dízima. Daí, obtemos:

$$10^{m+n} \cdot x = ab_1 b_2 \dots b_m c_1 c_2 \dots c_n, \overline{c_1 c_2 \dots c_n}. \quad (2.6)$$

Subtraindo (2.5) de (2.6), membro a membro, temos:

$$10^{m+n} \cdot x - 10^m \cdot x = ab_1 b_2 \dots b_m c_1 c_2 \dots c_n - ab_1 b_2 \dots b_m.$$

Ou ainda:

$$10^m \cdot 10^n \cdot x - 10^m \cdot x = ab_1 b_2 \dots b_m c_1 c_2 \dots c_n - ab_1 b_2 \dots b_m. \quad (2.7)$$

Colocando $(10^m \cdot x)$ em evidência em (2.7), temos:

$$10^m \cdot x \cdot (10^n - 1) = ab_1 b_2 \dots b_m c_1 c_2 \dots c_n - ab_1 b_2 \dots b_m.$$

Note que:

$$\begin{cases} 10^1 - 1 = 9 \\ 10^2 - 1 = 99 \\ 10^3 - 1 = 999 \\ \vdots \\ 10^n - 1 = \underbrace{99 \dots 9}_n \end{cases}.$$

Com isso, substituindo a expressão $10^n - 1$ por $\underbrace{99 \dots 9}_n$ na equação anterior e isolando o x nesta equação, obtemos:

$$x = \frac{ab_1 b_2 \dots b_m c_1 c_2 \dots c_n - ab_1 b_2 \dots b_m}{\left(\underbrace{99 \dots 9}_n\right) \cdot 10^m}.$$

Logo:

$$x = \frac{(ab_1 b_2 \dots b_m c_1 c_2 \dots c_n) - (ab_1 b_2 \dots b_m)}{\underbrace{99 \dots 9}_n \underbrace{00 \dots 0}_m}.$$

E mais, como, por hipótese, $a, b_1, b_2, \dots, b_m$ e $c_1, c_2, \dots, c_n$ são naturais, então o número:

$$(ab_1 b_2 \dots b_m c_1 c_2 \dots c_n) - (ab_1 b_2 \dots b_m)$$

também é um número natural. Portanto, x é um número racional. ■

Corolário 2.8. *Se x é uma dízima periódica escrita da seguinte forma:*

$$x = 0, \overline{c_1 c_2 \cdots c_n},$$

em que os números: $c_1, c_2 \cdots, c_n$ são naturais e $\overline{c_1 c_2 \cdots c_n}$ é o período da dízima, então x é um número racional que pode ser escrito da seguinte forma:

$$x = \frac{c_1 c_2 \cdots c_n}{\underbrace{99 \cdots 9}_n}.$$

Demonstração. Por hipótese, temos:

$$x = 0, \overline{c_1 c_2 \cdots c_n},$$

em que os números: $c_1, c_2 \cdots, c_n$ são naturais. Do *Teorema 2.7*, sabemos que:

$$x = \frac{(ab_1 b_2 \cdots b_m c_1 c_2 \cdots c_n) - (ab_1 b_2 \cdots b_m)}{\underbrace{99 \cdots 9}_n \underbrace{00 \cdots 0}_m}.$$

Daí, note que, em x , $a = 0$ e $b_1, b_2, \cdots, b_m$ é inexistente. Por conseguinte $m = 0$. Logo:

$$x = \frac{(0c_1 c_2 \cdots c_n) - (0)}{\underbrace{99 \cdots 9}_n}.$$

Portanto:

$$x = \frac{c_1 c_2 \cdots c_n}{\underbrace{99 \cdots 9}_n}.$$

■

No *Teorema 2.7* e no *Teorema 2.8* provamos que toda dízima periódica pode ser escrita na forma de razão entre dois números inteiros. A seguir, mostraremos que existem números que NÃO podem ser escritos na forma de razão entre dois números inteiros, esse números são chamados de números irracionais.

Teorema 2.9. *Não é possível escrever o número $\sqrt{2}$ como uma razão de dois números inteiros p e q , em que $q \neq 0$, ou seja, $\sqrt{2}$ não é um número racional.*

Demonstração. Suponhamos que seja possível escrever o número $\sqrt{2}$ como uma razão de dois números inteiros p e q , em que $q \neq 0$, ou seja, suponhamos que o número $\sqrt{2}$ seja racional. Assim, existem dois números, digamos p e q , primos entre si, tal que:

$$\sqrt{2} = \frac{p}{q}.$$

Com isso, segue que:

$$p = q \cdot \sqrt{2}. \quad (2.8)$$

Elevando ambos os membros de (2.8) ao quadrado, obtemos:

$$p^2 = 2 \cdot q^2. \quad (2.9)$$

Logo, o número p^2 é par. Como o quadrado de um número ímpar é sempre ímpar, isso implica que o número p também é par. Assim, podemos escrever o número p da seguinte forma:

$$p = 2 \cdot n, \quad (2.10)$$

em que $n \in \mathbb{N}$. Daí, substituindo (2.10) em (2.9), temos:

$$(2 \cdot n)^2 = 2 \cdot q^2.$$

Ou ainda:

$$4 \cdot n^2 = 2 \cdot q^2.$$

Ou seja:

$$q^2 = 2 \cdot n^2.$$

Logo, o número q^2 é par. Por conseguinte, o número q também é par. Com isso, chegamos num absurdo, pois o fato de p e q serem ambos os números pares contraria a nossa hipótese de que p e q são primos entre si. Portanto, $\sqrt{2}$ não é um número racional, mas sim irracional. ■

3. PROPORÇÕES

Este Capítulo tem como objetivo aprofundar o estudo sobre Proporções, com foco na clareza conceitual, na apresentação de propriedades, com suas respectivas demonstrações usando o raciocínio lógico. Acreditamos que ao compreender de forma mais rigorosa as estruturas matemáticas por trás da teoria apresentada, os professores do Ensino Básico e os estudantes de Licenciatura em Matemática estarão mais bem preparados para abordar esse conteúdo de maneira crítica, reflexiva e didaticamente eficaz.

Na construção deste Capítulo foram usadas as referências: [4], [6], [7], [8], [9], [10] e [11]

Definição 3.1. (Proporção) Dados dois conjuntos de números reais $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ e $B = \{b_1, b_2, \dots, b_n\}$, em que $n \in \mathbb{N}^*$ e $b_1 \cdot b_2 \cdot b_3 \cdots b_n \neq 0$, chama-se de proporção a toda igualdade de razões, em que os antecedentes pertencem ao conjunto A e os consequentes ao conjunto B , ou seja:

$$\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_3}{b_3} = \dots = \frac{a_n}{b_n}.$$

Teorema 3.2. Se a, b, c e d são números reais, tais que $a \cdot b \cdot c \cdot d \neq 0$ e:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d},$$

então valem as seguintes propriedades:

- a) $a \cdot d = b \cdot c$.
- b) $\frac{a+b}{b} = \frac{c+d}{d}$.
- c) $\frac{b+a}{a} = \frac{d+c}{c}$.
- d) $\frac{a-b}{b} = \frac{c-d}{d}$.
- e) $\frac{b-a}{a} = \frac{d-c}{c}$.

$$\text{f)} \quad \frac{a+c}{b+d} = \frac{a}{b} = \frac{c}{d}.$$

$$\text{g)} \quad \frac{a-c}{b-d} = \frac{a}{b} = \frac{c}{d}.$$

$$\text{h)} \quad \frac{a^2}{b^2} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d} = \frac{c^2}{d^2}.$$

Demonstração. Sejam a, b, c e d são números reais, tais que $a \cdot b \cdot c \cdot d \neq 0$ e:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}. \quad (3.1)$$

a) Multiplicando ambos os membros de (3.1) por $b \cdot d$, temos:

$$\frac{a}{b} \cdot b \cdot d = \frac{c}{d} \cdot b \cdot d.$$

Logo:

$$a \cdot d = b \cdot c.$$

Chamamos a atenção do leitor para o fato de que a recíproca do **Teorema 3.2 (a)** também é verdadeira, vejamos. Se admitirmos, por hipótese, que:

$$a \cdot d = b \cdot c \quad (3.2)$$

então, multiplicando ambos os membros de (3.2) por $\left(\frac{1}{b \cdot d}\right)$, obtemos:

$$a \cdot d \cdot \frac{1}{b \cdot d} = b \cdot c \cdot \frac{1}{b \cdot d}. \quad (3.3)$$

Logo, cancelando os fatores iguais no primeiro e no segundo membro de (3.3), concluímos que:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}.$$

■

b) Somando 1 em cada um dos membros de (3.1), segue que:

$$\frac{a}{b} + 1 = \frac{c}{d} + 1.$$

Logo:

$$\frac{a+b}{b} = \frac{c+d}{d}.$$

■

c) Da propriedade (a), sabemos que:

$$a \cdot d = b \cdot c.$$

Assim, podemos escrever:

$$\frac{b}{a} = \frac{d}{c}. \quad (3.4)$$

Aplicando a propriedade (b) em (3.4), concluímos que:

$$\frac{b+a}{a} = \frac{d+c}{c}.$$

■

d) Subtraindo 1 em cada um dos membros de (3.1), segue que:

$$\frac{a}{b} - 1 = \frac{c}{d} - 1.$$

Logo:

$$\frac{a-b}{b} = \frac{c-d}{d}.$$

■

e) Da propriedade (a), temos:

$$a \cdot d = b \cdot c.$$

Assim, podemos escrever:

$$\frac{b}{a} = \frac{d}{c}. \quad (3.5)$$

Aplicando a propriedade (d) em (3.2), concluímos que:

$$\frac{b-a}{a} = \frac{d-c}{c}.$$

■

f) Da propriedade (a), sabemos que:

$$a \cdot d = b \cdot c.$$

Assim, podemos escrever:

$$\frac{c}{a} = \frac{d}{b}. \quad (3.6)$$

Aplicando a propriedade **(b)** em **(3.6)**, obtemos:

$$\frac{c + a}{a} = \frac{d + b}{b}. \quad (3.7)$$

Aplicando a propriedade **(a)** em **(3.7)**, sabemos que:

$$(a + c) \cdot b = (b + d) \cdot a.$$

Assim, podemos escrever:

$$\frac{a + c}{b + d} = \frac{a}{b}. \quad (3.8)$$

De **(3.1)** e **(3.8)**, concluimos que:

$$\frac{a + c}{b + d} = \frac{a}{b} = \frac{c}{d}.$$

■

g) Da propriedade **(a)** sabemos que:

$$a \cdot d = b \cdot c.$$

Assim, podemos escrever:

$$\frac{a}{c} = \frac{b}{d}. \quad (3.9)$$

Aplicando a propriedade **(d)** em **(3.9)**, obtemos:

$$\frac{a - c}{c} = \frac{b - d}{d}. \quad (3.10)$$

Aplicando a propriedade **(a)** em **(3.10)**, sabemos que:

$$(a - c) \cdot d = (b - d) \cdot c.$$

Com isso, considerando que $b \neq d$, podemos escrever:

$$\frac{a - c}{b - d} = \frac{c}{d}. \quad (3.11)$$

De **(3.1)** e **(3.11)**, concluimos que:

$$\frac{a + c}{b + d} = \frac{a}{b} = \frac{c}{d}.$$

■

h) Multiplicando ambos os membros de **(3.1)** por $\left(\frac{a}{b}\right)$, segue que:

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b} = \frac{c}{d} \cdot \frac{a}{b}.$$

Logo:

$$\frac{a^2}{b^2} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}. \quad (3.12)$$

Multiplicando ambos os membros de (3.1) por $\left(\frac{c}{d}\right)$, obtemos:

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{c}{d} \cdot \frac{c}{d}.$$

Logo:

$$\frac{a \cdot c}{b \cdot d} = \frac{c^2}{d^2}. \quad (3.13)$$

Portanto, de (3.12) e (3.13), concluimos que:

$$\frac{a^2}{b^2} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d} = \frac{c^2}{d^2}.$$

■

4. RAZÕES PROPORÇÕES NA GEOMETRIA EUCLIDIANA PLANA

Iniciaremos este capítulo abordando algumas definições da Geometria Euclidiana Plana que possibilitem ao leitor compreender o famoso Teorema de Tales, o qual será apresentado neste capítulo. Dando continuidade, apresentaremos outros Teoremas correlacionados ao Teorema de Tales.

Chamamos a atenção do leitor para o fato de que todos os Teoremas apresentados e demonstrados neste capítulo envolvem Razões e/ou Proporções, tornando este capítulo uma aplicação teórica do capítulo 3 e do capítulo 4.

Na construção deste capítulo foram usadas as referências: [1], [2] e [5].

Definição 4.1. (*Feixe de Paralelas*) Um conjunto de duas ou mais retas paralelas é chamado de feixe de paralelas.

Definição 4.2. (*Transversal de um Feixe de Paralelas*) Uma reta concorrente com todas as retas de um feixe de paralelas é denominada de transversal do feixe de paralelas.

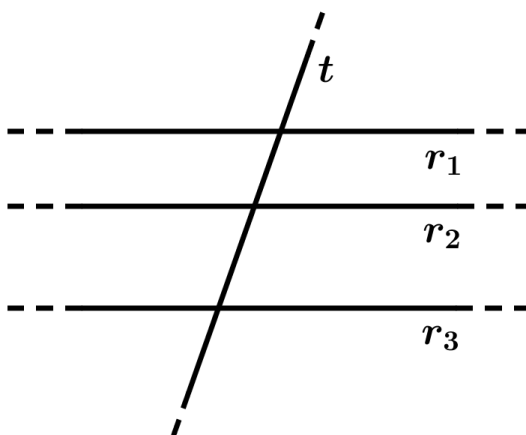


Figura 4.1: Transversal de um Feixe de Paralelas.

Definição 4.3. Pontos correspondentes de duas transversais são pontos destas transversais que estão em uma mesma reta do feixe de paralelas.

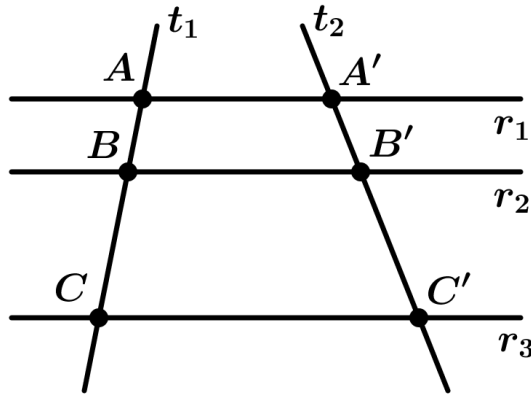


Figura 4.2: Pontos Correspondentes de Duas Transversais.

De acordo com a **Definição 4.3**, na Figura 4.2 são correspondentes das transversais t_1 e t_2 os seguintes pares de pontos: $\{A, A'\}$, $\{B, B'\}$ e $\{C, C'\}$.

Definição 4.4. Segmentos correspondentes de duas transversais são segmentos destas transversais cujas extremidades são pontos correspondentes das duas transversais.

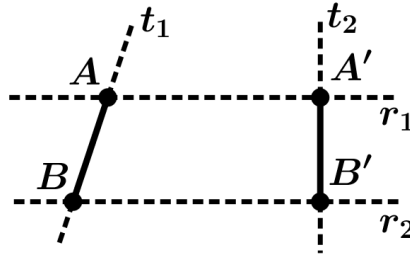


Figura 4.3: Segmentos Correspondentes de Duas Transversais.

De acordo com a **Definição 4.4**, na Figura 4.3 AB e $A'B'$ são segmentos correspondentes das transversais t_1 e t_2 .

Lema 4.5. Seja ABC um triângulo e E um ponto pertencente ao segmento BC . Denotando a área do triângulo ABE por $A_{\text{Triân. (ABE)}}$ e a área do triângulo ACE por $A_{\text{Triân. (ACE)}}$, tem-se:

$$\frac{A_{\text{Triân. (ABE)}}}{A_{\text{Triân. (ACE)}}} = \frac{\overline{BE}}{\overline{CE}}.$$

Demonstração. Seja ABC um triângulo e E um ponto pertencente ao segmento BC . Chamando de h a medida da altura do triângulo ABC , relativo ao lado BC , da **Geometria**

Euclidiana Plana, temos:

$$A_{\text{Triân. (ABE)}} = \frac{\overline{BE} \cdot h}{2} \quad \text{e} \quad A_{\text{Triân. (ACE)}} = \frac{\overline{CE} \cdot h}{2}.$$

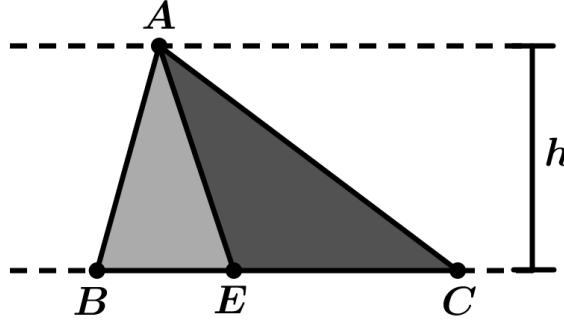


Figura 4.4: Triângulos de Mesma Altura.

Logo:

$$\frac{A_{\text{Triân. (ABE)}}}{A_{\text{Triân. (ACE)}}} = \frac{\frac{\overline{BE} \cdot h}{2}}{\frac{\overline{CE} \cdot h}{2}} = \frac{\overline{BE}}{\overline{CE}}.$$

■

Teorema 4.6. (Teorema de Tales) *Um feixe de retas paralelas determina sobre quaisquer duas transversais segmentos proporcionais.*

Demonstração. Sejam r_1 , r_2 e r_3 três retas paralelas cortadas por duas transversais, digamos t_1 e t_2 , e sejam A , B e C e A' , B' e C' pontos correspondentes dessas transversais, conforme Figura 4.5. Seja h_1 a distância entre as retas paralelas r_1 e r_2 e seja h_2 a distância entre as retas paralelas r_2 e r_3 . Tracemos os segmentos: AB' , $B'C$, $A'B$ e BC' . Pelo **Lema 4.5**, temos:

$$\frac{A_{\text{Triân. (ABB')}}}{A_{\text{Triân. (BCB')}}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} \quad \text{e} \quad \frac{A_{\text{Triân. (A'BB')}}}{A_{\text{Triân. (B'C'B)}}} = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{B'C'}}. \quad (4.1)$$

Por **Teorema da Geometria Euclidiana Plana**, temos:

$$A_{\text{Triân. (ABB')}} = \frac{\overline{BB'} \cdot h_1}{2} \quad \text{e} \quad A_{\text{Triân. (A'B'B)}} = \frac{\overline{BB'} \cdot h_1}{2}.$$

E mais:

$$A_{\text{Triân. (BCB')}} = \frac{\overline{BB'} \cdot h_2}{2} \quad \text{e} \quad A_{\text{Triân. (B'C'B)}} = \frac{\overline{BB'} \cdot h_2}{2}.$$

Por conseguinte:

$$\frac{A_{\text{Triân. } (ABB')}}{A_{\text{Triân. } (BCB')}} = \frac{\frac{\overline{BB'} \cdot h_1}{2}}{\frac{\overline{BB'} \cdot h_2}{2}} = \frac{A_{\text{Triân. } (A'B'B)}}{A_{\text{Triân. } (B'C'B)}}.$$

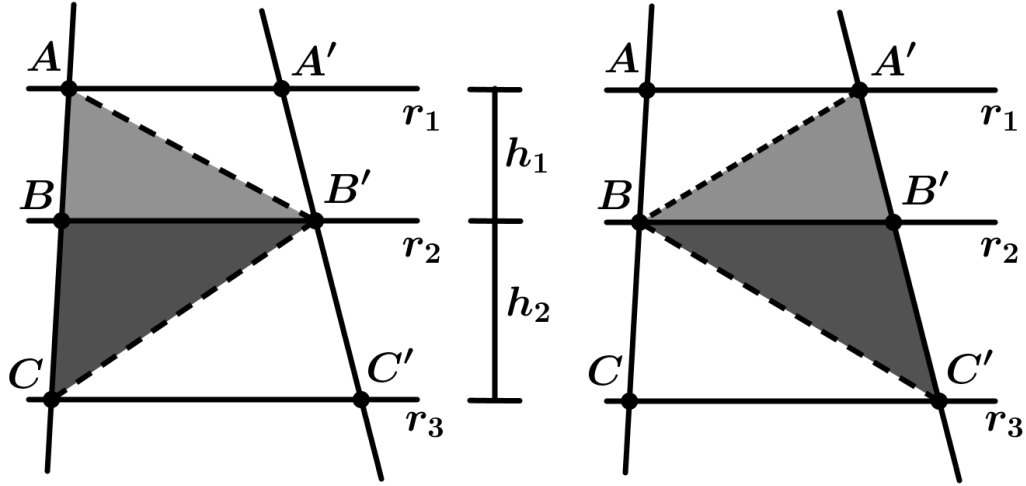


Figura 4.5: Esquema Geométrico da Demonstração.

Assim:

$$\frac{A_{\text{Triân. } (ABB')}}{A_{\text{Triân. } (BCB')}} = \frac{h_1}{h_2} = \frac{A_{\text{Triân. } (A'B'B)}}{A_{\text{Triân. } (B'C'B)}}. \quad (4.2)$$

Logo, de (4.1) e (4.2), concluímos que:

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = \frac{A_{\text{Triân. } (ABB')}}{A_{\text{Triân. } (BCB')}} = \frac{A_{\text{Triân. } (A'B'B)}}{A_{\text{Triân. } (B'C'B)}} = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{B'C'}}.$$

Portanto:

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{B'C'}}.$$

■

Teorema 4.7. Se AM e BM' são medianas que se intersectam num ponto G , de um triângulo qualquer ABC , então:

$$\frac{\overline{AG}}{\overline{GM}} = 2.$$

Demonstração. Seja ABC um triângulo qualquer, M o ponto médio do lado BC e M' o ponto médio do lado AC . Tracemos as medianas AM e BM' . Seja G o ponto de interseção dessas

medianas e seja P o ponto médio do segmento CM' . Tracemos MP . Façamos a seguinte consideração:

$$\overline{AM'} = \overline{CM'} = 2x \quad \text{e} \quad \overline{M'P} = \overline{PC} = x.$$

Note que, o segmento MP é base média do triângulo BCM' . Assim, por **Teorema da Geometria Euclidiana Plana**, temos:

$$MP \parallel BM'.$$

Daí, considerando as transversais AM e AC aos segmentos paralelos MP e BM' , pelo **Teorema de Tales, Teorema 4.6**, concluímos que:

$$\frac{\overline{AG}}{\overline{GM}} = \frac{\overline{AM'}}{\overline{M'P}} = \frac{2x}{x} = 2.$$

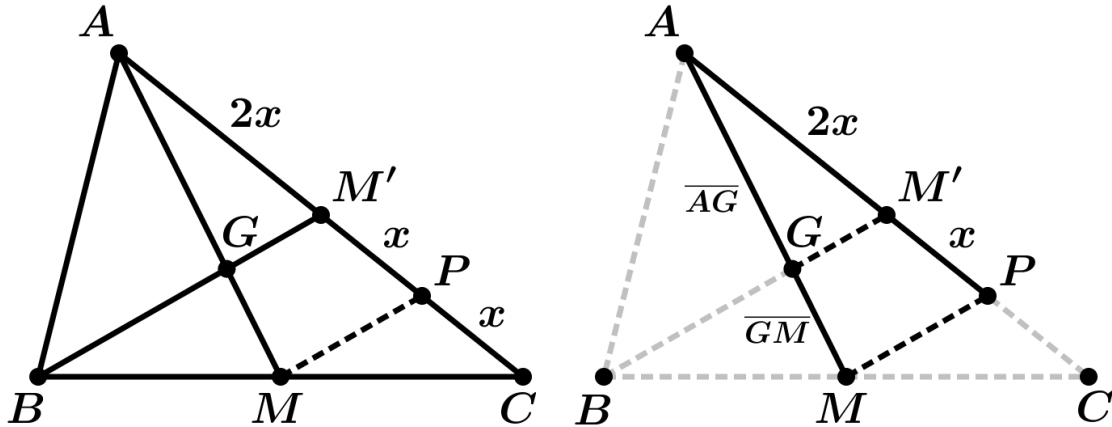


Figura 4.6: Esquema Geométrico da Demonstração.

■

Teorema 4.8. (Bissetriz Interna) Seja ABC é um triângulo qualquer. Se BD é a bissetriz do ângulo interno $\hat{B}$, em que D pertence ao segmento AC , então:

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{AD}}{\overline{CD}}.$$

Demonstração. Seja ABC um triângulo qualquer e seja BD a bissetriz do ângulo interno $\hat{B}$, em que D pertence ao segmento AC . Assim:

$$\angle ABD = \angle CBD = \alpha.$$

Pelo ponto C tracemos a reta paralela, digamos r , ao segmento BD . Seja E o ponto de

interseção de r com a semirreta S_{AB} . Como, por construção, a reta determinada pelos pontos B e D é paralela a r e estas são cortadas pela transversal AE , então, por **Teorema da Geometria Euclidiana Plana**, seus ângulos correspondentes são congruentes, ou seja:

$$\widehat{A\hat{E}C} = \widehat{A\hat{B}D} = \alpha. \quad (4.3)$$

Note que, os ângulos $\widehat{B\hat{C}E}$ e $\widehat{C\hat{B}D}$ são alternos internos. Então:

$$\widehat{B\hat{C}E} = \widehat{C\hat{B}D} = \alpha. \quad (4.4)$$

Assim, de (4.3) e (4.4), segue que:

$$\widehat{A\hat{E}C} = \widehat{B\hat{C}E} = \alpha.$$

Então, por **Teorema da Geometria Euclidiana Plana**, o triângulo BCE é isósceles de base CE . Por conseguinte:

$$\overline{BE} = \overline{BC}. \quad (4.5)$$

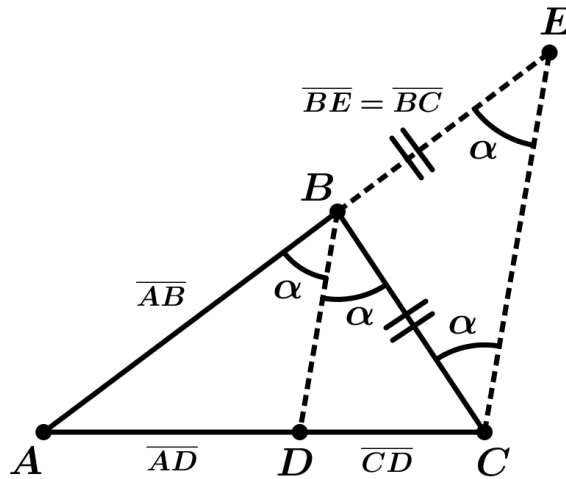


Figura 4.7: Esquema Geométrico da Demonstração.

Agora, como, por construção, os segmentos BD e CE são paralelos e estes são cortados pelas transversais AC e AE , então, pelo **Teorema de Tales**, **Teorema 4.6**, concluímos que:

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{BE}} = \frac{\overline{AD}}{\overline{DC}}. \quad (4.6)$$

Portanto, substituindo (4.5) em (4.6), concluímos que:

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{AD}}{\overline{DC}}.$$

■

Teorema 4.9. (Bissetriz Externa) Seja ABC um triângulo qualquer tal que $\overline{AB} \neq \overline{BC}$. Se BD é a bissetriz do ângulo externo $\hat{B}$, em que D pertence à reta determinada pelos pontos A e C , então:

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{AD}}{\overline{DC}}.$$

Demonstração. Seja ABC um triângulo qualquer e seja BD a bissetriz do ângulo externo $\hat{B}$, em que D pertence à reta determinada pelos pontos A e C . Na semirreta S_{AB} marquemos um ponto E tal que B esteja entre A e E , conforme *Figura 4.8*. Assim: $\hat{CBD} = \hat{DBE} = \alpha$. Pelo ponto C tracemos a reta paralela, digamos r , ao segmento BD . Seja F o ponto de interseção de r com a semirreta S_{AB} . Como, por construção, a reta r é paralela à reta determinada pelos pontos B e D e estas são cortadas pela transversal AE , então, por **Teorema da Geometria Euclidiana Plana**, seus ângulos correspondentes são congruentes, ou seja:

$$\hat{BFC} = \hat{DBE} = \alpha. \quad (4.7)$$

Note que, os ângulos $\hat{BCF}$ e $\hat{CBD}$ são alternos internos. Daí:

$$\hat{BCF} = \hat{CBD} = \alpha. \quad (4.8)$$

Por conseguinte, de (4.7) e (4.8), segue que, $\hat{BFC} = \hat{BCF} = \alpha$. Então, por **Teorema da Geometria Euclidiana Plana**, o triângulo BCE é isósceles de base CF . Por conseguinte:

$$\overline{BF} = \overline{BC}. \quad (4.9)$$

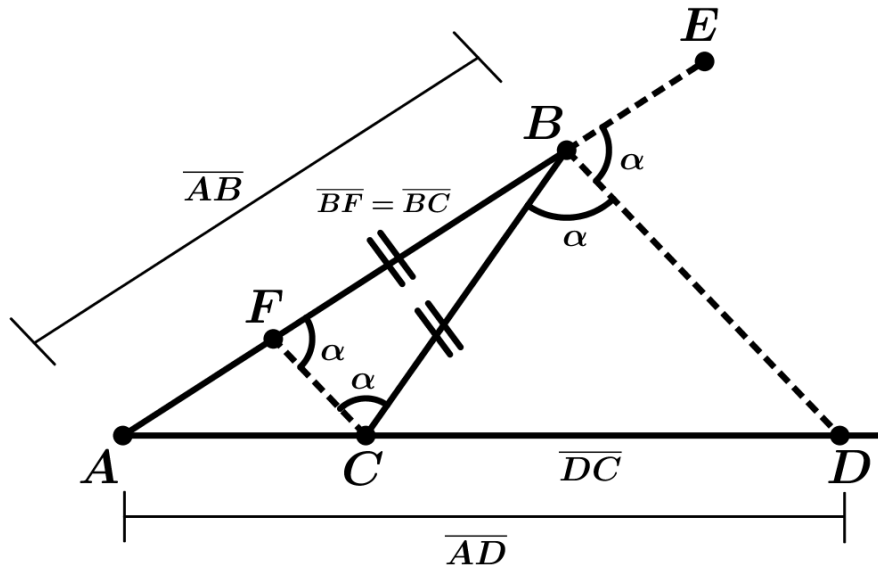


Figura 4.8: Esquema Geométrico da Demonstração.

Agora, como, por construção, os segmentos BD e CF são paralelos e estes são cortados pelas transversais AB e AD , então, pelo **Teorema de Tales**, **Teorema 4.6**, concluímos que:

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{BF}} = \frac{\overline{AD}}{\overline{DC}}. \quad (4.10)$$

Portanto, substituindo (4.9) em (4.10), concluímos que:

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{AD}}{\overline{DC}}.$$

■

Chamamos a atenção do leitor para o fato de que o conteúdo de Proporção tem muita aplicabilidade na semelhança de triângulos. A seguir, iremos apresentar a Definição de triângulos semelhantes e apresentar um dos três casos de semelhança de triângulos, por meio de um Teorema, bem como faremos a demonstração do mesmo. Deixemos claro que é possível dar continuidade a este Capítulo apresentando ainda, pelo menos, os outros dois casos de semelhança de triângulos e o Teorema que trata das relações métricas no triângulo retângulo, dentre essas relações, o Teorema de Pitágoras.

Definição 4.10. (Semelhança de Triângulos) Diz-se que dois triângulos são semelhantes se for possível estabelecer uma correspondência biunívoca entre seus vértices de modo que ângulos correspondentes sejam congruentes e lados correspondentes sejam proporcionais.

Obs. 4.11.:

- Usaremos o símbolo " $\sim$ " para representar a semelhança de triângulos;
- Se dois triângulos ABC e EFG são semelhantes e:

$$A \leftrightarrow E$$

$$B \leftrightarrow F$$

$$C \leftrightarrow G$$

é a correspondência que define a semelhança, então valem, simultaneamente, as seguintes relações:

$$\hat{A} = \hat{E}$$

$$\hat{B} = \hat{F}$$

$$\hat{C} = \hat{G}$$

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{EF}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{EG}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{FG}};$$

- Escreveremos $ABC \sim EFG$ para representar a semelhança dos triângulos ABC e EFG e para significar que esta semelhança leva A em E , B em F e C em G ;
- O quociente comum entre as medidas dos lados correspondentes dos triângulos é chamado de *razão de proporcionalidade*;
- Dois triângulos congruentes são semelhantes com razão de proporcionalidade um; inversamente, dois triângulos semelhantes com razão de proporcionalidade um são congruentes.

Teorema 4.12. (1º Caso de Semelhança de Triângulos) *Dados dois triângulos ABC e EFG , se $\hat{A} = \hat{E}$ e $\hat{B} = \hat{F}$, então os triângulos são semelhantes.*

Demonstração. Sejam ABC e EFG dois triângulos tais que:

$$\hat{A} = \hat{E} \quad \text{e} \quad \hat{B} = \hat{F}. \quad (4.11)$$

Queremos provar que:

$$\hat{C} = \hat{G} \quad \text{e} \quad \frac{\overline{AB}}{\overline{EF}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{EG}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{FG}}.$$

Sabemos, por **Teorema da Geometria Euclidiana Plana**, que a soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo qualquer é igual a 180° . Diante desse fato e de (4.11), concluímos que:

$$\hat{C} = \hat{G}.$$

Agora, façamos a seguinte consideração:

- $\overline{AB} = a$;
- $\overline{AC} = b$;
- $\overline{BC} = c$;
- $\overline{EF} = d$;
- $\overline{EG} = e$;
- $\overline{FG} = f$.

Queremos provar que:

$$\frac{a}{d} = \frac{b}{e} = \frac{c}{f}.$$

Para isso, na semirreta S_{EF} marquemos um ponto H de tal forma que:

$$\overline{EH} = \overline{AB} = a. \quad (4.12)$$

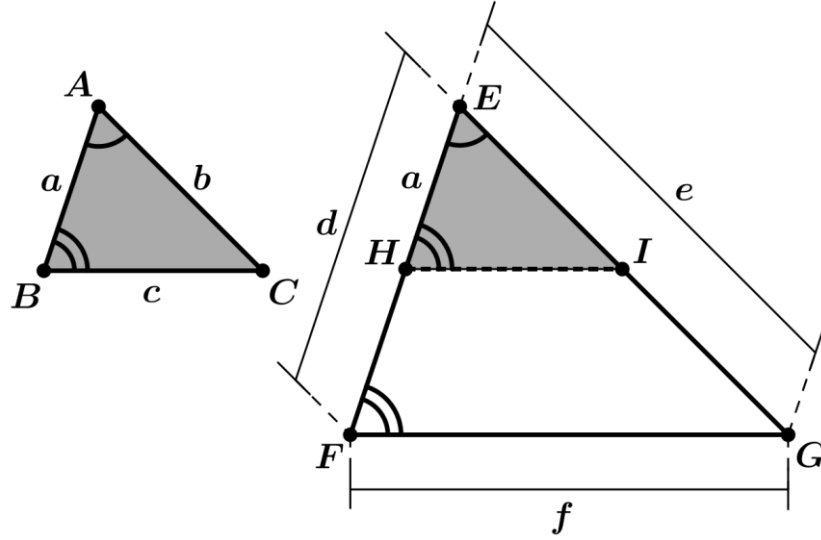


Figura 4.9: Triângulos Semelhantes.

Pelo ponto H , tracemos uma reta paralela ao lado FG . Seja I o ponto de interseção dessa reta com o lado EG . por **Teorema da Geometria Euclidiana Plana**, sabemos que ângulos correspondentes são congruentes, assim, $\widehat{EHI} = \widehat{F}$. Por hipótese, $\widehat{B} = \widehat{F}$. Então:

$$\widehat{EHI} = \widehat{B}. \quad (4.13)$$

Daí, comparando os triângulos ABC e EHI , note que:

- $\widehat{A} = \widehat{E}$ [Por hipótese, (4.11)];
- $\overline{EH} = \overline{AB} = a$ [Por construção, (4.12)];
- $\widehat{B} = \widehat{EHI}$ [De (4.13)].

Assim, pelo 2º caso de congruência de triângulos, segue que:

$$ABC = EHI.$$

Por conseguinte:

$$\overline{EI} = \overline{AC} = b \quad \text{e} \quad \overline{HI} = \overline{BC} = c.$$

Como, por construção, $HI \parallel FG$ e os lados EF e EG são transversais a essas paralelas, então, pelo **Teorema de Tales**, **Teorema 4.6**, temos:

$$\frac{\overline{EH}}{\overline{EF}} = \frac{\overline{EI}}{\overline{EG}}.$$

Ou seja:

$$\frac{a}{d} = \frac{b}{e}. \quad (4.14)$$

Agora, pelo ponto I , tracemos a reta paralela ao lado EF . Seja J o ponto de interseção dessa reta com o lado FG . Note que, por construção, o quadrilátero $HFJI$ é um paralelogramo, com isso, temos $\overline{FJ} = \overline{HI} = c$. E mais, como, por construção, $IJ \parallel EF$ e os lados EG e FG são transversais a essas paralelas, então, pelo **Teorema de Tales**, temos:

$$\frac{\overline{EI}}{\overline{EG}} = \frac{\overline{FJ}}{\overline{FG}}.$$

Ou seja:

$$\frac{b}{e} = \frac{c}{f}. \quad (4.15)$$

Logo, de (4.14) e de (4.15), concluímos que:

$$\frac{a}{d} = \frac{b}{e} = \frac{c}{f}.$$

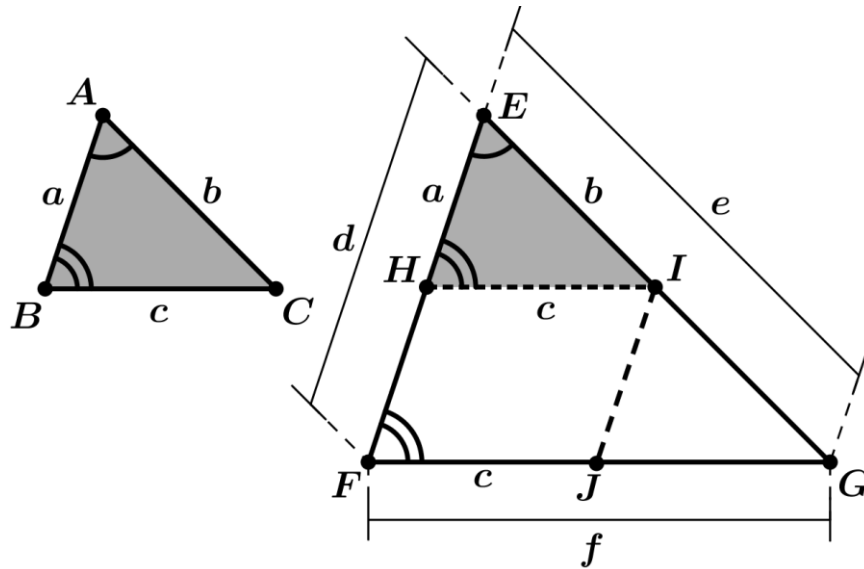


Figura 4.10: Esquema Geométrico da Demonstração.

Portanto:

$$ABC \sim EFG.$$

■

Finalizaremos este Capítulo apresentando, por meio de um Teorema uma razão muito conhecida desde tempos remotos que é a razão entre o comprimento de uma circunferência a medida de seu diâmetro. Esta razão gera um dos números mais conhecidos do mundo, o número chamado de pí, representado por π , em que $\pi = 3,141592654 \dots$. Admitiremos que a área de um círculo de raio r , denotada por $A_{\odot}$, é dada por $A_{\odot} = \pi \cdot r^2$ e provaremos que razão entre o comprimento de uma circunferência, denotado por C , e a medida de seu diâmetro, denotada por $2 \cdot r$, é igual a π , ou seja:

$$\frac{C}{2 \cdot r} = \pi.$$

Teorema 4.13. *Se C é o comprimento de uma circunferência de centro O e raio r , então:*

$$\frac{C}{2 \cdot r} = \pi.$$

Demonstração. Consideremos duas circunferências, digamos Γ e Γ' , ambas de centro O e raios, respectivamente, iguais a r e $r + \frac{1}{n}$, em que $n \in \mathbb{R}^*$, formando um coroa, conforme *Figura 4.11*:

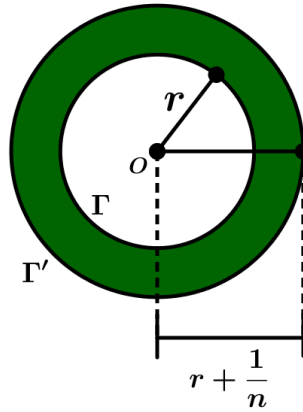


Figura 4.11: Área da Coroa Formada Por Duas Circunferências Concêntricas.

Denotando o comprimento da circunferência Γ' por C , a área da coroa por A_{Coroa} , a área da circunferência delimitada por Γ por A_{Γ} , a área circunferência delimitada Γ' por $A_{\Gamma'}$, temos:

$$A_{Coroa} = A_{\Gamma'} - A_{\Gamma}.$$

Agora, note que, quando n é um número infinitamente grande, a área da coroa é aproximadamente igual à área de um retângulo de base C e altura $\frac{1}{n}$, conforme *Figura 4.12*:

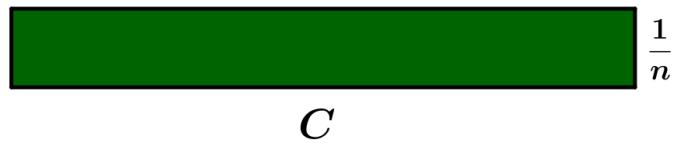


Figura 4.12: Área da Coroa Quando n é um Número Infinitamente Grande.

Assim:

$$C \cdot \frac{1}{n} = \pi \cdot \left(r + \frac{1}{n}\right)^2 - \pi \cdot r^2.$$

Então:

$$\frac{C}{n} = \pi \cdot r^2 + \frac{2 \cdot \pi \cdot r}{n} + \frac{1}{n^2} - \pi \cdot r^2.$$

Dáí:

$$C = \frac{n \cdot 2 \cdot \pi \cdot r}{n} + \frac{n}{n^2}.$$

Por conseguinte:

$$C = 2 \cdot \pi \cdot r + \frac{1}{n}.$$

Agora, note que quando n é um número infinitamente grande $\frac{1}{n} \cong 0$. Logo, concluímos que:

$$C = 2 \cdot \pi \cdot r.$$

Portanto:

$$\frac{C}{2 \cdot r} = \pi.$$

■

5. CONSIDERAÇÕES FINAIS

Com a criação da BNCC, os livros didáticos de Matemática do Ensino Básico passaram a focar nas aplicações dos conteúdos e deixaram de lado à parte teórica, em particular, as demonstrações foram totalmente abandonadas, como se o raciocínio lógico usado nas demonstrações dos teoremas matemáticos não mais contribuísse com a formação do aluno. O fato é que, para nós, esse novo formato dos livros não só compromete a qualidade do ensino do ponto de vista do aluno, como também prejudica o professor de Matemática, pois a teoria abordada nesses livros passou a ser mínima, levando o professor a ter, e a ensinar, um conhecimento superficial dos conteúdos matemáticos.

Contudo, cremos que é muito nocivo para educação o fato do professor não possuir uma fonte de consulta para preparar melhor as suas aulas e que o permita se aprofundar nos conteúdos estudados. Nessa perspectiva, resolvemos elaborar o presente trabalho como um manual de consulta para que professores de Matemática e alunos do curso de Lic. em Matemática possam se aprofundar um pouco mais nos conteúdos de Razões e Proporções e mais, ter em mãos uma proposta do ensino dos conteúdos de Razões e Proporções.

Gostaríamos de esclarecer ao leitor que a escolha dos conteúdos de Razões e Proporções se deu pelo fato destes conteúdos serem extremantes interdisciplinares, ou seja, possuem inúmeras aplicações na: *Física, Química, Geográfica, Medicina, Matemática, etc.* Salienta-se, também, que a relevância acadêmica do trabalho reside na possível contribuição ao campo da Educação Matemática, ao oferecer um recurso que integra formalismo, linguagem acessível e estratégias de ensino aplicáveis em sala de aula, servindo de base para estudos posteriores sobre seu impacto na aprendizagem e na prática docente.

Por fim, acreditamos termos atingido o nosso objetivo, pois, do nosso ponto de vista, este material está pronto para ser consultado e, ao mesmo tempo, aplicado em sala de aula, uma vez que ele apresenta definições, teoremas, demonstrações e aplicações dos conteúdos na Geometria Euclidiana Plana, tudo com uma linguagem de fácil compreensão.

REFERÊNCIAS

- [1] BARBOSA, J. L. M.; *Geometria Euclidiana Plana*, Coleção do Professor de Matemática, SBM, Rio de Janeiro - RJ, 7ª Edição, (2004).
- [2] DOLCE, O.; POMPEO, J. N.; *Fundamentos de Matemática Elementar*. Vol. 9, Ed. Atual, São Paulo - SP, 7ª Edição, 1995.
- [3] NIVEN, I.; *Números Racionais e Irracionais*, Ed. SBM, Rio de Janeiro – RJ, 1ª Edição, 1990.
- [4] LIMA, E. L; *Meu Professor de Matemática e Outras Histórias*, SBM, Rio de Janeiro - RJ, 1ª Edição, (1991).
- [5] NETO, A. C. M.; *Tópicos de Matemática Elementar*, Vol. 2, Geometria Euclidiana Plana, Coleção do Professor de Matemática, Ed. SBM, Rio de Janeiro - RJ, 2ª Edição, 2013.

PÁGINAS ELETRÔNICAS

- [6] https://www.youtube.com/watch?v=BJeEFFBc8xc&list=PLUL27jYnlTVraIu_9EvQ-dK5iytoy8O-, acesso em 06/04/2025.
- [7] <https://www.youtube.com/watch?v=XLzrXjJrwRY>, acesso em 08/04/2025.
- [8] https://www.youtube.com/watch?v=_7FZXHd4hBg, acesso em 09/04/2025.
- [9] https://www.youtube.com/watch?v=Utg_UdlvMUc, acesso em 10/04/2025.
- [10] <https://www.youtube.com/watch?v=ozlTKX9ygh4>, acesso em 11/04/2025.
- [11] <https://www.youtube.com/watch?v=d1NGOvflbos>, acesso em 12/04/2025.

	INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA DA PARAÍBA
	Campus Campina Grande - Código INEP: 25137409
	R. Tranquilino Coelho Lemos, 671, Dinamérica, CEP 58432-300, Campina Grande (PB)
	CNPJ: 10.783.898/0003-37 - Telefone: (83) 2102.6200

Documento Digitalizado Ostensivo (Público)

Entrega do TCC

Assunto:	Entrega do TCC
Assinado por:	Miroslandia Amorim
Tipo do Documento:	Tese
Situação:	Finalizado
Nível de Acesso:	Ostensivo (Público)
Tipo do Conferência:	Cópia Simples

Documento assinado eletronicamente por:

- **Miroslandia Dias Gomes Correia de Amorim, ALUNO (201911230036) DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA - CAMPINA GRANDE**, em 28/07/2025 17:31:01.

Este documento foi armazenado no SUAP em 28/07/2025. Para comprovar sua integridade, faça a leitura do QRCode ao lado ou acesse <https://suap.ifpb.edu.br/verificar-documento-externo/> e forneça os dados abaixo:

Código Verificador: 1557082
Código de Autenticação: 600d76f258

