



**INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA DA PARAÍBA
CAMPUS CAMPINA GRANDE**

GABRIEL SOARES DOS SANTOS

ALGUNS ASPECTOS TEÓRICOS DA SOLUÇÃO DE SCHWARZSCHILD

CAMPINA GRANDE – PB

2025

GABRIEL SOARES DOS SANTOS

ALGUNS ASPECTOS TEÓRICOS DA SOLUÇÃO DE SCHWARZSCHILD

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado no Curso Superior de Licenciatura em Física do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia da Paraíba (IFPB), como requisito parcial para obtenção do título de Licenciado em Física.

Orientador (a): Francisco Geraldo da Costa Filho

CAMPINA GRANDE – PB

2025

Catálogo na fonte:

Ficha catalográfica elaborada por Gustavo César Nogueira da Costa - CRB 15/479

S237a Santos, Gabriel Soares dos.

Alguns aspectos teóricos da solução de Schwarzschild /
Gabriel Soares dos Santos. - Campina Grande, 2025.
41 f.: il.

Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação em
Licenciatura em Física) - Instituto Federal da Paraíba,
2025.

Orientador: Prof. Dr. Francisco Geraldo da Costa Filho.

1. Astronomia - Buraco negro 2. Teoria da relatividade geral -
Einstein 3. Espaço-Tempo - Estrutura e propriedades. 4.
Física - Teórica I. Costa filho, Francisco Geraldo da II. Título.

CDU 52

GABRIEL SOARES DOS SANTOS

ALGUNS ASPECTOS TEÓRICOS DA SOLUÇÃO DE SCHWARZSCHILD

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado no Curso Superior de Licenciatura em Física do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia da Paraíba (IFPB), como requisito parcial para obtenção do título de Licenciado em Física.

Aprovado(a) em: 12/08/2025

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Francisco Geraldo da Costa Filho (Orientador)
IFPB – Campus Campina Grande

Prof. Dr. Maxwell Aragão Marques
IFPB – Campus Campina Grande

Prof. Dr. Carlos Henrique Araújo Bonfim Borges
IFPB – Campus Campina Grande

AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente a Deus por tudo de bom que ele tem feito na minha vida, por me guiar durante muitas dificuldades e sempre me dar forças para buscar meus sonhos e metas.

De forma especial gostaria de agradecer ao meu professor e orientador Prof. Dr. Francisco Geraldo que com toda paciência tem me orientado e inspirado a buscar novos caminhos acadêmicos, sendo uma verdadeira inspiração profissional.

Agradeço também a todos os professores que passaram por minha carreira acadêmica e que fizeram parte desta construção, servido como exemplo de comprometimento, respeito e compreensão.

Também quero agradecer aos meus pais que com tanto amor me incentivaram a estudar e por cada ação que realizaram em favor dos meus estudos, sempre acreditando no meu potencial e nas portas que a educação pode abrir.

Por fim quero agradecer a todos os meus colegas que me ajudaram durante minha jornada, por cada incentivo e palavras de confiança, por cada problema superado em conjunto, agradeço a todos com extrema alegria.

RESUMO

Este estudo trata de uma análise da “Termodinâmica de Buracos Negros”, entretanto, antes de abordar o tema central, é imprescindível resolver a equação de campo de Einstein utilizando a solução do astrofísico alemão Karl Schwarzschild, a qual passa por várias transformações coordenadas. Inicialmente, são empregadas as coordenadas Tortoise (Tartaruga), seguidas pelas coordenadas de Kruskal-Szekeres, que superam uma das limitações presentes na métrica de Schwarzschild, especificamente o ponto $r = 2GM$, conhecido como Raio de Schwarzschild. Após a explanação detalhada acerca das métricas e dos procedimentos de cálculo associados, discutimos conceitos que relacionam a termodinâmica ao âmbito dos buracos negros, resultando na formulação de algumas leis específicas para a “Termodinâmica de Buracos Negros”. Entre estas, destaca-se a lei zero, que se refere a um buraco negro estacionário no qual a aceleração superficial permanece constante ao longo do horizonte de eventos. Além disso, realiza-se uma análise interpretativa da aceleração superficial e, subsequentemente, estabelece-se uma relação entre a área do horizonte do buraco negro e sua entropia.

Palavras-chave: Métrica de Schwarzschild, Coordenadas, Buracos Negros, Termodinâmica.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1: Sistema de coordenadas de Galileu. Fonte [20]	11
Figura 2: Princípio da Equivalência. Fonte [13]	14
Figura 3: Raio de Schwarzschild. Fonte [16]	22
Figura 4: Diagramas de kruskal. Fonte [17]	26
Figura 5: Buraco negro. Fonte [7]	28

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

TRR	Teoria da Relatividade Restrita
TRG	Teoria da Relatividade Geral
MRU	Movimento Retilíneo Uniforme
r_H	Raio de Schwarzschild

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO	8-9
1 RELATIVIDADE	10
1.1 RELATIVIDADE ESPECIAL	10
1.1.1 Transformações de Galileu.....	11
1.1.2 Transformações de Lorentz.....	11-12
1.1.3 Espaço de Minkowski.....	12-13
1.2 TEORIA DA RELATIVIDADE GERAL.....	13
1.2.1 Princípio da Equivalência.....	14-15
1.2.2 Equação de campo.....	15-16
2 SOLUÇÃO GERAL DE SCHWARZSCHILD	17
2.1 MÉTRICA DE SCHWARZSCHILD.....	17-19
2.2 Solução de Schwarzschild.....	19-20
2.3 RAIOS DE SCHWARZSCHILD.....	20-22
3 MUDANÇAS DE COORDENADAS E BURACOS NEGROS	23
3.1 Coordenadas Eddington-Finkelstein (Tartaruga).....	23-24
3.2 COORDENADAS DE KRUSKAL-SZEKERES.....	25-26
3.3 HISTÓRIA DOS BURACOS NEGROS.....	27-28
3.4 BURACOS NEGROS NA ATUALIDADE	28
4 TERMODINÂMICA DE BURACOS NEGROS	29
4.1 LEI ZERO.....	29-30
4.1.1 Interpretação do K.....	30
4.2 PRIMEIRA LEI.....	30-31
4.2.1 Relação entre área e Entropia.....	31-33
CONSIDERAÇÕES FINAIS	34
REFERÊNCIAS	35-36
APÊNDICE A	37-38
APÊNDICE B	39-41

INTRODUÇÃO

Após a publicação da Teoria da Relatividade Geral por Albert Einstein em 1915, o físico alemão Karl Schwarzschild dedicou-se à resolução de uma das equações de campo propostas no trabalho. Ao aplicar uma métrica específica para espaços curvos, Schwarzschild obteve um resultado de grande relevância e utilidade para diversas aplicações dentro do âmbito da Relatividade Geral. Contudo, essa abordagem revelou a existência de duas questões fundamentais relacionadas ao sistema de coordenadas adotado, a primeira ocorre quando o valor de r é igual a $2GM$, denominando-se singularidade contornável, a segunda manifesta-se na condição em que r se iguala à zero, conhecida como singularidade irremovível, pois não pode ser eliminada ou contornada por meio de transformações coordenadas convencionais.

Ao selecionar cuidadosamente as coordenadas apropriadas, é possível contornar o problema representado pela condição $r = 2GM$ por meio de transformações coordenadas. A primeira transformação proposta recebe o nome de coordenada tartaruga, embora seja uma mudança válida, ela faz com que um dos termos assumam valor infinito, exigindo uma nova alteração no sistema. Dessa forma, utilizaremos a coordenada proposta pelo matemático e físico americano Martin David Kruskal e por George Szekeres matemático alemão, conhecida como solução de Kruskal-Szekeres, a qual resolve todos os problemas anteriores e possibilita a análise do comportamento de objetos esféricamente simétricos com uma massa M muito elevada. Posteriormente, abordamos brevemente o histórico referente aos estudos acerca de corpos sujeitos ao colapso gravitacional, os quais, devido à sua intensa gravidade, podem contrair-se além do raio de Schwarzschild. Durante o período compreendido entre 1916 e 1930, devido à escassez de comprovações teóricas e evidências visuais, poucos eram os que acreditavam na existência desses corpos.

Após a formulação da solução de Schwarzschild, foi proposta uma nova abordagem desenvolvida pelo matemático alemão Hans Reissner e pelo físico finlandês Gunnar Nordström, conhecida como solução de Reissner-Nordström, destinada a descrever o campo gerado por uma distribuição esférica de massa carregada. Em 1963, o matemático neozelandês Roy Kerr descobriu uma solução para corpos colapsados em rotação, denominada solução de Kerr. Posteriormente, essa foi estendida pelo físico americano Ezra Newman, que incorporou carga elétrica à descrição, resultando na solução de Kerr-Newman. Essas três soluções evidenciaram que os buracos negros podem ser analisados considerando componentes como massa, carga e momento angular.

Após os trabalhos apresentados anteriormente o físico britânico Stephen Hawking e o físico norte-americano Jacob David Bekenstein desenvolveram possíveis relações entre termodinâmica e a mecânica dos buracos negros.

No primeiro capítulo, discutiram-se aspectos essenciais relacionados a este estudo, incluindo a Relatividade Restrita, seus postulados fundamentais, bem como as transformações de Galileu e Lorentz. Além disso, foi introduzido o conceito de espaço de Minkowski. Posteriormente, foi apresentada a Teoria da Relatividade Geral, abordando-se o Princípio da Equivalência e a equação de campo formulada por Einstein.

No capítulo 2, abordamos a derivação da solução de Schwarzschild para a Equação de Einstein. Posteriormente, discutimos as dificuldades decorrentes da seleção da métrica adotada. Em sequência, efetuamos duas transformações de coordenadas com o objetivo de superar essas questões e obter uma solução mais apropriada.

No capítulo 3, discutimos brevemente a trajetória histórica dos buracos negros, destacando alguns físicos e matemáticos de relevância que realizaram estudos e contribuíram para o desenvolvimento desta área de investigação. Ao final deste capítulo, apresentaremos a primeira imagem registrada de um buraco negro e faremos uma breve análise do processo pelo qual esse feito foi alcançado.

No capítulo 4, examinamos a conexão entre a termodinâmica e a mecânica dos buracos negros, uma proposta desenvolvida por renomados físicos, como o físico estadunidense Jacob David Bekenstein. Para tal, empregamos aproximações fundamentadas em uma equação que descreve a entropia de um buraco negro, constatando que essa relação passa a ser considerada plausível.

1 TEORIA DA RELATIVIDADE

A teoria da relatividade foi desenvolvida pelo físico teórico alemão Albert Einstein, sendo composta pela teoria da relatividade restrita (especial) e a relatividade geral. Ambas as teorias foram desenvolvidas com o intuito de solucionar problemas físicos que perduraram até o início do século XX, época em que Einstein publicou seus trabalhos. Neste capítulo faremos uma introdução da teoria da relatividade, enfatizando principalmente a teoria da relatividade geral (TRG) que será o ponto principal deste trabalho. Neste capítulo discutimos alguns pontos importantes para a relatividade.

1.1 TEORIA DA RELATIVIDADE RESTRITA

A teoria da relatividade restrita (TRR), também conhecida como relatividade especial, foi formulada por Albert Einstein e publicada em 1905. Essa teoria, analisa as variações observadas em medições físicas efetuadas a partir de dois referenciais que se encontram em movimento relativo entre si. Um referencial físico consiste em um sistema no qual é possível realizar medições e experimentos utilizando instrumentos específicos. Na física, os referenciais utilizados são geralmente considerados inerciais, nos quais a lei da inércia se aplica: ou seja, quando um corpo, observado a partir de um referencial inercial, não está sujeito à ação de forças externas, ele permanecerá em repouso ou mover-se-á em linha reta com velocidade constante (Movimento Retilíneo Uniforme).

Do modo como Einstein apresentou sua teoria da relatividade especial, ela se baseia em dois postulados principais,

- **Primeiro postulado** (Princípio da relatividade): As leis básicas da física são as mesmas em todos os referenciais inerciais em movimento relativo uniforme.
- **Segundo postulado** (Princípio da constância da velocidade da luz): A velocidade da luz (ou qualquer radiação eletromagnética) no vácuo tem o mesmo valor para todos os referenciais inerciais.

1.1.1 Transformações de Galileu

De modo geral, o primeiro postulato da Teoria da Relatividade Restrita estabelece que as leis da física devem ser invariáveis em diferentes referenciais inerciais. Em outras palavras, em um sistema isolado, os fenômenos físicos não dependem de sua velocidade relativa; assim, não é possível determinar a velocidade de um sistema em movimento de translação uniforme mediante medições realizadas exclusivamente a partir de experiências internas. Em termos mais simples, a velocidade da Terra não pode ser detectada por observações internas ao próprio sistema terrestre. Tal princípio está alinhado ao conhecido “princípio da relatividade de Galileu”. Com base nas teorias predominantes na época, a mecânica newtoniana empregava as transformações de Galileu, expressas por:

$$x' = x - vt, \quad 1$$

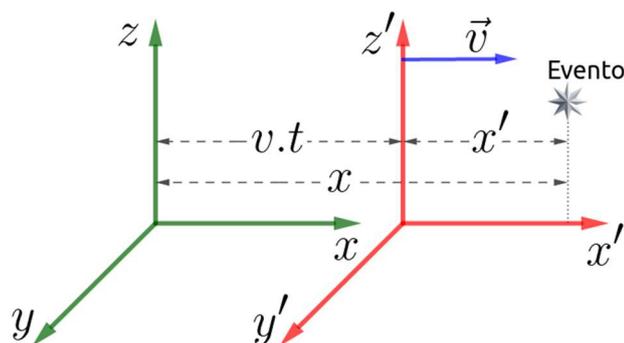
$$y' = y, \quad 1.1$$

$$z' = z, \quad 1.2$$

$$t' = t, \quad 1.3$$

As mudanças propostas por Galileu podem ser observadas na Figura 1, considerando-se referenciais inerciais, ou seja, com velocidade constante.

Figura1- Sistema de coordenadas de Galileu



Fonte: webfisica.com [20]

1.1.2 Transformações de Lorentz

Contudo, as leis da eletrodinâmica que foram desenvolvidas pelo físico e matemático James Clerk Maxwell não estavam de acordo com a mecânica newtoniana, ou seja, quando as transformações de Galileu eram aplicadas nas equações de Maxwell, os resultados encontrados

eram totalmente diferentes do que se era esperado. Com as altas velocidades comparáveis à velocidade da luz, a mecânica clássica de Newton não era satisfeita, devido a essa limitação, Einstein mediante a essa e outras necessidades utilizava de experimentos e simulações mentais para desenvolver novas ideias e descobertas. Usando o segundo postulado da TRR, o princípio da constância da luz e relacionando as coordenadas espaciais e temporais, o físico fez uso das famosas transformações de Lorentz, dadas por:

$$t' = \gamma \left(t - \frac{vx}{c^2} \right), \quad 1.4$$

$$x' = x - vt, \quad 1.5$$

$$y' = y, \quad 1.6$$

$$z' = z, \quad 1.7$$

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad 1.8$$

$$\beta = \frac{v}{c}. \quad 1.9$$

O físico neerlandês Hendrik Antoon Lorentz no ano de 1904, publicou a forma completa das transformações, buscando explicar o eletromagnetismo envolvendo corpos em movimento. O trabalho de Lorentz já era bem conhecido na época das equações de Maxwell, assim, Einstein utilizou as transformações de Lorentz nas equações de Maxwell e verificou que não houveram alterações nas leis mesmo com a mudança de referencial, diferente das transformações de Galileu, a partir desse ponto Einstein reformulou toda a noção de espaço e tempo que até então era adotada.

1.1.3 Espaço de Minkowski

Para podermos analisar como funciona a geometria do espaço-tempo da TRR, devemos fazer uso de um espaço vetorial que comporte as transformações que Lorentz desenvolveu, que esteja de acordo com as ideias de Einstein e que seja invariante para as transformações que nele forem geradas, essa ferramenta matemática é o chamado de espaço de Minkowski, essa ferramenta matemática recebeu esse nome em referência ao matemático alemão Hermann Minkowski (1909-1964). Inicialmente esse espaço matemático foi usado por Minkowski para as equações de Maxwell do eletromagnetismo, mas posteriormente essa ferramenta se mostrou muito adequada para a TRR.

Para a TRR esse espaço vetorial foi configurado de maneira em que três de suas dimensões, representassem o espaço e fossem combinadas com uma dimensão representada pelo tempo, definindo assim uma região quadridimensional chamada de espaço-tempo.

O espaço de Minkowski nada mais é que um campo vetorial que nomeia seus elementos de Quadrivetores, que são definidos pelas seguintes coordenadas:

$$x^0 = ct, \quad x^1 = x, \quad x^2 = y, \quad x^3 = z. \quad 2$$

As transformações de Lorentz dentro do espaço de Minkowski são representadas da seguinte forma:

$$x^{0'} = \gamma (x^0 - \beta x^1), \quad 2.1$$

$$x^{1'} = \gamma (x^1 - \beta x^0), \quad 2.2$$

$$x^{2'} = x^2, \quad 2.3$$

$$x^{3'} = x^3, \quad 2.4$$

Lembrando que, $\beta = \frac{v}{c}$.

Para a física-matemática o espaço de Minkowski é uma combinação de um espaço euclidiano com uma dimensão extra para envolver o tempo, ou seja, um espaço quadridimensional, em resumo, esse espaço vetorial representa o mundo real dentro da TRR.

1.2 TEORIA DA RELATIVIDADE GERAL

Após a elaboração da TRR, Einstein publicou no ano de 1915 o seu trabalho sobre a Teoria da Relatividade Geral (TRG), que modificou toda a noção de gravidade que até então eram aceitas pela comunidade científica, como por exemplo a explicação do físico Isaac Newton, que afirmava que a gravidade era uma força entre dois corpos, dependente das massas e da distância entre eles, a TRG foi elaborada por Einstein com o intuito de substituir a teoria de gravitação de Newton.

A ideia principal da TRG de Einstein, é que o espaço-tempo não é necessariamente plano como abordado na TRR, mas apresenta uma curvatura, que induziria os mesmos efeitos que os corpos em movimento sentem dentro de um campo gravitacional sugerido por Newton em um espaço plano.

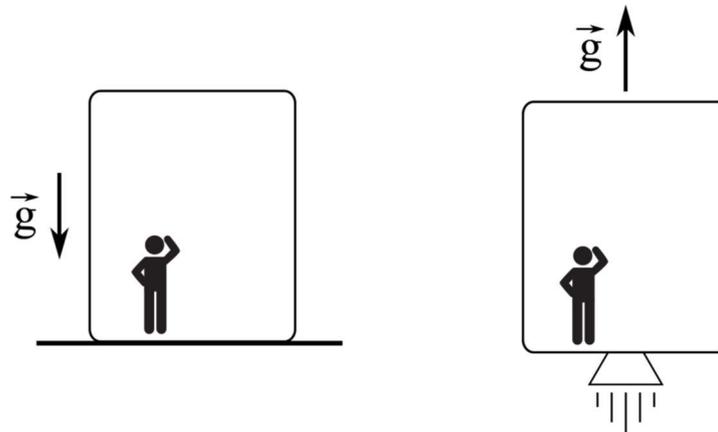
1.2.1 Princípio da Equivalência

O princípio de equivalência é uma das ideias centrais da Teoria da Relatividade Geral de Albert Einstein. Ele afirma que:

os efeitos observados em um ambiente com aceleração constante são indistinguíveis dos efeitos provocados por um campo gravitacional.

Em outras palavras, não há experimento físico local que permita distinguir entre estar em repouso num campo gravitacional ou estar acelerando de forma constante no espaço vazio [19], como mostrado na figura 2.

Figura 2- Princípio da Equivalência. Um referencial inercial em um campo gravitacional (esquerda) é equivalente a um referencial não inercial (acelerado) na ausência de um campo gravitacional.



Fonte: cursos.if.uff.br, 2019 [13].

Para compreender melhor essa ideia, imagine uma pessoa dentro de um elevador completamente fechado, sem janelas ou qualquer contato com o mundo externo. Se esse elevador estiver parado sobre a superfície da Terra, a pessoa sentirá seu peso normalmente, pressionando seus pés contra o chão do elevador. Agora, imagine que o mesmo elevador está flutuando no espaço longe de qualquer planeta, mas sendo puxado para cima com uma aceleração constante, idêntica à da gravidade terrestre. Dentro do elevador, a pessoa também sentirá seu peso do mesmo modo, como se estivesse de pé na Terra. De dentro do elevador, sem nenhuma observação externa, não é possível saber se a força sentida vem da gravidade ou da

aceleração do movimento. Essa impossibilidade de distinguir entre os dois cenários é exatamente o que o princípio de equivalência descreve.

Um experimento mental ainda mais intrigante pode ser feito considerando um feixe de luz. Imagine que, dentro do elevador acelerado no espaço, um pequeno feixe de luz entra por uma fenda na parede e se move horizontalmente de um lado ao outro. Como o elevador está se acelerando para cima, enquanto o raio avança, o chão do elevador "sobe" ligeiramente em relação à luz. Isso faz com que, para o observador dentro do elevador, o feixe pareça descrever uma curva descendente — como se estivesse sendo puxado para baixo.

Segundo o princípio de equivalência, esse desvio da luz num elevador acelerado deve ocorrer também num elevador em repouso sobre um planeta, isto é, num campo gravitacional. A conclusão inevitável é que **a gravidade pode curvar a trajetória da luz**.

Essa curvatura da luz só pode ser explicada se a própria estrutura do espaço por onde a luz viaja estiver sendo "dobrada" pela gravidade. Assim, o princípio de equivalência leva à ideia central da Relatividade Geral: a gravidade não é uma força convencional, mas sim a manifestação da curvatura do espaço-tempo causada pela presença de massa e energia.

1.2.2 Equações de Campo

Após a formulação da sua teoria relativística dos efeitos da gravidade, Einstein precisava relacionar matéria e energia à curvatura do espaço-tempo, ou seja, ele necessitava de uma explicação de como a matéria determina o campo gravitacional e como o campo afeta a própria matéria. Nesse sentido, Einstein formulou a sua famosa equação,

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = 8\pi GT_{\mu\nu}, \quad 2.8$$

onde $G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R$ é o tensor de Einstein;

$g_{\mu\nu}$ é a métrica do espaço;

$R_{\mu\nu} = \frac{\partial \Gamma_{\mu\nu}^{\lambda}}{\partial x^{\lambda}} - \frac{\partial \Gamma_{\mu\lambda}^{\nu}}{\partial x^{\nu}} - \Gamma_{\mu\nu}^{\lambda} \Gamma_{\lambda\kappa}^{\kappa} - \Gamma_{\mu\rho}^{\kappa} \Gamma_{\nu\kappa}^{\rho}$ é o tensor de Ricci;

$\Gamma_{\mu\nu}^{\rho} = \frac{1}{2}g^{\rho\lambda} \left(\frac{\partial g_{\nu\lambda}}{\partial x^{\mu}} + \frac{\partial g_{\lambda\mu}}{\partial x^{\nu}} - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^{\lambda}} \right)$ São os símbolos de Christoffel;

$R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}$ é o escalar de Ricci;

$T_{\mu\nu} = \frac{2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta L}{\delta g^{\mu\nu}}$ é o tensor energia-momento;

G é a constante gravitacional.

2 SOLUÇÃO DE SCHWARZSCHILD

Em 1915 após a publicação da Teoria da Relatividade Geral de Einstein, o astrofísico alemão Karl Schwarzschild leu o artigo e logo começou a calcular as consequências da teoria para a gravitação causada por uma estrela isolada. Assim, obteve a primeira solução exata das equações de campo de Einstein para um espaço exterior a uma distribuição simetricamente esférica de massa M [14]. Para este capítulo, abordaremos alguns pontos e aspectos gerais da solução de Schwarzschild para a equação de Einstein, que serão importantes para a compreensão deste trabalho.

2.1 MÉTRICA DE SCHWARZSCHILD

A métrica de um espaço qualquer de N dimensões nos diz quantitativamente como medir distâncias nesse espaço específico, o espaço da TRR e TRG possuem quatro dimensões sendo três coordenadas espaciais e uma temporal. O espaço da TRR é plano (euclidiano) e seu elemento de linha é dada por:

$$ds^2 = -(cdt)^2 + (dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2. \quad 2.9$$

Como proposto por Einstein, sabemos que o espaço da TRG é curvo, portanto, sua métrica deve seguir os mesmos padrões. Então, para se calcular a métrica de Schwarzschild é necessário transformar essa equação de espaço plano, em nova equação em coordenadas esféricas, da seguinte forma:

$$ds^2 = -(cdt)^2 + (dr)^2 + (rd\theta)^2 + (r \operatorname{sen}\theta d\varphi)^2. \quad 3$$

O elemento de linha mostrada acima pode ser escrito em forma matricial, e neste caso pode-se obter os chamados tensores da métrica g , que são:

$$g_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} g_{00} & g_{01} & g_{02} & g_{03} \\ g_{10} & g_{11} & g_{12} & g_{13} \\ g_{20} & g_{21} & g_{22} & g_{23} \\ g_{30} & g_{31} & g_{32} & g_{33} \end{bmatrix}_{4 \times 4}, \quad 3.1$$

$$g_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (r^2 \text{sen}\theta)^2 \end{bmatrix}. \quad 3.2$$

Os termos μ e ν assumem os valores de 0,1,2 e 3 correspondentes às coordenadas espaciais e a temporal representada pelo 0. A métrica de Schwarzschild corresponde a um espaço exterior a uma distribuição esfericamente simétrica de massa muito grande e sem rotação; a massa do Sol e de muitas outras estrelas têm esta distribuição.

A curvatura do espaço-tempo pode ser obtida matematicamente pelo tensor de Einstein que se encontra do lado esquerdo da equação de campo proposta pelo próprio Einstein e possui a seguinte forma,

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R. \quad 3.3$$

O tensor da métrica $g_{\mu\nu}$ do espaço-tempo faz o papel de campo nas equações de Einstein; $R_{\mu\nu}$ é o chamado tensor de Ricci; e R é a curvatura escalar, que se associa com os demais tensores, também conhecido como escalar de Ricci [15].

Seguindo pelas equações de Einstein, chegamos na etapa em que podemos trabalhar a parte da matéria e energia, que é obtida pelo *tensor de energia-momento* $T_{\mu\nu}$; logo, as equações se compactam da seguinte maneira,

$$G_{\mu\nu} = -k T_{\mu\nu}. \quad 3.4$$

Com o k sendo a constante gravitacional de Einstein, assumindo valor de $8\pi G/c^4$, onde G é a constante de gravitacional universal e c é a velocidade da luz no vácuo. Portanto, a equação de campo volta a ter o formato conhecido e abordado anteriormente,

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}. \quad 3.5$$

Para a solução de Schwarzschild temos $T_{\mu\nu} = 0$, pois a região analisada se encontra no vácuo. Esta solução consiste em introduzir uma função $f(r)$ qualquer dentro do elemento de linha usado para o espaço curvo, obtendo a seguinte forma,

$$ds^2 = -f(r) dt^2 + \frac{1}{f(r)} dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \text{sen}^2\theta d\varphi^2. \quad 3.6$$

Para que se possa resolver a equação, primeiramente temos que calcular o tensor da métrica $g_{\mu\nu}$, e posteriormente calcular a curvatura do espaço-tempo através do Tensor de Einstein $G_{\mu\nu}$ apresentado na equação de campo; dentro deste operador, existe o Tensor de Ricci $R_{\mu\nu}$, que é obtido através dos símbolos de Christoffel. Os símbolos de Christoffel não nulos são os seguintes,

$$\Gamma_{01}^0 = \frac{f}{2f}, \quad \Gamma_{00}^1 = \frac{ff'}{2}, \quad \Gamma_{11}^1 = \frac{-f'}{2f}, \quad \Gamma_{22}^1 = -fr, \quad 3.7$$

$$\Gamma_{33}^1 = -fr \text{sen}^2\theta, \quad \Gamma_{12}^2 = \frac{1}{r}, \quad \Gamma_{12}^2 = \frac{1}{r}, \quad \Gamma_{13}^3 = \frac{1}{r},$$

$$\Gamma_{33}^2 = -\text{sen}\theta \cos\theta, \quad \Gamma_{23}^3 = \frac{\cos\theta}{\text{sen}\theta}.$$

2.2 SOLUÇÃO PARA O ELEMENTO DE LINHA

Após todos os cálculos do Tensor de Ricci e do tensor métrico, Schwarzschild aplicou os valores encontrados usando a métrica de um espaço curvo dentro da equação de campo de Einstein, gerando assim uma equação diferencial com uma solução da seguinte forma,

$$f(r) = 1 - \frac{D}{rc^2}, \quad 3.8$$

Em que D é uma constante cujo valor é $2GM$. Assumindo um valor $c = 1$ devido ao sistema de unidades naturais a ser adotado, a função pode ser escrita como;

$$f(r) = 1 - \frac{2GM}{r}. \quad 3.9$$

Aplicando esse valor dentro da métrica proposta por Schwarzschild, que é uma métrica muito adequada para problemas que envolvam simetria esférica, obtemos:

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2GM}{r}\right)cdt^2 + \frac{1}{1 - \frac{2GM}{r}}dr^2 + (rd\theta)^2 + (r\text{sen}\theta d\varphi)^2. \quad 4.0$$

O tensor métrico, assume a seguinte forma:

$$g_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} -(1 - \frac{2GM}{r}) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{1 - 2GM/r} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r^2 \text{sen}^2\theta \end{bmatrix}. \quad 4.1$$

Podemos salientar diversas aplicações relevantes para esse elemento de linha, como o cálculo de órbitas planetárias em campos gravitacionais intensos; um exemplo notório é a previsão precisa do avanço do periélio de Mercúrio. Além disso, outra aplicação significativa consiste no cálculo do desvio da luz ao passar próximo a corpos de grande massa.

2.3 RAIOS DE SCHWARZSCHILD

A despeito de todo o prestígio da solução de Schwarzschild, tanto como uma métrica para espaços curvos, como uma solução exata para uma das equações de campo propostas por Einstein, porém essa métrica possui um problema aparente. Analisando a função $f(r)$ anteriormente imposta dentro da métrica, percebemos que podemos usar de manipulações matemáticas para encontrar o valor do r , onde o problema assume duas maneiras diferentes

$$f(r) = 0 \quad \rightarrow \quad 1 - \frac{2GM}{r} = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{2GM}{r} = 1 \quad \rightarrow \quad r = 2GM, \quad 4.2$$

quando o r assume o valor de $2GM$ é chamado de Raio de Schwarzschild r_H

$$r_H = 2GM. \quad 4.3$$

O primeiro problema ocorre quando igualamos o valor da função $f(r)$ a zero e isolamos o r e este assume o valor de r_H . Quando substituimos esse valor na função dentro do elemento de linha, obtemos um problema no segundo termo,

$$r = r_H \quad 4.4$$

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2GM}{r_H}\right) dt^2 + \left(\frac{1}{1 - \frac{2GM}{r_H}}\right) dr^2, \quad 4.5$$

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2GM}{2GM}\right) dt^2 + \left(\frac{1}{1 - \frac{2GM}{2GM}}\right) dr^2. \quad 4.6$$

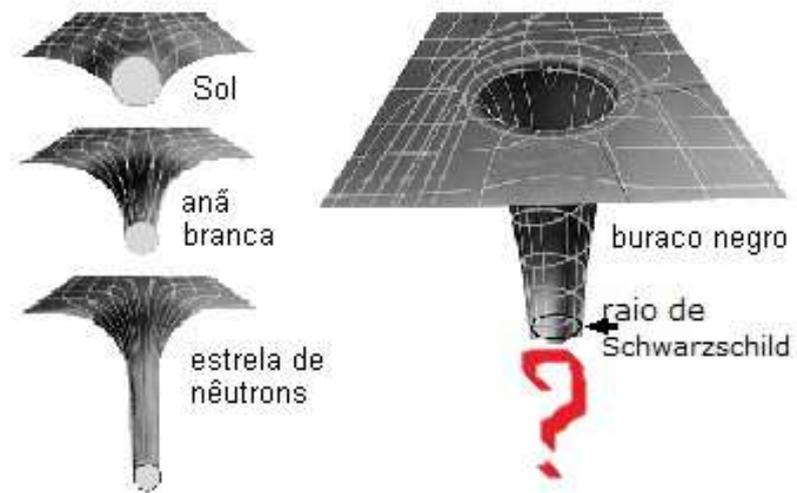
Nota-se que no segundo termo da métrica quando o r assumir o valor de r_H irá sobrar apenas uma divisão por zero, resultando em uma singularidade. Para Schwarzschild essa situação aconteceria na região externa, ou seja, nos arredores da distribuição esférica, criando assim campo gravitacional que contemplaria um raio com limite em r_H em que a gravidade seria extremamente forte e nada poderia atingir a velocidade de escape, ou seja, nada poderia escapar desta região além de r_H , incluindo a própria luz.

Uma outra questão aparente surge quando o raio toma o valor $r = 0$; nesse cenário, tanto o primeiro quanto o segundo termo abordariam a mesma problemática, ou seja, a divisão por zero. Para a solução de Schwarzschild, essa nova condição ocorreria diretamente na distribuição esférica, levando mais uma vez à ocorrência de uma singularidade que, neste caso, seria considerada irremovível.

De modo geral, os corpos esféricamente simétricos de grande massa e com uma força gravitacional extremamente intensa, estudados por Schwarzschild, correspondem a objetos cuja atração gravitacional é tão forte que sequer a luz consegue escapar. Em outras palavras, esses objetos são identificados como buracos negros; ou seja, a solução de Schwarzschild para a equação do campo de Einstein descreve uma massa distribuída de forma esférica. Para fins de referência neste contexto, denominaremos esses corpos como “buracos negros” (apesar de ainda não termos um conceito completamente estabelecido). Além disso, é importante destacar que o chamado Raio de Schwarzschild r_H é amplamente conhecido como horizonte de eventos.

Como ilustrado na figura 1, corpos com alta massa provocam uma curvatura mais acentuada no espaço-tempo; para objetos como os buracos negros, surge então o conceito de horizonte de eventos.

Figura 3- Raio de Schwarzschild



Fonte: Física UFMG, 2017 [16].

3 MUDANÇAS DE COORDENADAS E BURACOS NEGROS

Neste quarto capítulo iremos introduzir as novas coordenadas que serão utilizadas para solucionar o problema anterior encontrado em $r_H = 2GM$. O problema existente na métrica se encontra presente no r_H e as coordenadas $dt/dr \rightarrow \infty$ ao longo das geodésicas nulas que se aproximam do horizonte e fazem com que a propagação do tempo t se torne mais lenta na direção de r , para tentar corrigir esse problema primeiro temos que adotar uma mudança de coordenada em que t se mova mais devagar ao longo das geodésicas.

3.1 COORDENADAS TORTOISE (TARTARUGA)

Como citado anteriormente a singularidade presente em $r = 2GM$ é aparente e pode ser removida, fazendo uso de mudanças de coordenadas. Visando a necessidade das coordenadas se moverem mais lentamente, devemos adotar a chamada coordenada tartaruga, onde nossos termos assumem valores diferentes

$$r^* = r + 2GM \ln\left(\frac{r}{2GM} - 1\right), \quad 4.7$$

$$r^* = r^*(r), \quad 4.8$$

$$r = r(r^*), \quad 4.9$$

$$t = r^*, \quad 5$$

com r^* sendo o novo raio com valor finito.

Adotando os termos das coordenadas tartaruga para o elemento de linha de Schwarzschild,

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2GM}{r}\right) + \frac{1}{1 - \frac{2GM}{r}} dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2\theta d\varphi^2 \quad 5.1$$

Obs: $r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2\theta d\varphi^2 = r^2 d\Omega_2^2$, também sabemos que,

$$dt = dr^* \quad 5.2$$

$$dt = dr^* \left(\frac{1}{\frac{2GM}{r} - 1} \right), \quad 5.2$$

usando de manipulações algébricas obtemos a seguinte métrica,

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2GM}{r} \right) \cdot (-dt^2 + dr^{*2}) + r^2 d\Omega_2^2, \quad 5.3$$

Atualmente, r é considerado uma função de r^* o que representa um progresso significativo, uma vez que nenhum coeficiente do elemento de linha adquire o valor de $2GM$. No entanto, ocorre uma alteração indesejável: a superfície em r_H passa a assumir um valor infinito. O próximo procedimento consiste em estabelecer coordenadas nas quais as geodésicas possam ser adequadamente descritas.

$$u = t + r^*, \quad 5.4$$

$$v = t - r^*, \quad 5.5$$

com a coordenada u representando o avanço do tempo, e a v representando o retardo do tempo. Assim, r^* é fundamental para que a luz atravesse o horizonte sem enfrentar nenhuma singularidade artificial.

Com isso obtemos um v constante, agora vamos voltar para a coordenada r original, mas fazendo uma substituição da coordenada t pela nova coordenada v . Essas são conhecidas como coordenadas de Eddington-Finkelstein, desenvolvida por Arthur Eddington, físico inglês e pelo físico americano David Finkelstein. Em termos dessas coordenadas, a métrica se torna,

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2GM}{r} \right) dv^2 + (dvdr + drdv) + r^2 d\Omega_2^2 \quad 5.6$$

A partir dessa métrica já podemos definir alguns pontos interessantes, o horizonte de eventos como uma superfície além da qual partículas nunca podem escapar para o infinito; em Schwarzschild, o horizonte de eventos está localizado em $r = 2GM$. Apesar de estar localizado em uma coordenada radial fixa, o horizonte de eventos é uma superfície nula em vez de temporal, então é realmente a estrutura causal do próprio espaço-tempo que torna impossível cruzar o horizonte em uma direção para fora. Como nada pode escapar do horizonte de eventos, é impossível para nós ver o que há dentro, por isso recebe o nome buraco negro [4].

3.2 COORDENADAS DE KRUSKAL-SZEKERES

Partindo da premissa de que nossa primeira seleção de coordenada não foi ideal, efetuamos algumas modificações, como a substituição da coordenada t pela nova variável v que representa o retardo do tempo. Nesse processo, ocorre um fenômeno bastante significativo: à medida que o valor de r tende ao infinito, a nova coordenada v permanece finita.

A subsequente alteração de coordenadas revela-se bastante mais relevante para a resolução; as chamadas coordenadas de Kruskal-Szekeres, propostas pelo matemático e físico americano Martin David Kruskal e por George Szekeres matemático alemão, apresentam propriedades que serão amplamente exploradas posteriormente, visando facilitar a obtenção de uma nova solução. Para isso, é necessário substituir a coordenada temporal t por duas coordenadas nulas, u e v , as quais são definidas respectivamente por:

$$u = t + r^*, \quad 5.4$$

$$v = t - r^*, \quad 5.5$$

lembrando que essas coordenadas representam respectivamente o avanço e o retardo do tempo. Manipulando essas coordenadas obtemos,

$$ds^2 = -\frac{1}{2} \left(-1 - \frac{2GM}{r} \right) (dudv + dvdu) r^2 d\Omega_2^2, \quad 5.7$$

reescrevendo r em termos u e v

$$r^* = r + 2GM \ln \left(\frac{r}{2GM} - 1 \right), \quad 4.7$$

$$r^* \rightarrow \frac{1}{2}(u - v), \quad 5.8$$

logo obtemos,

$$\frac{1}{2}(u - v) = r + 2GM \ln \left(\frac{r}{2GM} - 1 \right). \quad 5.9$$

Com $r \rightarrow r_H = 2GM$, essa mudança reintegrou a problema inicial, devido a esse problema devemos fazer escolhas mais adequadas que tornem as coordenadas u e v finitas novamente, que são,

$$v' = e^{v/4GM}, \quad 6$$

$$u' = -e^{-v/4GM}. \quad 6.1$$

Voltando aos termos originais do sistema (t e r) temos;

$$v' = e^{(r-t)/4GM} \cdot \sqrt{\frac{r}{2GM} - 1}, \quad 6.2$$

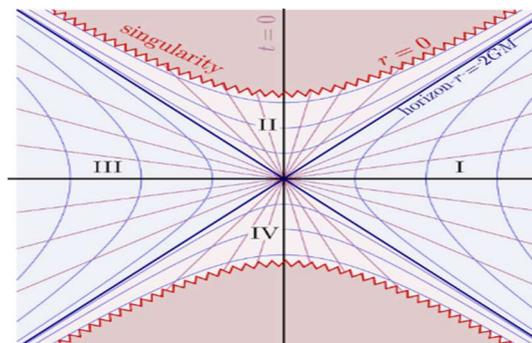
$$u' = e^{(r+t)/4GM} \cdot \sqrt{\frac{r}{2GM} - 1}, \quad 6.3$$

no sistema $(v', u', \theta, \varphi)$, a métrica de Schwarzschild se torna,

$$ds^2 = \frac{16 G^3 M^3}{r} e^{-r/2GM} (dv' du' + du' dv') r^2 d\Omega^2. \quad 6.4$$

Assim, nenhum dos coeficientes do elemento de linha exibe comportamento particular na vizinhança do horizonte de eventos. A solução de Schwarzschild possibilita apenas investigações na região exterior aos buracos negros; contudo, o novo elemento de linha apresentado pela equação supracitada possibilita a análise em todas as regiões, conforme ilustrado na figura 4 subsequente.

Figura 4- Coorenadas de Kruskel-Szekeres [17]



3.3 HISTÓRIA DOS BURACOS NEGROS

A compreensão de corpos celestes como os buracos negros só pôde ser fundamentada teoricamente após a publicação da Teoria Geral da Relatividade, feita em 1915 por Albert Einstein. No entanto, antes da proposição da TRG, alguns pensadores filosóficos e científicos já haviam sugerido a existência de entidades semelhantes aos buracos negros; entre eles destaca-se o filósofo naturalista inglês John Michell, que propôs a ideia de estrelas negras. Ao realizar cálculos baseados na mecânica newtoniana, Michell constatou que, caso uma estrela possuísse uma massa extremamente elevada, ela geraria um campo gravitacional tão intenso que a velocidade de escape dessa estrela superaria a velocidade da luz. Para ele, se uma estrela atingisse uma massa limite suficientemente grande, sua luz seria completamente aprisionada por seu campo gravitacional. [1].

Em 1916 um ano após a publicação da TRG, o físico alemão Karl Schwarzschild desenvolveu a primeira solução para a equação de campo proposta por Einstein, esta solução foi proposta e desenvolvida nos capítulos anteriores, ela descreve o campo gravitacional em torno de uma distribuição esférica de massa M . Como abordado anteriormente essa solução apresenta problema em $r = 2GM$. Logo após surgiu a solução para uma distribuição de esfericamente carregada de massa M , que ficou conhecida por solução de Reissner-Nordström, desenvolvida pelo matemático alemão Hans Reissner e pelo físico finlandês Gunnar Nordström [1].

Entre 1916 e 1930, havia dúvidas sobre a existência de corpos colapsados devido a incertezas teóricas e à falta de evidências observáveis. A partir de 1930, com avanços teóricos, foi possível confirmar a existência de estrelas colapsadas que se contraem além do raio de Schwarzschild, outra contribuição importante foi a publicação do artigo *Sobre a Contração Gravitacional Continuada*, publicado pelo físico teórico alemão Robert Oppenheimer e pelo físico estadunidense Hartland Snyder, no ano de 1939 trazendo novas ideias sobre o colapso gravitacional, que posteriormente foi confrontado pelo físico John Archibald Wheeler no ano de 1958.

Após uma análise dos trabalhos teóricos dos físicos Princeton, Finklestein e Kruskal, Wheeler mudou seu ponto de vista a respeito do tema [1]. Apenas a partir de 1960 que esses corpos se tornaram objetos difíceis de serem ignorados, no ano de 1963 o matemático Roy Kerr descobriu uma solução para corpos colapsados em rotação, esta foi nomeada de solução de Kerr, que logo foi generalizada pelo físico Ezra Newman que adicionou carga elétrica a solução,

obtendo assim a *chamada solução de Kerr-Newman*. Depois de todos esses fatos foi desenvolvida uma hipótese que defendia a ideia de que tais corpos seriam descritos por três componentes: massa, carga e momento angular [1].

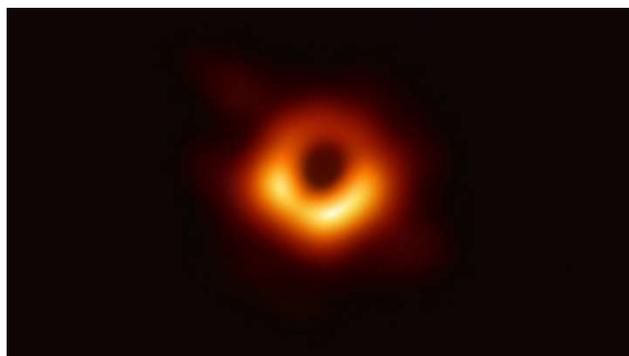
Durante a época de 1960 até 1974 muitos físicos do mundo todo trabalharam as consequências destas soluções, entre eles podemos citar o físico teórico britânico Stephen Hawking e o físico americano Jacob Bekenstein que desenvolveram trabalhos relacionando termodinâmica aos buracos negros. Bekenstein introduziu a ideia que a área do horizonte de eventos deveria ser interpretada como uma medida de entropia [1]. Hawking demonstrou que os buracos negros emitem uma radiação térmica devido aos fenômenos quânticos que ocorrem na vizinhança do horizonte, essa radiação foi chamada de radiação Hawking (Bardeen, Carter, Hawking, 1974) [2].

3.4 BURACOS NEGROS NA ATUALIDADE

Buracos negros podem ser definidos como objetos muito massivos e superdensos, caracterizados por massa, carga e momento angular, também apresentam um campo gravitacional muito forte e possuem uma região chamada de horizonte de eventos a qual é o ponto de entrada para o buraco negro e não existe volta (Almeida, 2021) [1].

O primeiro registro fotográfico de um buraco negro aconteceu no ano de 2019, realizado pelo projeto '*Event Horizon Telescope*' (EHT), uma rede de radiotelescópios espalhados pelo planeta, fotografaram o buraco negro conhecido como M87, mostrado na imagem 4 localizado na galáxia Messier 87 situada a cerca de 54 milhões de anos-luz da Terra.

Figura 5 – Buraco negro M87



Fonte: *Event Horizon 'Scope*', 2019 [7].

4 TERMODINÂMICA DE BURACOS NEGROS

A termodinâmica é a área que estuda sistemas que estão relacionados com variações de energia interna, temperaturas, fluxos de calor, variações de entropia e trabalhos realizados. Analisando a noção clássica de buracos negros, podemos pensar que existe uma incompatibilidade com as noções básicas da termodinâmica, tendo em vista que nada pode escapar de seu interior. Entretanto quando analisamos esses corpos por meio da relatividade geral é possível perceber que as leis presentes nos buracos negros possuem uma estrutura semelhante à termodinâmica, como proposto pelo físico Jacob Bekenstein no ano de 1972 [3]. Nesta seção iremos explorar, de forma introdutória, uma possível relação entre estas duas áreas do conhecimento.

4.1 LEI ZERO (MECÂNICA DOS BURACOS NEGROS)

A lei zero compreende uma definição vinculada à temperatura de um buraco negro. Quando considerada no âmbito da relatividade geral, essa temperatura não possui uma manifestação física direta; entretanto, recebe tal denominação devido ao seu papel análogo ao da temperatura na formulação das leis termodinâmicas associadas aos buracos negros.

Para a termodinâmica, a temperatura é uma grandeza constante em um sistema que atinge o equilíbrio térmico. O equilíbrio térmico, nada mais é que o equilíbrio atingido por um sistema entre a energia emitida e a absorvida. Para uma situação em que um buraco negro está se desenvolvendo, existe um tempo no qual sua massa demora para se ajustar, buscando uma configuração de equilíbrio, durante esse processo, o buraco negro emite ondas gravitacionais, perdendo energia até atingir o limite estacionário (Bardeen, Carter, Hawking, 1974) [2]. Após atingir o estado estacionário, a métrica do buraco negro não dependerá diretamente do tempo, de forma que o horizonte de eventos também se tornará estável.

Dessa maneira a equação para os vetores transportados ao longo das geodésicas, assume a seguinte forma apresentada no trabalho de Menezes (2021) [14],

$$\chi^\rho \nabla_\rho \chi^\mu = \kappa \chi^\mu. \quad 6.5$$

Com χ^ρ sendo um vetor transportado ao longo da geodésica, e o κ sendo uma “constante” de proporcionalidade. A expressão acima mostra que a constante κ pode ser vista como a

grandeza que indica o quanto as curvas geodésicas geradas por χ^μ não mantêm seu paralelismo (Wald,1984) [18].

4.1.1 Interpretação do κ

A constante κ recebe o nome de “gravidade superficial” devido a uma interpretação física no contexto de métricas e está diretamente ligada ao horizonte de eventos e varia ao longo dessa região, de acordo com Wald (1984) [18]. Analisando como o κ varia ao longo do horizonte em termos do tensor energia-momento, podemos compreender algumas condições de energia e consequentemente entendermos a lei zero: Para um buraco negro estacionário, em um espaço-tempo que respeite a condição dominante de energia e a equação de Einstein, a gravidade superficial se torna constante no horizonte de eventos. E pode ser obtida pela seguinte equação,

$$\chi_{[\lambda} \nabla_{\rho]} \kappa = -8\pi \chi_{[\lambda} T_{\rho]}^{\nu} \chi_{\nu} , \quad 6.6$$

essa equação permite encontrar o valor da aceleração superficial κ em termos do tensor energia-momento.

4.2 PRIMEIRA LEI (MECÂNICA DOS BURACOS NEGROS)

Para que possamos entender a primeira lei, se faz necessário analisar e unir resultados sobre massa e momento angular dos buracos negros. Após resolver todas as equações e relações matemáticas que envolvem massa e momento angular, vamos nos deparar com a seguinte expressão,

$$M = \frac{\kappa A}{8\pi G} + 2\Omega J. \quad 6.7$$

Essa equação é a chamada Relação “Termodinâmica”, onde o segundo termo da soma com valor de $2\Omega J$ é nulo para esta situação, também é válido lembrar que κ é a aceleração superficial. O próximo passo é relacionar os componentes do primeiro termo da relação com os conhecimentos de termodinâmica e mecânica clássica.

Em primeiro momento nosso trabalho é encontrar a expressão que demonstre o valor de κ , que é a aceleração superficial que ocorre ao longo do r_H . A expressão para definir o κ tem a seguinte forma,

$$\kappa = \sqrt{-\frac{1}{2} g^{\mu\nu} g_{\rho\sigma} \Gamma_{\mu 0}^{\rho} \Gamma_{\nu 0}^{\sigma}}. \quad 6.8$$

Resolvendo e manipulando os termos temos,

$$\kappa = \frac{1}{2} \frac{df}{dr} \rightarrow r = r_H, \quad 6.9$$

$$\kappa = \frac{1}{2} \frac{d}{dr} \left(1 - \frac{2GM}{r} \right) \rightarrow r = r_H, \quad 7$$

$$\kappa = \frac{GM}{r_H^2}, \quad 7.1$$

é muito interessante ver que a aceleração superficial κ antes da aplicação do valor do r_H presente no horizonte se assemelha a força gravitacional apresentada na física clássica,

$$\kappa = \frac{GM}{r_H^2} \quad e \quad F_g = G \frac{Mm}{r^2}. \quad 7.2$$

Mas voltando a discussão sobre o valor de κ , devemos substituir o valor de r_H dentro da expressão,

$$\kappa = \frac{GM}{(2GM)^2} = \frac{GM}{4G^2M^2}, \quad 7.3$$

$$\kappa = \frac{1}{4GM}. \quad 7.4$$

4.2.1 Relação entre área e Entropia

A chamada primeira lei da termodinâmica de buracos negros, consiste na definição que relaciona as variações entre massa e momento angular com a variação da área do horizonte de eventos de um buraco negro [14]

$$\delta M = \frac{k}{4\pi} \delta A + \frac{A}{4\pi} \delta k + 2\Omega_H \delta J + 2J \delta \Omega_H. \quad 7.5$$

Essa área do horizonte pode ser relacionada com a entropia de um sistema térmico, reforçando a ideia de radiação “térmica” T , a entropia S e a radiação térmica se transformam nas seguintes expressões,

$$S = \frac{k_B c^3 A}{4\pi \hbar^2 G} \quad ; \quad T = \frac{\hbar c^3 k}{2\pi k_B}, \quad 7.6$$

Entropia \leftrightarrow *área* ; *Temperatura* \leftrightarrow *aceleração*,

onde, S é a entropia do buraco negro;

k_B é a Constante de Boltzmann;

c é a velocidade da luz;

\hbar é a Constante de Planck reduzida;

G é a constante de gravitação de Newton;

A é a área do horizonte de eventos.

Lembrando que devido a escolha do sistema de unidades naturais as constantes assumem valores de

$$c = 1; k_B = 1; \hbar = 1,$$

com isso temos a seguinte aproximação,

$$dM = \frac{2\pi T}{8\pi G} \cdot dS(4\pi G), \quad 7.7$$

7.8

$$E = Mc^2,$$

$$dE = TdS, \quad 7.9$$

$$dE = TdS \rightarrow 1^{\text{a}} \text{ Lei da Termodinâmica.} \quad 8$$

Com isso podemos perceber um ponto fundamental. A primeira lei da termodinâmica de buracos negros sugere que a área desses corpos está relacionada a sua entropia, visto que o termo que a expressão $s = \frac{1A}{4\pi}$ cumpre o papel de TdS , com essa relação percebemos que a entropia é proporcional à área do buraco negro. Após isso podemos pensar na primeira lei da termodinâmica dos buracos negros da seguinte forma: para um buraco negro estacionário, existem variações em primeira ordem de energia, massa e momento angular em relação com a área do horizonte de eventos.

Como vimos existe uma relação direta entre entropia e área do buraco negro, ideia proposta por Bekenstein em seu artigo *Black holes and the second law*, publicado no ano de 1972 [3], caracterizando a proposta da primeira “Lei da termodinâmica dos buracos negros”.

Considerações Finais

Este trabalho explorou os aspectos teóricos da solução de Schwarzschild, uma das soluções mais importantes da Relatividade Geral, que descreve o campo gravitacional ao redor de uma massa esfericamente simétrica. Inicialmente, discutimos a métrica de Schwarzschild e suas implicações, destacando os problemas associados às singularidades em $r = 2GM$ e $r = 0$. Essas singularidades, especialmente a primeira, foram abordadas por meio de mudanças de coordenadas, como as coordenadas Eddington-Finkelstein e Kruskal-Szekeres, que permitiram contornar as limitações da métrica original e aprofundar o entendimento dos buracos negros.

Além disso, o trabalho abordou a relação entre a termodinâmica e os buracos negros, seguindo as contribuições de Jacob Bekenstein e Stephen Hawking. Demonstramos como conceitos termodinâmicos, como entropia e temperatura, podem ser aplicados a esses objetos astrofísicos, estabelecendo paralelos entre as leis da termodinâmica e as propriedades dos buracos negros. A primeira lei da termodinâmica de buracos negros, por exemplo, revela uma conexão profunda entre a área do horizonte de eventos e a entropia, enquanto a gravidade superficial κ desempenha um papel análogo à temperatura.

Por fim, este estudo reforça a importância da solução de Schwarzschild e suas generalizações, como as soluções de Kerr e Reissner-Nordström, para a compreensão dos buracos negros e sua dinâmica. As mudanças de coordenadas não apenas resolvem problemas matemáticos, mas também enriquecem nossa interpretação física desses fenômenos. A termodinâmica de buracos negros, por sua vez, abre novas perspectivas para a unificação da física clássica e quântica, destacando a riqueza e a complexidade do universo descrito pela Relatividade Geral.

REFERÊNCIAS

- 1 ALMEIDA, Carla Rodrigues. **Buracos negros: mais de 100 anos de história.** *Cadernos de Astronomia*, v. 2, n. 1, p. 93-105, 2021. Disponível em: [DOI: 10.47456/Cad.Astro.v2n1.33499](https://doi.org/10.47456/Cad.Astro.v2n1.33499). Acesso em: 12, mar. 2025.
- 2 BARDEEN, J. M.; CARTER, B.; HAWKING, S. W. The Four Laws of Black Hole Mechanics. *Communications in Mathematical Physics*, v. 31, n. 2, , 1973. Disponível em: <https://projecteuclid.org/journals/communications-in-mathematical-physics/volume-31/issue-2/The-four-laws-of-black-hole-mechanics/cmp/1103858973.pdf>. Acesso em: 26 jan. 2025.
- 3 Bekenstein, J. D. **Black holes and the second law.** *Lett. Nuovo Cim.*, 4, 1972.
- 4 CARROLL, Sean M. *Spacetime and Geometry: An Introduction to General Relativity*. San Francisco: Addison-Wesley, 2004. 513 p. ISBN 0-8053-8732-3.**
- 5 DE PAULA, Caio Tomás; RODRIGUES, Luciana Maria Dias de Ávila. A geometria do espaço de Minkowski e a teoria da relatividade especial. **REMAT: Revista Eletrônica da Matemática**, Bento Gonçalves, RS, v. 9, n. 1, p. e3005, 28 abr. 2023.
- 6 Einstein, Albert. *A teoria da Relatividade*. [trad.] Silvio Levy. Santa Maria-RS : Pallotti, 1916.
- 7 EVENT HORIZON TELESCOPE COLLABORATION; AKIYAMA, K.; ALBERDI, A.; ALEF, W.; ASADA, K.; AZULAY, R.; BACZKO, A.-K.; BALOKOVIĆ, M.; BARRETT, J.; et al. First M87 Event Horizon Telescope Results. I. The shadow of the supermassive black hole. *The Astrophysical Journal Letters*, v. 875, n. 1, p. L1, 2019. DOI: 10.3847/2041-8213/ab0ec7.
- 8 FELIPE, Bruno S.; OLIVEIRA, Jeferson de. **Introdução aos buracos negros e sua termodinâmica.** *Revista Brasileira de Ensino de Física*, v. 46, e20240010, 2024. Disponível em: www.scielo.br/rbef. DOI: <https://doi.org/10.1590/1806-9126-RBEF-2024-0010>. Acesso em: 12, mai. 2025.
- 9 FRAGATA, Paulo Renato Ferreira. **Tópicos da Teoria da Relatividade.** 2013. 164 f. Dissertação (Mestrado em Matemática para Professores) – Departamento de Matemática, Universidade dos Açores, Ponta Delgada, 2013.
- 10 *Galileu e o princípio da relatividade.* *Cadernos de História e Filosofia da Ciência.* MARTINS, Roberto de Andrade. 1986.
- 11 Griffiths, David j. *Eletrodinâmica*. [trad.] Heloiza Coimbra de Souza. 3ª. São Paulo : Pearson Addison Wesley, 2011.
- 12 MARTINS, Roberto de Andrade. Galileu e o princípio da relatividade. **Cadernos de História e Filosofia da Ciência**, Campinas, n. 9, p. 69-86, 1986. Disponível em: <http://ghfc.ifi.unicamp.br/pdf/ram-27.pdf>. Acesso em: 15 jan. 2025.

13 Mendes, R. F. P. (2019). *Aula 1: Princípios da Relatividade Geral*. Em **Introdução à Relatividade e ao seu Ensino** (pp. 1-7). Material didático, 2/2019.

14 MENEZES, Filipe Henrique de Castro. **Termodinâmica de Buracos Negros**. 2021. 130 f. Dissertação (Mestrado em Física) – Programa de Pós-Graduação em Física, Instituto de Ciências Exatas, Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, 2021.

15 SOARES, Domingos. De Schwarzschild a Newton. **Revista Brasileira de Ensino de Física**, [S. l.], v. 42, e20190262, 2020.

Disponível em: <https://www.scielo.br/j/rbef/a/XqQYQjJQzJQzJQzJQzJQzJQzJQ/?lang=pt>. Acesso em: 15 nov. 2024. DOI: <http://dx.doi.org/10.1590/1806-9126-RBEF-2019-0262>.

16 SOARES, D. **Divagação científica: buracos relativistas**. Lilith – Departamento de Física, UFMG. Disponível em: <https://lilith.fisica.ufmg.br/~dsoares/extn/brcs/brcs.htm>. Acesso em: 15 nov. 2024.

17 TIKZ.NET. *Kruskal diagram of Schwarzschild black hole*. Disponível em: https://tikz.net/relativity_kruskal_diagram/. Acesso em: 15 mai. 2025.

18 WALD, R. M. *General Relativity*. Chicago: The University of Chicago Press, 1984.

19 WEINBERG, Steven. *Gravitation and Cosmology: Principles and Applications of the General Theory of Relativity*. New York: John Wiley & Sons, Inc., 1972.

20 Web Física.com. [Online] 2020. [Citado em: 24 de Dez. de 2024]. Disponível em: <https://webfisica.com/laravel/public/fisica/curso-de-fisica-basica/aula/12-93>.

APÊNDICE A – Coordenadas de Eddington-Finkelstein (Tartaruga)

Introduzindo novas coordenadas,

$$r^* = r + 2GM \ln\left(\frac{r}{2GM} - 1\right),$$

$$r^* = r^*(r),$$

$$r = r(r^*),$$

$$t = r^*,$$

$$dt = dr^*,$$

$$t = r + 2GM \ln\left(\frac{r}{2GM} - 1\right) \Rightarrow \neq 0.$$

Após a introdução destas novas coordenadas a métrica de Schwarzschild assume a seguinte forma,

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2GM}{r}\right) \cdot (-dt^2 + dr^{2*}) + r^2 d\Omega_2^2.$$

Para provar isso partimos o pressuposto que,

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2GM}{r}\right) \cdot (dr^{2*} + dr^{2*}) + r^2 d\Omega_2^2,$$

sabendo que,

$$t = \pm r^* + c \quad \rightarrow \quad dt = dr^*$$

$$r^* = r + 2GM \ln\left(\frac{r}{2GM} - 1\right), \quad \text{com } r = r_H = 2GM$$

$$t = r + 2GM \ln\left(\frac{r}{2GN} - 1\right) \quad \rightarrow \quad dt = dr^*$$

$$dt = dr \left(\frac{1}{\frac{2GM-1}{r}} \right) \rightarrow dr^* = dr \left(\frac{1}{\frac{2GM-1}{r}} \right).$$

Logo temos que,

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2GM}{r} \right) dt^2 + \frac{1}{\frac{2GM-1}{r}} dr^2 + r^2 d\Omega_2^2,$$

com o segundo termo,

$$\frac{1}{\frac{2GM-1}{r}} = dr^* ,$$

lembrando que,

$$dr^* = dt,$$

Assim a métrica assume a seguinte forma,

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2GM}{r} \right) (-dt^2 + dr^{2*}) + r^2 d\Omega_2^2$$

APÊNDICE B – Coordenadas de Kruskal-Szekere

Mudança de coordenadas de Tartaruga para Kruskal

Obtenção das coordenadas u' e v'

Introduzindo novas coordenadas,

$$u = t + r^*,$$

$$v = t - r^*,$$

$$t = \frac{1}{2}u + \frac{1}{2}v \quad \rightarrow \quad dt = \frac{1}{2}du + \frac{1}{2}dv,$$

com isso temos a opção de escolha entre dois caminhos que são,

- 1) $u + v = 2t$
- 2) $u - v = 2r^*$

Optei pela 2ª opção e assim logo temos,

$$r^* = \frac{1}{2}u - \frac{1}{2}v \quad ; \quad dr^* = \frac{1}{2}du - \frac{1}{2}dv,$$

derivando r^* obtemos,

$$-\frac{1}{4}(du^2 + dv^2 + 2dudv) + \frac{1}{4}(du^2 dv^2 - 2dudv),$$

$dt^2 \uparrow$ $dr^{2*} \uparrow$

aplicando esses valores na métrica obtemos a seguinte expressão,

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2GM}{r}\right)dudv + r^2 d\Omega_2^2 ,$$

aplicando o novo valor de r^* ,

$$r^* = \frac{1}{2}(u - v),$$

e aplicando na função

$$r^* = r + 2GM \ln\left(\frac{r}{2GM} - 1\right),$$

obtemos,

$$\frac{1}{2}(u - v) = r + 2GM \ln\left(\frac{r}{2GM} - 1\right) \quad \text{com } r \rightarrow r_H = 2GM,$$

fazendo uma aproximação obtemos,

$$\frac{1}{2}(u - v) \cong 2GM \ln\left(\frac{r}{2GM} - 1\right),$$

$$\frac{u - v}{4GM} - 1 = \ln\left(\frac{r}{2GM} - 1\right),$$

retirando o ln obtemos,

$$e^{\frac{u-v}{4GM}} \cong \frac{r}{2GM - 1},$$

obs: $\frac{r}{2GM} - 1 \cong e^{\frac{u}{4GM}} \cdot e^{\frac{-v}{4G}} \rightarrow e^{\frac{u}{4G}} = u'; e^{\frac{-v}{4G}} = v' ,$

voltando aos termos originais (t, r) do sistema temos;

$$I) \quad u' = e^{\frac{1}{4GM}(t+r^*)} = e^{\frac{t}{4GM}} \cdot e^{\frac{1}{4GM}r^*}, \text{ com } r^* = r + 2GM \ln\left(\frac{r}{2GM} - 1\right),$$

Logo,

$$u' = e^{\frac{t}{4GM}} \cdot e^{\frac{r}{4GM}} \cdot e^{\frac{1}{2} \ln\left(\frac{r}{2GM} - 1\right)}$$

$$u' = e^{\frac{1}{4G}-(t+r)} \cdot \sqrt{\frac{r}{2GM} - 1}.$$

Realizando os mesmos procedimentos para v' obtemos,

$$\text{II) } v' = e^{\frac{1}{4G}(t-r)} \cdot \sqrt{\frac{r}{2G} - 1}.$$

	INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA DA PARAÍBA
	Campus Campina Grande - Código INEP: 25137409
	R. Tranquílino Coelho Lemos, 671, Dinamérica, CEP 58432-300, Campina Grande (PB)
	CNPJ: 10.783.898/0003-37 - Telefone: (83) 2102.6200

Documento Digitalizado Ostensivo (Público)

Trabalho de conclusão de curso

Assunto:	Trabalho de conclusão de curso
Assinado por:	Gabriel Soares
Tipo do Documento:	Anexo
Situação:	Finalizado
Nível de Acesso:	Ostensivo (Público)
Tipo do Conferência:	Cópia Simples

Documento assinado eletronicamente por:

- **Gabriel Soares dos Santos, ALUNO (202011240013) DE LICENCIATURA EM FÍSICA - CAMPINA GRANDE**, em 21/08/2025 17:24:29.

Este documento foi armazenado no SUAP em 21/08/2025. Para comprovar sua integridade, faça a leitura do QRCode ao lado ou acesse <https://suap.ifpb.edu.br/verificar-documento-externo/> e forneça os dados abaixo:

Código Verificador: 1582557

Código de Autenticação: 5a4f521d75

