

INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO,
CIÊNCIA E TECNOLOGIA DA PARAÍBA
COORDENAÇÃO DO CURSO DE ESPECIALIZAÇÃO EM
MATEMÁTICA



Fraçalles Stefano Rolim Silva

Uma coletânea de relações matemáticas entre π (Pi) e φ (Phi)

**Cajazeiras
2026**

Fraçalles Stefano Rolim Silva

Uma coletânea de relações matemáticas entre π (Pi) e φ (Phi)

**Trabalho de Conclusão de Curso
submetido à Coordenação do Curso de
Especialização em Matemática do
Instituto Federal de Educação, Ciência e
Tecnologia da Paraíba, como parte dos
requisitos para a obtenção do grau de
Especialista em Matemática.**

Orientador:
Prof. Me. Geraldo Herbetet de Lacerda

**Cajazeiras
2026**

Fraçalles Stefano Rolim Silva

Uma coletânea de relações matemáticas entre π (Pi) e φ (Phi)

Trabalho de Conclusão de Curso submetido à Coordenação do Curso de Especialização em Matemática do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia da Paraíba, como parte dos requisitos para a obtenção do grau de Especialista em Matemática.

BANCA EXAMINADORA

Documento assinado digitalmente



GERALDO HERBETET DE LACERDA

Data: 24/02/2026 18:31:24-0300

Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

Prof. Me. Geraldo Herbetet de Lacerda - IFPB

Orientador

Documento assinado digitalmente



ANA PAULA DA CRUZ PEREIRA DE MORAES

Data: 24/02/2026 19:38:51-0300

Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

Membro da Banca: Dra. Ana Paula da Cruz Pereira de Moraes

Documento assinado digitalmente



STANLEY BORGES DE OLIVEIRA

Data: 24/02/2026 21:04:38-0300

Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

Membro da Banca: Me. Stanley Borges de Oliveira

Documento assinado digitalmente



JOAO PAULO DE ARAUJO SOUZA

Data: 24/02/2026 18:42:25-0300

Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

Membro da Banca: Me. João Paulo de Araújo Souza

Cajazeiras, 19 de fevereiro de 2026

IFPB / Campus Cajazeiras
Coordenação de Biblioteca
Biblioteca Prof. Ribamar da Silva
Catalogação na fonte: Cícero Luciano Félix CRB-15/750

S586c Silva, Fraçalles Stefano Rolim.
Uma coletânea de relações matemáticas entre π (Pi) e φ (Phi) / Fraçalles
Stefano Rolim Silva.– 2026.

37f. : il.

Trabalho de Conclusão de Curso (Especialização em Matemática) - Instituto
Federal de Educação, Ciência e Tecnologia da Paraíba, Cajazeiras, 2026.

Orientador(a): Prof. Me. Geraldo Herbetet Lacerda.

1. Número PI. 2. Número PHI. 3. Proporção Áurea. 4. Seção áurea. I.
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia da Paraíba. II. Título.

IFPB/CZ

CDU: 004.4(043.2)

DEDICATÓRIA

Dedico a meus pais, Leurismar Furtado Silva e Maria Salete Rolim Silva, bem como à minha esposa Valquíria Fernandes de Oliveira.

AGRADECIMENTOS

Dedico este trabalho às aquelas pessoas que conquistaram meu respeito e admiração, por meio de sua nobreza e dignidade. Meu coração transborda gratidão pela presença de Deus em minha vida, que se manifesta também por meio do amor constante dessas pessoas. Adelaide Sibila e Henry Mross, que me acolheram em Campina Grande durante a graduação, e José Murilo Siebra e Lúcia Maria Siebra Gonçalves de Brito em Cajazeiras são pessoas que nunca poderei esquecer.

RESUMO

Neste trabalho é apresentada uma descrição cronológica dos números Pi (π) e Phi (ϕ), culminando em uma coletânea de relações matemáticas entre eles, que possivelmente se destacam entre os números mais fascinantes da história da matemática. O principal motivo que nos levou a explorar essas relações matemáticas entre Pi e Phi foi a curiosidade em encontrar respostas satisfatórias para questões como: existe alguma relação matemática entre Pi (π) e Phi (ϕ)? Essas relações já foram identificadas na natureza ou em realizações humanas? Para atingir esse objetivo, adotou-se a seguinte metodologia: quanto à finalidade, trata-se de uma pesquisa básica estratégica; quanto ao objetivo, é uma pesquisa descritiva; quanto ao procedimento, foi realizada pesquisa bibliográfica e documental; quanto ao método, utilizou-se o método hipotético-dedutivo; e, quanto à abordagem, a pesquisa é quali-quantitativa.

Palavras-chave: Pi. Phi. Proporção áurea. Seção áurea.

ABSTRACT

This work presents a chronological description of the numbers Pi (π) and Phi (ϕ), culminating in a collection of mathematical relationships between them, which are possibly among the most fascinating numbers in the history of mathematics. The main reason that led us to explore these mathematical relationships between Pi and Phi was the curiosity to find satisfactory answers to questions such as: Is there any mathematical relationship between Pi (π) and Phi (ϕ)? Have such relationships been identified in nature or in human achievements? In order to achieve this objective, the following methodological framework was adopted: regarding the purpose, it was a strategic basic research; regarding the objective, it was descriptive; regarding the procedure, it was a bibliographic and documentary research; regarding the method, it was hypothetical-deductive; and regarding the approach, it was qualitative-quantitative.

Keywords: Pi. Phi. Golden Ratio. Golden Section.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1 - Pi (π) é a razão do perímetro de uma circunferência por seu diâmetro.	14
Figura 2 - A aproximação do valor de π para os Babilônios.	15
Figura 3- O papiro de Rhind.	16
Figura 4 - Círculo inscrito e circunscrito.	17
Figura 5 - Reta cortada em extrema e média razão.	20
Figura 6 - Pentágono equilátero e equiângulo com diagonais cortadas em extrema e média razão.	22
Figura 7 – Dodecaedro regular com faces pentagonais, ilustração atribuídas a Leonardo da Vinci para De Divina Proportione de Luca Pacioli (1509). O dodecaedro exemplifica a presença da proporção áurea (φ) na geometria tridimensional: a razão entre sua diagonal espacial e a aresta da face é função direta de φ , e cada face pentagonal mantém internamente a razão áurea entre diagonal e lado (DUNLAP, 1998).	23
Figura 8 – Traçar um círculo de centro O e raio $OA = 1$. Traçar os diâmetros AA' e BB' em ângulo reto. Utilizando o diâmetro BB' , traçar dois círculos simétricos em relação ao diâmetro AA' , cada um deles com um raio que seja a metade do raio do círculo original. A partir do ponto A, traçar um arco NM tangente às circunferências dos círculos interiores. Repetir a partir do ponto A' . Construir o quadrado $ACB'O$ a partir do raio OA do círculo original. Tal como mostra o arco da semi-diagonal deste quadrado, o raio AE do arco NEM é φ , e os arcos NEM e NDM dividem os raios AO e AO' na secção áurea de $1/\varphi$ e $1/\varphi^2$	26
Figura 9 – O arco tangente aos dois círculos interiores corta o círculo exterior no ponto que determina o lado de um pentágono regular inscrito, medido desde o extremo superior do diâmetro vertical A até J (à esquerda) e até F (no extremo inferior do diâmetro vertical A'). Traçando um arco com centro em A' tangente à curva mais próxima dos círculos gêmeos, obtém-se o comprimento L de um terceiro lado do pentágono inscrito, que toca o círculo exterior em H (à esquerda) e em G (à direita). Unindo os pontos J, H, G, F e o extremo superior do diâmetro vertical, forma-se um pentágono regular inscrito no círculo. As diagonais desse pentágono intersectam-se formando um pentagrama, cujos segmentos estão na proporção áurea φ	27

Figura 10 – Inscrever o círculo inicial num quadrado. Em seguida, traçar um círculo a partir do mesmo centro do círculo original e cujo raio seja a distância até à ponta da "vesica". Este círculo será igual em circunferência ao perímetro do quadrado tangente ao círculo inicial. Sabemos que o quadrado que circunscreve o círculo original de raio 1 tem um lado de 2. Logo, o perímetro deste quadrado é 8 e, portanto, é aproximadamente igual à circunferência do círculo maior, ou seja, 7,993. 27

Figura 11 – Pentágono regular ABCDE com lado unitário e suas diagonais. O triângulo ACD é o triângulo áureo de ângulos $36^\circ-72^\circ-72^\circ$, cuja base é o lado do pentágono (1) e cujos lados congruentes são as diagonais ($d = \phi$). 29

Figura 12 – Traçar um círculo com raio unitário ($r = 1$). Construir o retângulo áureo OEID. Dividir o segmento $AE = 1 + \Phi$ em cinco partes iguais, identificando o ponto H tal que $HE = (1+\Phi)/5$. Prolongar para obter o segmento $AL = (6/5)(1+\Phi)$. Traçar uma semicircunferência sobre o diâmetro AL, encontrando o ponto M na interseção com a linha vertical do centro O. Construir o quadrado AMNP sobre o segmento AM. Pela semelhança dos triângulos ALM e AOM, tem-se que $AM^2 = AL$, logo $AM = \sqrt{[(6/5)(1+\Phi)]} \simeq \sqrt{\pi}$, com erro inferior a 0,00005. 32

LISTA TABELAS

Tabela 1 – Evolução cronológica do cálculo de número de casas decimais de π 17

Tabela 2 – Síntese quantitativa das relações matemáticas estudadas entre Pi e Phi..... 34

SUMÁRIO

RESUMO.....	6
ABSTRACT	7
LISTA DE ILUSTRAÇÕES.....	8
LISTA TABELAS.....	10
SUMÁRIO.....	11
1 INTRODUÇÃO	12
2 CONCEITO E HISTÓRIA DO NÚMERO PI (Π).....	14
3 CONCEITO E HISTÓRIA DO NÚMERO PHI (Φ)	20
4 COLETÂNEA DE RELAÇÕES MATEMÁTICAS ENTRE PI (Π) E PHI (Φ)	25
4.1 PRIMEIRA RELAÇÃO MATEMÁTICA ENTRE PI E PHI.....	26
4.2 SEGUNDA RELAÇÃO MATEMÁTICA ENTRE PI E PHI.....	29
4.3 TERCEIRA RELAÇÃO MATEMÁTICA ENTRE PI E PHI	30
5 ANÁLISE DOS RESULTADOS	33
5.1 NATUREZA DAS RELAÇÕES: EXATAS VERSUS APROXIMADAS	33
5.2 IMPLICAÇÕES E SIGNIFICADO.....	34
5.3 COMPARAÇÃO QUANTITATIVA DAS RELAÇÕES	34
6 CONSIDERAÇÕES FINAIS.....	36

1 INTRODUÇÃO

Com o propósito de inspirar o leitor ao fascinante conteúdo da geometria, que neste trabalho se apresenta simultaneamente em seus aspectos históricos, místicos e principalmente matemáticos, é oportuno recordar, logo no início, os lendários dizeres atribuídos ao frontispício da Academia de Platão, segundo Launay (2019): “Só entra aqui quem for geômetra”.

Diante da transitoriedade da vida e da mutabilidade da matéria, muitos pensadores da Antiguidade atribuíram à Matemática um caráter de não mutabilidade. A verdade matemática foi considerada tão consistente que suportaria o tempo sem jamais ser modificada, constituindo, portanto, um atributo da divindade. Segundo Eves (2019), os pitagóricos atribuíam aos números ilações místicas e religiosas, e defendiam máximas como “tudo é número” ou “os números regem o mundo”.

Shapiro (2015) afirma que Platão via o conteúdo da matemática como um reino ideal, eterno e imutável. Nessa visão, os objetos matemáticos, como números e figuras geométricas, não são criados nem destruídos, e não podem ser modificados; por isso, expressões dinâmicas e construtivas como “traçam-se linhas” ou “corta-se um segmento” careceriam de sentido literal. O mundo material percebido pelos sentidos é, assim, transcendido pela chave da matemática, permitindo que o ser humano eleve a sua alma e acesse o “mundo do eterno ser”.

Para esses pensadores, a verdade, por ser imutável e absoluta, só pode ter origem no divino. O estudo da geometria torna-se, então, uma forma de estudar a linguagem da expressão divina materializada na natureza, conforme a tradição platônica que concebe Deus como um geômetra (BURTT, 1983).

Desde a Antiguidade, os números Pi (π) e Phi (φ) despertam fascínio em filósofos, matemáticos e místicos de diferentes povos e por motivos diversos. É,

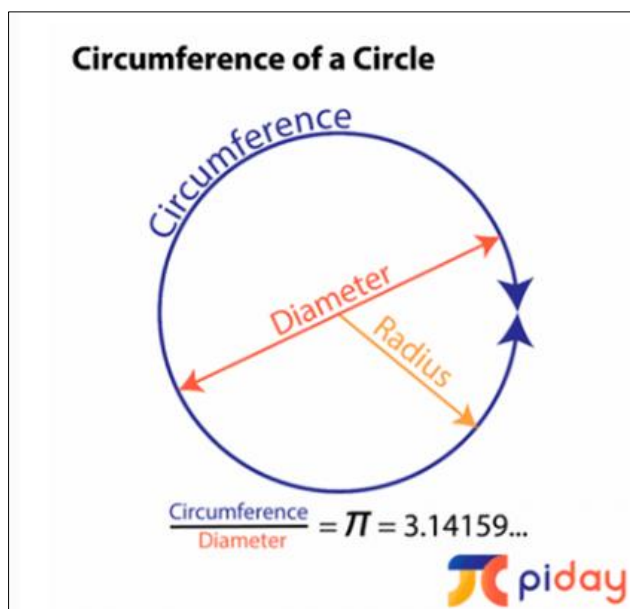
portanto, lícito perguntar: existe alguma relação matemática entre Pi (π) e Phi (φ)? Essas relações matemáticas já foram identificadas na natureza ou em realizações humanas? Se sim, onde se manifestariam?

Para responder a essas questões e mergulhar nesse tema, desenvolve-se aqui uma pesquisa estratégica que, ao final, apresenta um conjunto de informações e construções geométricas, utilizando o método hipotético-dedutivo em uma abordagem quali-quantitativa.

2 CONCEITO E HISTÓRIA DO NÚMERO PI (π)

De acordo com Morais Filho (2006), “Pi” é uma constante matemática representada pela letra grega “ π ”; seu valor é a razão entre o perímetro de uma circunferência e o seu diâmetro, como ilustrado na Figura 1.

Figura 1 - Pi (π) é a razão do perímetro de uma circunferência por seu diâmetro.



Fonte: Página do “Piday”.

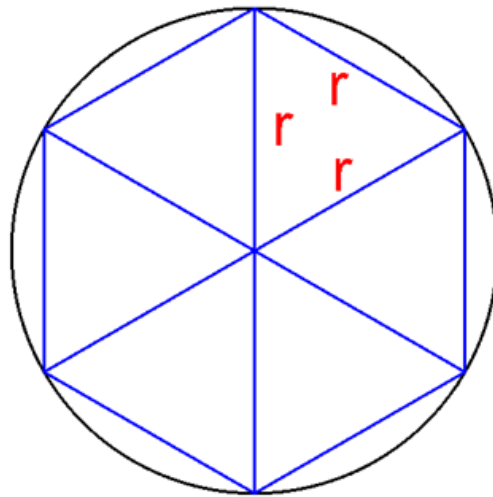
Disponível em: <https://www.piday.org/>. Acesso em 07 de out 2021..

$$\pi = \frac{\text{Circunferência}}{\text{Diâmetro}} = 3,14159 \dots \quad (1)$$

Em 1768, o matemático alemão Johann Lambert provou que o número π é irracional, demonstrando que ele não pode ser expresso como fração de inteiros. Em 1882, Ferdinand Von Lindemann resolveu um problema fundamental ao mostrar que π é transcendente, isto é, não é raiz de nenhum polinômio com coeficientes racionais. O uso da letra grega “ π ” como símbolo desse número ocorreu pela primeira vez em 1717, atribuído ao matemático galês William Jones (1675–1749), e foi consolidado por Euler em 1736. A letra π (pronuncia-se “pi”) é a décima sexta do alfabeto grego e a primeira letra da palavra grega para perímetro, “περιμετρζ” (Beckmann, 1976; Guzzo, 2010; Morais Filho, 2006; Launay, 2019).

É complexo apontar com precisão quando o ser humano alcançou o conceito de π e começou a calculá-lo de forma sistemática. Para Cavalcante (2020), os babilônios, há mais de 4000 anos, já sabiam que o perímetro de um hexágono regular inscrito em um círculo é exatamente igual a seis vezes o raio do círculo circunscrito, conforme apresentado na Figura 2. Dessa forma, obtém-se uma aproximação para a circunferência por $C = 6r$, em que “r” é o raio e “C” o perímetro do círculo que circunscribe o hexágono. Utilizando a definição $\pi=C/2r$, os babilônios encontravam $\pi \approx 3$.

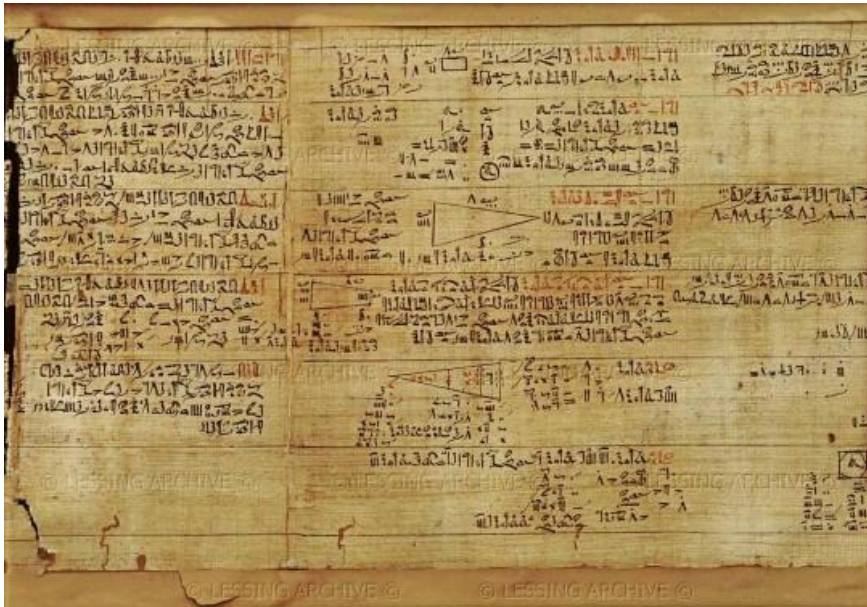
Figura 2 - A aproximação do valor de π para os Babilônios.



Fonte: Beckmann (1976) com adaptação do autor.

Segundo Eves (2004) o papiro Rhind, documento egípcio produzido por volta de 2000 a.C. e descoberto em 1855, mostra que os egípcios também percebiam uma razão aproximadamente constante entre circunferência e diâmetro. Segundo esse papiro, se do diâmetro d de um círculo se subtrai um nono, obtém-se o lado de um quadrado de área igual à do círculo. Aplicando essa regra a um círculo de raio 1, chega-se a uma aproximação de $\pi \approx 3,16$.

Figura 3- O papiro de Rhind.



Fonte: <http://www.mat.uc.pt/~mat0703/PEZ/antigoegito2%20.htm>

Acesso em 11/09/2021.

Segundo o papiro Rhind, se ao diâmetro (d) de um círculo é subtraído um nono do diâmetro, é obtido o lado do quadrado de igual área.

$$\text{Lado do quadrado} = d \left(1 - \frac{1}{9} \right) = d \left(\frac{8}{9} \right) \quad (2)$$

Verificando o resultado para um círculo de raio 1 unidade, cuja área é numericamente igual a π , considerando que área de um círculo = $\pi r^2 = \pi 1^2 = \pi$:

$$\text{Lado do quadrado} = d \left(1 - \frac{1}{9} \right) = 2 \left(\frac{8}{9} \right) = 1,777 \quad (3)$$

Calculando a área do quadrado obtendo-se o valor numérico da aproximação Egípcia para o valor de π :

$$\text{Lado do quadrado}^2 = 1,777^2 = 3,16 \quad (4)$$

Há ainda referências indiretas a π na Bíblia, como no Primeiro Livro dos Reis (I Reis 7:23), que descreve um grande “mar de metal fundido” com diâmetro de dez côvados e circunferência de trinta côvados, levando implicitamente à razão 3.

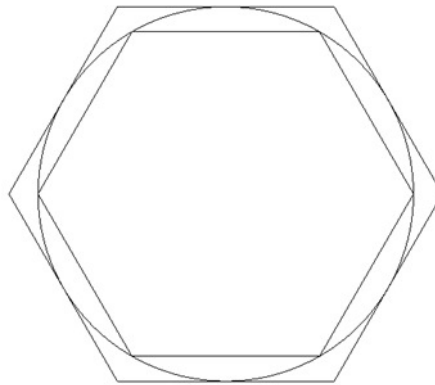
Arquimedes de Siracusa foi o primeiro matemático a investigar de forma aprofundada um método para calcular π . Por volta de 250 a.C., utilizando polígonos

regulares inscritos e circunscritos a um círculo, com até 96 lados, obteve o conhecido intervalo

$$\frac{223}{71} < \pi < \frac{22}{7} \quad (5)$$

O que corresponde aproximadamente $3,140845 < \pi < 3,142857$.

Figura 4 - Círculo inscrito e circunscrito.



Fonte: BECKMANN, 1976, com adaptação do autor.

Com o desenvolvimento da computação, o cálculo de π avançou rapidamente. O ENIAC, o primeiro computador eletrônico de grande escala, foi utilizado em 1949 por cerca de 70 horas para obter 2037 casas decimais corretas de π . A Tabela 1 apresenta, de forma cronológica, a evolução histórica do número de casas decimais conhecidas de π , desde aproximações antigas até o uso de algoritmos modernos e supercomputadores.

Tabela 1 – Evolução cronológica do cálculo de número de casas decimais de π .

Ano	Pesquisador/ Civilização	Computador utilizado/Fórmula	Número de casas decimais confirmados
~ 1900-1600 a.C.	Babilônia	-	1
~ 1650 a.C.	Egípcios (Papiro Rhind)	-	1
~ 250 a.C.	Arquimedes	Polígonos inscritos/circunscritos (96 lados)	2
~ 150 d.C.	Ptolomeu	-	3
~ 263 d.C.	Liu Hui	-	3
~ 480 d.C.	Zu Chongzhi	-	7
~ 1400 d.C.	Madhava (Escola de Kerala)	Série infinita	11

~ 1610	Ludolph van Ceulen	Polígonos (2^{62} lados)	35
1706	John Machin	Fórmula arcontangente (Machin)	100
1949	G. W. Reitwiesner	ENIAC	2.037
1954	-	NORAC	3.092
1959	Guilloud	IBM 704	16.167
1967	-	CDC 6600	500.000
1973	Guilloud e Bouyer	CDC 7600	1.001.250
1981	Miyoshi e Kanada	FACOM M-200	2.000.036
1982	Guilloud	-	2.000.050
1986	Bailey	CRAY-2	29.360.111
1986	Kanada e Tamura	HITAC S-810/20	67.108.839
1987	Kanada, Tamura, Kobo et al	NEC SX-2	134.217.700
1988	Kanada e Tamura	Hitachi S-820	201.326.000
1989	Irmãos Chudnovsky	CRAY-2 y IBM-3090/VF	480.000.000
1989	Irmãos Chudnovsky	IBM 3090	1.011.196.691
1991	Irmãos Chudnovsky	-	2.260.000.000
1994	Irmãos Chudnovsky	-	4.044.000.000
1995	Kanada e Takahashi	HITAC S-3800/480	6.442.450.000
1997	Kanada e Takahashi	Hitachi SR2201	51.539.600.000
1999	Kanada e Takahashi	Hitachi SR8000	68.719.470.000
1999	Kanada e Takahashi	Hitachi SR8000	206.258.430.000
2002	Kanada et al	Hitachi SR8000/MP	1.241.100.000.000
2004		Hitachi	1.351.100.000.000
2009	Daisuke Takahashi	T2K Tsukuba SYSTEM	2.576.980.370.000
2009	Fabrice Bellard	Computador pessoal (Intel Core i7) — Algoritmo de Bellard	2.699.999.990.000
2010	Shigeru Kondo e Alexander Yee	Computador pessoal — y-cruncher v0.5.4	5.000.000.000.000
2011	Shigeru Kondo e Alexander Yee	Computador pessoal — y-cruncher	10.000.000.000.050
2013	Shigeru Kondo e Alexander Yee	Computador pessoal — y-cruncher	12.100.000.000.050
2014	Sandon Van Ness ("houkouonchi")	Computador pessoal — y-cruncher	13.300.000.000.000
2016	Peter Trueb	Dell PowerEdge R930 — y-cruncher	22.459.157.718.361
2019	Emma Haruka Iwao (Google Cloud)	Google Cloud (25 máquinas virtuais) — y-cruncher	31.415.926.535.897
2020	Timothy Mullican	Computador pessoal (HP Proliant DL580) — y-cruncher	50.000.000.000.000
2021	Equipe DAViS — Univ. de Ciências Aplicadas de Graubünden (Suíça)	Supercomputador — y-cruncher	62.831.853.071.796
2022	Emma Haruka Iwao (Google Cloud)	Google Cloud (Compute Engine N2) — y-cruncher	100.000.000.000.000

Fonte: Elaborado pelo autor com base em CAVALCANTE (2020); AABOE (1984); BECKMANN (1976); BORWEIN; BORWEIN (1987); POMMER (2019); SANTOS et al. (2018); BELLARD (2010); TRUEB (2016); IWAO (2019); IWAO (2022).

A partir de 1988, celebra-se em 14 de março o "Dia do π " (π Day), que foi instituído inicialmente no Exploratorium, localizado em San Francisco. Na forma de notação de datas adotada nos Estados Unidos (mês/dia), o dia 14 de março é representado como 03/14, o que alude à aproximação de π como 3,14. No ano de 2009, o " π Day" foi formalmente reconhecido pela Câmara dos Representantes dos Estados Unidos.

3 CONCEITO E HISTÓRIA DO NÚMERO PHI (φ)

Nas palavras de Wade (2017), o número Phi (φ) também é conhecido como número áureo, regra de ouro, seção áurea ou proporção áurea. A Euclides de Alexandria é atribuída a primeira definição rigorosa dessa proporção, por volta de 300 a.C., no Livro VI de “Os Elementos”. Segundo a tradução de Bicudo (2009, p. 231), diz-se que uma reta foi cortada em extrema e média razão quando o todo está para o maior dos segmentos assim como o maior está para o menor.

Geometricamente, a proporção áurea é o ponto em que o corte de um segmento produz duas partes que mantêm a mesma razão entre si e em relação ao todo. Na notação da Figura 5, a razão entre AB e AC é igual à razão entre AC e CB, resultando no valor aproximado 1,6180...

Figura 5 - Reta cortada em extrema e média razão.



Fonte: Bicudo (2009) com adaptação do autor.

A proporção áurea pode ser expressa pela equação

$$\frac{AB}{AC} = \frac{AC}{CB} = \varphi, \quad (6)$$

Representação algébrica:

Seja:

AB = a + b (segmento total)

AC = a (parte maior)

CB = b (parte menor), com a > b

A proporção áurea exige:

$$\frac{a + b}{a} = \frac{a}{b} \quad (7)$$

Chamando $\varphi = \frac{a}{b}$ (razão áurea) e $\frac{b}{a} = \frac{1}{\varphi}$, temos:

$$\frac{a+b}{a} = 1 + \frac{b}{a} = 1 + \frac{1}{\varphi} = \varphi \quad (8)$$

Multiplicando por φ obtemos a equação quadrática:

$$\varphi^2 - \varphi - 1 = 0 \quad (9)$$

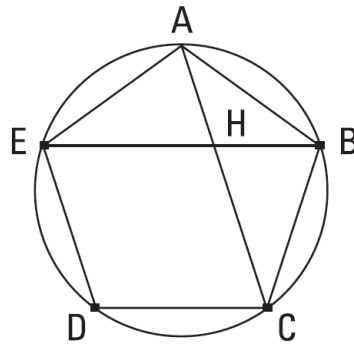
A solução positivo dessa equação quadrática é

$$\varphi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \approx 1,618034, \quad (10)$$

Do ponto de vista da teoria dos números, φ é um número irracional e algébrico: irracional porque sua expansão decimal é infinita e não periódica, e algébrico porque é raiz do polinômio de coeficientes inteiros $x^2 - x - 1 = 0$, conforme demonstrado pela equação (9). Essa classificação contrasta diretamente com a natureza de π , que é transcendente — ou seja, não é raiz de nenhum polinômio com coeficientes racionais, conforme demonstrado por Lindemann em 1882. Essa distinção fundamental entre os dois números tem uma consequência matemática direta: nenhuma expressão algébrica finita em φ pode ser exatamente igual a π , o que implica que toda relação da forma $\pi = f(\varphi)$, onde f é uma função algébrica, será necessariamente uma aproximação. Isso fundamenta teoricamente o caráter aproximado das relações apresentadas nas seções 4.1 e 4.3 deste trabalho.

A Figura 6 apresenta a construção geométrica descrita por Euclides nos Elementos (Livro XIII, Proposição 9), que demonstra a presença da razão extrema e média — conhecida na Antiguidade como seção áurea e hoje denominada proporção áurea ($\varphi \approx 1,618$) — no pentágono regular. Ao estenderem-se duas diagonais consecutivas do pentágono equilátero e equiângulo ABCDE (retas AC e BE), estas intersectam-se no ponto H, dividindo-se mutuamente segundo essa proporção harmônica. Conforme afirma Euclides: “digo que cada uma delas foi cortada em extrema e média razão no H, e os segmentos maiores delas são iguais ao lado do pentágono” (EUCLIDES, 2009).

Figura 6 - Pentágono equilátero e equiângulo com diagonais cortadas em extrema e média razão.



Fonte: Bicudo (2009) com adaptação do autor.

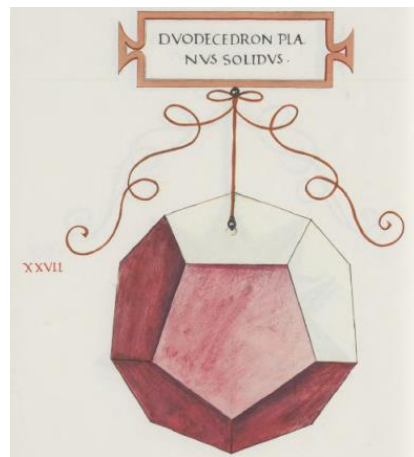
Essa relação implica que a razão entre a diagonal e o lado do pentágono regular é exatamente ϕ . Geometricamente, essa mesma proporção estrutura o pentagrama (formado pela interseção das diagonais do pentágono) e fundamenta a geometria do dodecaedro, sólido platônico cujas doze faces são pentágonos regulares — evidenciando a universalidade da proporção áurea na matemática clássica.

A notação ϕ (phi) para a proporção áurea consolidou-se apenas no século XX, embora o conceito remonte à Antiguidade. Segundo Dunlap (1998), a escolha da letra grega ϕ remete ao escultor Fídias (c. 490–430 a.C.), cujas obras — como as estátuas do Partenon — exibem proporções associadas à harmonia geométrica áurea, embora não haja evidências históricas de que o artista tenha utilizado conscientemente essa razão em seus cálculos. Historicamente, a proporção recebeu múltiplas denominações: Euclides denominou-a "divisão em extrema e média razão" (Livro VI, Def. 3); Luca Pacioli (1445–1519) intitulou seu tratado de 1509 "De Divina Proportione", associando-a a qualidades metafísicas; Johannes Kepler (1571–1630) referiu-se a ela como "sectio divina"; e Martin Ohm (1792–1872) popularizou o termo "Goldener Schnitt" (seção áurea) no século XIX, difundido posteriormente para o inglês como "golden section" (DUNLAP, 1998).

O tratado de Pacioli constitui o primeiro livro monográfico dedicado exclusivamente ao tema, contendo ilustrações dos sólidos platônicos tradicionalmente atribuídas a Leonardo da Vinci. A Figura 7 apresenta um dodecaedro baseado nessas ilustrações, reforçando a relação intrínseca entre a proporção áurea e a geometria espacial — já demonstrada por Euclides no Livro XIII, Proposição 9, onde a razão ϕ

emerge naturalmente na estrutura do pentágono regular e, por extensão, no dodecaedro e no icosaedro (DUNLAP, 1998).

Figura 7 – Dodecaedro regular com faces pentagonais, ilustração atribuídas a Leonardo da Vinci para De Divina Proportione de Luca Pacioli (1509). O dodecaedro exemplifica a presença da proporção áurea (ϕ) na geometria tridimensional: a razão entre sua diagonal espacial e a aresta da face é função direta de ϕ , e cada face pentagonal mantém internamente a razão áurea entre diagonal e lado (DUNLAP, 1998).



Fonte: Pacioli (1509).

Quanto à presença de ϕ na arte renascentista, Dunlap (1998) adota postura crítica: "Embora muitas pinturas incluam componentes retangulares com razões próximas à áurea, raramente há evidências de que o artista tenha considerado conscientemente a proporção áurea na composição". Assim, interpretações que associam o Homem Vitruviano de Leonardo da Vinci à proporção áurea — como a suposta divisão do corpo pelo umbigo segundo ϕ — permanecem especulativas e não consensuais entre historiadores da arte e da matemática.

Geometricamente, conforme já destacado na Figura 6, essa razão manifesta-se inequivocamente na relação entre a diagonal e o lado de um pentágono regular — propriedade central na geometria euclidiana e na simetria de cinco dobras observada tanto na natureza quanto na cristalografia moderna (DUNLAP, 1998).

A simetria de cinco dobras é uma propriedade geométrica fundamental na qual um objeto pode ser dividido em cinco segmentos idênticos ao redor de um eixo central. Essa simetria está profundamente relacionada à proporção áurea (ϕ), pois a razão entre os elementos estruturais em sistemas com simetria quádrupla frequentemente envolve ϕ . Na natureza, essa simetria manifesta-se de forma inequívoca em:

- Flores: Especialmente nas Dicotiledôneas (como girassóis e margaridas), que apresentam arranjos de pétalas com simetria quántupla, onde os espirais de sementes seguem padrões de Fibonacci (com números consecutivos de espirais, como 13 e 8, cuja razão se aproxima de ϕ) (DUNLAP, 1998);
- Animais marinhos: Membros da classe Echinodermata (como estrelas-do-mar, ouriços-do-mar e "sand dollars"), que possuem cinco braços simétricos dispostos radialmente em torno de um eixo central (DUNLAP, 1998);
- Conchas: Embora as conchas do Nautilus sigam uma espiral logarítmica (não simetria quántupla), sua estrutura mantém a proporção áurea em suas dimensões, sendo um exemplo clássico de crescimento biológico regido por ϕ (DUNLAP, 1998).

4 COLETÂNEA DE RELAÇÕES MATEMÁTICAS ENTRE π E φ

A literatura matemática registra dezenas de relações envolvendo π e φ , de naturezas e origens bastante diversas. Diante dessa abundância, impõe-se uma questão metodológica prévia: quais relações selecionar e por quê?

Os critérios que orientaram a seleção das três relações apresentadas neste capítulo foram os seguintes: diversidade de natureza matemática, diversidade de origem histórica e adequação pedagógica.

Quanto à diversidade de natureza matemática, buscou-se contemplar tanto relações exatas quanto aproximadas. A presença de uma identidade rigorosamente demonstrável — como $\varphi = 2\cos(\pi/5)$ — ao lado de aproximações geométricas de diferentes precisões permite ao leitor compreender que a conexão entre π e φ não se restringe a coincidências numéricas curiosas, mas possui raízes estruturais profundas na geometria euclidiana. Ao mesmo tempo, as aproximações revelam como matemáticos e construtores de diferentes épocas estabeleceram pontes práticas entre essas constantes, mesmo sem dispor de ferramentas para demonstrações rigorosas.

Quanto à diversidade de origem histórica, as três relações percorrem um arco temporal que vai da geometria sagrada da Antiguidade — presente na construção de Lawlor associada à quadratura do círculo — passando pela geometria euclidiana clássica do pentágono regular, até chegar à formalização contemporânea de Dixon, publicada no século XX e analisada por Pignatelli (2024). Essa diversidade temporal não é acidental: ela evidencia que a busca por conexões entre π e φ é um tema recorrente na história da matemática, e não um interesse isolado de uma época ou tradição específica.

Quanto à adequação pedagógica, priorizaram-se relações que admitem demonstração ou verificação por meio de construções geométricas planas, acessíveis ao nível de um curso de especialização em matemática. Relações mais sofisticadas — como aquelas que emergem de séries infinitas, funções modulares ou da geometria dos sólidos platônicos — embora matematicamente relevantes, estão além do escopo deliberado deste trabalho e constituem caminhos naturais para investigações futuras.

Por fim, registra-se que a escolha de três relações não pretende esgotar o tema, mas sim oferecer uma amostra representativa e pedagogicamente coerente das formas pelas quais π e φ se entrelaçam na matemática. A Tabela 2, apresentada no capítulo 5, sintetiza quantitativamente as diferenças entre as relações selecionadas, permitindo uma comparação objetiva de suas precisões e características.

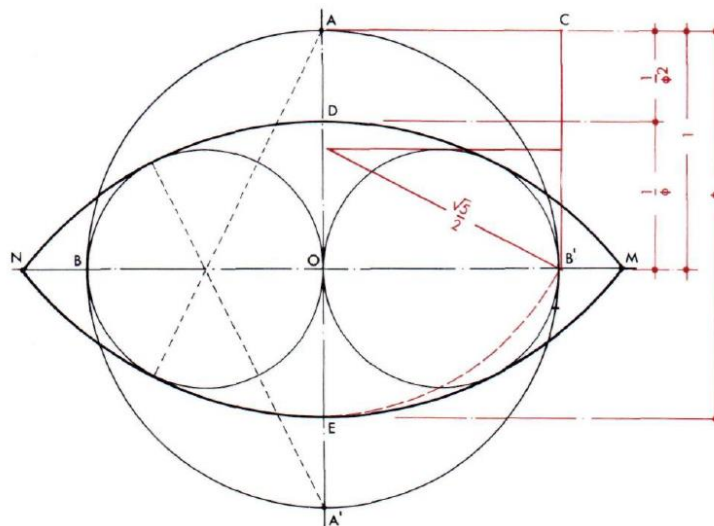
4.1 Primeira relação matemática entre Pi e Phi

A quadratura do círculo é um problema clássico da geometria grega antiga, juntamente com a duplicação do cubo e a trissecção do ângulo. O problema consiste em construir, utilizando apenas régua e compasso, um quadrado cujo perímetro (ou área) seja igual ao de um círculo dado.

Embora matematicamente impossível de resolver com exatidão — demonstrado por Lindemann em 1882 ao provar que π é um número transcendente — a quadratura do círculo ocupou lugar central na tradição da geometria sagrada como uma construção aproximada que articula simbolicamente as constantes π e ϕ .

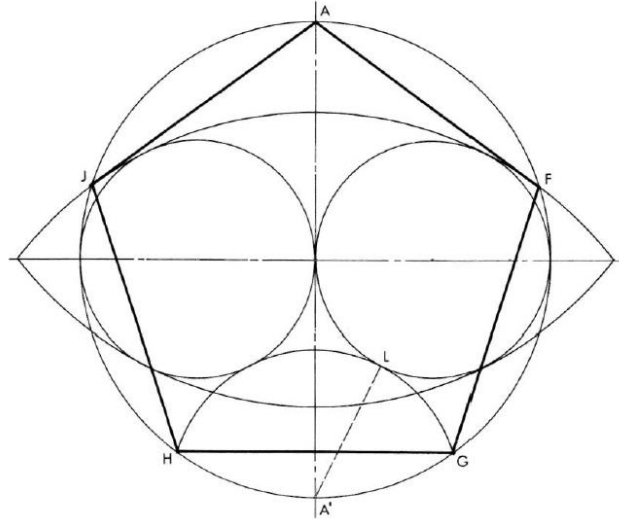
Conforme Lawlor (1996), a prática da quadratura do círculo tem profunda importância para o geômetra-cosmólogo, pois o círculo representa o espírito-espaço puro e não manifesto, enquanto o quadrado representa o mundo manifesto e compreensível. Quando se atinge uma igualdade quase completa entre o círculo e o quadrado, o infinito é capaz de expressar suas dimensões ou qualidades através do finito (LAWLOR, 1996).

Figura 8 – Traçar um círculo de centro O e raio OA = 1. Traçar os diâmetros AA' e BB' em ângulo reto. Utilizando o diâmetro BB', traçar dois círculos simétricos em relação ao diâmetro AA', cada um deles com um raio que seja a metade do raio do círculo original. A partir do ponto A, traçar um arco NM tangente às circunferências dos círculos interiores. Repetir a partir do ponto A'. Construir o quadrado ACB'O a partir do raio OA do círculo original. Tal como mostra o arco da semi-diagonal deste quadrado, o raio AE do arco NEM é ϕ , e os arcos NEM e NDM dividem os raios AO e AO' na secção áurea de $1/\phi$ e $1/\phi^2$.



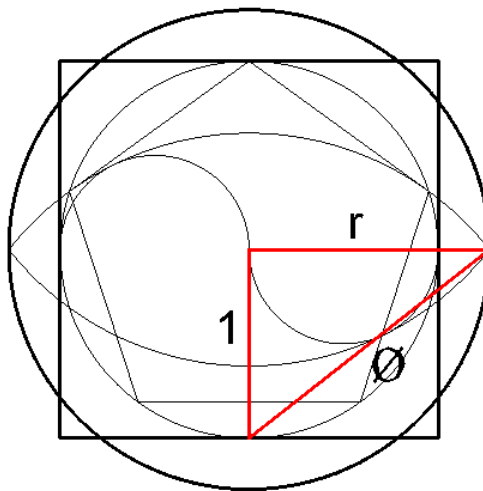
Fonte: Lawlor (1996).

Figura 9 – O arco tangente aos dois círculos interiores corta o círculo exterior no ponto que determina o lado de um pentágono regular inscrito, medido desde o extremo superior do diâmetro vertical A até J (à esquerda) e até F (no extremo inferior do diâmetro vertical A'). Traçando um arco com centro em A' tangente à curva mais próxima dos círculos gêmeos, obtém-se o comprimento L de um terceiro lado do pentágono inscrito, que toca o círculo exterior em H (à esquerda) e em G (à direita). Unindo os pontos J, H, G, F e o extremo superior do diâmetro vertical, forma-se um pentágono regular inscrito no círculo. As diagonais desse pentágono intersectam-se formando um pentagrama, cujos segmentos estão na proporção áurea ϕ .



Fonte: Lawlor (1996).

Figura 10 – Inscrever o círculo inicial num quadrado. Em seguida, traçar um círculo a partir do mesmo centro do círculo original e cujo raio seja a distância até à ponta da "vesica". Este círculo será igual em circunferência ao perímetro do quadrado tangente ao círculo inicial. Sabemos que o quadrado que circunscreve o círculo original de raio 1 tem um lado de 2. Logo, o perímetro deste quadrado é 8 e, portanto, é aproximadamente igual à circunferência do círculo maior, ou seja, 7,993.



Fonte: Lawlor (1996) com adaptação do autor.

Prosseguindo com a construção, Lawlor mostra que, ao inscrever o círculo inicial em um quadrado e depois traçar um círculo externo cujo raio é a distância do centro até a ponta da vesica (região de interseção dos dois círculos internos), obtém-se uma circunferência cujo comprimento é aproximadamente igual ao perímetro do quadrado tangente ao círculo inicial.

Na Figura 10, observamos que o centro O do círculo original (de raio unitário) é também o centro do quadrado circunscrito. A "vesica piscis" é formada sobre o prolongamento diâmetro horizontal BB'. Para determinar o raio r do círculo externo (que passa pela ponta da vesica), aplicamos o Teorema de Pitágoras ao triângulo retângulo formado por:

- **Cateto horizontal (r):** distância do centro O até M.
- **Cateto vertical (1):** raio do círculo de centro O e raio OA=1.
- **Hipotenusa (φ):** distância do diâmetro vertical A' até a face da curva que descreve a "vesica piscis". Aplicando o Teorema de Pitágoras:

$$\varphi^2 = 1^2 + r^2, \quad (11)$$

Ou seja,

$$\begin{aligned} r &= \sqrt{\varphi^2 - 1}, \text{ sendo } \varphi^2 - 1 = \varphi \\ r &= \sqrt{\varphi} \end{aligned} \quad (12)$$

O comprimento da circunferência externa é, então,

$$C = 2\pi r = 2\pi\sqrt{\varphi} \quad (13)$$

Sabendo que o lado do quadrado tangente ao círculo inicial vale 2, seu perímetro é 8. A construção é ajustada para tornar C aproximadamente igual a esse perímetro, levando à relação aproximadamente:

$$2\pi\sqrt{\varphi} \approx 8 \rightarrow \pi \approx \frac{4}{\sqrt{\varphi}} \quad (14)$$

Adotando $\pi \approx 3,1415926535$ e $\varphi \approx 1,618034$, obtém-se numericamente

$$\frac{4}{\sqrt{\varphi}} \approx 3,144605 \dots, \quad (15)$$

Uma boa aproximação para π , com erro relativo da ordem de 10^{-3} .

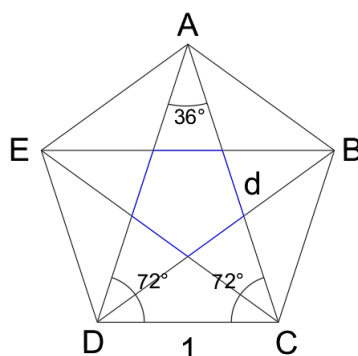
Trata-se, portanto, de uma relação aproximada entre π e φ , nascida de uma construção geométrica simbólica de “quadratura do círculo”, que ilustra um elo numérico elegante, ainda que não exato.

4.2 Segunda relação matemática entre Pi e Phi

Demonstração via Pentágono Regular: $\varphi = 2\cos(\pi/5)$

A identidade $\varphi = 2 \cos(\pi/5)$ emerge naturalmente da geometria do pentágono regular, especificamente do triângulo isósceles dourado ($36^\circ-72^\circ-72^\circ$) que aparece ao se traçar suas diagonais. A Figura 11 ilustra o pentágono regular ABCDE com lado unitário e suas diagonais, destacando o triângulo ACD, que é exatamente o triângulo áureo cujas proporções conduzem à razão φ . Esta relação fundamental entre a proporção áurea e a trigonometria do pentágono é amplamente documentada na literatura, sendo descrita por Akhtaruzzaman e Shafie (2011) como uma das manifestações geométricas mais significativas do número de ouro, presente tanto em formas naturais quanto em criações arquitetônicas e artísticas ao longo da história.

Figura 11 – Pentágono regular ABCDE com lado unitário e suas diagonais. O triângulo ACD é o triângulo áureo de ângulos $36^\circ-72^\circ-72^\circ$, cuja base é o lado do pentágono (1) e cujos lados congruentes são as diagonais ($d = \varphi$).



Fonte: Akhtaruzzaman e Shafie (2011) com adaptação do autor.

Considere um pentágono regular ABCDE com lado = 1. Os ângulos internos medem 108° . Ao traçar a diagonal AC, o triângulo ACD formado é isósceles com ângulos $36^\circ-72^\circ-72^\circ$. Chame a diagonal (AC) de d .

As diagonais se intersectam e criam um pentágono menor interno. O ponto de interseção P divide a diagonal de modo que:

$$\frac{d}{1} = \frac{1}{d-1} \quad (16)$$

Isso é exatamente a definição da razão áurea (divisão em média e extrema razão). Resolvendo:

$$d^2 - d - 1 = 0 \rightarrow d = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} = \varphi \quad (17)$$

Portanto, a diagonal do pentágono regular de lado 1 é φ .

No triângulo isósceles de base = 1 e lados = φ , aplicando a Lei dos Cossenos para o ângulo de $36^\circ (= \pi/5)$:

$$base^2 = lado^2 + lado^2 - 2.lado^2 \cdot \cos(36^\circ) \quad (18)$$

$$1^2 = \varphi^2 + \varphi^2 - 2 \cdot \varphi^2 \cdot \cos(\pi/5) \quad (19)$$

$$1 = 2\varphi^2(1 - \cos(\pi/5)) \quad (20)$$

Usando a propriedade $\Phi^2 = \Phi + 1$:

$$\varphi = 2 \cos(\pi/5) = 2 \cos(36^\circ) \approx 1,6180 \dots \quad (21)$$

4.3 Terceira relação matemática entre Pi e Phi

Aproximação de Dixon: $\pi \approx 6/5 (1 + \varphi)$

Conforme destaca Dixon (1987), a origem desta relação remonta pelo menos ao século XII, quando mestres construtores franceses que edificaram as catedrais góticas francesas já utilizavam empiricamente esta proporção em seus trabalhos. Foi Dixon, contudo, quem a formalizou no contexto matemático contemporâneo, apresentando inclusive um procedimento geométrico para construir um quadrado com área aproximadamente igual à de um círculo de raio unitário, utilizando apenas régua e compasso.

A construção está ilustrada na Figura 12 e segue os seguintes passos: dado um círculo de raio unitário ($r = 1$), constrói-se o retângulo áureo OEID. O segmento $AE = 1 + \varphi$ é dividido em cinco partes iguais, identificando-se o ponto H tal que $HE = (1 + \varphi)/5$. Prolongando-se esse segmento, obtém-se $AL = (6/5)(1 + \varphi)$. Traça-se então uma semicircunferência sobre o diâmetro AL, encontrando o ponto M na interseção com a linha vertical do centro O. Constrói-se o quadrado AMNP sobre o segmento AM.

Pela semelhança dos triângulos ALM e AOM, tem-se que:

$$AM^2 = AO \cdot AL \quad (22)$$

Como $AO = 1$, segue diretamente que:

$$AM^2 = AL = \frac{6}{5}(1 + \varphi) \quad (23)$$

Portanto, a área do quadrado AMNP é numericamente igual a $(6/5)(1 + \varphi)$, e a construção afirma que essa área aproxima a área do círculo de raio unitário, que é π . Daí decorre a aproximação:

$$\pi \approx \frac{6}{5}(1 + \varphi) \quad (24)$$

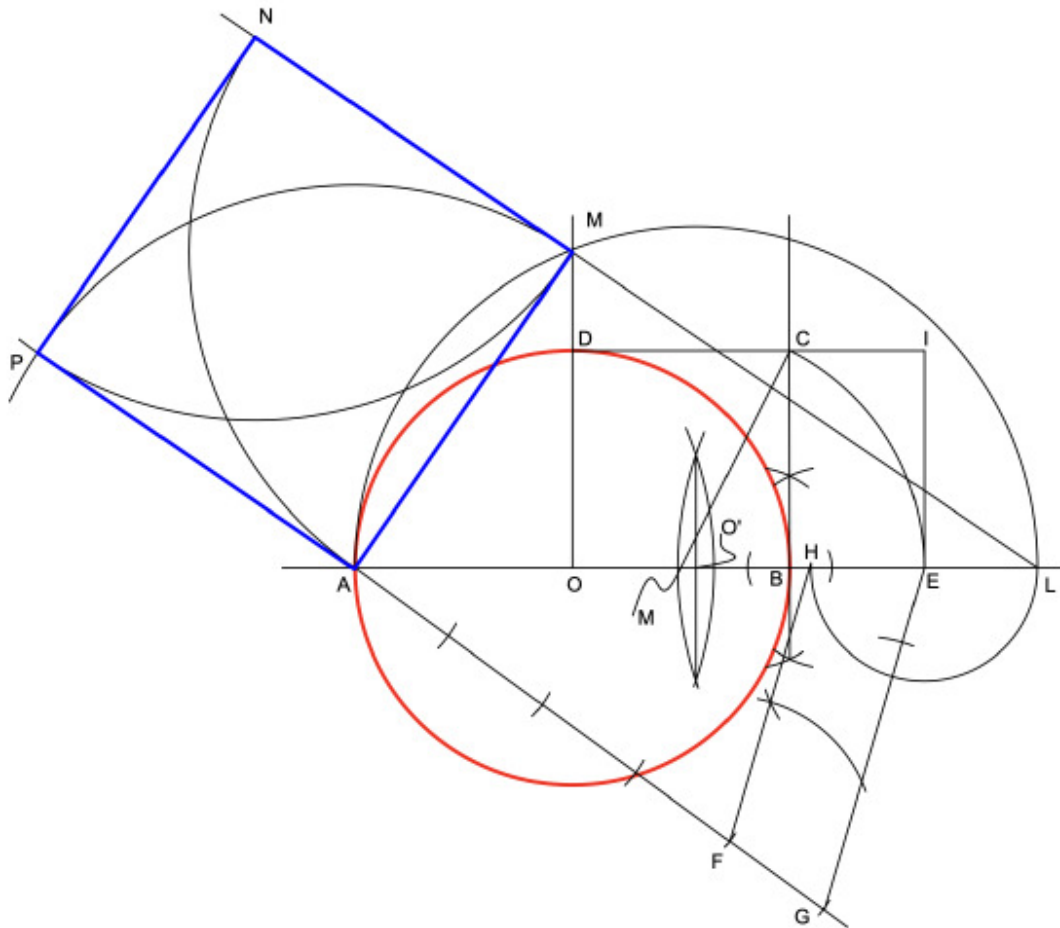
Verificando numericamente com $\varphi \approx 1,618034$:

$$\frac{6}{5}(1 + 1,618034) = \frac{6}{5} \times 2,618034 = 1,2 \times 2,618034 \approx 3,141641 \quad (25)$$

Comparando com o valor real de $\pi = 3,141592\dots$, obtém-se:

$$\text{Erro absoluto} = |3,141641 - 3,141592| \approx 0,000049 \quad (26)$$

Figura 12 – Traçar um círculo com raio unitário ($r = 1$). Construir o retângulo áureo OEID. Dividir o segmento $AE = 1 + \Phi$ em cinco partes iguais, identificando o ponto H tal que $HE = (1+\Phi)/5$. Prolongar para obter o segmento $AL = (6/5)(1+\Phi)$. Traçar uma semicircunferência sobre o diâmetro AL, encontrando o ponto M na interseção com a linha vertical do centro O. Construir o quadrado AMNP sobre o segmento AM. Pela semelhança dos triângulos ALM e AOM, tem-se que $AM^2 = AL$, logo $AM = \sqrt{[(6/5)(1+\Phi)]} \approx \sqrt{\pi}$, com erro inferior a 0,00005.



Fonte: Dixon (2024) com adaptação do autor.

5 ANÁLISE DOS RESULTADOS

A coletânea apresentada neste trabalho reúne três relações matemáticas que conectam as constantes π (Pi) e φ (Phi), cada uma com características distintas quanto à sua natureza, origem histórica, precisão e significado geométrico. A análise comparativa dessas relações revela não apenas a riqueza do tema, mas também diferentes abordagens — exatas e aproximadas — que matemáticos, geômetras e construtores desenvolveram ao longo da história para estabelecer pontes entre esses dois números fundamentais.

5.1 Natureza das Relações: Exatas versus Aproximadas

A distinção entre identidade exata e aproximação não é meramente formal: ela reflete uma impossibilidade matemática de fundo. Como π é transcendente e φ é algébrico, nenhuma expressão algébrica finita em φ pode ser rigorosamente igual a π . Isso significa que toda relação da forma $\pi = f(\varphi)$, onde f é uma função algébrica racional, será necessariamente uma aproximação — por mais precisa que pareça.

Esse fato explica por que a segunda relação ocupa uma posição qualitativamente diferente das demais. A identidade $\varphi = 2\cos(\pi/5)$ não expressa π em termos de φ , mas sim φ em termos de π : ela revela que a proporção áurea é um valor trigonométrico natural do ângulo $\pi/5$, emergindo da simetria quádrupla do pentágono. A conexão entre as duas constantes, aqui, é estrutural — não uma coincidência numérica, mas uma consequência da geometria euclidiana.

Já as relações aproximadas de Lawlor e Dixon operam em direção inversa: partem de construções geométricas práticas para estimar π a partir de φ . O que as distingue entre si é a precisão — e essa diferença tem uma explicação. A aproximação de Lawlor, $\pi \approx 4/\sqrt{\varphi}$, envolve uma operação de raiz quadrada sobre φ , cujo resultado ($\sqrt{\varphi} \approx 1,2720$) não guarda relação algébrica simples com π . A de Dixon, $\pi \approx (6/5)(1 + \varphi)$, explora diretamente o valor numérico de $1 + \varphi = \varphi^2 \approx 2,6180$ — um número cuja proximidade com $\pi/1,2$ é notável, ainda que acidental do ponto de vista da teoria dos números. Essa estrutura mais simples e "linear" em φ é precisamente o que confere à aproximação de Dixon sua precisão superior: o erro relativo de 0,0016% é aproximadamente 60 vezes menor do que o da construção de Lawlor (0,096%).

5.2 Implicações e Significado

A diversidade dessas relações evidencia que a busca por conexões entre π e φ não se restringe a um único período histórico ou a uma única abordagem metodológica. Desde os geômetras da Antiguidade, passando pelos construtores medievais e chegando aos matemáticos contemporâneos, a articulação entre essas constantes revela-se um tema recorrente e fascinante.

Além disso, a coexistência de relações exatas e aproximadas enriquece a compreensão do próprio fazer matemático: enquanto as identidades exatas revelam estruturas profundas e imutáveis da geometria, as aproximações — especialmente aquelas com precisão tão elevada quanto a de Dixon — demonstram a engenhosidade humana em estabelecer pontes entre domínios aparentemente distintos, mesmo quando a exatidão rigorosa é inalcançável.

Por fim, é importante destacar que todas as relações aqui apresentadas emergem de construções geométricas planas. Essa escolha metodológica, deliberada no escopo deste trabalho, não esgota as possibilidades de conexão entre π e φ . Investigações futuras podem estender essa análise para a geometria espacial (como nos sólidos platônicos), para a análise matemática (por meio de séries infinitas) ou para a teoria dos números, ampliando ainda mais o panorama dessas fascinantes relações.

5.3 Comparação Quantitativa das Relações

A fim de evidenciar com precisão as distinções entre as três relações apresentadas, a Tabela 2 sintetiza seus valores numéricos, erros absolutos e erros relativos em relação ao valor de $\pi = 3,14159265358979\dots$

Tabela 2 – Síntese quantitativa das relações matemáticas estudadas entre Pi e Phi.

	1ª Relação	2ª Relação	3ª Relação
Expressão	$\pi \approx \frac{4}{\sqrt{\varphi}}$	$\varphi = 2 \cos(\pi/5)$	$\pi \approx 6/5 (1 + \varphi)$
Natureza	Aproximada	Exata	Aproximada
Valor calculado	3,14460...	Identidade	3,14164...
Erro absoluto	0,00301...	0	0,00005...
Erro relativo	$\approx 0,096\%$	0%	$\approx 0,0016\%$

Origem	Geometria Sagrada	Geometria Euclidiana	Dixon (séc. XX)
Referência	Lawlor (1996)	Akhtaruzzaman e Shafie (2011)	Pignatelli (2024)

Fonte: Elaborado pelo autor.

A análise quantitativa revela uma hierarquia de precisão entre as relações aproximadas: a terceira relação, devida a Dixon e formalizada por Pignatelli (2024), apresenta erro relativo da ordem de $10^{-3}\%$, aproximadamente sessenta vezes menor do que o da primeira relação, originada na tradição da geometria sagrada, possui caráter simbólico e pedagógico, aproximando Pi com algarismos decimais corretos, a terceira alcança quatro casas decimais corretas ($\text{Pi} \approx 3,1416$), situando-se em precisão próxima à aproximação arquimediana $27/7 \approx 3,144$, porém superando-a. A segunda relação, por sua vez, ocupa posição qualitativamente distinta das demais: por ser uma identidade exata, demonstrável rigorosamente pela geometria euclidiana do pentágono regular, não admite erro e não pode ser comparada numericamente às aproximações – ela representa não uma estimativa de Pi a partir de Phi, mas uma equivalência intrínseca entre Phi e uma função trigonométrica de Pi, revelando que as duas constantes compartilham uma estrutura geométrica comum, cuja raiz está na simetria quántupla do pentágono.

6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Das três relações estudadas, apenas $\varphi = 2\cos(\pi/5)$ é uma identidade exata; as demais constituem aproximações com erros relativos da ordem de $10^{-2}\%$ e $10^{-3}\%$, respectivamente.

Espera-se que o presente trabalho estimule novas pesquisas por professores e estudantes de matemática, desde o ensino médio até o ensino universitário, revisitando aspectos históricos, filosóficos e místicos que motivaram matemáticos do passado.

Acredita-se que o ensino da matemática possa ser enriquecido quando é desenvolvido em paralelo com o estudo histórico de seus conceitos, de forma contextualizada, convidando o estudante a uma viagem imaginativa que o leve aos egípcios, gregos, árabes e outros povos que contribuíram para a construção desse conhecimento.

Einstein, em texto de 1921 intitulado *Geometrie und Erfahrung* (Geometria e Experiência), conferência proferida na Academia Prussiana de Ciências em Berlim, registrou: "Atribuo especial importância à visão que tenho da geometria, porque sem ela eu não teria sido capaz de formular a Teoria da Relatividade" (EINSTEIN, 1921, tradução nossa). Essa frase sintetiza a força conceitual da geometria como linguagem de descrição do mundo físico.

REFERÊNCIAS

Padrão ABNT:

LAUNAY, Mickaël. **A fascinante história da matemática: da pré-história aos dias de hoje**. Tradução de Clóvis Marques. Revisão da tradução de Anna Maria Sotero. 1. ed. Rio de Janeiro: Bertrand Brasil, 2019.

EVES, Howard. **Introdução à história da matemática**. Tradução: Hygino H. Domingues. Campinas: Editora da Unicamp, 2004.

SHAPIRO, S. **Filosofia da matemática**. (O saber da filosofia, v. 42). Tradução de Augusto J. Franco de Oliveira. Lisboa: Edições 70, 2000.

BURTT, Edwin Arthur. **As bases metafísicas da ciência moderna**. Tradução de José Viegas Filho e Orlando Araújo Henriques. Brasília, DF: Editora Universidade de Brasília, 1983.

ALMEIDA, M. C. **Platão Redimido: A Teoria dos Números Figurados na Ciência Antiga e Moderna**. Curitiba: Editora Champagnat, 2003.

MORAIS FILHO, Daniel Cordeiro de. **Um convite à matemática: fundamentos lógicos com técnicas de demonstração, notas históricas e curiosidades**. Campina Grande: EDUFCEG, 2006.

BECKMANN, Petr. **A History of Pi**. 3rd ed. New York: St. Martin's Press, 1976.

GUZZO, Sandro Marcos. **O número “pi”**. REMAT: Revista Eletrônica de Matemática, Jataí, n. 2, 2010. Disponível em: <http://www2.jatai.ufg.br/ojs/index.php/matematica/issue/view/...> Acesso em: 11 fev. 2026.

CAVALCANTE, Antonia Erineide et al. **O π (PI) na história da Matemática**. In: POISSON (Org.). Série Educar: Volume 19 - Matemática. Belo Horizonte: Poisson, 2020.

AABOE, Asger. **Episodes from the early history of mathematics**. Washington: The Mathematical Association of America, 1984.

BORWEIN, Jonathan M.; BORWEIN, Peter B. **Pi and the AGM: a study in analytic number theory and computational complexity**. New York: John Wiley & Sons, 1987.

POMMER, Walter M. **O número π e o conceito de aproximação**. Ensino em Re-Vista, Uberlândia, MG, v. 26, n. 1, p. 125-138, jan./jun. 2019.

SANTOS, Antônio da S.; OLIVEIRA, André S. de; SILVEIRA, Karine L. B. da; BEZERRA, Pedro H. M. **Número π : uma abordagem histórica e pedagógica**. Boletim Cearense de Educação e História da Matemática, Fortaleza, CE, v. 5, n. 14, p. 223-230, maio/ago. 2018.

WADE, David. **Geometría y Arte: Influencias matemáticas durante el Renacimiento**. Tradução de Montserrat Ribas. Madrid: Ediciones Librero S. L., 2017.

EUCLIDES. **Os elementos**. Tradução de Irineu Bicudo. São Paulo: Editora UNESP, 2009.

DUNLAP, Richard A. **The golden ratio and Fibonacci numbers**. Singapore: World Scientific Publishing, 1998.

LAWLOR, Robert. **Geometria Sagrada: Filosofia e Prática**. Tradução de Maria José García Ripoll. Madrid: Edições del Prado, 1996.

PACIOLI, Luca. **De divina proportione**. Veneza: [s.n.], 1509. [Tavola e testo di Luca Pacioli].

AKHTARUZZAMAN, Md.; SHAFIE, Amir A. **Geometrical Substantiation of Phi, the Golden Ratio and the Baroque of Nature, Architecture, Design and Engineering**. International Journal of Arts, v. 1, n. 1, p. 1–22, 2011.

DIXON, Robert A. **Squaring the Circle. In: Mathographics**. Oxford: Blackwell, pp. 44–47, 1987.

BELLARD, Fabrice. **Computation of 2700 billion decimal digits of Pi using a Desktop Computer**. 2010. Disponível em: <https://bellard.org/pi/pi2700e9/index.html>. Acesso em: 18 fev. 2026.


TRUEB, Peter. **Digit Statistics of the First 22.4 Trillion Decimal Digits of Pi**. arXiv preprint, arXiv:1612.00489, nov. 2016. Disponível em: <https://arxiv.org/abs/1612.00489>. Acesso em: 18 fev. 2026.

IWAO, Emma Haruka. **Pi in the sky: Calculating a record-breaking 31.4 trillion digits of Archimedes' constant on Google Cloud**. Google Cloud Blog, 14 mar. 2019. Disponível em: <https://cloud.google.com/blog/products/compute/calculating-31-4-trillion-digits-of-archimedes-constant-on-google-cloud>. Acesso em: 18 fev. 2026.

IWAO, Emma Haruka. **Calculating 100 trillion digits of pi on Google Cloud**. Google Cloud Blog, 8 jun. 2022. Disponível em: <https://cloud.google.com/blog/products/compute/calculating-100-trillion-digits-of-pi-on-google-cloud>. Acesso em: 18 fev. 2026.

EINSTEIN, Albert. **Geometrie und Erfahrung**. Erweiterte Fassung des Festvortrages gehalten an der Preussischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin am 27. Januar 1921. Berlin: Julius Springer, 1921. Tradução inglesa disponível em: EINSTEIN, Albert. Geometry and Experience. In: _____. Sidelights on Relativity. Tradução de G. B. Jeffery e W. Perrett. London: Methuen, 1922. p. 27–55.

BÍBLIA. Português. **Bíblia de Jerusalém** – 1ª edição, 2002, 9ª reimpressão, 2013. São Paulo: Paulus, 2013.

	INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA DA PARAÍBA
	Campus Cajazeiras - Código INEP: 25008978
	Rua José Antônio da Silva, 300, Jardim Oásis, CEP 58.900-000, Cajazeiras (PB)
	CNPJ: 10.783.898/0005-07 - Telefone: (83) 3532-4100

Documento Digitalizado Ostensivo (Público)

Trabalho de Conclusão de Curso

Assunto:	Trabalho de Conclusão de Curso
Assinado por:	Fracalles Stefano
Tipo do Documento:	Anexo
Situação:	Finalizado
Nível de Acesso:	Ostensivo (Público)
Tipo do Conferência:	Cópia Simples

Documento assinado eletronicamente por:

- **Fracalles Stefano Rolim Silva, ALUNO (202012210016) DE ESPECIALIZAÇÃO EM MATEMÁTICA - CAJAZEIRAS**, em 25/02/2026 11:42:17.

Este documento foi armazenado no SUAP em 25/02/2026. Para comprovar sua integridade, faça a leitura do QRCode ao lado ou acesse <https://suap.ifpb.edu.br/verificar-documento-externo/> e forneça os dados abaixo:

Código Verificador: 1778553

Código de Autenticação: 0b2f70e293

