



INSTITUTO FEDERAL DA PARAÍBA
CAMPUS CAJAZEIRAS
CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

WANDENBERG ALEXANDRIA DA SILVA

**MODELO LOGÍSTICO BERNOULLI-VERHULST: UMA
FORMULAÇÃO FRACIONÁRIA E APLICAÇÃO**

CAJAZEIRAS

2026

WANDENBERG ALEXANDRIA DA SILVA

**MODELO LOGÍSTICO BERNOULLI-VERHULST: UMA FORMULAÇÃO
FRACIONÁRIA E APLICAÇÃO**

Monografia apresentada junto ao **Curso de Licenciatura em Matemática** do **Instituto Federal da Paraíba**, como requisito à obtenção do título de **Licenciado em Matemática**.

Orientador: Prof. Dr. José Ivelton Siqueira Lustosa.

Cajazeiras

2026

WANDENBERG ALEXANDRIA DA SILVA

MODELO LOGÍSTICO BERNOULLI-VERHULST: UMA FORMULAÇÃO FRACIONÁRIA E APLICAÇÃO

Monografia apresentada ao programa de **Curso de Licenciatura em Matemática** do **Instituto Federal da Paraíba**, como requisito à obtenção do título de **Licenciado em Matemática**.

Data de aprovação: 25/02/2026

Banca Examinadora:

Documento assinado digitalmente
 JOSE IVELTON SIQUEIRA LUSTOSA
Data: 02/03/2026 14:31:03-0300
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

Prof. Dr. José Ivelton Siqueira Lustosa
Instituto Federal da Paraíba - IFPB

Documento assinado digitalmente
 JOSE DOVAL NUNES MARTINS
Data: 02/03/2026 15:50:03-0300
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

Prof. Me. José Doval Nunes Martins
Instituto Federal da Paraíba - IFPB

Documento assinado digitalmente
 AILTON RIBEIRO DE ASSIS
Data: 02/03/2026 15:12:55-0300
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

Prof. Me. Ailton Ribeiro de Assis
Instituto Federal da Paraíba - IFPB

IFPB / Campus Cajazeiras
Coordenação de Biblioteca
Biblioteca Prof. Ribamar da Silva
Catalogação na fonte: Cícero Luciano Félix CRB-15/750

S586d Silva, Wandenberg Alexandria da.
Modelo logístico bernoulli-verhulst : uma formulação fracionária e aplicação / Wandenberg Alexandria da Silva.– 2026.

53f. : il.

Trabalho de Conclusão de Curso (Licenciatura em Matemática) - Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia da Paraíba, Cajazeiras, 2026.

Orientador(a): Prof. Dr. José Ivelton Siqueira Lustosa.

1. Equação diferencial. 2. Cálculo Fracionário. 3. Equação de Bernoulli. 4. Modelagem Matemática. I. Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia da Paraíba. II. Título.

IFPB/CZ

CDU: 517.9(043.2)

*À minha mãe, que abriu mão de seus sonhos
para que eu tivesse a oportunidade de realizar
os meus.*

AGRADECIMENTOS

Agradeço, primeiramente, a Deus, por ter me concedido saúde, força e perseverança, permitindo-me alcançar esta conquista.

Ao Prof. Dr. Ivelton Siqueira Lustosa, por aceitar ser meu orientador e por todos os ensinamentos, orientações e contribuições ao longo do curso.

À minha mãe, Ana Maria Alexandria, que, com amor incansável e dedicação constante, sempre amparou e incentivou minha trajetória acadêmica e que, desde a infância, teve a paciência de me ouvir falar sobre o que eu aprendia na escola, mesmo quando minhas explicações ainda não faziam muito sentido. Seu apoio e suas palavras de encorajamento foram o que me fizeram chegar até aqui.

À minha noiva, Penélope Rafaela, pelo apoio e carinho constantes, por ser fonte de inspiração em cada etapa desta caminhada, pelos sorrisos que renovam minhas energias nos momentos mais desafiadores, por sempre me escutar quando preciso desabafar, por ser meu refúgio e minha válvula de escape quando preciso desacelerar e por tornar meus dias mais leves.

Às minhas irmãs, Géssica, Georgia e Ingrid, por todo o amor demonstrado em atitudes sinceras, pela parceria de sempre e por caminharem ao meu lado com incentivo e acolhimento ao longo da minha vida.

Aos meus irmãos, Lucimar, Leonardo e Leilson, pelo apoio incondicional, pela proteção e por sempre acreditarem em mim.

A Adalberto Augustinho, pai que a vida generosamente me concedeu, pelo apoio constante e pelo incentivo sincero.

A todos os professores do IFPB, que, com compromisso e dedicação, contribuíram de forma significativa para minha formação acadêmica e humana. Em especial aos professores José Doval Nunes Martins e Ailton Ribeiro de Assis, por integrarem a banca examinadora, pelos ensinamentos e pelas conversas enriquecedoras.

Aos meus amigos, em especial Júlio César de Brito e Leonardo Guedes, que caminharam ao meu lado ao longo desta jornada, compartilhando esforços, desafios e conquistas, e que, com companheirismo e incentivo, tornaram esse percurso mais leve e enriquecedor.

A todos aqueles que sempre torcem por mim e celebram comigo cada vitória.

*“Há mais coisas no céu e na terra, Horácio,
Do que pode sonhar a tua filosofia.”*

William Shakespeare, Hamlet

RESUMO

Este trabalho apresenta uma análise teórica e aplicada de equações diferenciais clássicas e fracionárias, com foco na modelagem de crescimento populacional. Inicialmente, são introduzidos alguns conceitos fundamentais da transformada de Laplace e do cálculo fracionário, visando fornecer a base necessária para compreender e resolver equações diferenciais fracionárias. Em seguida, estudam-se soluções da equação de Bernoulli, nas abordagens clássica e fracionária, destacando diferenças de comportamento e representações gráficas. O modelo logístico de Verhulst é então apresentado, mostrando sua conexão com a equação de Bernoulli, seguido de soluções inteiras e fracionárias e análises gráficas. Por fim, uma aplicação hipotética do modelo logístico de Verhulst em uma cidade é apresentada, na qual se realiza uma análise comparativa, tanto analítica quanto gráfica, entre as soluções clássicas e fracionárias, evidenciando sua utilidade na previsão da saturação populacional e na análise dos padrões de crescimento.

Palavras-chave: Cálculo Fracionário, Equação de Bernoulli, Modelo Logístico de Verhulst, Dinâmica Populacional, Modelagem Matemática.

ABSTRACT

This work presents a theoretical and applied analysis of classical and fractional differential equations, with an emphasis on population growth modeling. Initially, the fundamental concepts of fractional calculus are introduced in order to provide the necessary foundation for understanding and solving fractional differential equations. Subsequently, solutions of the Bernoulli equation are investigated under both classical and fractional approaches, highlighting differences in behavior and graphical representations. The Verhulst logistic model is then presented, emphasizing its connection with the Bernoulli equation, followed by integer-order and fractional-order solutions and their graphical analyses. Finally, a hypothetical application of the Verhulst logistic model to a city is proposed, in which a comparative analytical and graphical analysis between the classical and fractional solutions is performed, demonstrating their usefulness in predicting population saturation and analyzing growth patterns.

Keywords: Fractional Calculus; Bernoulli Equation; Verhulst Logistic Model; Population Dynamics; Mathematical Modeling.

LISTA DE FIGURAS

Figura 2.1 – Plano tz	29
Figura 4.1 – Gráfico da Solução Fracionária da Equação de Bernoulli.	47
Figura 4.2 – Gráfico da solução inteira do Modelo Logístico.	50
Figura 4.3 – Gráfico da Solução Fracionária do Modelo Logístico.	51
Figura 4.4 – Comportamento Gráfico da Solução Clássica do Modelo Logístico. . . .	53
Figura 4.5 – Comportamento Gráfico da Solução Fracionária do Modelo Logístico. .	54

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	16
2	TRANSFORMADA DE LAPLACE: ALGUNS CONCEITOS	20
2.1	Transformada de Laplace	20
2.1.1	Linearidade da Transformada de Laplace	23
2.1.2	Condições Suficientes para a Existência de $\mathcal{L}[f(t)]$	25
2.2	Transformada de Laplace Inversa	26
2.3	Transformada de uma Derivada	27
2.4	Convolução	28
3	CONCEITOS BÁSICOS DE CÁLCULO FRACIONÁRIO . .	31
3.1	Função Gama	31
3.2	Função de Mittag-Leffler	35
3.2.1	A Transformada de Laplace da Função de Mittag-Leffler	36
3.3	Função de Gel'fand-Shilov	37
3.3.1	Transformada de Laplace da Função de Gel'fand-Shilov	37
3.4	Cálculo Fracionário	38
3.4.1	Contextualização Histórica	38
3.4.2	Operador Integral de Ordem Inteira e Fracionária	39
4	MODELO BERNOULLI-VERHULST FRACIONÁRIO E APLICAÇÃO	42
4.1	Equação Diferencial de Bernoulli: Soluções Clássica e Fracionária	42
4.1.1	Solução Clássica da Equação Diferencial de Bernoulli	43
4.1.2	Uma Solução Fracionária para a Equação Diferencial de Bernoulli . . .	45
4.2	Conexão entre a Equação de Bernoulli e o Modelo Logístico de Verhulst	47
4.2.1	Solução Clássica da Equação de Verhulst	49

4.2.2	Uma Solução Fracionária para a Equação de Verhulst	50
4.3	Análise Analítica e Gráfica de um Cenário Hipotético	52
4.3.1	Descrição do Cenário Populacional	52
4.3.2	Solução Clássica	52
4.3.3	Solução Fracionária	53
5	CONSIDERAÇÕES FINAIS	56
	REFERÊNCIAS	57

1 INTRODUÇÃO

Desde os primórdios da humanidade, o ser humano busca compreender os fenômenos naturais e sociais que o cercam, desenvolvendo estratégias para descrevê-los, interpretá-los e, quando possível, prever seu comportamento. Nesse contexto, a modelagem Matemática consolidou-se como uma importante ferramenta de investigação, permitindo representar situações-problema oriundas da realidade por meio da linguagem matemática. Tal prática acompanha o próprio desenvolvimento da Matemática, estando presente desde as civilizações antigas, inicialmente associada às necessidades cotidianas e às aplicações práticas dos povos antigos (Biembengut; Hein, 2000).

Em diversas áreas do conhecimento, como a Física, Engenharia, Biologia e Economia, a modelagem matemática busca descrever o comportamento de sistemas por meio da identificação das variáveis relevantes e da formulação de hipóteses fundamentadas em leis empíricas. A estrutura matemática dessas hipóteses é, em geral, expressa por uma equação diferencial ou por um sistema de equações diferenciais, cuja solução deve ser compatível com o comportamento observado do sistema (Zill, 2016).

A construção de um modelo matemático, em geral, envolve a realização de simplificações da situação original, com o objetivo de identificar elementos matemáticos capazes de descrever ou, ao menos, aproximar-se do fenômeno real que se deseja estudar. Ressalta-se que um modelo não deve ser concebido como uma estrutura fechada ou definitiva, mas sim como um processo contínuo de aperfeiçoamento, no qual sucessivas adaptações e refinamentos permitem uma aproximação cada vez maior entre o modelo e a realidade (Diniz, 2011).

O estudo da dinâmica populacional insere-se no contexto da modelagem matemática como uma importante ferramenta para a descrição e análise da variação do tamanho de populações ao longo do tempo. Por meio de equações diferenciais ordinárias, esses modelos permitem representar matematicamente fenômenos observáveis, sendo amplamente empregados na investigação do crescimento de populações humanas, animais e microbianas, bem como na análise da influência de fatores ambientais sobre sua evolução (Boyce; DiPrima, 2015). Dessa forma, a modelagem populacional possibilita compreender e antecipar comportamentos associados a sistemas biológicos e sociais complexos.

Nesse cenário, Thomas Robert Malthus (1766–1834) propôs um dos primeiros modelos matemáticos voltados à descrição do crescimento populacional, ao admitir que a taxa de variação de uma população é proporcional ao seu tamanho em um dado instante.

Tal suposição conduz a um modelo de crescimento exponencial, amplamente estudado no contexto das equações diferenciais (Bacaër, 2021; Boyce; DiPrima, 2015). Contudo, essa formulação desconsidera fatores limitantes presentes em sistemas reais, como a escassez de recursos naturais e a competição entre indivíduos, o que restringe sua aplicabilidade em situações práticas (Gotelli, 2008).

Visando superar essas limitações, Pierre François Verhulst propôs uma modificação no modelo malthusiano, introduzindo o conceito de capacidade suporte do meio. O modelo logístico de Verhulst é descrito pela equação diferencial

$$\frac{dP}{dt} = \lambda P \left(1 - \frac{P}{L}\right), \quad (1)$$

em que P representa o tamanho da população no instante t , λ é a taxa intrínseca de crescimento populacional e L denota a capacidade de suporte do meio (Theodoro; Camargo, 2020).

Nesse contexto, destaca-se que a equação logística de Verhulst pode ser interpretada como um caso particular da equação diferencial de Bernoulli, cuja forma geral é dada por

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = f(x)y^n, \quad (2)$$

com $n \in \mathbb{R}$ e $n \neq 0, 1$, pois nestes dois casos seria uma Equação Diferencial Ordinária linear (Zill; Cullen, 2001).

O cálculo fracionário é a área da matemática dedicada à extensão dos conceitos de derivada e integral para ordens não inteiras. Essa generalização do cálculo clássico tem se destacado na modelagem matemática por possibilitar representações mais elaboradas de fenômenos naturais. Estudos indicam que modelos construídos a partir do cálculo fracionário podem, em determinadas situações, oferecer descrições mais adequadas do que aquelas obtidas por meio de modelos tradicionais. Tal vantagem decorre da presença do chamado “efeito de memória”, característica dos operadores fracionários, que permite incorporar à modelagem a influência do histórico do sistema por meio do parâmetro de ordem fracionária (Camargo, 2009).

Nesse sentido, o presente trabalho tem como objetivo introduzir, inicialmente, alguns conceitos fundamentais do cálculo clássico e fracionário e, em seguida, aplicá-los ao estudo de uma situação de crescimento populacional modelada pela equação logística de Verhulst, com o intuito de analisar e comparar as soluções obtidas por meio do cálculo clássico e do cálculo fracionário.

Para o desenvolvimento do estudo, apresentam-se inicialmente a transformada de Laplace e algumas de suas principais propriedades. Em seguida, são abordadas funções

especiais relevantes ao contexto do cálculo fracionário, com destaque para a função Gama, a função de Mittag–Leffler de um parâmetro e a função de Gel’fand–Shilov, bem como suas respectivas transformadas de Laplace, fornecendo o embasamento matemático necessário para as análises posteriores.

Dessa forma, um dos pressupostos deste trabalho consiste na formulação de um modelo fracionário para a equação logística de Verhulst, aplicado à resolução de uma situação-problema hipotética de crescimento populacional, visando obter uma possível solução analítica para o problema proposto. Na sequência, procede-se à comparação entre as soluções obtidas no âmbito do cálculo fracionário e aquelas provenientes do modelo clássico, tanto do ponto de vista analítico quanto por meio da análise gráfica das curvas de crescimento populacional.

Partindo da equação logística clássica de Verhulst, apresentada na Equação (1), introduz-se o parâmetro α visando generalizar o modelo para o contexto do cálculo fracionário. Obtém-se, assim, uma equação diferencial fracionária linear de ordem α , que estende o modelo clássico. Nesse caso, considera-se $0 < \alpha \leq 1$, conforme explicitado a seguir.

$$\frac{d^\alpha w}{dt^\alpha} + \lambda w = \frac{\lambda}{L}. \quad (3)$$

Para a abordagem fracionária, é utilizada a derivada de Caputo, escolhida por permitir a utilização de condições iniciais do tipo clássico, facilitando a interpretação física das soluções e a comparação direta com os resultados obtidos pelo cálculo usual (Lustosa, 2022).

O presente trabalho encontra-se estruturado em uma introdução e três capítulos, cuja organização é detalhada a seguir.

Na Introdução, é apresentada uma contextualização histórica e conceitual da modelagem matemática como ferramenta para a compreensão de fenômenos naturais e sociais, com ênfase na dinâmica populacional.

O segundo capítulo aborda os principais fundamentos teóricos da transformada de Laplace, incluindo sua definição, propriedade de linearidade, condição de existência, transformada inversa, transformada da derivada e o conceito de convolução, destacando sua importância na resolução de equações diferenciais.

O terceiro capítulo dedica-se ao estudo de alguns conceitos fundamentais do cálculo

fracionário. Inicialmente, são introduzidas a função Gama, a função de Mittag–Leffler e a função de Gel’fand–Shilov, bem como a Transformada de Laplace das duas últimas. Na sequência, apresenta-se uma contextualização histórica do cálculo fracionário e desenvolvem-se o operador integral de ordem inteira e sua generalização para ordem fracionária. Por fim, aborda-se a derivada fracionária de Caputo e sua respectiva Transformada de Laplace.

O quarto capítulo dedica-se ao estudo da equação diferencial de Bernoulli e do modelo logístico de Verhulst. Inicialmente, analisam-se as soluções da equação de Bernoulli nas abordagens clássica e fracionária, com destaque para o comportamento das soluções e suas representações gráficas. Em seguida, estabelece-se a conexão teórica entre a equação de Bernoulli e o modelo logístico de Verhulst, considerando tanto sua formulação clássica quanto sua generalização fracionária. Por fim, o modelo de Verhulst é aplicado a uma situação-problema hipotética de crescimento populacional, realizando-se comparações analíticas e gráficas entre as soluções de ordem inteira e fracionária.

2 TRANSFORMADA DE LAPLACE: ALGUNS CONCEITOS

Neste capítulo, apresentam-se os principais conceitos da transformada de Laplace, incluindo sua definição, linearidade e condições de existência. Abordam-se ainda a transformada inversa, a transformada de derivadas e o conceito de convolução, destacando suas aplicações na resolução de equações diferenciais.

2.1 TRANSFORMADA DE LAPLACE

Entre as ferramentas matemáticas empregadas na resolução de equações diferenciais estão as transformadas integrais. Uma transformada integral é dada pela relação:

$$F(s) = \int_{\alpha}^{\beta} K(s, t) f(t) dt, \quad (4)$$

em que $K(s, t)$, chamada de núcleo da transformação, e os limites de integração são dados. É possível que $\alpha = -\infty$ ou $\beta = +\infty$ ou ambos. A relação (4) transforma a função f em uma outra função F , denominada de transformada de f (Boyce; DiPrima, 2015).

Existem diversas transformadas integrais úteis na resolução de problemas, mas trataremos aqui da transformada de Laplace¹. A transformada de Laplace é um operador integral sobre uma função f cujo domínio tem como variação principal o tempo. Dessa forma, pode-se definir como segue.

Definição 2.1.1. *Seja $f : (-\infty, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ uma função. A transformada de Laplace bilateral de f é definida por*

$$\mathcal{L}[f(t)] = F(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-st} f(t) dt, \quad (5)$$

em que $s \in \mathbb{C}$, isto é, $s = \alpha + i\rho$ com $\rho, \alpha \in \mathbb{R}$ (Boni, 2017).

Definição 2.1.2. *Seja $f : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ uma função. A transformada de Laplace unilateral de f é dada por*

$$\mathcal{L}[f(t)] = F(s) = \int_0^{+\infty} e^{-st} f(t) dt, \quad (6)$$

para valores de $s \geq 0$ para os quais a integral é convergente.

Assim, quando a integral imprópria (6) é convergente, o resultado obtido é uma função de s . Podemos considerar $s \in \mathbb{R}$ ou $s \in \mathbb{C}$, a depender da natureza do problema em que a transformada será aplicada (Lustosa, 2017).

¹ A transformada de Laplace tem esse nome em homenagem a Pierre Simon de Laplace (1749-1827), um notório matemático, físico e astrônomo.

Neste trabalho, denotaremos por letras minúsculas as funções a serem transformadas e por letras maiúsculas as respectivas transformadas. Assim, tem-se $\mathcal{L}[f(t)] = F(s)$.

Outra forma de representar a integral imprópria (6) é dada como segue.

$$F(s) = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b e^{-st} f(t) dt, \quad (7)$$

sob a condição de que o limite exista e seja finito.

A seguir, serão apresentados exemplos do cálculo da transformada de Laplace para algumas funções elementares.

Exemplo 1. A transformada de Laplace da função $(f(t) = 1)$ é $\frac{1}{s}$ para $s > 0$.

Demonstração.

$$\mathcal{L}(1) = \int_0^\infty e^{-st} dt = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b e^{-st} dt. \quad (8)$$

Fazendo $u = -st \implies du = -sdt$. Quando $t = 0$, $u = 0$; quando $t = b$, $u = -sb$. Substituindo na integral:

$$\mathcal{L}(1) = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^{-sb} e^u \left(\frac{-du}{s} \right) = \lim_{b \rightarrow \infty} \left[-\frac{1}{s} e^u \right]_0^{-sb} = \lim_{b \rightarrow \infty} \left[-\frac{1}{s} e^{-sb} + \frac{1}{s} \right].$$

Como $s > 0$, conclui-se que

$$\lim_{b \rightarrow \infty} \left[-\frac{1}{s} e^{-sb} + \frac{1}{s} \right] = \frac{1}{s}.$$

□

Exemplo 2. A transformada de Laplace da função $f(t) = \frac{1}{s^2}$ para $s > 0$.

Demonstração. Pela definição, tem-se que

$$\mathcal{L}(t) = \int_0^\infty e^{-st} t dt = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b t e^{-st} dt. \quad (9)$$

Para calcular o valor da integral, usaremos o método da integração por partes. Tomando $u = t$ e $dv = e^{-st}$, segue que $du = dt$ e $v = \frac{-e^{-st}}{s}$. Usando a fórmula de integração por partes na Expressão (9), chega-se a:

$$\mathcal{L}(t) = \lim_{b \rightarrow \infty} \left[\frac{-te^{-st}}{s} \right]_0^b + \frac{1}{s} \int_0^b e^{-st} dt = 0 + \frac{1}{s} \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b e^{-st} dt = \frac{1}{s} \cdot \frac{1}{s} = \frac{1}{s^2}.$$

□

Exemplo 3. Para todo $k \in \mathbb{N}$, a transformada de Laplace de t^k é dada por

$$\mathcal{L}[t^k] = \frac{k!}{s^{k+1}}, \quad s > 0.$$

Demonstração. Por definição,

$$F_k(s) = \mathcal{L}[t^k] = \int_0^\infty t^k \cdot e^{-st} dt = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b e^{-st} t^k dt. \quad (10)$$

Tomando $u = t^k \Rightarrow du = kt^{k-1}dt$ e $dv = e^{-st}dt \Rightarrow v = -\frac{e^{-st}}{s}$. Aplicando o método da integração por parte na expressão (10), obtemos:

$$\lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b e^{-st} t^k dt = \lim_{b \rightarrow \infty} \left[-\frac{e^{-st}}{s} t^k \right]_0^b + \lim_{b \rightarrow \infty} \left(\frac{k}{s} \int_0^\infty e^{-st} t^{k-1} dt \right)$$

Note que para $k \in \mathbb{N}$ ($k \geq 1$) e $s > 0$, tem-se

$$\lim_{b \rightarrow \infty} \left[-\frac{e^{-st}}{s} t^k \right]_0^b = \lim_{b \rightarrow \infty} \left(-\frac{b^k e^{-sb}}{s} + \frac{0^k}{s} \right) = -\frac{1}{s} \lim_{b \rightarrow \infty} \frac{b^k}{e^{sb}} = 0,$$

pois $0^k = 0$ e a exponencial e^{sb} cresce mais rapidamente do que qualquer potência b^k , implicando que o limite é zero.

Portanto,

$$\lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b e^{-st} t^k dt = 0 + \frac{k}{s} \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b e^{-st} t^{k-1} dt = \frac{k}{s} \int_0^\infty e^{-st} t^{k-1} dt.$$

Observe que

$$\int_0^\infty e^{-st} t^{k-1} dt = F_{k-1}(s),$$

isto é, a transformada da função $f_{k-1}(t) = t^{k-1}$. Assim, podemos escrever

$$F_k(s) = \frac{k}{s} F_{k-1}(s).$$

Deste modo, por recorrência, tem-se:

$$F_k(s) = \frac{k}{s} F_{k-1}(s) = \frac{k}{s} \cdot \frac{k-1}{s} F_{k-2}(s) = \cdots = \frac{k!}{s^k} F_0(s).$$

Mas $F_0(s)$ é a transformada do caso $k = 0$, isto é, da função constante $f(t) = 1$, conforme calculado no Exemplo (1). Com isso, conclui-se que

$$F_k(s) = \frac{k!}{s^k} \cdot \frac{1}{s} = \frac{k!}{s^{k+1}}. \quad (11)$$

□

Exemplo 4. Seja $f(t) = \text{sen}(\alpha t)$, $t \geq 0$. Então

$$\mathcal{L}\{\sin(\alpha t)\}(s) = \int_0^\infty e^{-st} \sin(\alpha t) dt = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b e^{-st} \sin(\alpha t) dt, \quad s > 0.$$

Usando o método de integrando por partes, obtém-se

$$\begin{aligned} F(s) &= \sin(\alpha t) \cdot \left(\frac{-e^{-st}}{s} \right) \Big|_0^\infty - \int_0^\infty -\frac{e^{-st}}{s} \alpha \cos(\alpha t) dt \\ F(s) &= \frac{\alpha}{s} \int_0^\infty e^{-st} \cos(\alpha t) dt. \end{aligned}$$

Fazendo uma segunda integração por partes, chega-se a

$$\begin{aligned} F(s) &= \frac{\alpha}{s} \left[\cos(\alpha t) \left(-\frac{e^{-st}}{s} \right) \Big|_0^\infty - \int_0^\infty \left(-\frac{e^{-st}}{s} \right) (-\alpha \sin(\alpha t)) dt \right] \\ &= \frac{\alpha}{s} \left[\left(\lim_{b \rightarrow \infty} \cos(\alpha b) \left(-\frac{e^{-sb}}{s} \right) + \frac{1}{s} \right) - \frac{\alpha}{s} \int_0^\infty e^{-st} \sin(\alpha t) dt \right] \\ &= \frac{\alpha}{s} \left[\frac{1}{s} - \frac{\alpha}{s} \int_0^\infty e^{-st} \sin(\alpha t) dt \right], \end{aligned}$$

pois para $s > 0$ temos que $\lim_{t \rightarrow \infty} e^{-st} = 0$ e $\cos(\alpha t)$ é limitado, logo o primeiro termo se anula, restando apenas o valor em $t = 0$ que é $\frac{1}{s}$. Prosseguindo:

$$\begin{aligned} F(s) &= \frac{\alpha}{s^2} - \frac{\alpha^2}{s^2} F(s), \\ F(s) + \frac{\alpha^2}{s^2} F(s) &= \frac{\alpha}{s^2}, \\ F(s) \left(1 + \frac{\alpha^2}{s^2} \right) &= \frac{\alpha}{s^2}, \\ F(s) \left(\frac{s^2 + \alpha^2}{s^2} \right) &= \frac{\alpha}{s^2}, \\ F(s) &= \frac{\alpha}{s^2 + \alpha^2}. \end{aligned}$$

2.1.1 Linearidade da Transformada de Laplace

Sejam f e g funções cujas transformadas de Laplace existem para $s > a_1$ e $s > a_2$, respectivamente. Então, para s maior que o máximo de a_1 e a_2 ,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[\alpha f(t) + \beta g(t)] &= \int_0^\infty e^{-st} [\alpha f(t) + \beta g(t)] dt \\ &= \int_0^\infty e^{-st} \alpha f(t) dt + \int_0^\infty e^{-st} \beta g(t) dt \\ &= \alpha \int_0^\infty e^{-st} f(t) dt + \beta \int_0^\infty e^{-st} g(t) dt. \end{aligned}$$

Logo,

$$\mathcal{L}[\alpha f(t) + \beta g(t)] = \alpha \mathcal{L}[f(t)] + \beta \mathcal{L}[g(t)]. \quad (12)$$

A Equação (12) comprova que a transformada de Laplace é um operador linear.

Exemplo 5. Se $f(t) = 5e^{-2t} - 3\text{sen}4t$, $t \geq 0$, então, pela relação (12), segue-se que

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[f(t)] &= 5\mathcal{L}[e^{-2t}] - 3\mathcal{L}[\text{sen}4t] \\ &= \frac{5}{s+2} - \frac{12}{s^2+16}, \quad s > 4. \end{aligned}$$

2.1.2 Condições Suficientes para a Existência de $\mathcal{L}[f(t)]$

A integral que define a transformada de Laplace não necessariamente converge. Por exemplo, $\mathcal{L}\left[\frac{1}{t}\right]$ e $\mathcal{L}\left[e^{t^2}\right]$ não existem. As seguintes condições garantem a existência da transformada:

- (i) f precisa ser contínua por partes em $[0, \infty)$, isto é, em qualquer intervalo $0 \leq a \leq t \leq b$, há apenas um número finito de descontinuidade e toda descontinuidade é de primeira espécie, ou seja, existem os limites laterais;
- (ii) f é de ordem exponencial, conforme a definido a seguir.

Definição 2.1.3. (*Ordem Exponencial*) Dizemos que uma função f é de ordem exponencial se existem números $c, M > 0$ e $T > 0$ tais que $|f(t)| \leq Me^{ct}$ para todo $t > T$.

Se f é uma função crescente, a definição acima simplesmente diz que o gráfico de f no intervalo $[T, \infty)$ está abaixo do gráfico da função exponencial Me^{ct} com $c > 0$. Por exemplo, as funções $f(t) = t$, $f(t) = e^{-t}$ e $f(t) = 2\cos t$ são de ordem exponencial para $t > 0$, pois temos, respectivamente, $|t| \leq e^t$, $|e^{-t}| \leq e^t$ e $|2\cos t| \leq 2e^t$.

Teorema 2.1.1. (*Condições Suficientes para a Existência da Transformada de Laplace de uma Função dada*). Se $f(t)$ é uma função contínua por partes no intervalo $[0, \infty)$ e de ordem exponencial para $t > T$, então, sua transformada de Laplace existe para todo $s > c$.

Demonstração. Temos, por definição, que

$$\begin{aligned} F(s) &= \int_0^\infty e^{-st} f(t) dt \\ &= \int_0^T e^{-st} f(t) dt + \int_T^\infty e^{-st} f(t) dt. \end{aligned}$$

Sejam $I_1 = \int_0^T e^{-st} f(t) dt$ e $I_2 = \int_T^\infty e^{-st} f(t) dt$. Veja que I_1 existe porque pode ser escrita como uma soma de integrais em intervalos nos quais $e^{-st} f(t)$ é contínua. Já em relação a I_2 ,

$$\begin{aligned} |I_2| &\leq \int_T^\infty |e^{-st} f(t)| dt \leq M \int_T^\infty e^{-st} e^{ct} dt = M \int_T^\infty e^{-(s-c)t} dt \\ &= \lim_{b \rightarrow \infty} M \int_T^b e^{-(s-c)t} dt. \end{aligned}$$

Tomando $u = -(s-c)t$, temos $du = -(s-c)dt$ e, portanto,

$$\begin{aligned}
\lim_{b \rightarrow \infty} M \int_T^b e^{-(s-c)t} dt &= \lim_{b \rightarrow \infty} M \int_{u=-(s-c)T}^{-(s-c)b} e^u \left(\frac{-du}{s-c} \right) \\
&= -\frac{M}{s-c} \lim_{b \rightarrow \infty} \int_{-(s-c)T}^{-(s-c)b} e^u du \\
&= -\frac{M}{s-c} \lim_{b \rightarrow \infty} [e^u] - (s-c)T^{-(s-c)b} \\
&= -\frac{M}{s-c} \lim_{b \rightarrow \infty} (e^{-(s-c)b} - e^{-(s-c)T}) \\
&= \frac{M}{s-c} e^{-(s-c)T}.
\end{aligned}$$

Sendo assim, I_2 converge para $s > c$. Portanto a Transformada de Laplace existe para $s > c$. $\square$

2.2 TRANSFORMADA DE LAPLACE INVERSA

Na seção anterior, foram trabalhados alguns problemas cujo objetivo era encontrar a transformada de Laplace de uma função, isto é, transformar uma função $f(t)$ em outra função $F(s)$ por meio da integral. Esse processo é chamado de transformada de Laplace e foi denotado por $\mathcal{L}[f(t)] = F(s)$.

Agora, temos como objetivo abordar o problema inverso, ou seja, dada uma função transformada $F(s)$, buscamos encontrar uma $f(t)$ cuja transformada de Laplace seja $F(s)$. Dessa forma, definimos $f(t)$ como a transformada Inversa de Laplace de $F(s)$, a qual denotamos por $\mathcal{L}^{-1}[F(s)]$.

Proposição 2.2.1. *A Transformada Inversa de Laplace é linear.*

Demonstração. Considere α e β constantes e $F(s)$ e $G(s)$ funções transformadas de f e g , respectivamente. Então,

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}^{-1}[\alpha \cdot F(s) + \beta \cdot G(s)] &= \mathcal{L}^{-1}(\alpha \mathcal{L}[f(t)] + \beta \mathcal{L}[g(t)]) \\
&= \mathcal{L}^{-1}(\mathcal{L}[\alpha f(t) + \beta g(t)]) \\
&= \alpha f(t) + \beta g(t) \\
&= \alpha \mathcal{L}^{-1}[F(s)] + \beta \mathcal{L}^{-1}[G(s)].
\end{aligned}$$

$\square$

Pode-se mostrar também que se f e g são funções contínuas por partes em $[0, \infty)$ e de ordem exponencial, então, caso $\mathcal{L}[f(t)] = \mathcal{L}[g(t)]$, as funções f e g são essencialmente

iguais, isto é, podem diferir apenas nos pontos de descontinuidade de f e g . Isso garante que a Transformada Inversa de Laplace de uma função $F(s)$ não é necessariamente única (Lustosa, 2017).

2.3 TRANSFORMADA DE UMA DERIVADA

Nesta seção, aplicaremos a transformada de Laplace na resolução de determinados tipos de equações diferenciais. Para isso, utilizaremos o seguinte resultado:

Teorema 2.3.1. (*Transformadas de Derivadas*). Se $f(t)$, $f'(t)$, ..., $f^{(n-1)}(t)$ forem contínuas em $[0, \infty)$, de ordem exponencial, e se $f^{(n)}(t)$ for contínua por partes em $[0, \infty)$, então

$$\mathcal{L}[f^{(n)}(t)] = s^n F(s) - s^{n-1} f(0) - s^{n-2} f'(0) - \dots - f^{(n-1)}(0)$$

com $F(s) = \mathcal{L}[f(t)]$.

Demonstração. A demonstração será feita usando o princípio da indução finita (PIF) sobre n .

Para $n = 1$,

$$\mathcal{L}[f'(t)] = \int_0^\infty e^{-st} f'(t) dt.$$

Fazendo $u = e^{-st}$ e $dv = f'(t)$, temos $du = -se^{-st}$ e $v = f(t)$. Assim,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[f'(t)] &= \lim_{b \rightarrow \infty} \left[e^{-st} f(t) \Big|_0^b + s \int_0^b e^{-st} f(t) dt \right] \\ &= -f(0) + s \mathcal{L}[f(t)] \\ &= sF(s) - f(0). \end{aligned}$$

Suponha que a relação seja válida para $n = k \geq 1$, ou seja, que

$$\mathcal{L}[f^{(k)}(t)] = s^k F(s) - s^{k-1} f(0) - s^{k-2} f'(0) - s^{k-3} f''(0) - \dots - f^{(k-1)}(0).$$

Para $n = k + 1$, temos

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[f^{(k+1)}(t)] &= \int_0^\infty e^{-st} f^{(k+1)}(t) dt \\ &= \lim_{b \rightarrow \infty} \left\{ \left[e^{-st} f^{(k)}(t) \right] \Big|_0^b + s \int_0^b e^{-st} f^{(k)}(t) dt \right\} \\ &= -f^{(k)}(0) + s \mathcal{L}[f^{(k)}(t)] \\ &= s[s^k F(s) - s^{k-1} f(0) - s^{k-2} f'(0) - s^{k-3} f''(0) - \dots - f^{(k-1)}(0)] - f^{(k)}(0) \\ &= s^{k+1} F(s) - s^k f(0) - s^{k-1} f'(0) - s^{k-2} f''(0) - \dots - s f^{(k-1)}(0) - f^{(k)}(0). \end{aligned}$$

Portanto, pelo princípio de indução, o resultado segue. □

2.4 CONVOLUÇÃO

Definição 2.4.1. (*Convolução*). Sejam f e g funções contínuas por partes em $[0, \infty)$, então a convolução de f e g , denotada por $f * g$, é dada pela integral

$$f * g = \int_0^t f(\rho)g(t - \rho)d\rho$$

Lema 2.4.1. A convolução de duas funções é comutativa, isto é, $f * g = g * f$.

Demonstração. Pela definição (2.4.1),

$$(f * g)(t) = \int_0^t f(\rho)g(t - \rho)d\rho.$$

Fazendo $u = t - \rho$, então $du = -d\rho$. Portanto,

$$\begin{aligned} (g * f)(t) &= \int_t^0 f(t - u)g(u)(-du) = - \int_t^0 f(t - u)g(u)du \\ &= \int_0^t f(t - u)g(u)du \\ &= (f * g)(t), \forall t \geq 0, \end{aligned}$$

donde se conclui que $f * g = g * f$. □

Teorema 2.4.1. (*Teorema da Convolução*). Sejam f e g funções contínuas por partes em $[0, \infty)$ e de ordem exponencial. Então,

$$\mathcal{L}[f * g] = \mathcal{L}[f(t)] \cdot \mathcal{L}[g(t)] = F(s)G(s).$$

Demonstração. Temos que

$$\mathcal{L}[f * g] = \int_0^\infty e^{-st} f(t) * g(t) dt = \int_0^\infty e^{-st} \left[\int_0^t f(z)g(t - z) dz \right] dt.$$

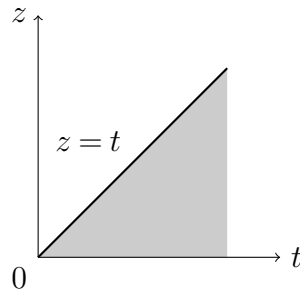
Essa integração ocorre no plano tz , como mostra a Figura (2.1). Logo, pelo Teorema de Fubini,

$$\mathcal{L}[f * g] = \int_0^\infty \int_0^t e^{-st} f(z)g(t - z) dz dt = \int_0^\infty f(z) \int_z^\infty e^{-st} g(t - z) dt dz.$$

Seja $u = t - z$, então $du = dt$. Portanto,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[f * g] &= \int_0^\infty f(z) \int_0^\infty e^{-s(u+z)} g(u) du dz = \int_0^\infty f(z) \int_0^\infty e^{-su} e^{-sz} g(u) du dz \\ &= \int_0^\infty e^{-sz} f(z) dz \int_0^\infty e^{-su} g(u) du \\ &= \mathcal{L}[f(z)] \cdot \mathcal{L}[g(u)] = F(s) \cdot G(s). \end{aligned}$$

□

Figura 2.1 – Plano tz .**Fonte: Produzido pelo autor.**

Vale salientar que a forma inversa do Teorema da Convolução também é válida, ou seja,

$$\mathcal{L}^{-1}[F(s) \cdot G(s)] = (f * g)(t). \quad (13)$$

Exemplo 6. *Seja a função*

$$f(t) = \int_0^t e^{\rho} \operatorname{sen}(t - \rho) d\rho.$$

Calcula-se, a seguir, sua transformada de Laplace.

Solução. Observa-se que

$$f(t) = \int_0^t e^{\rho} \operatorname{sen}(t - \rho) d\rho = (e^t * \operatorname{sent})(t),$$

ou seja, trata-se da convolução entre as funções $f_1(t) = e^t$ e $f_2(t) = \operatorname{sent}$.

Pelo Teorema da Convolução, tem-se

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{f(t)\} &= \mathcal{L}\{e^t * \operatorname{sent}\} \\ &= \mathcal{L}\{e^t\} \cdot \mathcal{L}\{\operatorname{sent}\} \\ &= \frac{1}{s-1} \cdot \frac{1}{s^2+1} \\ &= \frac{1}{(s-1)(s^2+1)}. \end{aligned}$$

Exemplo 7. *Considerando $F(s) = \frac{1}{(s-1)(s+4)}$, transformada de Laplace de uma função $f(t)$. Obtém-se, a seguir, a expressão de $f(t)$.*

Solução. Note que

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}[F(s)] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{(s-1)(s+4)}\right] = \mathcal{L}^{-1}[H(s)G(s)] = (h * g)(t),$$

em que $H(s) = \frac{1}{s-1}$ e $G(s) = \frac{1}{s+4}$.

Logo,

$$\mathcal{L}^{-1}[H(s)] = h(t) = e^t \quad \text{e} \quad \mathcal{L}^{-1}[G(s)] = g(t) = e^{-4t}.$$

Portanto, da Equação (13), tem-se

$$\begin{aligned} f(t) &= (h * g)(t) = e^{-4t} \int_0^t e^{5\rho} d\rho \\ &= e^{-4t} \frac{1}{5} e^{5\rho} \Big|_0^t \\ &= \frac{e^t - e^{-4t}}{5}. \end{aligned}$$

3 CONCEITOS BÁSICOS DE CÁLCULO FRACIONÁRIO

Neste capítulo, são apresentados os fundamentos do cálculo fracionário. Inicialmente, estudam-se a função Gama, a função de Mittag-Leffler e a função de Gel'fand-Shilov, com ênfase em suas propriedades e em suas transformadas de Laplace. Em seguida, introduz-se o cálculo fracionário, contemplando sua contextualização histórica e a definição dos operadores integrais de ordem inteira e fracionária e a derivada de Caputo.

3.1 FUNÇÃO GAMA

A função Gama foi definida de diversas maneiras ao longo da história, entre as quais destacam-se as formulações propostas por Carl Friedrich Gauss e Karl Weierstrass. Gauss a apresentou por meio de um processo de limites, enquanto Weierstrass a definiu como um produto infinito (Camargo; Oliveira, 2015). Entretanto, a definição utilizada neste trabalho foi proposta por Leonhard Euler (1707–1783), conforme segue.

Definição 3.1.1. *Seja $z \in \mathbb{C}$ com $\operatorname{Re}(z) > 0$, a função Gama é definida pela integral imprópria*

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} t^{z-1} e^{-t} dt. \quad (14)$$

A função Gama surge com o propósito de generalizar a noção de fatorial de um número natural. Sendo assim, definindo adequadamente, é possível computar o fatorial de números complexos (Ottoni, 2018).

A seguir, algumas propriedades da função Gama que decorrem diretamente de sua definição:

Propriedade 3.1.1. $\Gamma(1) = 1$.

Demonstração.

$$\begin{aligned}
 \Gamma(1) &= \int_0^{\infty} t^{1-1} e^{-t} dt \\
 &= \int_0^{\infty} e^{-t} dt \\
 &= \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b e^{-t} dt \\
 &= \lim_{b \rightarrow \infty} \left[-e^{-t} \right]_0^b \\
 &= \lim_{b \rightarrow \infty} [-e^{-b} + 1] \\
 &= 1.
 \end{aligned}$$

□

Propriedade 3.1.2. $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$.

Demonstração.

$$\begin{aligned}
 \Gamma(z+1) &= \int_0^{\infty} t^{(z+1)-1} e^{-t} dt \\
 &= \int_0^{\infty} t^z e^{-t} dt \\
 &= \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b t^z e^{-t} dt \\
 &= \lim_{b \rightarrow \infty} \left(t^z (-e^{-t}) \Big|_0^b - \int_0^b -e^{-t} z t^{z-1} dt \right) \\
 &= \lim_{b \rightarrow \infty} t^z (-e^{-t}) \Big|_0^b + z \int_0^{\infty} e^{-t} t^{z-1} dt \\
 &= 0 + z \int_0^{\infty} e^{-t} t^{z-1} dt \\
 &= z\Gamma(z).
 \end{aligned} \tag{15}$$

□

Propriedade 3.1.3. $\Gamma(z+1) = z!$

Demonstração. Da Propriedade (3.1.2), tem-se que

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z).$$

De fato, observa-se que, se $z \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}
 \Gamma(z+1) &= z\Gamma(z) \\
 &= z(z-1)\Gamma(z-1) \\
 &= [z(z-1)(z-2)\Gamma(z-2)\dots\Gamma(1)] \\
 &= z!.
 \end{aligned} \tag{16}$$

Assim, conclui-se que a função Gama generaliza a função fatorial. $\square$

Da Definição (3.1.1), também é possível demonstrar que $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$.

Demonstração.

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^{\infty} t^{\frac{1}{2}-1} e^{-t} dt = \int_0^{\infty} t^{-\frac{1}{2}} e^{-t} dt. \quad (17)$$

Fazendo a seguinte mudança de variável $t = x^2$ e $dt = 2x dx$ e substituindo na Equação (17), tem-se

$$\begin{aligned} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) &= 2 \int_0^{\infty} (x^2)^{-\frac{1}{2}} e^{-x^2} x dx \\ &= 2 \int_0^{\infty} e^{-x^2} dx. \end{aligned} \quad (18)$$

Como a função e^{-x^2} é uma função par, então

$$\begin{aligned} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) &= 2 \int_0^{\infty} e^{-x^2} dx \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx. \end{aligned} \quad (19)$$

Definindo $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = I$, essa integral simples pode ser estendida para uma integral dupla no plano, como segue

$$\begin{aligned} I^2 &= \left[\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx \right]^2 \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx \cdot e^{-x^2} dx. \end{aligned} \quad (20)$$

Sem perda de generalidade, pode-se substituir x por y em qualquer uma das integrais, obtendo:

$$I^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx \cdot e^{-y^2} dy. \quad (21)$$

Assim,

$$I^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(x^2+y^2)} dx dy. \quad (22)$$

Convertendo de coordenadas cartesianas para coordenadas polares, temos

$$I^2 = \int_0^{2\pi} \int_0^{+\infty} e^{-r^2} r dr d\theta = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{+\infty} e^{-r^2} r dr = 2\pi \int_0^{+\infty} e^{-r^2} r dr. \quad (23)$$

Fazendo a substituição $r^2 = u \implies \frac{du}{2} = r dr$ e substituindo em (23), segue-se que

$$\begin{aligned}
I^2 &= 2\pi \int_0^{+\infty} e^{-u} \frac{du}{2} \\
&= \pi \int_0^{+\infty} e^{-u} du \\
&= \pi \left[-e^{-u} \right]_0^{+\infty} \\
&= \pi \implies I = \sqrt{\pi}.
\end{aligned} \tag{24}$$

Finalmente,

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}. \tag{25}$$

□

A partir do resultado obtido, é possível determinar o valor da função Gama para quaisquer números fracionários cujo denominador seja 2. Vejamos alguns casos.

$$\text{I. } \Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \Gamma\left(\frac{1}{2} + 1\right) = \frac{1}{2} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\pi} = \frac{\sqrt{\pi}}{2}; \tag{26}$$

$$\text{II. } \Gamma\left(\frac{5}{2}\right) = \Gamma\left(\frac{3}{2} + 1\right) = \frac{3}{2} \Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{3}{2} \cdot \frac{\sqrt{\pi}}{2} = \frac{3\sqrt{\pi}}{4}; \tag{27}$$

$$\text{III. } \Gamma\left(\frac{7}{2}\right) = \Gamma\left(\frac{5}{2} + 1\right) = \frac{5}{2} \Gamma\left(\frac{5}{2}\right) = \frac{5}{2} \cdot \frac{3\sqrt{\pi}}{4} = \frac{15\sqrt{\pi}}{8}; \tag{28}$$

$$\text{IV. } \Gamma\left(\frac{9}{2}\right) = \Gamma\left(\frac{7}{2} + 1\right) = \frac{7}{2} \Gamma\left(\frac{7}{2}\right) = \frac{7}{2} \cdot \frac{15\sqrt{\pi}}{8} = \frac{105\sqrt{\pi}}{16}. \tag{29}$$

Note que da própria definição, fica evidente que a função Gama não está definida para $z = 0$. De fato, pela Propriedade (3.1.2), tem-se que $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$. Ao tomar $z = 0$, segue-se que $\Gamma(0+1) = 0 \implies \Gamma(1) = 0$, o que contradiz a Propriedade (3.1.1).

A partir da Propriedade (3.1.2), observa-se que $\Gamma(z) = \frac{\Gamma(z+1)}{z}$. Para $z = -1$, resulta $\Gamma(-1) = \frac{\Gamma(0)}{-1}$, mostrando que $\Gamma(-1)$ depende de $\Gamma(0)$, a qual não está definida. Por esse argumento, conclui-se que a função Gama não é definida para $z \in \mathbb{Z}$ com $z = m$ e $m \leq 0$.

Vale salientar que, para frações negativas com denominador 2, é possível calcular valores da função Gama a partir do resultado obtido em (25). Veja os exemplos a seguir.

$$\text{I. } \Gamma\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{\Gamma\left(-\frac{1}{2}+1\right)}{-\frac{1}{2}} = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{-\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{\pi}}{-\frac{1}{2}} = -2\sqrt{\pi}. \quad (30)$$

$$\text{II. } \Gamma\left(-\frac{3}{2}\right) = \frac{\Gamma\left(-\frac{3}{2}+1\right)}{-\frac{3}{2}} = \frac{\Gamma\left(-\frac{1}{2}\right)}{-\frac{3}{2}} = \frac{-2\sqrt{\pi}}{-\frac{3}{2}} = \frac{4\sqrt{\pi}}{3}. \quad (31)$$

$$\text{III. } \Gamma\left(-\frac{5}{2}\right) = \frac{\Gamma\left(-\frac{5}{2}+1\right)}{-\frac{5}{2}} = \frac{\Gamma\left(-\frac{3}{2}\right)}{-\frac{5}{2}} = \frac{\frac{4\sqrt{\pi}}{3}}{-\frac{5}{2}} = -\frac{8\sqrt{\pi}}{15}. \quad (32)$$

$$\text{IV. } \Gamma\left(-\frac{7}{2}\right) = \frac{\Gamma\left(-\frac{7}{2}+1\right)}{-\frac{7}{2}} = \frac{\Gamma\left(-\frac{5}{2}\right)}{-\frac{7}{2}} = \frac{-\frac{8\sqrt{\pi}}{15}}{-\frac{7}{2}} = \frac{16\sqrt{\pi}}{105}. \quad (33)$$

A função Gama é definida para todo $z \in \mathbb{C}$, exceto para $z = m$, com $m \in \mathbb{Z}$, tal que $m \leq 0$.

3.2 FUNÇÃO DE MITTAG-LEFFLER

Dentre as funções associadas ao cálculo fracionário, destaca-se a função de Mittag-Leffler, a qual desempenha um papel fundamental no estudo de equações diferenciais de ordem não inteira. A forma original dessa função, que dependente de um parâmetro complexo, foi introduzida em 1903 pelo matemático sueco Gösta Mittag-Leffler, como uma generalização da função exponencial (Camargo, 2009).

Definição 3.2.1. *Seja $\alpha \in \mathbb{C}$, com $\text{Re}(\alpha) > 0$. Define-se a função de Mittag-Leffler de um parâmetro por*

$$E_{\alpha}(z) = \sum_{w=0}^{\infty} \frac{z^w}{\Gamma(\alpha w + 1)}. \quad (34)$$

A função é interpretada como uma generalização da função exponencial porque no caso $\alpha = 1$ podemos escrever

$$E_1(z) = \sum_{w=0}^{\infty} \frac{z^w}{\Gamma(w+1)} = \sum_{w=0}^{\infty} \frac{z^w}{w!} = e^z. \quad (35)$$

3.2.1 A Transformada de Laplace da Função de Mittag-Leffler

Nesta seção, é apresentada a transformada de Laplace para a função de Mittag-Leffler de um parâmetro, considerando $z = \lambda t^\alpha$, com $t \in \mathbb{R}$, $t > 0$ e $\lambda \in \mathbb{C}$.

Teorema 3.2.1. *A transformada de Laplace da função de Mittag-Leffler de um parâmetro é dada por*

$$\mathcal{L}[E_\alpha(\lambda t^\alpha)] = \frac{s^{\alpha-1}}{s^\alpha - \lambda}, \quad (36)$$

onde s é o parâmetro da transformada de Laplace, $\lambda \in \mathbb{C}$ é uma constante e $s^\alpha > |\lambda|$.

Demonstração. A partir da definição da transformada de Laplace, apresentada no Capítulo (2) e da representação em série da função de Mittag-Leffler de um parâmetro, Equação (34), segue-se que

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[E_\alpha(\lambda t^\alpha)] &= \int_0^\infty e^{-st} E_\alpha(\lambda t^\alpha) dt = \int_0^\infty e^{-st} \sum_{w=0}^\infty \frac{(\lambda t^\alpha)^w}{\Gamma(\alpha w + 1)} dt \\ &= \sum_{w=0}^\infty \frac{\lambda^w}{\Gamma(\alpha w + 1)} \int_0^\infty e^{-st} t^{\alpha w} dt. \end{aligned} \quad (37)$$

Para calcular a integral $\int_0^\infty e^{-st} t^{\alpha w} dt$, aplica-se a substituição $u = st \implies \frac{du}{s} = dt$. Assim,

$$\int_0^\infty e^{-st} t^{\alpha w} dt = \int_0^\infty e^{-u} \left(\frac{u}{s}\right)^{\alpha w} \frac{du}{s} = \frac{1}{s^{\alpha w + 1}} \int_0^\infty e^{-u} u^{\alpha w} du. \quad (38)$$

Como

$$\int_0^\infty e^{-u} u^{\alpha w} du = \Gamma(\alpha w + 1),$$

obtem-se

$$\int_0^\infty e^{-st} t^{\alpha w} dt = \frac{\Gamma(\alpha w + 1)}{s^{\alpha w + 1}}. \quad (39)$$

Substituindo esse resultado na Equação (37),

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[E_\alpha(\lambda t^\alpha)] &= \sum_{w=0}^\infty \frac{\lambda^w}{\Gamma(\alpha w + 1)} \cdot \frac{\Gamma(\alpha w + 1)}{s^{\alpha w + 1}} \\ &= \sum_{w=0}^\infty \frac{\lambda^w}{s^{\alpha w + 1}} \\ &= \frac{1}{s} \sum_{w=0}^\infty \frac{\lambda^w}{s^{\alpha w}} \\ &= \frac{1}{s} \sum_{w=0}^\infty \left(\frac{\lambda}{s^\alpha}\right)^w. \end{aligned} \quad (40)$$

A série da Equação (40) é uma série geométrica de razão $r = \frac{\lambda}{s^\alpha}$. Para $|r| < 1$, a série converge para $\frac{s^\alpha}{s^\alpha - \lambda}$.

Portanto,

$$\mathcal{L}[E_\alpha(\lambda t^\alpha)] = \frac{1}{s} \cdot \frac{s^\alpha}{s^\alpha - \lambda} = \frac{s^{\alpha-1}}{s^\alpha - \lambda}. \quad (41)$$

□

De forma análoga, pode-se considerar a Transformada de Laplace da função de Mittag-Leffler com argumento negativo, isto é, $E_\alpha(-\lambda t^\alpha)$. Nesse caso, tem-se

$$\mathcal{L}[E_\alpha(-\lambda t^\alpha)] = \frac{s^{\alpha-1}}{s^\alpha + \lambda}. \quad (42)$$

A demonstração segue o mesmo raciocínio desenvolvido anteriormente, bastando substituir λ por $(-\lambda)$ nas equações correspondentes.

3.3 FUNÇÃO DE GEL'FAND-SHILOV

A seguir, será apresentado uma das funções essenciais do cálculo fracionário, a chamada função de Gel'fand-Shilov. Essa função desempenha um papel essencial na formulação e compreensão da Integral Fracionária, cuja definição e propriedades serão discutidas adiante (Varalta, 2014).

Definição 3.3.1. *Seja n um número natural e ν um número não inteiro, definimos a função de Gel'fand-Shilov de ordem n e ν , respectivamente, como:*

$$\phi_n = \begin{cases} \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} & \text{se } t \geq 0 \\ 0 & \text{se } t < 0 \end{cases} \quad e \quad \phi_\nu = \begin{cases} \frac{t^{\nu-1}}{\Gamma(\nu)} & \text{se } t \geq 0 \\ 0 & \text{se } t < 0. \end{cases} \quad (43)$$

3.3.1 Transformada de Laplace da Função de Gel'fand-Shilov

Teorema 3.3.1. *A Transformada de Laplace da função de gel'fand-Shilov é dada por:*

$$\mathcal{L}[\phi_\nu(t)] = s^{-\nu}. \quad (44)$$

Demonstração. Ao aplicar a transformada de Laplace na função de Gel'fand-Shilov, obtemos:

$$\mathcal{L}[\phi_\nu(t)] = \int_0^\infty e^{-st} \frac{t^{\nu-1}}{\Gamma(\nu)} dt = \frac{1}{\Gamma(\nu)} \int_0^\infty e^{-st} t^{\nu-1} dt. \quad (45)$$

Fazendo a seguinte mudança de variável: $st = a \implies da = sdt$, segue-se que

$$\frac{1}{\Gamma(\nu)} \int_0^\infty e^{-a} \left(\frac{a}{s}\right)^{\nu-1} \frac{da}{s} = \frac{1}{\Gamma(\nu)} \int_0^\infty (e^{-a}) \frac{a^{\nu-1}}{s^\nu} da = \frac{s^{-\nu}}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\infty e^{-a} a^{\nu-1} da. \quad (46)$$

Assim, pela definição da função Gama (3.1.1), tem-se:

$$\mathcal{L}[\phi_\nu(t)] = \frac{s^{-\nu}}{\Gamma(\nu)} \Gamma(\nu) = s^{-\nu}. \quad (47)$$

□

3.4 CÁLCULO FRACIONÁRIO

Nesta seção serão apresentados conceitos fundamentais do cálculo fracionário, com ênfase na derivada fracionária de Caputo e em sua transformada de Laplace. Inicialmente, será feita uma breve contextualização histórica, que permitirá compreender a evolução das ideias que levaram às definições modernas do cálculo fracionário. Em seguida, será apresentada a definição da derivada fracionária, baseada no conceito de integral fracionária, seguindo uma ordem inversa àquela adotada no cálculo tradicional. Posteriormente, esses conceitos serão aplicados na dedução e na resolução de um modelo fracionário para a equação de Bernoulli e para a equação de Verhulst, demonstrando a utilidade prática da teoria.

3.4.1 Contextualização Histórica

O cálculo de ordem não inteira ou cálculo fracionário, como é classicamente conhecido, é quase tão antigo quanto o cálculo de ordem inteira, entretanto, por não ter interpretações físicas e geométricas evidentes, o cálculo fracionário não foi tão difundido quanto o cálculo usual (Varalta, 2014).

O conceito de cálculo fracionário é amplamente reconhecido e teve sua origem em uma questão formulada no ano de 1695, em uma correspondência entre Leibinz (1646–1716) e l'Hôpital (1661–1704). Na carta, l'Hôpital questionava a interpretação do significado da notação de Leibinz, $\frac{d^n y}{dx^n}$ para a derivada de ordem $n \in \mathbb{N}_0 := \{0, 1, 2, 3, \dots\}$, quando $n = \frac{1}{2}$, que é equivalente a derivar a função $y(x)$ meia vez, isto é,

$$D^{\frac{1}{2}} y(x) = \frac{d^{\frac{1}{2}} y(x)}{dx^{\frac{1}{2}}}, \quad (48)$$

uma raiz quadrada ou uma potência fracionária (Oliveira, 2010).

Leibiniz, concluiu que

$$D^{\frac{1}{2}} x = x \sqrt[2]{dx : x}, \quad (49)$$

destacando tratar-se de um aparente paradoxo do qual, futuramente, poderiam ser obtidas importantes aplicações (Camargo, 2009; Miller; Ross, 1993; Podlubny, 1999).

3.4.2 Operador Integral de Ordem Inteira e Fracionária

Definição 3.4.1. *Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função integrável. O operador integral de ordem inteira n pode ser definido por*

$$If(t) = \int_0^t f(t)dt_1, I^2f(t) = I[If(t)] = \int_0^t \int_0^{t_1} f(t)dt_2dt_1. \quad (50)$$

Analogamente, para $n \in \mathbb{N}$, tem-se

$$I^n f(t) = \int_0^t \int_0^{t_1} \int_0^{t_2} \dots \int_0^{t_{n-1}} f(t)dt_ndt_{n-1} \dots dt_2dt_1. \quad (51)$$

O teorema a seguir fornece uma fórmula geral para o operador integral de ordem inteira n .

Teorema 3.4.1. *Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função integrável. A integral de ordem $n \in \mathbb{N}$ da função f é dada por*

$$I^n f(t) = \int_0^t \frac{(t-s)^{n-1}}{(n-1)!} f(s)ds = \phi_n(t) * f(t) \quad (52)$$

Demonstração. A demonstração será feita por indução sobre n .

Para $n = 1$:

$$I^1 f(t) = \int_0^t f(s)ds = \int_0^t \frac{(t-s)^{1-1}}{(1-1)!} f(s)ds = \phi_1(t) * f(t).$$

Considerando para $n > 1$, isto é,

$$I^n f(t) = \int_0^t \frac{(t-s)^{n-1}}{(n-1)!} f(s)ds = \phi_n(t) * f(t).$$

Para $n + 1$, temos

$$I^{n+1} f(t) = I[I^n f(t)] = \int_0^t \int_s^t \frac{(u-s)^{n-1}}{(n-1)!} f(s)duds = \int_0^t \frac{f(s)}{(n-1)!} \int_s^t (u-s)^{n-1}duds.$$

Tomando $v = (u-s) \implies dv = du$:

$$\int_s^t (u-s)^{n-1}du = \int_0^t v^{n-1}dv = \frac{v^n}{n} = \frac{(u-s)^n}{n} \Big|_s^t.$$

Daí,

$$\begin{aligned} I^{n+1} f(t) &= I[I^n f(t)] = \int_0^t \frac{f(s)}{(n-1)!} \cdot \left[\frac{(u-s)^n}{n} \right]_s^t ds \\ &= \int_0^t \frac{f(s)}{(n-1)!} \cdot \frac{(t-s)^n}{n} \\ &= \int_0^t \frac{(t-s)^n}{n} f(s)ds \\ &= \phi_{n+1}(t) * f(t). \end{aligned}$$

□

Exemplo 8. Seja $f(t) = t^n$. A integral de ordem $k \in \mathbb{N}$ de f é

$$I^k f = \frac{t^{n+k}}{(n+1) \cdot (n+2) \cdot \dots \cdot (n+k)}.$$

Demonstração. Procede-se por indução sobre k .

Para $k = 1$

$$I^1 f = \int_0^t \frac{(t-s)^{1-1}}{(1-1)!} t^n ds = \int_0^t s^n ds = \left[\frac{s^{n+1}}{n+1} \right]_0^t = \frac{t^{n+1}}{n+1}.$$

Suponha que, para $k > 1$, tenhamos

$$I^k f = \frac{t^{n+k}}{(n+1) \cdot (n+2) \cdot \dots \cdot (n+k)} = \int_0^t \frac{(t-s)^{k-1}}{(k-1)!} s^n ds.$$

Para $k+1$

$$\begin{aligned} I^{k+1} f &= I[I^k f] = \int_0^t \left[\int_0^t \frac{(u-s)^{k-1}}{(k-1)!} s^n ds \right] dt \\ &= \int_0^t \frac{t^{k+n}}{(n+1) \cdot (n+2) \cdot \dots \cdot (n+k)} dt \\ &= \frac{t^{n+k+1}}{(n+1) \cdot (n+2) \cdot \dots \cdot (n+k+1)}. \end{aligned}$$

□

A generalização do operador integral de ordem inteira n pode ser estendida para o operador integral de ordem não inteira α , utilizando a generalização do conceito de fatorial pela função Gama. Daí, tem-se:

Definição 3.4.2. Seja f uma função integrável. A integral fracionária de ordem $\alpha > 0$ de f é dada por

$$I^\alpha f(t) = \phi_\alpha(t) * f(t) = \int_0^t \frac{(t-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} f(s) ds, \quad (53)$$

com $I^0 f(t) = f(t)$.

Daí, pode-se apresentar a derivada fracionária de Caputo.

Definição 3.4.3. Seja $\alpha > 0$ e $n \in \mathbb{N}$, tal que $n-1 < \alpha \leq n$. A derivada de Caputo de ordem α de $f(x)$, com $x > 0$ é dada por

$$D^\alpha [f(x)] = I^{n-\alpha} [D^n (f(x))] = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_0^x \frac{f^{(n)}(s)}{(x-s)^{\alpha+1-n}} ds. \quad (54)$$

Observe que, se $\alpha = n$, então $D^\alpha[f(x)] = I^0[D^n(f(x))] = D^n f(x)$, ou seja, a derivada usual é um caso particular da derivada de Caputo.

Apresenta-se, a seguir, a transformada de Laplace da derivada de Caputo, conforme o teorema que segue.

Teorema 3.4.2. (*Transformada de Laplace da Derivada de Caputo*). Seja $\alpha > 0$ e $n \in \mathbb{N}$, tal que $n - 1 < \alpha \leq n$. Então,

$$\mathcal{L}[D^\alpha f(t)] = s^{\alpha-n} \mathcal{L}[D^n f(t)]. \quad (55)$$

Demonstração.

$$\mathcal{L}[D^\alpha f(t)] = \mathcal{L}[I^{n-\alpha} D^n f(t)] = \mathcal{L}[\phi_{n-\alpha}(t) * D^n f(t)].$$

Mas, $\mathcal{L}[f * g] = \mathcal{L}[f] * \mathcal{L}[g]$. Logo,

$$\mathcal{L}[D^\alpha f(t)] = \mathcal{L}[\phi_{n-\alpha}(t)] \cdot \mathcal{L}[D^n f(t)].$$

Do Teorema (3.3.1), segue que $\mathcal{L}[\phi_\alpha(t)] = s^{-\alpha}$, e, portanto, $\mathcal{L}[\phi_{n-\alpha}(t)] = s^{\alpha-n}$. Por outro lado, pelo Teorema (2.3.1), tem-se que $\mathcal{L}[D^n f(t)] = s^n F(s) - s^{n-1} f(0) - \dots - f^{(n-1)}(0)$.

Assim, obtém-se

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[D^\alpha f(t)] &= s^{\alpha-n} [s^n F(s) - s^{n-1} f(0) - s^{n-2} f'(0) - \dots - s f^{(n-2)}(0) - f^{(n-1)}(0)] \\ &= s^\alpha F(s) - s^{\alpha-1} f(0) - s^{\alpha-2} f'(0) - \dots - s^{\alpha-n+1} f^{(n-2)}(0) - s^{\alpha-n} f^{(n-1)}(0) \\ &= s^\alpha F(s) - \sum_{k=0}^n s^{\alpha-(k+1)} f^{(k)}(0). \end{aligned}$$

□

4 MODELO BERNOULLI-VERHULST FRACIONÁRIO E APLICAÇÃO

Neste capítulo, apresenta-se o modelo Bernoulli-Verhulst em sua versão clássica e fracionária. Inicialmente, estudam-se as soluções clássica e fracionária da equação diferencial de Bernoulli e sua conexão com o modelo logístico de Verhulst. Em seguida, analisam-se as soluções clássica e fracionária do modelo logístico, culminando em uma análise analítica e gráfica de um cenário populacional hipotético.

4.1 EQUAÇÃO DIFERENCIAL DE BERNOULLI: SOLUÇÕES CLÁSSICA E FRACIONÁRIA

Esta seção visa o estudo da equação diferencial de Bernoulli, com ênfase na obtenção de sua solução clássica e de uma versão fracionária, ambas amplamente estudadas e bem estabelecidas na literatura, de modo a possibilitar uma análise comparativa entre os dois modelos.

Os irmãos Jakob (1654–1705) e Johann (1667–1748) Bernoulli, naturais de Basel, contribuíram significativamente para o desenvolvimento de métodos de resolução de equações diferenciais, bem como para a ampliação de seu campo de aplicações. A equação diferencial de Bernoulli foi introduzida por Jakob Bernoulli (1654–1705) no final do século XVII, em um período marcado pelo desenvolvimento do cálculo diferencial por Leibniz e seus contemporâneos (Boyce; DiPrima, 2015).

Inicialmente, a equação foi publicada por Jakob Bernoulli em 1690, com o objetivo de demonstrar que o comportamento de uma isóclina é equivalente à resolução de uma equação diferencial ordinária não linear de primeira ordem. Posteriormente, em 1696, Bernoulli conseguiu obter sua solução analítica. Verificou-se que, apesar de sua não linearidade, essa equação pode ser resolvida por meio de uma mudança adequada na variável dependente, a qual a transforma em uma equação diferencial linear. A mais importante dessas equações é da forma:

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = f(x)y^n. \quad (56)$$

A equação supracitada possui ampla aplicabilidade, podendo-se destacar, entre outros exemplos, a dinâmica populacional, o crescimento logístico, a lei do resfriamento de Newton e o estudo da estabilidade de fluxos de fluidos (Cardoso; Camargo, 2015). Dentre essas aplicações, neste trabalho será enfatizado o seu uso no estudo da dinâmica populacional.

4.1.1 Solução Clássica da Equação Diferencial de Bernoulli

Nesta seção, apresenta-se a resolução da equação diferencial de Bernoulli sob a abordagem clássica, utilizando ferramentas do cálculo diferencial ordinário de ordem inteira. A solução será obtida por dois procedimentos distintos: inicialmente, por meio do método clássico baseado na redução da equação a uma forma linear e no uso do fator integrante, e, em seguida, por meio da transformada de Laplace, como uma abordagem alternativa.

Para isso, considere a Equação (56), com $n \in \mathbb{R}$ e $n \neq 0, 1$, pois nestes dois casos seria uma Equação Diferencial Ordinária (EDO) linear.

Caso 1: Resolução pelo Método do Fator Integrante

A resolução por tal método inicia-se multiplicando a Equação (56) por y^{-n} , obtendo-se

$$y^{-n} \frac{dy}{dx} + p(x)y^{1-n} = f(x). \quad (57)$$

Tomando $w = y^{1-n}$, então $\frac{dw}{dx} = (1-n)y^{-n} \frac{dy}{dx} \implies \frac{dy}{dx} = \frac{y^n}{1-n} \frac{dw}{dx}$. Fazendo essa mudança de variável na Equação (57), segue-se que

$$\begin{aligned} y^{-n} \frac{y^n}{1-n} \frac{dw}{dx} + p(x)w &= f(x) \\ \frac{1}{1-n} \frac{dw}{dx} + p(x)w &= f(x). \end{aligned}$$

Multiplicando toda a expressão por $(1-n)$, obtém-se a seguinte equação linear

$$\frac{dw}{dx} + (1-n)p(x)w = (1-n)f(x). \quad (58)$$

A Equação (58) é resolvida pelo método do fator integrante. O fator integrante é dado por

$$\mu = e^{\int (1-n)p(x)dx} = e^{(1-n) \int p(x)dx}. \quad (59)$$

Multiplicando a Equação (58) pelo fator integrante, segue-se que

$$e^{(1-n) \int p(x)dx} \frac{dw}{dx} + (1-n)p(x)e^{(1-n) \int p(x)dx} w = (1-n)f(x)e^{(1-n) \int p(x)dx}. \quad (60)$$

Daí,

$$\begin{aligned} \int \frac{d}{dx} \left[e^{(1-n) \int p(x)dx} w \right] dx &= \int (1-n)f(x)e^{(1-n) \int p(x)dx} dx \\ \implies e^{(1-n) \int p(x)dx} w &= (1-n) \int f(x)e^{(1-n) \int p(x)dx} dx + C. \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned} w(x) &= \left[(1-n) \int f(x) e^{(1-n) \int p(x) dx} dx + C \right] \cdot e^{(n-1) \int p(x) dx} \\ w(x) &= (1-n) \int f(x) e^{(1-n) \int p(x) dx} dx \cdot \left(e^{(n-1) \int p(x) dx} \right) + C \cdot e^{(n-1) \int p(x) dx}. \end{aligned} \quad (61)$$

Como $w(x) = y^{1-n}$, então

$$[w(x)]^{1-n} = (y^{1-n})^{\frac{1}{1-n}} \implies w(x)^{\frac{1}{1-n}} = y. \quad (62)$$

Caso 2: Resolução via Transformada de Laplace

Como alternativa, a equação linear obtida após a transformação da variável dependente também pode ser resolvida por meio da Transformada de Laplace.

No presente estudo, assume-se que $p(x) = k$, onde $k \in \mathbb{R}$ é uma constante. Neste caso, a Equação (58) pode ser escrita como

$$\frac{dw}{dx} + (1-n)kw = (1-n)f(x). \quad (63)$$

Pondo $(1-n) = a$, vem

$$\frac{dw}{dx} + akw = af(x). \quad (64)$$

Aplicando a transformada de Laplace de ambos os lados de (64), e supondo $w(0) = w_0$, tem-se

$$\mathcal{L} \left[\frac{dw}{dx} \right] + ak\mathcal{L}[w] = a\mathcal{L}[f(x)]. \quad (65)$$

Pelo Teorema (2.3.1), se $w(x)$ é uma função contínua por partes e de ordem exponencial, então

$$\mathcal{L} \left[\frac{dw}{dx} \right] = sW(s) - w(0), \quad (66)$$

onde $W(s) = \mathcal{L}[w(x)]$.

Assim, a equação transformada assume a forma

$$sW(s) - w_0 + akW(s) = aF(s), \quad (67)$$

em que $F(s) = \mathcal{L}[f(x)]$.

Reorganizando os termos, chega-se a

$$(s + ak)W(s) = aF(s) + w_0.$$

Consequentemente,

$$W(s) = \frac{aF(s)}{s+ak} + \frac{w_0}{s+ak}. \quad (68)$$

Aplicando a transformada de Laplace inversa, temos

$$w(t) = \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{a}{s+ak} F(s) \right] + w_0 \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{1}{s+ak} \right]. \quad (69)$$

Pelo Teorema da Convolução (2.4.1), temos

$$\mathcal{L} \left[\frac{a}{s+ak} F(s) \right] = \mathcal{L}^{-1} [H(s)G(s)] = h(t) * g(t), \quad (70)$$

onde $H(s) = \frac{a}{s+ak} \implies h(t) = ae^{-akt}$ e $G(s) = F(s) \implies g(t) = f(t)$.

Logo,

$$\mathcal{L}^{-1} \left[\frac{a}{s+ak} F(s) \right] = \int_0^t ae^{-akt} f(\rho) d\rho. \quad (71)$$

Assim,

$$w(t) = \int_0^t ae^{-akt} f(\rho) d\rho + w_0 e^{-akt}. \quad (72)$$

Como $w = y^a$, então

$$y^a = a \int_0^t e^{-akt(t-\rho)} f(\rho) d\rho + w_0 e^{-akt}. \quad (73)$$

4.1.2 Uma Solução Fracionária para a Equação Diferencial de Bernoulli

Nesta seção, apresenta-se uma resolução para equação diferencial de Bernoulli sob a perspectiva do cálculo fracionário, utilizando a derivada de Caputo como operador diferencial. A formulação fracionária será construída a partir da generalização da equação clássica, assumindo hipóteses previamente estabelecidas, e a solução será obtida com o auxílio da transformada de Laplace da derivada de Caputo.

Neste caso, retoma-se a Equação (64), para a qual já se assumiu anteriormente que $p(x) = k$ com $k \in \mathbb{R}$ constante, bem como a substituição $(1-n) = a$. Com o objetivo de obter uma generalização do modelo clássico, substitui-se a derivada de ordem inteira pelo operador de derivada fracionária de Caputo de ordem α , com $0 < \alpha \leq 1$. Assim, a versão fracionária da Equação (64) é dada por

$$\frac{d^\alpha w}{dx^\alpha} + akw = af(x). \quad (74)$$

Aplicando a transformada de Laplace em ambos os lados da Equação (74), obtém-se

$$\mathcal{L} \left[\frac{d^\alpha w(x)}{dx^\alpha} \right] + ak\mathcal{L}[w(x)] = a\mathcal{L}[f(x)]. \quad (75)$$

Em seguida, utilizando o Teorema (3.4.2), tem-se

$$\mathcal{L}\left[\frac{d^\alpha w(x)}{dx^\alpha}\right] = s^\alpha W(s) - s^{\alpha-1}w(0), \quad (76)$$

onde $W(s) = \mathcal{L}[w(x)]$.

Dessa forma, tomando $w(0) = w_0$, a Equação transformada (75) pode ser escrita como

$$s^\alpha W(s) - s^{\alpha-1}w_0 + ak W(s) = aF(s), \quad (77)$$

em que $F(s) = \mathcal{L}[f(x)]$.

Rearranjando os termos da Equação (77), vem

$$\begin{aligned} s^\alpha W(s) - s^{\alpha-1}w_0 + ak W(s) &= aF(s) \\ (s^\alpha + ak)W(s) &= aF(s) + s^{\alpha-1}w_0 \\ W(s) &= a \frac{F(s)}{s^\alpha + ak} + w_0 \frac{s^{\alpha-1}}{s^\alpha + ak}. \end{aligned} \quad (78)$$

Aplicando a transformada de Laplace inversa, chega-se a

$$w(x) = \underbrace{\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{a}{s^\alpha + ak}F(s)\right]}_{(I)} + w_0 \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s^{\alpha-1}}{s^\alpha + ak}\right]. \quad (79)$$

Em (I), poderia ser o usado a convolução, mas não existe uma solução analítica para $\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{a}{s^\alpha + ak}\right]$. Tomando $F(s) = \frac{k}{s}$, pode-se escrever

$$\frac{a}{s^\alpha + ak} \cdot \frac{k}{s} = \frac{ak}{(s^\alpha + ak)s} = \frac{1}{s} - \frac{s^{\alpha-1}}{s^\alpha + ak}. \quad (80)$$

Daí, tem-se

$$\begin{aligned} W(s) &= \frac{1}{s} - \frac{s^{\alpha-1}}{s^\alpha + ak} + w_0 \frac{s^{\alpha-1}}{s^\alpha + ak} \\ &= \frac{1}{s} + (w_0 - 1) \frac{s^{\alpha-1}}{s^\alpha + ak}. \end{aligned} \quad (81)$$

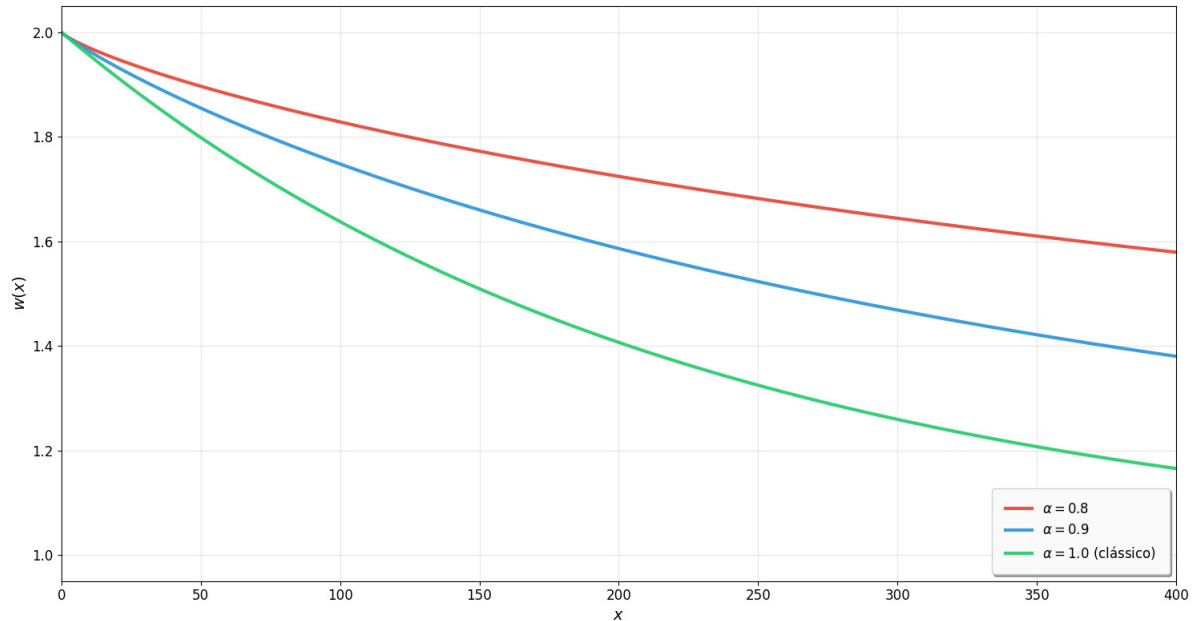
Aplicando a Transformada Inversa de Laplace e utilizando o Teorema (3.2.1), obtém-se

$$w(x) = 1 + (w_0 - 1)E_\alpha(-akx^\alpha), \quad (82)$$

a qual é a solução fracionária desejada.

Fixando $w_0 = 2, 0$, $a = 0,03$ e $k = 0,15$, o gráfico da solução para $\alpha = 0,8$, $\alpha = 0,9$ e $\alpha = 1$ segue.

Figura 4.1 – Gráfico da Solução Fracionária da Equação de Bernoulli.



Fonte: Produzido pelo autor.

4.2 CONEXÃO ENTRE A EQUAÇÃO DE BERNOULLI E O MODELO LOGÍSTICO DE VERHULST

O Modelo de Verhulst, também conhecido como Modelo Logístico, foi formulado por Pierre François Verhulst (1804–1849), em 1838, como um modelo de crescimento populacional humano, baseado em uma observação feita por Adolphe Quetelet (1796–1874), que sugeriu que o crescimento exponencial não seria possível em um período prolongado de tempo (Janampa-Sarmiento, 2018).

O modelo de Verhulst considera que uma população P de uma determinada espécie, vivendo em um determinado ambiente, deverá crescer até atingir um limite máximo sustentável, ou capacidade suporte, L , isto é, ela tende a se estabilizar (Bassanezi, 2002).

Tal modelo é dado como segue

$$\frac{dP}{dt} = \lambda P \left(1 - \frac{P}{L} \right), \quad (83)$$

com a taxa de crescimento da população $\lambda > 0$.

Perceba que quando $P \rightarrow L$, isto é, o crescimento populacional tende a capacidade suporte L , a taxa de crescimento populacional diminui progressivamente, tendendo a zero; em outras palavras, $\frac{dP}{dt} \rightarrow 0$.

Conforme discutido por Gotelli (2008) e Stewart (2016), a capacidade suporte L desempenha um papel fundamental no modelo logístico, estando associada às limitações ambientais impostas ao crescimento populacional. Nesse contexto, podem-se destacar as seguintes características:

- I. À medida que a população $P \rightarrow L$, ou seja P se aproxima de L , a taxa de crescimento populacional diminui, devido ao aumento da competição intraespecífica e à limitação de recursos ambientais.
- II. Se $P < L$, então a taxa de crescimento populacional é positiva, isto é, $\frac{dP}{dt} > 0$, e a população tende a crescer. Por outro lado, se $P > L$, tem-se $\frac{dP}{dt} < 0$, indicando que a população tende a decrescer. Em ambos os casos, a dinâmica populacional conduz a população ao estado de equilíbrio $P \rightarrow L$ ao longo do tempo.
- III. O valor da capacidade suporte L não é fixo, sendo determinado pelas condições ambientais do habitat, tais como disponibilidade de alimento, espaço físico e outros fatores ecológicos, podendo variar conforme alterações nessas condições.

Observe que a partir da Equação (83) e sob a condição $\lambda > 0$, obtém-se

$$\frac{dP}{dt} - \lambda P = -\frac{\lambda P^2}{L}. \quad (84)$$

Assim, percebe-se que a Equação de Verhulst constitui um caso particular da Equação de Bernoulli, quando se toma $P(t) = -\lambda$, $f(t) = \frac{-\lambda}{L}$ e $n = 2$.

Para linearizar, faz-se a seguinte mudança de variável: $w(t) = P^{1-n} = P^{-1}$. Derivando em relação a t , conclui-se que $\frac{dw}{dt} = -P^{-2} \frac{dP}{dt}$. Substituindo na Equação (84), vem:

$$-P^2 \frac{dw}{dt} - \lambda P = -\frac{\lambda}{L} P^2. \quad (85)$$

Multiplicando a Equação (85) por $-P^{-2}$ e utilizando a substituição $w = P^{-1}$, resulta

$$\frac{dw}{dt} + \lambda w(t) = \frac{\lambda}{L}, \quad (86)$$

a qual é uma equação linear de primeira ordem.

A seguir, será apresentado uma solução clássica e uma solução fracionária para a Equação de Verhulst.

4.2.1 Solução Clássica da Equação de Verhulst

Aplicando a transformada de Laplace na Equação (86), vem

$$\mathcal{L}\left[\frac{dw}{dt}\right] + \lambda\mathcal{L}[w(t)] = \frac{\lambda}{L}\mathcal{L}[1]. \quad (87)$$

Daí, pelo Teorema (2.3.1), tem-se

$$sW(s) - w(0) + \lambda W(s) = \frac{\lambda}{L} \cdot \frac{1}{s}. \quad (88)$$

Tomando $w(0) = w_0$, pode-se escrever

$$(s + \lambda)W(s) = \frac{\lambda}{L} \cdot \frac{1}{s} + w_0. \quad (89)$$

Logo,

$$W(s) = \frac{\lambda}{L} \cdot \frac{1}{s(s + \lambda)} + w_0 \frac{1}{(s + \lambda)}. \quad (90)$$

Aplicando a transformada inversa de Laplace, conclui-se que

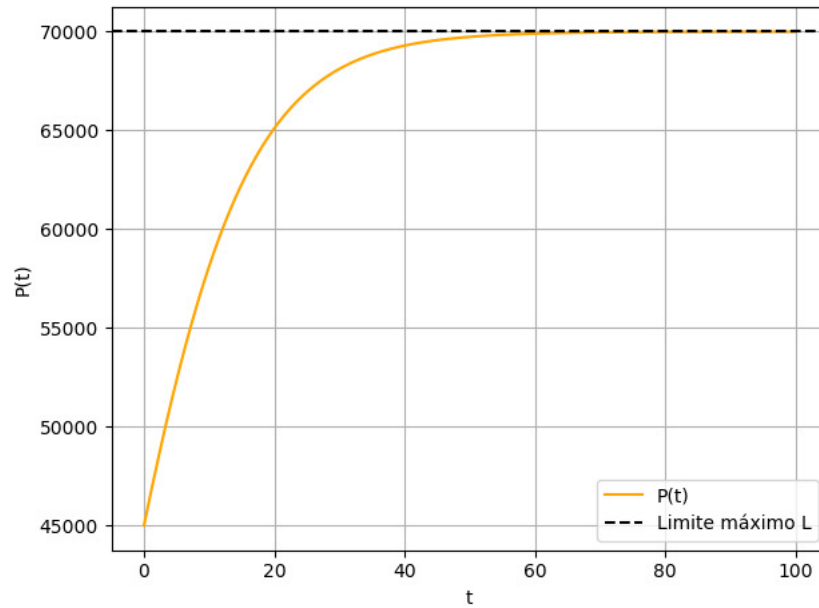
$$\begin{aligned} w(t) &= \frac{\lambda}{L} \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s(s + \lambda)}\right] + w_0 \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{(s + \lambda)}\right] \\ &= \frac{\lambda}{L} \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{\lambda} \cdot \frac{1}{s} - \frac{1}{\lambda} \cdot \frac{1}{s + \lambda}\right] + w_0 e^{-\lambda t} \\ &= \frac{1}{L} + \left(w_0 - \frac{1}{L}\right) e^{-\lambda t}. \end{aligned} \quad (91)$$

Como $w(t) = \frac{1}{P}$, então $P(t) = \frac{1}{w(t)}$, ou seja,

$$P(t) = \frac{1}{\frac{1}{L} + \left(w_0 - \frac{1}{L}\right) e^{-\lambda t}}. \quad (92)$$

Fixando $L = 70.000$, $w_0 = 45.000$ e $\lambda = 0,1$, o gráfico correspondente à solução é apresentado a seguir.

Figura 4.2 – Gráfico da solução inteira do Modelo Logístico.



Fonte: Produzido pelo autor.

4.2.2 Uma Solução Fracionária para a Equação de Verhulst

Tomando a Equação linearizada (86) de ordem α , com $0 < \alpha \leq 1$ e $w(t) = \frac{1}{P(t)}$, tem-se

$$\frac{d^\alpha w}{dt^\alpha} + \lambda w = \frac{\lambda}{L}. \quad (93)$$

Aplicando a transformada de Laplace da derivada de Caputo, conforme o Teorema (3.4.2), segue que

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\left[\frac{d^\alpha w}{dt^\alpha}\right] + \lambda \mathcal{L}[w(t)] &= \frac{\lambda}{L} \cdot \mathcal{L}[1] \\ s^{\alpha-1} [sW(s) - w(0)] + \lambda W(s) &= \frac{\lambda}{L} \cdot \frac{1}{s} \\ (s^\alpha + \lambda)W(s) - s^{\alpha-1}w(0) &= \frac{\lambda}{L} \cdot \frac{1}{s}. \end{aligned} \quad (94)$$

Para $w(0) = w_0$, vem

$$W(s) = \frac{\lambda}{L} \cdot \frac{1}{s(s^\alpha + \lambda)} + w_0 \frac{s^{\alpha-1}}{s^\alpha + \lambda}. \quad (95)$$

Tomando a transformada inversa de Laplace, obtém-se

$$w(t) = \frac{1}{L} \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{\lambda}{s(s^\alpha + \lambda)}\right] + w_0 \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s^{\alpha-1}}{s^\alpha + \lambda}\right]. \quad (96)$$

Observa-se que

$$\frac{\lambda}{s(s^\alpha + \lambda)} = \frac{1}{s} - \frac{s^{\alpha-1}}{s^\alpha + \lambda}.$$

Daí, a Equação (96) pode ser escrita como

$$\begin{aligned} w(t) &= \frac{1}{L} \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{1}{s} - \frac{s^{\alpha-1}}{s^{\alpha} + \lambda} \right] + w_0 \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{s^{\alpha-1}}{s^{\alpha} + \lambda} \right] \\ &= \frac{1}{L} + \left(w_0 - \frac{1}{L} \right) \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{s^{\alpha-1}}{s^{\alpha} + \lambda} \right]. \end{aligned} \quad (97)$$

Do Teorema (3.2.1), tem-se que

$$\mathcal{L}^{-1} \left[\frac{s^{\alpha-1}}{s^{\alpha} + \lambda} \right] = E_{\alpha}(-\lambda t). \quad (98)$$

Portanto,

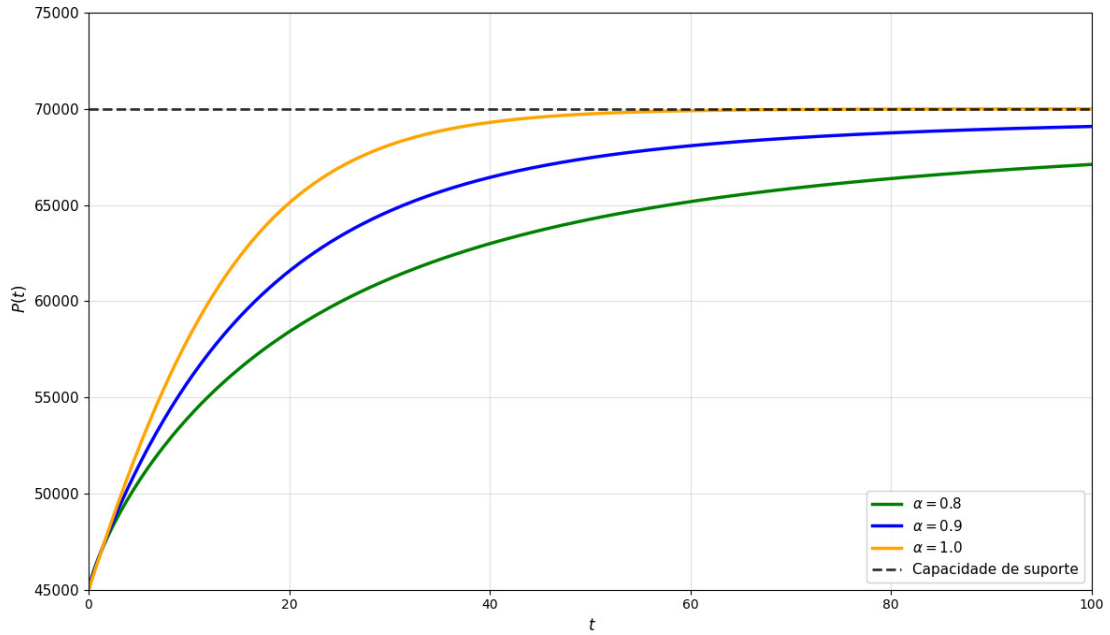
$$w(t) = \frac{1}{L} + \left(w_0 - \frac{1}{L} \right) E_{\alpha}(-\lambda t^{\alpha}). \quad (99)$$

Como foi definida a transformação $w(t) = \frac{1}{P(t)}$, segue imediatamente que

$$P(t) = \frac{1}{\frac{1}{L} + \left(w_0 - \frac{1}{L} \right) E_{\alpha}(-\lambda t^{\alpha})}. \quad (100)$$

Fixando-se $L = 70.000$, $w_0 = 45.000$ e $\lambda = 0,1$, é apresentado a seguir o gráfico correspondente às soluções do modelo. para $\alpha = 0,8$; $\alpha = 0,9$ e $\alpha = 1$.

Figura 4.3 – Gráfico da Solução Fracionária do Modelo Logístico.



Fonte: Produzido pelo autor.

4.3 ANÁLISE ANALÍTICA E GRÁFICA DE UM CENÁRIO HIPOTÉTICO

Para melhor compreender a dinâmica prevista pelo modelo, analisaremos a seguir um caso hipotético envolvendo uma população em crescimento.

4.3.1 Descrição do Cenário Populacional

Considere a Cidade Esperança, um município fictício em processo de desenvolvimento urbano e econômico. No instante inicial do estudo, a cidade possui aproximadamente $P_0 = 10.000$ habitantes e apresenta atratividade populacional devido à oferta de empregos, à expansão da infraestrutura e à melhoria gradual da qualidade de vida. No entanto, como ocorre em sistemas reais, o crescimento populacional não pode ser ilimitado, sendo restringido por fatores como a disponibilidade de recursos naturais, moradia, saneamento básico, mobilidade urbana e políticas públicas. Para modelar essa dinâmica, adota-se o modelo logístico de Verhulst, que incorpora o conceito de capacidade de suporte L , representando o número máximo de habitantes que o sistema urbano pode sustentar de forma adequada. Neste estudo, considera-se $L = 50.000$ habitantes e uma taxa de crescimento intrínseco $\lambda = 0,08$, correspondente a um crescimento anual de 8%. O objetivo é analisar o crescimento populacional da Cidade Esperança ao longo do tempo, considerando tanto a solução clássica quanto a solução fracionária do modelo logístico de Verhulst.

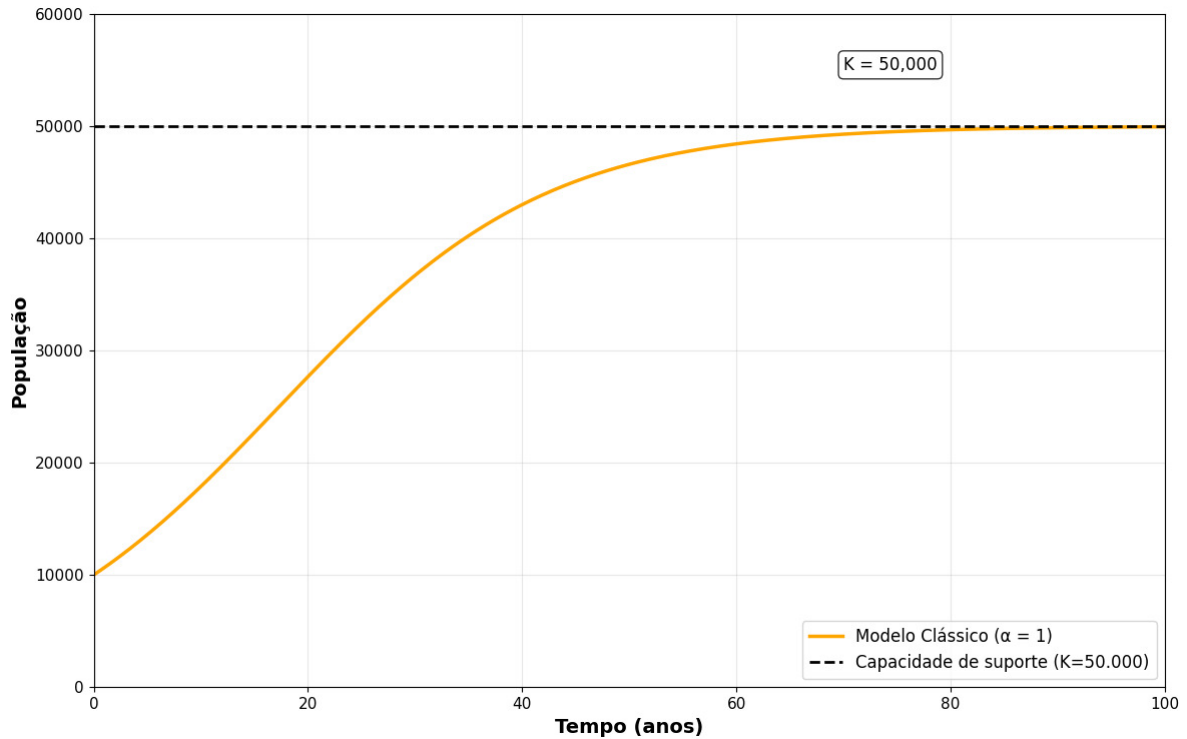
4.3.2 Solução Clássica

Substituindo os valores do problema na Equação (92), tem-se

$$\begin{aligned} P(t) &= \frac{1}{0,00002 + (0,0001 - 0,00002)e^{-0,08t}} \\ P(t) &= \frac{1}{0,00002 + (0,00008)e^{-0,08t}} \\ P(t) &= \frac{5 \cdot 10^4}{1 + 4 \cdot e^{-0,08t}}. \end{aligned} \tag{101}$$

A seguir, o comportamento gráfico de $P(t)$ ao longo do tempo.

Figura 4.4 – Comportamento Gráfico da Solução Clássica do Modelo Logístico.



Fonte: Produzido pelo autor.

De forma geral, a solução clássica apresenta o comportamento logístico esperado: a população aumenta rapidamente nos primeiros anos, com crescimento acelerado na fase intermediária, e desacelera à medida que se aproxima da capacidade de suporte da cidade. Esse comportamento reflete um desenvolvimento ideal, sem restrições externas significativas.

O ponto de inflexão, em que a taxa de crescimento é máxima, marca a transição entre aceleração e desaceleração, e a população tende a se estabilizar no limite ambiental, independentemente das condições iniciais, mostrando como o modelo logístico descreve de forma clara e eficiente o crescimento populacional em ambientes com recursos limitados.

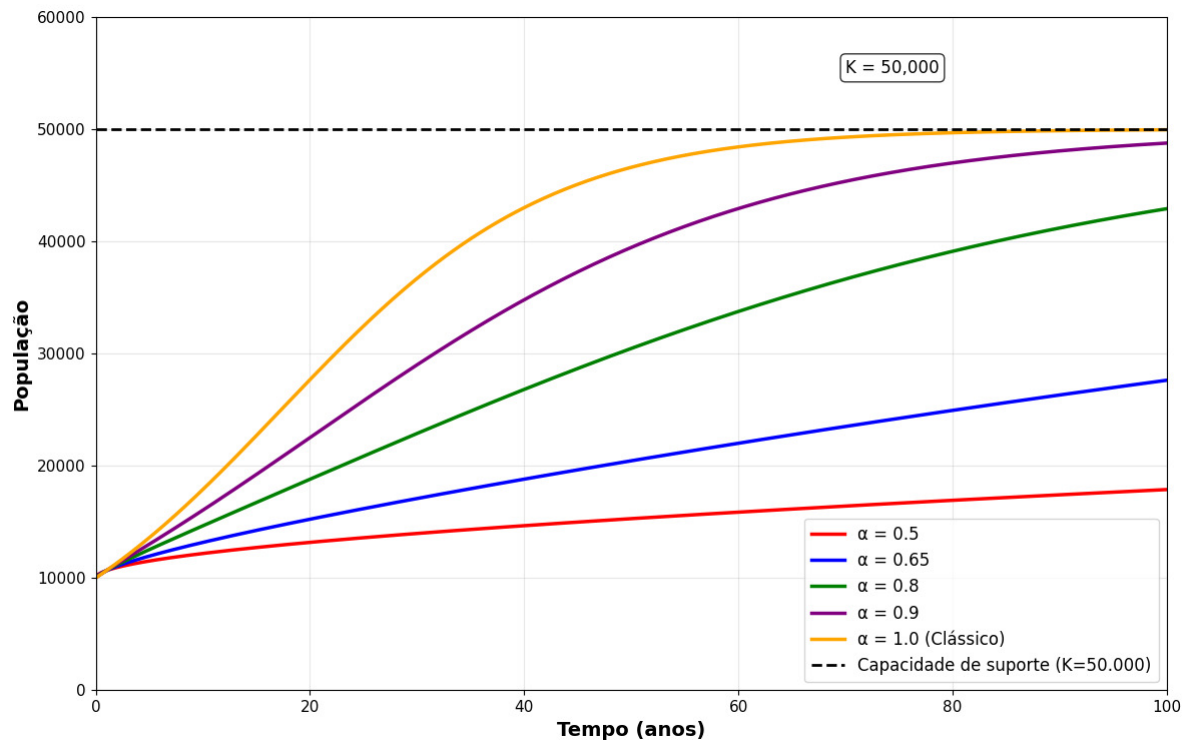
4.3.3 Solução Fracionária

Substituindo os valores da situação proposta na Equação (100), obtém-se a solução fracionária do modelo logístico:

$$P(t) = \frac{1}{0,00002 + (0,0001 - 0,00002)E_{\alpha}(-0,08t^{\alpha})} \cdot \frac{50000}{1 + 4 \cdot E_{\alpha}(-0,08t^{\alpha})}. \quad (102)$$

A seguir, o comportamento gráfico de $P(t)$ para diferentes valores para α ao decorrer dos anos.

Figura 4.5 – Comportamento Gráfico da Solução Fracionária do Modelo Logístico.



Fonte: Produzido pelo autor.

A análise dos gráficos do crescimento populacional da cidade hipotética, considerando a solução clássica e a solução fracionária do modelo de Verhulst, evidencia diferenças significativas na dinâmica populacional em função da ordem fracionária α .

Um aspecto notável do modelo fracionário de Verhulst é que, quando a ordem α é igual a 1, a solução fracionária coincide exatamente com a solução clássica do modelo logístico. Essa propriedade evidencia a consistência da formulação fracionária, mostrando que ela não substitui o modelo tradicional, mas o amplia, ao incorporar o chamado “efeito de memória”, no qual a taxa de crescimento populacional passa a depender não apenas do estado atual do sistema, mas também de sua evolução passada, representando a influência acumulada de fatores históricos ou restrições prolongadas ao longo do tempo.

As soluções fracionárias ($\alpha < 1$) apresentam crescimento mais lento, cuja intensidade depende diretamente do valor de α . Para valores próximos de 1, como $\alpha = 0,9$, o crescimento ainda é relativamente rápido, mas ligeiramente atrasado em relação à solução clássica. À medida que α diminui, por exemplo, $\alpha = 0,8$ ou $\alpha = 0,65$, o crescimento se torna

mais gradual, podendo refletir restrições sociais, econômicas ou ambientais que limitam o crescimento populacional.

Outro ponto relevante observado nos gráficos é o tempo necessário para que a população se aproxime da capacidade suporte da cidade. Na solução clássica, a população atinge rapidamente valores próximos ao limite, como esperado pelo modelo logístico. Já nas soluções fracionárias, esse tempo aumenta à medida que α diminui, indicando que a população leva mais anos para se aproximar da capacidade máxima. Essa diferença evidencia como a ordem fracionária α influencia a velocidade de saturação populacional e o ritmo de crescimento ao longo do tempo.

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Este trabalho teve como propósito investigar a aplicação do cálculo fracionário na modelagem matemática do crescimento populacional, tomando como referência o modelo logístico de Verhulst. Ao longo do estudo, buscou-se articular fundamentos teóricos e aplicações, de modo a evidenciar o potencial dessa abordagem como uma alternativa ao cálculo clássico na descrição de fenômenos naturais.

A análise das soluções clássicas e fracionárias mostrou que a formulação fracionária permite descrever dinâmicas populacionais mais graduais, incorporando efeitos associados à influência do passado do sistema sobre sua evolução. Observou-se ainda que, quando a ordem fracionária assume valor unitário, a solução fracionária converge para a solução clássica, o que reforça a consistência matemática do modelo proposto.

Por fim, foi destacada a conexão entre a equação de Bernoulli e o modelo logístico de Verhulst, na qual se demonstra que o modelo de Verhulst pode ser derivado da equação de Bernoulli sob condições apropriadas. Em seguida, o modelo de Verhulst foi aplicado em um cenário populacional hipotético, no qual se realizou uma análise comparativa entre as soluções de ordem inteira e fracionária. Os resultados evidenciaram que o cálculo fracionário constitui uma generalização robusta da modelagem matemática clássica, pois incorpora o efeito de memória do sistema, permitindo que a dinâmica populacional seja influenciada não apenas pelo estado atual mas também por sua evolução passada que, em certas condições, acredita-se possibilitar uma descrição mais flexível e precisa do crescimento populacional do que os modelos tradicionais.

REFERÊNCIAS

- BACAËR, Nicolas. **Breve História Matemática da Dinâmica Populacional**. Paris: Cassini, 2021. Com José Paulo Viana e Paulo Doutor. ISBN 979-10-343-7177-8.
- BASSANEZI, Rodney. **Ensino - aprendizagem com Modelagem matemática**. 4. ed. São Paulo: Contexto, 2002. ISBN 978-8572442077.
- BIEMBENGUT, Maria Salett; HEIN, Nelson. **Modelagem Matemática no Ensino**. 5. ed. São Paulo: Contexto, 2000.
- BONI, M. D. T. M. **Cálculo fracionário aplicado às equações horárias do movimento e outras aplicações**. Dissertação (Mestrado) — Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de São Paulo, 2017. Disponível em: <<https://repositorio.ifsp.edu.br/items/296e4025-e604-4a13-88e6-9ce4f570cbf0>><https://repositorio.ifsp.edu.br/items/296e4025-e604-4a13-88e6-9ce4f570cbf0>. Acesso em: 10 out. 2025.
- BOYCE, William E; DIPRIMA, Richard C. **Equações diferenciais elementares e problemas de valores de contorno**. 10. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2015. ISBN 978-8521627357.
- CAMARGO, Rubens de Figueiredo. **Calculo fracionario e aplicações**. Tese (Doutorado) — Universidade Estadual de Campinas, 2009. Disponível em: <<https://repositorio.unicamp.br/acervo/detalhe/439359>><https://repositorio.unicamp.br/acervo/detalhe/439359>. Acesso em: 20 out. 2025.
- CAMARGO, R. F.; OLIVEIRA, E. C. **Cálculo fracionário**. São Paulo: LF Editorial, 2015. ISBN 978-8578613297.
- CARDOSO, Lislaine Cristina; CAMARGO, Rubens de Figueiredo. Equacao diferencial de bernoulli fracionária. **Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics**, v. 3, n. 2, 2015. Disponível em: <<https://proceedings.sbmec.org.br/sbmec/article/view/983>><https://proceedings.sbmec.org.br/sbmec/article/view/983>. Acesso em: 10 jan. 2026.
- DINIZ, Geraldo Lúcio. **Equações de diferenças e sistemas: com aplicações biológicas (Vol. 54)**. [S.l.]: SBMAC, 2011.
- GOTELLI, Nicholas J. **Ecologia**. 4. ed. Londrina: Editora Planta, 2008. Tradução de A Primer of Ecology. ISBN 9785991440493.
- JANAMPA-SARMIENTO, Peter Charrie. **Modelagem do crescimento de truta arco-íris na fase de engorda**. 49 p. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro, Seropédica, RJ, 2018. Instituto de Zootecnia. Disponível em: <<https://rima.ufrj.br/jspui/handle/20.500.14407-14864>><https://rima.ufrj.br/jspui/handle/20.500.14407-14864>. Acesso em: 12 jan. 2026.

LUSTOSA, J. I. S. **A transformada de Laplace e algumas aplicações**. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal da Paraíba, 2017. Disponível em: <<https://repositorio.ufpb.br/jspui/handle/tede/9332>><https://repositorio.ufpb.br/jspui/handle/tede/9332>. Acesso em: 10 out. 2025.

LUSTOSA, J. I. S. **Cálculo fracionário aplicado à avaliação de efeitos estruturais na deflexão de vigas biapoiadas**. Tese (Doutorado) — Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 2022. Disponível em: <<https://repositorio.unicamp.br/acervo/detalhe/1260498>><https://repositorio.unicamp.br/acervo/detalhe/1260498>.

MILLER, K.S.; ROSS, B. **An Introduction to the Fractional Calculus and Fractional Differential Equations**. Wiley, 1993. ISBN 9780471588849. Disponível em: <https://books.google.com.br/books?id=MOp_QgAACAAJ>https://books.google.com.br/books?id=MOp_QgAACAAJ.

OLIVEIRA, H Silva. **Introdução ao cálculo de ordem arbitrária**. Dissertação (Mestrado) — Universidade Estadual de Campinas, 2010. Disponível em: <<https://doi.org/10.47749/T/UNICAMP.2010.775672>><https://doi.org/10.47749/T/UNICAMP.2010.775672>.

OTTONI, José Eloy. Introdução ao cálculo fracionário com aplicações. **Revista de Matemática da UFOP**, v. 5, n. 1, p. 50–77, 2018. Disponível em: <<https://periodicos.ufop.br/rmat/article/view/1289>><https://periodicos.ufop.br/rmat/article/view/1289>. Acesso em: 11 out. 2025.

PODLUBNY, Igor. **Fractional Differential Equations**. San Diego: Academic Press, 1999. v. 198. ISBN 978-0125588409.

STEWART, James. **Cálculo: Volume 2**. 8. ed. São Paulo: Cengage Learning, 2016.

THEODORO, Micaeli Mendola; CAMARGO, Rubens de Figueiredo. Um estudo sobre as soluções da equação logística fracionária. **CQD-Revista Eletrônica Paulista de Matemática**, 2020. Disponível em: <https://revistas.bauru.unesp.br/index.php/revistacqd/pt_BR/article/view/246>https://revistas.bauru.unesp.br/index.php/revistacqd/pt_BR/article/view/246. Acesso em: 20 jan. 2026.

VARALTA, Najla. **Das transformadas integrais ao cálculo fracionário aplicado à equação logística**. Dissertação (Mestrado) — Universidade Estadual Paulista (Unesp), 2014. Disponível em: <<http://hdl.handle.net/11449-113941>><http://hdl.handle.net/11449-113941>.

ZILL, Dennis G. **Equações Diferenciais com Aplicações em Modelagem**. 3. ed. São Paulo: Cengage Learning, 2016. ISBN 978-8522123896.

ZILL, Dennis G.; CULLEN, Michael R. **Equações Diferenciais**. São Paulo: Pearson Makron Books, 2001. v. 1. ISBN 85-346-1291-9.

	INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA DA PARAÍBA
	Campus Cajazeiras - Código INEP: 25008978
	Rua José Antônio da Silva, 300, Jardim Oásis, CEP 58.900-000, Cajazeiras (PB)
	CNPJ: 10.783.898/0005-07 - Telefone: (83) 3532-4100

Documento Digitalizado Ostensivo (Público)

Trabalho de Conclusão de Curso

Assunto:	Trabalho de Conclusão de Curso
Assinado por:	Wandenberg Alexandria
Tipo do Documento:	Tese
Situação:	Finalizado
Nível de Acesso:	Ostensivo (Público)
Tipo do Conferência:	Cópia Simples

Documento assinado eletronicamente por:

- Wandenberg Alexandria da Silva, DISCENTE (202212020008) DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA - CAJAZEIRAS, em 02/03/2026 19:36:44.

Este documento foi armazenado no SUAP em 02/03/2026. Para comprovar sua integridade, faça a leitura do QRCode ao lado ou acesse <https://suap.ifpb.edu.br/verificar-documento-externo/> e forneça os dados abaixo:

Código Verificador: 1785034
Código de Autenticação: 2afa3b2ca0

