



**INSTITUTO FEDERAL DA PARAÍBA
CAMPUS CAJAZEIRAS
CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA**

STÊNIO MACHADO FERREIRA

**O NÚMERO ÁUREO COMO FATOR DE ESTÍMULO AO
PROCESSO DE ENSINO/APRENDIZAGEM DA
MATEMÁTICA**

**CAJAZEIRAS
2026**

STÊNIO MACHADO FERREIRA

**O NÚMERO ÁUREO COMO FATOR DE ESTÍMULO AO PROCESSO DE
ENSINO/APRENDIZAGEM DA MATEMÁTICA**

Monografia apresentada ao **Curso de Licenciatura em Matemática** do **Instituto Federal da Paraíba** como requisito parcial para a obtenção do título de **Licenciado em Matemática**.

Orientador: Prof. Me. Leonardo Ferreira Soares

CAJAZEIRAS

2026

STÊNIO MACHADO FERREIRA

**O NÚMERO ÁUREO COMO FATOR DE ESTÍMULO AO PROCESSO DE
ENSINO/APRENDIZAGEM DA MATEMÁTICA**

Monografia apresentada ao programa de **Curso de Licenciatura em Matemática** do **Instituto Federal da Paraíba**, como requisito parcial à obtenção do título de **Licenciado em Matemática**.

Data de aprovação: 23/02/2026

Banca Examinadora:

Documento assinado digitalmente
 **LEONARDO FERREIRA SOARES**
Data: 27/02/2026 15:38:40-0300
Verifique em <https://validar.itl.gov.br>

Prof. Me. Leonardo Ferreira Soares
Instituto Federal da Paraíba - IFPB

Documento assinado digitalmente
 **JACKSON TAVARES DE ANDRADE**
Data: 27/02/2026 18:30:11-0300
Verifique em <https://validar.itl.gov.br>

Prof. Me. Jackson Tavares de Andrade
Secretaria de Estado da Educação da Paraíba - SEDUC PB

Documento assinado digitalmente
 **MARCIO ALISSON LEANDRO COSTA**
Data: 02/03/2026 15:46:00-0300
Verifique em <https://validar.itl.gov.br>

Prof. Me. Márcio Alisson Leandro Costa
Instituto Federal da Paraíba - IFPB

IFPB / Campus Cajazeiras
Coordenação de Biblioteca
Biblioteca Prof. Ribamar da Silva
Catalogação na fonte: Cícero Luciano Félix CRB-15/750

F383n Ferreira, Stênio Machado.
O número áureo como fator de estímulo ao processo de
ensino/aprendizagem da matemática / Stênio Machado Ferreira.– 2026.

98f. : il.

Trabalho de Conclusão de Curso (Licenciatura em Matemática) - Instituto
Federal de Educação, Ciência e Tecnologia da Paraíba, Cajazeiras, 2026.

Orientador(a): Prof. Me. Leonardo Ferreira Soares.

1. Ensino de matemática. 2. Geometria euclidiana. 3. Número áureo. 4.
Didática. I. Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia da Paraíba. II.
Título.

*Dedico este trabalho à Débora, minha esposa,
pelo importante apoio durante os anos desta
ádua, porém prazerosa caminhada.*

AGRADECIMENTOS

Agradece-se, primeiramente, a Deus, que guiou esta caminhada, concedendo forças nos momentos de cansaço, sabedoria nos dias difíceis e esperança quando o final do percurso parecia inalcançável. A conclusão desta etapa representa mais do que uma conquista acadêmica, configurando-se como a realização de um objetivo construído ao longo de muitos anos, fruto de empenho, fé e determinação.

Registra-se um agradecimento especial ao orientador, professor da disciplina Geometria Euclidiana Plana, Me. Leonardo Ferreira Soares, com quem foi construída a base necessária para o desenvolvimento neste relevante campo de estudo, disciplina na qual houve a oportunidade de atuar como monitor durante dois semestres consecutivos.

Da mesma forma, agradece-se ao Me. João Paulo de Araujo Souza, professor da disciplina Cálculo Diferencial e Integral III, na qual se exerceu a monitoria por um semestre, período que contribuiu de forma significativa para a reconstrução e o aprofundamento dos conhecimentos na área.

Expressa-se, também, agradecimento ao Coordenador do Curso, Professor Me. Francisco Aureliano Vidal, que, além de integrar o corpo docente do IFPB – Campus Cajazeiras, orientou as demandas burocráticas ao longo do curso, sempre com disponibilidade e atenção.

Agradece-se aos orientadores dos Estágios Curriculares Obrigatórios, nas pessoas dos Doutores Rodiney Marcelo Braga dos Santos, Fernanda Andrea Fernandes Silva e Antonia Edivaneide de Sousa Gonzaga, responsáveis, respectivamente, pelos Estágios I, II e III; bem como aos supervisores Professor Marcelo Rodrigues Felix, nos Estágios I e II, e Professora Eliza Almeida da Costa, no Estágio III, cujas práticas pedagógicas contribuíram de forma significativa para a formação docente.

Por fim, registra-se agradecimento aos demais professores das disciplinas cursadas ao longo dos últimos cinco anos do curso de Licenciatura em Matemática, cujas contribuições foram fundamentais para a formação acadêmica e profissional.

“A matemática é uma estratégia desenvolvida pela humanidade para compreender, explicar e lidar com a realidade.”

Ubiratan D’Ambrosio

RESUMO

O presente trabalho tem como temática central o estudo do Número Áureo, também denominado Proporção Divina, destacando sua presença recorrente em problemas clássicos da Geometria Euclidiana Plana e suas conexões com outras áreas da matemática. A motivação principal reside no potencial didático desse objeto matemático, cuja aplicação em construções geométricas favorece a compreensão conceitual, a visualização e o interesse dos estudantes pelo aprendizado da Matemática. Parte-se da constatação de que o ensino torna-se mais significativo quando fundamentado em exemplos concretos e contextualizados, especialmente aqueles que evidenciam relações matemáticas presentes na natureza, na arte, na arquitetura e no design. O trabalho não se limita a uma revisão bibliográfica, mas propõe uma abordagem analítica e exploratória, apresentando problemas geométricos cuidadosamente selecionados e resolvidos pelo autor, nos quais o Número Áureo se manifesta de forma explícita ou implícita. No contexto do pentágono regular, investigam-se figuras como o pentagrama, o retângulo de ouro, a espiral de ouro, o triângulo áureo e diferentes configurações triangulares, além de circunferências inscritas, evidenciando a riqueza estrutural e estética dessas construções. Metodologicamente, a pesquisa fundamenta-se na revisão de literatura e na articulação entre Geometria Euclidiana Plana, Álgebra Básica e Trigonometria, incluindo a utilização das fórmulas de Werner e a relação entre o Número Áureo e a sequência de Fibonacci. As questões abordadas apresentam nível de complexidade mediano a avançado, sendo os conceitos desenvolvidos de forma detalhada, a fim de minimizar dificuldades de compreensão. Espera-se que este trabalho contribua tanto para a valorização da matemática no ensino básico quanto para a formação de um material de apoio a estudantes e professores, estimulando a percepção da matemática como uma ciência dotada de rigor, beleza e profundas conexões internas.

Palavras-chave: Número Áureo. Geometria Euclidiana Plana. Ensino de Matemática. Pentágono Regular. Proporção Divina.

ABSTRACT

This paper focuses on the study of the Golden Ratio, also known as the Divine Proportion, emphasizing its recurring presence in classical problems of Plane Euclidean Geometry and its connections with other areas of mathematics. The main motivation lies in the didactic potential of this mathematical object, whose application in geometric constructions enhances conceptual understanding, visualization, and students' interest in learning Mathematics. The study is grounded on the premise that teaching becomes more meaningful when supported by concrete and contextualized examples, especially those that reveal mathematical relationships found in nature, art, architecture, and design. Rather than being limited to a bibliographic review, the work adopts an analytical and exploratory approach, presenting carefully selected geometric problems solved by the author, in which the Golden Ratio appears either explicitly or implicitly. Within the context of the regular pentagon, figures such as the pentagram, the golden rectangle, the golden spiral, the golden triangle, various triangular configurations, and inscribed circles are investigated, highlighting the structural and aesthetic richness of these constructions. Methodologically, the research is based on a literature review and on the articulation between Plane Euclidean Geometry, Basic Algebra, and Trigonometry, including the use of Werner's formulas and the relationship between the Golden Ratio and the Fibonacci sequence. The problems addressed range from intermediate to advanced levels, with concepts developed in detail to reduce potential difficulties in comprehension. It is expected that this work will contribute both to the appreciation of mathematics in basic education and to the development of supporting material for students and teachers, fostering the perception of mathematics as a discipline endowed with rigor, beauty, and deep internal connections.

Keywords: Golden Ratio. Plane Euclidean Geometry. Mathematics Education. Regular Pentagon. Divine Proportion.

LISTA DE FIGURAS

Figura 2.1 – O segmento áureo 1	21
Figura 2.2 – O segmento áureo 2	23
Figura 2.3 – O retângulo áureo	26
Figura 2.4 – A espiral de ouro	27
Figura 2.5 – A proporção áurea no Parthenon ¹	29
Figura 2.6 – A proporção áurea no molúsculo náutilus ²	29
Figura 2.7 – A proporção áurea na odontologia ³	30
Figura 2.8 – Pintura ilustrativa de Leonardo de Pisa (Fibonacci-1170-1240) ⁴	31
Figura 2.9 – A sequência de Fibonacci na natureza ⁵	34
Figura 2.10–O triângulo áureo	35
Figura 2.11–Demonstração dos elementos do triângulo áureo	35
Figura 2.12–O $\sin 18^\circ$ no triângulo áureo	36
Figura 2.13–O triângulo de Kpler	37
Figura 2.14–A magia do pentagrama	38
Figura 2.15–O pentagrama	39
Figura 2.16–A beleza do número aureo em espiral	41
Figura 2.17–Ângulos formados por retas paralelas cortadas por transversal	49
Figura 2.18–Ilustração do teorema de Tales	50
Figura 2.19–Ilustração digital realista de Tales de Mileto (624 a.C–546 a.C). ⁶	51
Figura 2.20–Semelhança de triângulo – caso 1	52
Figura 2.21–Semelhança de triângulo – caso 2	52
Figura 2.22–Semelhança de triângulo – caso 3	53
Figura 2.23–Ilustração do teorema de Pitágoras	53
Figura 2.24–A tangente a duas circunferências tangentes externamente	55
Figura 2.25–Potência de ponto - caso 1	56
Figura 2.26–Demonstração	56
Figura 2.27–Potência de ponto - caso 2	57
Figura 2.28–Demonstração	57
Figura 2.29–Potência de ponto - caso 3	58
Figura 2.30–Demonstração	58
Figura 2.31–Retrato ilustrativo de Paolo Ruffini (1765–1822). ⁷	59
Figura 2.32–Retrato ilustrativo de Charles Auguste Briot (1817–1882). ⁸	60
Figura 2.33–Representação geométrica da lei dos senos	60
Figura 2.34–Representação geométrica da demonstração da lei dos senos	62
Figura 2.35–Representação geométrica da lei dos cossenos	62
Figura 2.36–Representação geométrica da demonstração da lei dos cossenos	63

Figura 2.37–Seno e cosseno da soma e da diferença de arcos	64
Figura 2.38–Pintura ilustrativa de Johann Werner (1468–1522). ⁹	68
Figura 3.1 – Problema 1	71
Figura 3.2 – Detalhamento do problema 1	72
Figura 3.3 – Problema 2	74
Figura 3.4 – Detalhamento do problema 2	75
Figura 3.5 – Detalhamento do problema 2 (ampliado)	75
Figura 3.6 – Problema 3	79
Figura 3.7 – Detalhamento do problema 3	79
Figura 3.8 – Problema 4	82
Figura 3.9 – Detalhamento do problema 4	82
Figura 3.10–Problema 5	84
Figura 3.11–Detalhamento do problema 5	85
Figura 3.12–Problema 6	87
Figura 3.13–Detalhamento do problema 6	87
Figura A.1 – Retrato artístico de Jacques Philippe Marie Binet (1776–1856). ¹⁰ . . .	98

LISTA DE TABELAS

Tabela 2.1 – Linha do Tempo do Quantitativo de Casais de Coelhos	33
Tabela 2.2 – Tabela de senos, cossenos e tangentes de ângulos notáveis	69

LISTA DE QUADROS

Quadro 2.1 – Relação de Congruências Entre Ângulos	49
Quadro 2.2 – Fórmulas Trigonométricas de Werner	66
Quadro 2.3 – Outras Equações e Designações Utilizadas no Trabalho	70

LISTA DE SÍMBOLOS

λ	Lambda	$\Rightarrow$	Implicação
$\in$	Pertence	$[]$	Colchetes
φ	Phi	$()$	Parênteses
ψ	Psi	$\perp$	Perpendicularidade
α	Alfa	$\text{sen}(x)$	Seno
Δ	Delta	$\text{cos}(x)$	Cosseno
θ	Theta	$\text{tg}(x)$	Tangente
β	Beta	$\text{cot}(x)$	Cotangente
ω	Ômega	$\neq$	Diferente
$+$	Adição	$>$	Maior que
$-$	Subtração	$\mathbb{N}$	Conjunto dos números naturais
$\approx$	Aproximadamente	$\dots$	Reticências
$=$	Igual	$\overline{AB}$	Segmento de reta
$\sqrt{x}$	Raiz quadrada	$\widehat{AB}$	Arco de circunferência
$\sim$	Semelhante	$\forall$	Para todo
$\angle$	Ângulo	$\exists$	Existe
$\triangle$	Triângulo		

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	16
1.1	Definição do problema	17
1.2	Objetivo geral	18
1.3	Objetivos específicos	18
1.4	Aspectos metodológicos	18
1.5	Natureza da pesquisa	19
1.6	Abordagem	19
1.7	Objetivos da Pesquisa	19
1.8	Procedimentos metodológicos	20
2	FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA	21
2.1	A proporção áurea	21
2.2	A proporção áurea no retângulo áureo	25
2.3	A espiral de ouro	26
2.4	Vídeo ilustrativo sobre o número áureo	27
2.5	A proporção áurea no Parthenon	28
2.6	A proporção áurea no náutilus	29
2.7	A proporção áurea na odontologia	30
2.8	A sequência de Fibonacci e o Número Áureo	30
2.8.1	O Problema dos coelhos de Fibonacci	31
2.8.2	A sequência de Fibonacci na natureza	33
2.9	O triângulo áureo	34
2.10	O triângulo de Kepler	37
2.11	A magia do pentagrama no pentágono	38
2.12	O pentagrama destacado do pentágono	39

2.12.1	Relação com o Número Áureo	40
2.12.2	Propriedades matemáticas relevantes	40
2.12.3	Importância ao longo do tempo	40
2.13	A espiral φ	41
2.14	Revisão da literatura	42
2.14.1	A divisão em extrema e média razão na tradição euclidiana	42
2.14.2	O pentágono regular e a emergência natural da razão áurea	43
2.14.3	Semelhança de triângulos e autossimilaridade do pentagrama	43
2.14.4	Construções geométricas clássicas e o número áureo	44
2.14.5	Abordagens modernas e didáticas na resolução de problemas	44
2.14.6	Síntese e contribuições para o desenvolvimento do TCC	44
2.15	A BNCC e o ensino de matemática na educação básica	45
2.15.1	Relação deste trabalho com a Base Nacional Comum Curricular (BNCC)	46
2.16	Elementos da matemática aplicados aos problemas	47
2.16.1	O significado da relação $a \div b \div c$	47
2.16.2	Relações angulares em retas paralelas cortadas por uma transversal . . .	48
2.16.3	Teorema de Tales	49
2.16.4	Semelhança de triângulos	51
2.16.5	Teorema de Pitágoras	53
2.16.6	Tangente a duas circunferências tangentes externamente	54
2.16.7	Potência de ponto	55
2.16.8	Dispositivo Prático de Briot-Ruffini	58
2.16.9	Lei dos senos	60
2.16.9.1	Demonstração da lei dos senos	61
2.16.10	Lei dos cossenos	62
2.16.10.1	Demonstração da lei dos cossenos	62
2.16.11	Senos e cossenos da soma e da diferença de arcos	64
2.16.12	Fórmulas de Werner da trigonometria	65

2.16.13	Valores trigonométricos	69
2.16.14	Outras relações trigonométricas, expressões para áreas e identidades do número áureo	70
3	APLICAÇÕES	71
	Problema 1	71
	Problema 2	74
	Problema 3	78
	Problema 4	82
	Problema 5	84
	Problema 6	86
4	RESULTADOS E DISCUSSÃO	90
4.1	Resultados	90
4.2	Discussão	91
5	CONCLUSÃO	93
6	CONSIDERAÇÕES FINAIS	94
	REFERÊNCIAS	95
	APÊNDICE A – FÓRMULA DO TERMO GERAL DA SEQUÊNCIA DE FIBONACCI	96

1 INTRODUÇÃO

A presença do Número Áureo, também denominado Número de Ouro ou Proporção Divina, em diversos problemas geométricos constitui a principal motivação para o desenvolvimento deste trabalho. Tal escolha fundamenta-se no potencial didático desse objeto matemático, cuja recorrência em diferentes contextos favorece a compreensão de conceitos geométricos e estimula o interesse dos estudantes pela Matemática.

É amplamente reconhecido que o processo de ensino-aprendizagem torna-se mais significativo quando se apoia em exemplos concretos e visualmente perceptíveis. Nesse sentido, o estudo do Número Áureo mostra-se particularmente relevante, uma vez que sua aplicação pode ser observada em inúmeras construções geométricas clássicas.

Observa-se a constância do Número Áureo em diversos problemas da Geometria Euclidiana Plana, especialmente aqueles que envolvem o pentágono regular e figuras dele derivadas. Ao longo deste trabalho, são apresentados problemas geométricos selecionados criteriosamente, bem como suas respectivas soluções, desenvolvidas pelo próprio autor, evidenciando aspectos formais e estéticos da matemática.

O objetivo deste estudo não se restringe a um levantamento bibliográfico, por si só, sobre o tema, mas busca enriquecê-lo por meio de abordagens que envolvem, além da Geometria Euclidiana Plana, outras áreas da matemática, tais como a Trigonometria e a Álgebra Básica, constituindo-se este conjunto como verdadeira beleza de conexões entre diferentes campos do conhecimento matemático.

Adicionalmente, no contexto do pentágono regular, destacam-se o pentagrama, o retângulo de ouro, a espiral de ouro, o triângulo áureo, triângulos isósceles, triângulos retângulos, triângulos quaisquer, circunferências inscritas em triângulos; figuras estas que serão analisadas em seções posteriores, nas quais a presença do número de ouro foi investigada de forma sistemática e detalhada.

Dessa forma, ao evidenciar que o Número Áureo está presente não apenas em manifestações naturais, como também em aplicações artísticas como a pintura, escultura, arquitetura e design, pretende-se contribuir para a valorização de entidades matemáticas no ensino básico, favorecendo o interesse do estudante pela disciplina e fortalecendo o processo de ensino-aprendizagem.

Destaca-se que o nível das questões resolvidas ao longo deste trabalho não é trivial, classificadas, portanto, como mediano, requerendo que o leitor tenha um certo grau de conhecimento nas disciplinas que as envolvem. Para isto, muitos conceitos foram

esmiuçados no nível necessário, a fim de dirimir, ou pelo menos reduzir, dificuldades advindas.

Espera-se que deste trabalho resulte, além do conhecimento acerca do Número Áureo, em material de apoio àqueles que militam na geometria euclidiana plana e que possuem o privilégio de enxergar na matemática a beleza que ela carrega em si, além de servir como estímulo à sua disseminação. Este último é o objetivo maior do trabalho ora apresentado.

1.1 Definição do problema

A Matemática no ensino básico tem se configurado, ao longo dos anos, como um dos principais entraves enfrentados pelos estudantes. É amplamente reconhecido que o desenvolvimento de competências nessa área capacita o discente a enfrentar desafios diversos, não apenas no âmbito escolar, mas também nas mais variadas áreas do conhecimento. Nesse sentido, observa-se que a contextualização do conteúdo matemático contribui de forma significativa para a melhoria do processo de ensino-aprendizagem, favorecendo a compreensão e a assimilação dos conceitos abordados.

A apresentação de aplicações da matemática em contextos reais, como a identificação do Número Áureo na natureza, nas artes e na arquitetura, tende a despertar o interesse e a curiosidade dos estudantes, ampliando sua percepção acerca da relevância dessa disciplina. Tal abordagem possibilita a inserção desse conceito em problemas geométricos, tornando o ensino da Matemática simultaneamente mais atrativo e desafiador.

As olimpíadas de matemática têm contribuído, ainda que parcialmente, para a mitigação desse entrave, ao estimular os estudantes, desde as etapas iniciais da formação escolar, a fortalecerem sua base matemática com vistas à obtenção de melhores resultados nessas competições. Contudo, constata-se que o conhecimento acerca do Número Áureo no ensino básico é bastante limitado, estendendo-se, inclusive, ao ensino superior, onde não são raros os casos de estudantes de cursos que envolvem a geometria básica que afirmam desconhecer esse conceito.

Tal cenário configura-se como uma problemática relevante, uma vez que a compreensão do Número Áureo pode contribuir para que o estudante passe a enxergar a Matemática não apenas como uma construção abstrata elaborada pelo ser humano, mas também como um conhecimento presente na própria estrutura da natureza. Essa percepção tende a favorecer uma relação mais significativa com a disciplina, promovendo uma aprendizagem mais reflexiva e integrada.

1.2 Objetivo geral

Estimular o interesse do aluno da Educação Básica pelos conteúdos da disciplina de Matemática, a partir do conhecimento do Número Áureo, evidenciando sua importância em aplicações na arquitetura, nas artes, no design e na geometria, bem como em elementos da própria natureza que apresentem correlação com esse número em sua estrutura.

1.3 Objetivos específicos

Como objetivos específicos são citados:

- Tornar a matemática mais atraente e divertida ao mostrar como o número de ouro está presente na natureza;
- Colaborar com a disseminação do conhecimento da Geometria Euclidiana Plana;
- Desenvolver no estudante o aprofundamento de conceitos e resolução de problemas envolvendo o Número Áureo;
- Mostrar como o número áureo reduz enormemente os cálculos matemáticos quando do seu uso em determinados problemas geométricos, notadamente os que envolvem o pentágono e figuras dele derivadas;
- Contextualizar a Matemática com a história da humanidade, mostrando que conceitos explorados há vários séculos continuam a ser aplicados nas diversas atividades humanas.

1.4 Aspectos metodológicos

A metodologia adotada neste trabalho consiste em uma revisão de literatura acerca do Número Áureo, com o objetivo de evidenciar sua importância e suas aplicações na resolução de problemas geométricos. Para tanto, o estudo é contextualizado por meio de assuntos correlatos que conferem maior robustez teórica e fundamentação matemática às análises desenvolvidas.

Entre esses temas, destacam-se as fórmulas de Werner, ver Quadro 2.2, oriundas da Trigonometria, as quais possuem aplicabilidade direta neste trabalho. Tal abordagem permite evidenciar a inter-relação entre diferentes áreas da Matemática, ressaltando que o conhecimento matemático se constitui como um conjunto integrado de conceitos que se articulam entre si. Nesse sentido, a Geometria Euclidiana Plana, a Álgebra Básica e a Trigonometria são compreendidas como pilares fundamentais para a construção de soluções elegantes e rigorosas de diversos problemas geométricos.

Outro tema abordado é a sequência de Fibonacci, Seção 2.8, na qual se evidencia a estreita correlação entre essa sequência e o número áureo, reforçando sua relevância tanto no âmbito teórico quanto na resolução de problemas clássicos da geometria.

Considerando a presença recorrente do número áureo em problemas geométricos consagrados, foi reservado um capítulo específico à apresentação e resolução de seis problemas, todos envolvendo, de forma direta ou indireta, a razão áurea, seja na formulação do problema, seja em sua solução.

A metodologia fundamenta-se, portanto, na coleta, organização e análise de problemas geométricos cujas soluções apresentam relações envolvendo o número áureo. Para isso, foram consultadas fontes bibliográficas, materiais didáticos e conteúdos especializados disponíveis em meios digitais, especialmente aqueles voltados ao ensino da Geometria e ao estudo da razão áurea.

A partir desse acervo, selecionaram-se problemas cujas resoluções envolvem explicitamente o Número Áureo, seja por meio de relações algébricas diretas associadas a esse número, seja por meio de relações métricas entre segmentos de figuras geométricas que apresentam proporcionalidades áureas, ou ainda por expressões que a incorporam em sua estrutura algébrica.

1.5 Natureza da pesquisa

Quanto à natureza, a pesquisa classifica-se como **básica**, pois tem como finalidade ampliar o conhecimento teórico sobre o número áureo e suas aplicações na Geometria, sem visar, de forma imediata, à produção de soluções técnicas ou aplicações práticas.

1.6 Abordagem

A abordagem adotada é **qualitativa**, uma vez que o estudo se concentra na análise conceitual, interpretativa e descritiva das propriedades geométricas associadas ao número áureo. Busca-se compreender suas estruturas, significados e relações matemáticas, sem recorrer à mensuração estatística de dados.

1.7 Objetivos da Pesquisa

Quanto aos objetivos, a pesquisa é classificada como **exploratória**, pois visa ampliar a compreensão sobre o uso do número áureo em problemas geométricos, identificando padrões, estruturas e aplicações que contribuam para a construção do conhecimento matemático, especialmente no contexto do ensino.

1.8 Procedimentos metodológicos

No que se refere aos procedimentos, a pesquisa caracteriza-se como **bibliográfica**, uma vez que se fundamenta em materiais já publicados, tais como livros, artigos científicos, trabalhos acadêmicos e conteúdos especializados, incluindo vídeos e materiais didáticos digitais.

Os procedimentos metodológicos adotados foram:

1. levantamento de materiais bibliográficos e digitais relacionados ao número áureo e à Geometria Euclidiana;
2. seleção criteriosa de problemas que apresentam relações envolvendo o número áureo;
3. análise geométrica detalhada de cada problema, verificando a presença de proporcionalidades, expressões algébricas e segmentos associados a φ ;
4. sistematização e redação dos resultados, organizando-os em capítulos e seções de acordo com sua natureza e complexidade.

Para a realização dos cálculos, quando necessário, foram utilizados valores trigonométricos apresentados na Tabela 2.2, bem como algumas fórmulas clássicas da geometria, conhecidas como fórmulas de Werner, organizadas no Quadro 2.2, além de outras expressões usuais apresentadas ao longo do texto.

As imagens e parte do texto foram produzidos com auxílio da plataforma de inteligência artificial ChatGPT (OpenAI, versão 5.2), empregada como ferramenta de apoio à construção visual e à organização textual, sob supervisão e curadoria do autor, não substituindo a análise crítica nem a autoria intelectual do trabalho.

As construções geométricas foram produzidas pelo próprio autor, no aplicativo GeoGebra Classic 5.2.907.0-d, geradas em formato .png e importadas para o diretório **figuras** no LaTeX.

2 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

2.1 A proporção áurea

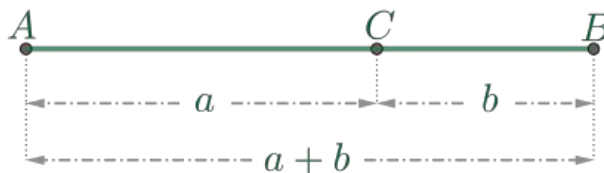
Não é por acaso que o número áureo recebeu essa denominação. Assim como o ouro é considerado o metal mais precioso entre os demais, o número áureo destaca-se por ser um dos mais intrigantes da matemática. Essa característica ficará evidente ao longo deste trabalho. Porém, antes de mergulharmos no vasto mundo do Número Áureo, torna-se necessário defini-lo, e isto é o que se observa a seguir.

A razão áurea, descrita por Euclides de Alexandria no Livro VI da obra *Os Elementos*, consiste em considerar um segmento $\overline{AB}$ e dividi-lo em duas partes de modo que a maior parte dividida pela menor seja igual ao todo dividido pela maior. Ambas as razões iguais ao número de ouro, denotado por φ .

Neste trabalho, para a discussão acerca da razão áurea, foram adotados dois caminhos, os quais denominam-se caminho direto ou caminho de ida e caminho inverso ou caminho de volta. No caminho direto faz-se exatamente como descrito por Euclides, na sua definição de média e extrema razão, logo adiante em citação de acordo com suas palavras, em *Os Elementos*. No caminho inverso, faz-se a divisão do segmento $\overline{AB}$ em duas partes, por um ponto C , evidentemente entre o ponto A e o ponto B , de tal modo que a razão $\frac{\overline{AC}}{\overline{CB}} = \frac{\sqrt{5} + 1}{2} = \varphi$, provando que, neste caso, a divisão do todo, segmento $\overline{AB}$, pela parte maior $\overline{AC}$ retornará o mesmo valor φ , isto é $\frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} = \varphi$.

- Caminho direto: Segundo Euclides (2009), um segmento está dividido em média e extrema razão quando, tomando-se uma medida qualquer e segmentando-a em duas partes, a razão entre a maior e a menor parte é igual à razão entre o todo e a maior parte.

Figura 2.1 – O segmento áureo 1



Fonte: O autor.

Aplicando a definição de Euclides para razão áurea na Figura 2.1, tem-se:

$$\frac{\overline{AC}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{AC}}. \quad (2.1)$$

Substituindo-se os valores algébricos, obtém-se:

$$\frac{a}{b} = \frac{a+b}{a}. \quad (2.2)$$

Trabalhando-se o fato de que o produto dos meios é igual ao produto dos extremos, resulta:

$$a^2 - ba - b^2 = 0. \quad (2.3)$$

Observa-se que o termo “ b ” foi colocado antes de “ a ” no produto “ ba ”, a fim de apresentar a equação no formato padrão de uma equação do segundo grau na variável “ a ”. Dividindo-se todos os termos por “ b^2 ”, obtém-se:

$$\left(\frac{a}{b}\right)^2 - \left(\frac{a}{b}\right) - 1 = 0. \quad (2.4)$$

Substituindo-se $\left(\frac{a}{b}\right)$ por ω , tem-se:

$$\omega^2 - \omega - 1 = 0, \quad (2.5)$$

Aplicando a fórmula de Bhaskara na Equação (2.5), obtém-se como solução plausível para o problema

$$\omega = \frac{\sqrt{5} + 1}{2}, \quad (2.6)$$

uma vez que a relação entre dois segmentos é um número positivo, visto que se está trabalhando com medidas de comprimento e a outra raiz da equação é negativa.

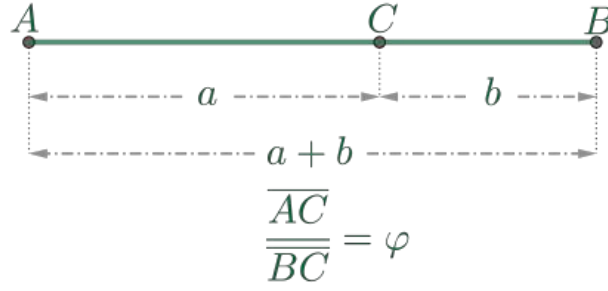
O matemático Mark Barr (1909), por volta de 1909, popularizou o uso da letra grega φ (phi) para representar a razão áurea, em homenagem ao escultor grego Phidias (Fídias). Embora seja discutível que as proporções de suas obras estejam efetivamente relacionadas a essa razão, a notação foi amplamente aceita. A partir de então, a letra grega φ passou a ser utilizada como representação da chamada razão euclidiana,

$$\varphi = \frac{\sqrt{5} + 1}{2}.$$

- Caminho inverso: Divide-se o segmento $\overline{AB}$ em um ponto C , vide Figura 2.2, tal que a razão entre os segmentos maior e menor, representado por $\overline{AC}$ e $\overline{BC}$, respectivamente, seja igual ao número de ouro, $\varphi = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$. Em seguida, demonstra-se que, ao dividir-se o todo, segmento $\overline{AB}$, pelo segmento maior, representado por $\overline{AC}$, obtém-se a mesma razão.

Partindo do pressuposto,

$$\frac{\overline{AC}}{\overline{BC}} = \varphi = \frac{\sqrt{5} + 1}{2}, \quad (2.7)$$

Figura 2.2 – O segmento áureo 2

Fonte: O autor.

substituindo-se os valores algébricos, obtém-se:

$$\frac{\overline{AC}}{\overline{BC}} = \frac{a}{b} = \varphi, \quad (2.8)$$

donde segue:

$$a = b\varphi. \quad (2.9)$$

Além disso,

$$\frac{a}{b} = \varphi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \approx 1,618033988749 \dots \quad (2.10)$$

Agora, divide-se o todo pela maior parte, isto é,

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} = \frac{a + b}{a}. \quad (2.11)$$

Substituindo-se na expressão anterior o valor $a = b\varphi$, obtém-se:

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} = \frac{b\varphi + b}{b\varphi} = \frac{b(\varphi + 1)}{b\varphi} \quad (2.12)$$

Utilizando-se da Equação (2.5), substituindo o “ ω ” po “ φ ” tem-se

$$\varphi^2 - \varphi - 1 = 0, \quad (2.13)$$

Pondo os termos negativos para o segundo membro

$$\varphi^2 = \varphi + 1 \quad (2.14)$$

Retornando à Equação (2.12)

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} = \frac{b(\varphi + 1)}{b\varphi} = \frac{\varphi^2}{\varphi} = \varphi. \quad (2.15)$$

Assim sendo, conclui-se que, partindo da condição inicial da divisão do segmento em duas partes tais que a maior parte dividida pela menor parte seja igual a

$$\varphi = \frac{\sqrt{5} + 1}{2}, \quad (2.16)$$

chega-se ao resultado de que o todo, isto é, o comprimento total dividido pela maior parte, será a própria razão φ .

Segundo Euclides (2009, p. 216), o número áureo é definido como:

Seja dada uma reta finita. É possível dividi-la em média e extrema razão da seguinte maneira: constrói-se sobre a reta um quadrado e, a partir de um de seus vértices, traça-se um segmento até o ponto médio do lado oposto; ao prolongar-se esse segmento até encontrar a extensão da base do quadrado, obtém-se um ponto que determina a divisão requerida. Assim, a parte maior da reta estará para a parte menor na mesma razão em que o todo está para a parte maior, estabelecendo-se a proporção característica da razão áurea.

Por outro lado Pacioli (1509, p. 24) assevera que:

A proporção que chamamos divina é aquela pela qual uma linha é dividida de tal modo que a parte maior está para a menor assim como o todo está para a parte maior. Essa proporção manifesta-se com notável constância nas figuras geométricas, nos corpos regulares e nas obras da arte bem ordenada, razão pela qual os antigos a consideraram digna de especial atenção. Por meio dela, a harmonia e a beleza tornam-se mensuráveis, pois aquilo que agrada aos olhos encontra fundamento em uma relação matemática precisa.

Kepler (1619, p. 62), cento e dez anos após, publica:

Na divisão de uma linha segundo a razão extrema e média, encontro uma harmonia singular, pois o todo guarda para a parte maior a mesma proporção que esta conserva para a parte menor. Tal relação não é arbitrária: ela aparece repetidamente nas figuras geométricas mais simples e nas formas que a natureza produz com maior constância. Por isso, considero essa proporção uma chave para compreender a ordem que governa tanto os números quanto as figuras, e até mesmo certas disposições do mundo natural.

As citações de Euclides, Pacioli e Kepler evidenciam que o número áureo assume significados distintos conforme o contexto histórico e epistemológico em que é analisado. Em Euclides, a razão áurea é apresentada como uma relação geométrica rigorosa, obtida por meio de construções precisas, sem qualquer conotação simbólica ou estética. Pacioli, por sua vez, reinterpreta essa mesma proporção no âmbito do pensamento renascentista, atribuindo-lhe um valor associado à harmonia, à beleza e à ordem divina, o que amplia seu significado para além da matemática formal. Já em Kepler, a proporção áurea passa a ser compreendida como um princípio organizador da própria natureza, sugerindo que os padrões

matemáticos expressos por essa razão se manifestam tanto nas figuras geométricas quanto nos fenômenos do mundo físico. Desse modo, observa-se que o fascínio pelo número áureo resulta não apenas de suas propriedades matemáticas, mas também das interpretações filosóficas, artísticas e científicas que lhe foram atribuídas ao longo da história.

2.2 A proporção áurea no retângulo áureo

O retângulo áureo é uma figura geométrica caracterizada pela razão constante entre o comprimento do lado maior e o do lado menor, denominada razão áurea ou número de ouro, representada pela letra grega *phi* (φ). Considerando-se um retângulo cujos lados medem a (lado maior) e b (lado menor), diz-se que ele é áureo quando a razão entre esses lados satisfaz a relação

$$\frac{a}{b} = \varphi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \approx 1,618.$$

Formalmente, um retângulo é considerado áureo quando, ao se retirar dele um quadrado de lado igual ao menor lado b , o retângulo remanescente é semelhante ao retângulo original. Essa propriedade de semelhança sucessiva confere ao retângulo áureo um caráter matemático singular, associado à ideia de equilíbrio e harmonia das proporções.

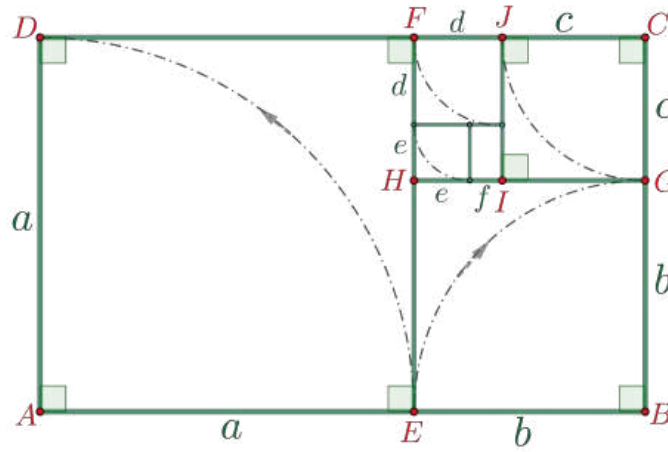
O conceito da razão áurea é conhecido desde a antiguidade e foi sistematizado na obra *Elementos*, de Euclides, na qual a divisão de um segmento em média e extrema razão é apresentada como fundamento teórico dessa proporção. O retângulo áureo encontra ampla aplicação em diversas áreas do conhecimento, com destaque para a matemática, a arquitetura, as artes visuais e o design.

A Figura 2.3 ilustra a construção geométrica do retângulo áureo, evidenciando a relação proporcional entre seus lados e a presença do quadrado associado ao lado menor, elemento fundamental para a compreensão de sua estrutura e de suas propriedades geométricas.

Parte-se do segmento áureo $\overline{AB}$, apresentado na Seção 2.1, no qual o ponto E pertence ao interior do segmento, de modo que $\overline{AE}$ e $\overline{EB}$ estejam na razão áurea. Pelos pontos A e B , traçam-se retas perpendiculares ao segmento $\overline{AB}$. Com a ponta seca do compasso em A e abertura igual ao comprimento $\overline{AE}$, constrói-se um quarto de círculo no sentido anti-horário. O ponto de interseção desse arco com a reta perpendicular a $\overline{AB}$ traçada por A determina o ponto D . A partir de D , traça-se uma reta paralela a $\overline{AB}$ até encontrar a perpendicular a $\overline{AB}$ traçada por B , obtendo-se, assim, o ponto C . Em seguida, traça-se o segmento que liga E ao lado $\overline{CD}$, determinando o ponto F como ponto de interseção. Repete-se o procedimento com a ponta seca do compasso em B e abertura igual ao comprimento $\overline{BE}$, construindo-se agora um quarto de círculo no sentido horário.

Dessa forma, obtém-se o quadrado $EBGH$, conforme ilustrado na figura. O processo pode ser repetido indefinidamente, gerando sucessivos retângulos áureos.

Figura 2.3 – O retângulo áureo



Fonte: O autor.

2.3 A espiral de ouro

A espiral de ouro é uma curva geométrica associada ao retângulo áureo e à razão áurea φ , sendo amplamente utilizada como representação visual da proporcionalidade harmônica presente nessa construção. Ela é obtida a partir da justaposição sucessiva de quadrados construídos no interior de retângulos áureos consecutivos, nos quais cada novo retângulo mantém semelhança geométrica com o anterior.

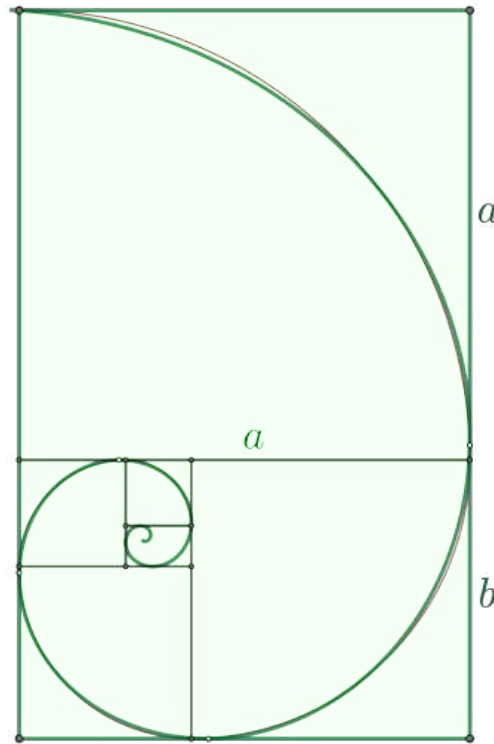
Do ponto de vista geométrico, a espiral de ouro pode ser interpretada como a aproximação contínua formada pela união de arcos de circunferência de 90° (quartos de circunferência), traçados em cada quadrado que compõe a sequência infinita de retângulos áureos. À medida que novos quadrados são adicionados, esses arcos se encadeiam progressivamente, originando uma curva suave que tende a uma espiral contínua.

A construção geométrica ilustrada na Figura 2.4 evidencia a continuidade aproximada da espiral por meio de arcos de circunferência inscritos nos quadrados que compõem os sucessivos retângulos áureos. Essa representação discreta permite visualizar como cada quarto de circunferência contribui para a formação de uma curva que se aproxima de uma espiral contínua à medida que o número de retângulos considerados tende ao infinito.

Sob o aspecto matemático, a espiral de ouro corresponde a um caso particular da espiral logarítmica, cuja equação em coordenadas polares é expressa por

$$r(\theta) = a e^{b\theta},$$

Figura 2.4 – A espiral de ouro



Fonte: O autor.

em que a é uma constante positiva e o parâmetro b relaciona-se à razão áurea pela expressão

$$b = \frac{\ln(\varphi)}{\pi/2}.$$

Essa relação assegura que, a cada incremento angular de $\frac{\pi}{2}$ radianos, equivalente a um quarto de volta, o raio da espiral seja multiplicado pelo fator φ , preservando a proporcionalidade característica dos retângulos áureos.

Embora a espiral construída a partir de arcos de circunferência não represente, de forma rigorosa, uma espiral logarítmica perfeita, ela constitui uma aproximação visual altamente eficaz da espiral de ouro. Tal aproximação torna-se progressivamente mais precisa à medida que o número de retângulos áureos considerados aumenta, evidenciando a convergência entre a construção geométrica discreta e o modelo matemático contínuo.

2.4 Vídeo ilustrativo sobre o número áureo

No presente Trabalho de Conclusão de Curso, indica-se o vídeo do canal Fatos Desconhecidos (2022), disponível na plataforma YouTube, que aborda o número áureo e reúne expressivo número de visualizações. Tal alcance evidencia o interesse do público por

temáticas que estabelecem relações entre o mundo real, elementos simbólicos e, por vezes, concepções de natureza religiosa.

No referido vídeo, destaca-se ainda a associação entre a ideia de criação divina e a presença de padrões matemáticos observáveis na natureza, tanto em organismos vegetais quanto em animais. Essa abordagem contribui para a popularização da expressão “número de Deus” como uma das denominações atribuídas ao Número Áureo, reforçando interpretações que transcendem o campo estritamente matemático.

O vídeo apresenta ainda um panorama histórico do número de ouro, estabelecendo correlações com a arquitetura da Grécia Antiga, como o Parthenon, com as proporções do corpo humano e com a geometria de figuras regulares, a exemplo do pentagrama, entre outras configurações geométricas.

2.5 A proporção áurea no Parthenon

A Figura 2.5 foi gerada por inteligência artificial com o objetivo de representar, de forma ilustrativa, a aplicação da proporção áurea no desenho arquitetônico do Parthenon.

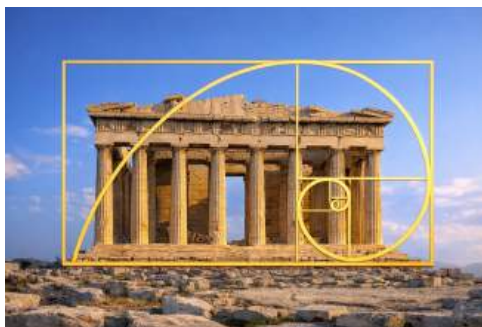
O Parthenon é um dos mais importantes monumentos da Antiguidade Clássica e símbolo máximo da civilização grega. Localizado na Acrópole de Atenas, sua construção ocorreu entre 447 a.C. e 432 a.C., durante o chamado Século de Ouro de Atenas, sob a liderança de Péricles. O templo foi dedicado à deusa Atena, protetora da cidade, e projetado pelos arquitetos Ictinos e Calícrates, com supervisão artística do escultor Fídias.

Construído majoritariamente em mármore pentélico, o Parthenon apresenta refinamentos arquitetônicos notáveis, como correções ópticas nas colunas e proporções rigorosamente calculadas, frequentemente associadas a princípios matemáticos e geométricos da Grécia Antiga. Originalmente, abrigava uma monumental estátua criselefantina de Atena, também obra de Fídias, reforçando sua função religiosa e política como expressão do poder ateniense.

Ao longo dos séculos, o Parthenon sofreu profundas transformações decorrentes de conflitos militares, mudanças religiosas e ocupações estrangeiras. Durante o período romano, foi preservado em grande parte, mas, com a expansão do cristianismo, o templo foi convertido em igreja dedicada à Virgem Maria. Posteriormente, durante o domínio otomano, passou a ser utilizado como mesquita, com acréscimos arquitetônicos que alteraram sua configuração original.

Atualmente, o Parthenon é reconhecido como patrimônio cultural da humanidade e integra o conjunto arqueológico da Acrópole de Atenas. Apesar de sua condição fragmentada,

Figura 2.5 – A proporção áurea no Parthenon¹



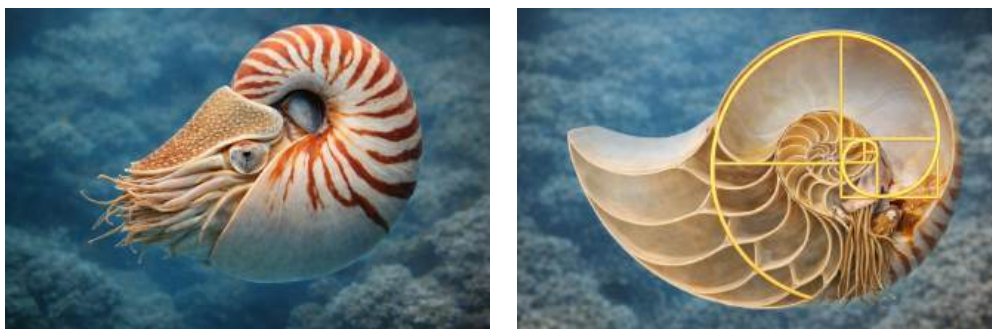
Fonte: Imagem gerada por inteligência artificial (ChatGPT/DALL · E, V-5.2, em 08/02/2026)

o monumento continua a representar um marco da arquitetura clássica, da história política e cultural do Ocidente, além de servir como referência permanente para estudos em arte, matemática, engenharia e filosofia.

2.6 A proporção áurea no náutilus

A Figura 2.6 traz uma representação ilustrativa da aplicação da espiral φ e sequência de Fibonacci, gerada por meio de ferramenta de inteligência artificial, a partir de descrição e critérios matemáticos definidos pelo autor.

Figura 2.6 – A proporção áurea no molusco náutilus²



Fonte: Imagem gerada por inteligência artificial (ChatGPT/DALL · E, V-5.2, em 08/02/2026)

¹ Prompt utilizado: Imagem realista em alta resolução do Parthenon, em vista frontal, com céu azul e detalhes arquitetônicos clássicos gregos. Sobreposição de um retângulo áureo alinhado à fachada e de uma espiral áurea (espiral da razão áurea, φ , associada à sequência de Fibonacci), iniciando na base e expandindo-se sobre as colunas. Os elementos geométricos devem ser finos, em tom dourado e semitransparentes, com caráter didático e acadêmico.

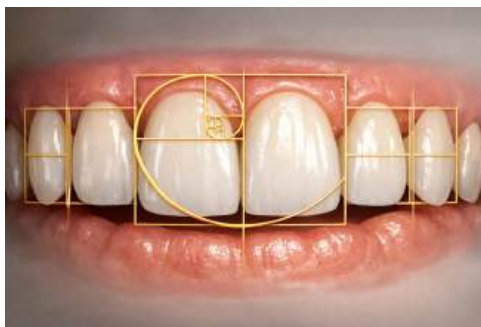
² Prompt utilizado: Primeira imagem realista em alta resolução de um Nautilus em ambiente marinho, em vista lateral, evidenciando sua concha espiralada com padrões naturais em tons de branco e marrom-avermelhado. O corpo do animal apresenta textura suave, com tentáculos visíveis e detalhes anatômicos bem definidos. A cena ocorre em águas azuladas, com fundo subaquático levemente desfocado, iluminação natural difusa e composição limpa, sem inserção de textos ou elementos gráficos, adequada para fins didáticos e acadêmicos. A segunda imagem é uma ilustração científica em alta

2.7 A proporção áurea na odontologia

Na odontologia estética, o número áureo tem sido utilizado como referência para a análise das proporções dos dentes anteriores, especialmente na relação de largura aparente entre incisivos centrais, incisivos laterais e caninos, vide Figura 2.7. Embora não constitua uma regra anatômica absoluta, a proporção áurea é empregada como ferramenta auxiliar no planejamento do sorriso, visando à harmonia e à estética dentofacial. No âmbito da estética odontológica, Cunha *et al.* (2013) destacam a aplicação da proporção áurea como referência para a análise das dimensões dos dentes anteriores superiores:

A proporção áurea pode ser encontrada nos dentes anteriores superiores, numa visão frontal, entre a largura do incisivo central e a largura do lateral, e entre a largura do incisivo lateral e a largura do canino. Porém, esta relação de proporção não ocorre naturalmente na maior parte da população. Nos tratamentos restauradores estéticos de dentes anteriores superiores, a proporção divina pode ser usada como guia, devolvendo de forma eficiente a harmonia do sorriso (CUNHA *et al.*, 2013, p. 33).

Figura 2.7 – A proporção áurea na odontologia³



Fonte: Imagem gerada por inteligência artificial (ChatGPT/DALL·E, V5.2, em 08/02/2026).

2.8 A sequência de Fibonacci e o Número Áureo

Segundo Livio (2008), Koshy (2011) e Huntley (1970), a sequência de Fibonacci destaca-se como um dos exemplos mais expressivos de regularidade matemática, pois,

resolução da estrutura interna do Nautilus, apresentada em corte transversal da concha, evidenciando as câmaras internas (septos) organizadas em progressão espiral. Sobreposição de uma espiral áurea (espiral φ) e de retângulos associados à sequência de Fibonacci, alinhados ao crescimento das câmaras da concha. Representação realista, com tons naturais da concha, iluminação suave, fundo subaquático discretamente desfocado, traços geométricos finos em cor dourada e semitransparente, sem inserção de textos ou legendas, adequada para fins didáticos e acadêmicos.

³ Prompt utilizado: Ilustração científica em alta resolução dos dentes anteriores superiores humanos, em vista frontal, evidenciando incisivos centrais, incisivos laterais e caninos. Sobre a imagem, foi solicitada a sobreposição de retângulos áureos e de uma espiral áurea (espiral φ), representando a relação de proporção estética entre as larguras aparentes dos dentes. A composição deveria apresentar cores naturais, iluminação clínica suave, fundo neutro, traços geométricos finos em tom dourado e semitransparente, sem inserção de textos ou legendas, com finalidade didática e acadêmica.

apesar de ser definida por uma regra recursiva extremamente simples — na qual cada termo resulta da soma dos dois anteriores —, ela produz estruturas de elevada complexidade e relevância teórica. À medida que seus termos crescem, observa-se que a razão entre dois termos consecutivos aproxima-se de um valor constante, conhecido como razão áurea, estabelecendo uma conexão profunda entre a aritmética da sequência e as proporções geométricas. Essa característica explica sua recorrente presença em problemas de geometria, na teoria dos números e em diversos modelos matemáticos de crescimento natural.

Figura 2.8 – Pintura ilustrativa de Leonardo de Pisa (Fibonacci-1170-1240)⁴



Fonte: Imagem gerada por inteligência artificial (ChatGPT/DALL · E, V5.2, em 08/02/2026).

Leonardo de Pisa, mais conhecido como Fibonacci, nasceu por volta do ano de 1170 e faleceu aproximadamente em 1240. Matemático italiano do período medieval, destacou-se principalmente pela obra *Liber Abaci* (1202), na qual introduziu de forma sistemática os algarismos indo-arábicos na Europa Ocidental. Em decorrência da escassez de registros históricos precisos do período, as datas associadas ao seu nascimento e morte são tradicionalmente apresentadas de forma aproximada, sendo indicada a abreviação circa (c.), conforme prática consolidada em estudos historiográficos.

2.8.1 O Problema dos coelhos de Fibonacci

Em 1202, no livro *Liber Abaci*, Leonardo de Pisa, conhecido como Fibonacci, apresentou um problema clássico sobre o crescimento de uma população de coelhos (Sigler, 2002). A questão consistia em determinar quantos casais de coelhos seriam produzidos em um ano, iniciando-se com um único casal, considerando que, a partir do segundo mês de vida, cada casal passa a gerar um novo casal a cada mês. A solução desse problema

⁴ Prompt utilizado: Retrato artístico em estilo pintura a óleo renascentista de Leonardo de Pisa (Fibonacci), matemático do século XIII, representado como um estudioso medieval. O personagem deve segurar um livro aberto contendo a sequência de Fibonacci (1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55...), e ao fundo deve aparecer um astrolábio pendurado, simbolizando o conhecimento matemático e astronômico da época. A cena deve ter iluminação suave, fundo em pedra e paisagem discreta, com vestimentas típicas medievais, composição realista e estética clássica.

conduz à sequência numérica

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, \dots$$

No instante inicial (momento zero), existe apenas um casal de coelhos recém-nascidos, denominado casal 1. Após trinta dias, ainda permanece apenas esse casal, uma vez que a primeira ninhada somente ocorre após sessenta dias de vida, resultando nos dois primeiros termos da sequência: 1, 1. Com o decurso de mais trinta dias (sessenta dias completos), o casal 1 gera sua primeira ninhada, denominada casal 2, passando-se a ter dois casais, o que corresponde ao terceiro termo da sequência: 1, 1, 2. Após mais trinta dias, o casal 1 gera uma nova ninhada, o casal 3, enquanto o casal 2 completa trinta dias de vida, totalizando três casais, de modo que a sequência passa a ser 1, 1, 2, 3.

Decorridos mais trinta dias, o casal 1 produz o casal 4, e o casal 2, agora com sessenta dias de vida, gera o casal 5. Assim, o número total de casais passa a ser cinco, correspondendo ao termo seguinte da sequência: 1, 1, 2, 3, 5. Esse processo continua de forma análoga, produzindo a sequência 1, 1, 2, 3, 5, 8, ...

Após doze meses, obtém-se a sequência

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233 \dots$$

na qual cada termo representa a quantidade de casais de coelhos existente ao final de cada mês. Assim, ao término do décimo segundo mês, ter-se-iam 233 casais de coelhos. Evidentemente, esse crescimento não corresponde a uma situação biologicamente realista, tratando-se de um modelo puramente teórico construído para facilitar a análise matemática.

A relevância dessa sequência está relacionada ao número áureo, pois a razão entre termos consecutivos da sequência de Fibonacci tende a um valor constante à medida que os termos aumentam. De fato, considerando as frações

$$\frac{1}{1}, \frac{2}{1}, \frac{3}{2}, \frac{5}{3}, \dots, \frac{144}{89}, \frac{233}{144}, \dots$$

observa-se que esses quocientes aproximam-se progressivamente do valor

$$\varphi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \approx 1,61803398874989,$$

que corresponde ao número áureo.

Este comentário pode ser resumido pela tabela abaixo, que mostra de forma didática o processo.

Tabela 2.1 – Linha do Tempo do Quantitativo de Casais de Coelhos

dia	00	30	60	90	120	150	180
casal 01	X	X	X	X	X	X	X
casal 02			X	X	X	X	X
casal 03				X	X	X	X
casal 04					X	X	X
casal 05					X	X	X
casal 06						X	X
casal 07						X	X
casal 08						X	X
casal 09							X
casal 10							X
casal 11							X
casal 12							X
casal 13							X
TOTAL	1	1	2	3	5	8	13

Fonte: O autor.

Apresenta-se, a seguir, a fórmula do termo geral da sequência de Fibonacci, desenvolvida pelo matemático francês Jacques Philippe Marie Binet (1786-1856), atualmente conhecida como fórmula de Binet. Sua dedução não será realizada nesta seção, por estar além do escopo deste trabalho, podendo o leitor consultar a demonstração no Apêndice A.

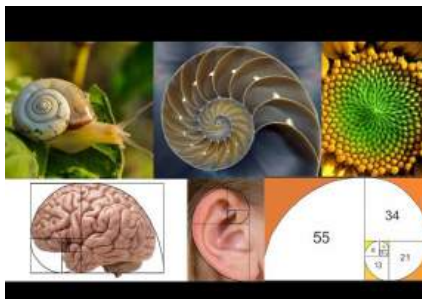
$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n \right]$$

2.8.2 A sequência de Fibonacci na natureza

A Figura 2.9 ilustra a recorrência da sequência de Fibonacci e da proporção áurea na natureza e no corpo humano, evidenciando a relação entre padrões matemáticos e estruturas orgânicas. Observam-se a concha do caramujo, a seção interna do náutilus e o

centro do girassol, cujas disposições espiraladas estão associadas à sequência de Fibonacci, contribuindo para a otimização do espaço e do crescimento.

Figura 2.9 – A sequência de Fibonacci na natureza⁵



Fonte: Imagem gerada por inteligência artificial (ChatGPT/DALL · E, em 08/02/2026).

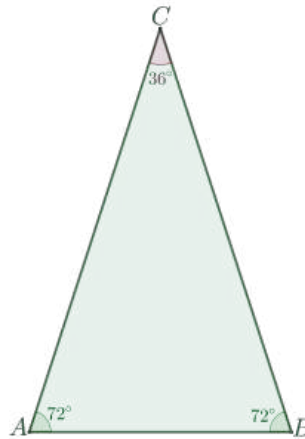
No âmbito da anatomia humana, a figura apresenta o cérebro e a orelha com a sobreposição do retângulo áureo e da espiral de Fibonacci, indicando a presença de proporções recorrentes, compreendidas como aproximações geométricas. Por fim, o retângulo áureo reforça o caráter didático da imagem ao relacionar a construção matemática abstrata com suas manifestações observáveis, favorecendo uma abordagem interdisciplinar da Matemática.

2.9 O triângulo áureo

O triângulo áureo é um artifício matemático geométrico utilizado para calcular o seno do ângulo de 18° e com as relações trigonométricas determinar outros valores como o cosseno de 18° , seno e cosseno de 36° , seno e cosseno de 54° , seno e cosseno de 6° , seno e cosseno de 12° e outros.

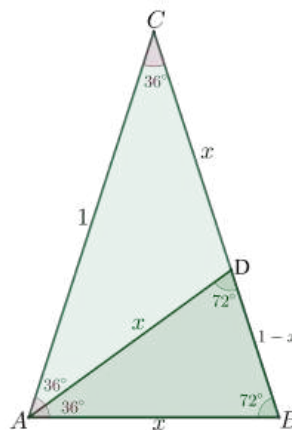
O triângulo áureo consiste em um triângulo isósceles cujos ângulos da base medem 72° e, conseqüentemente, o ângulo oposto à base mede 36° . A partir de um dos vértices da base traça-se uma ceviana que será a própria bissetriz daquele ângulo, vide Figura 2.11, fazendo com que a construção geométrica resulte em dois triângulos isósceles, no caso em tela, os triângulos $\triangle ABC$ e $\triangle ABD$, pelo caso AAA - Ângulo Ângulo Ângulo.

⁵ Prompt utilizado: Composição visual acadêmica ilustrando a presença da sequência de Fibonacci e da proporção áurea na natureza e no corpo humano. A imagem deve ser organizada em um mosaico horizontal, contendo: uma concha de caramujo em ambiente natural; a seção transversal interna de um molusco náutilus evidenciando a espiral logarítmica; um girassol visto de cima destacando o padrão espiralado das sementes; um cérebro humano com sobreposição de retângulos áureos; uma orelha humana com espiral áurea desenhada; e um diagrama geométrico da sequência de Fibonacci com retângulos numerados (13, 21, 34, 55). Estilo realista, iluminação suave, alta resolução, foco didático e científico, fundo neutro, sem textos decorativos, adequado para material acadêmico.

Figura 2.10 – O triângulo áureo

Fonte: O autor.

Ao serem exploradas as medidas semelhantes deste dois triângulos, atribuindo-se a unidade como comprimento dos lados $\overline{AC}$ e $\overline{BC}$ é possível calcular o lado $\overline{AB}$, em função deste valor atribuído, o que permite determinar o seno do ângulo de dezoito graus que será igual à metade do segmento em tela, visto que a hipotenusa $\overline{AC}$ mede uma unidade, valor sabiamente escolhido para o lado do triângulo isósceles $\triangle ABC$. De posse do seno de dezoito graus é possível, por meio das fórmulas de arco duplo, arco metade, arco triplo, e outras relações trigonométrica calcular o seno, cosseno e tangente de diversos ângulos.

Figura 2.11 – Demonstração dos elementos do triângulo áureo

Fonte: O autor.

Conforme comentado anteriormente, pelo caso AAA — Ângulo Ângulo Ângulo —, verifica-se que os triângulos $\triangle ABC$ e $\triangle ABD$ são semelhantes, o que nos permite escrever, matematicamente,

$$\triangle ABC \sim \triangle ABD$$

Os casos de semelhança de triângulos podem ser vistos na Subseção 2.16.4. Por razão de semelhança pode-se escrever

$$\frac{\overline{AC}}{\overline{AD}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{BD}}$$

Substituindo os valores numéricos e algébricos dos segmentos

$$\frac{1}{x} = \frac{x}{1-x}$$

Explorando o fato que o produto dos meios é igual ao produto dos extremos

$$x^2 = 1 - x$$

Organizando a equação do segundo grau em “x”

$$x^2 + x - 1 = 0$$

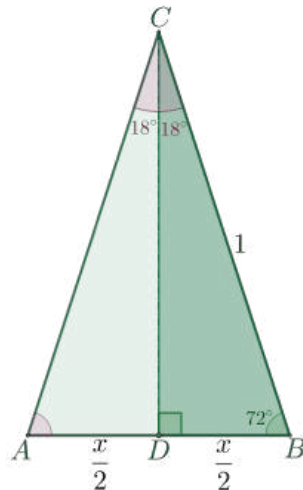
Aplicando a fórmula de Bhaskara

$$x = \frac{-1 + \sqrt{1+4}}{2} = \frac{\sqrt{5}-1}{2} = \frac{1}{\varphi}$$

Portanto

$$\frac{\overline{AC}}{\overline{AB}} = \frac{1}{x} = \varphi = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$$

Figura 2.12 – O sen 18° no triângulo áureo



Fonte: O autor.

Lembrando que seno de um ângulo no triângulo retângulo é igual ao cateto oposto dividido pela hipotenusa e aplicando a citada definição ao triângulo da Figura 2.12 tem-se:

$$\text{sen } 18^\circ = \frac{\overline{BD}}{\overline{BC}} = \frac{\frac{x}{2}}{1} = \frac{x}{2}$$

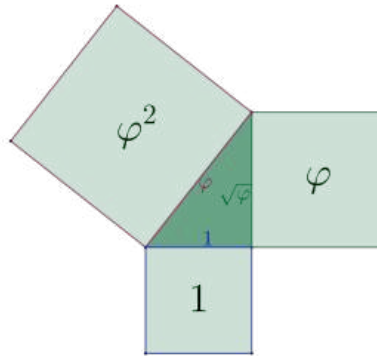
Substituindo o valor de “ x ” calculado na demonstracao dos elementos do triângulo áureo, ver Figura 2.11, tem-se:

$$\text{sen } 18^\circ = \frac{\overline{BD}}{\overline{BC}} = \frac{x}{2} = \frac{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}{2} = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$$

2.10 O triângulo de Kepler

O triângulo de Kepler, também denominado triângulo retângulo áureo, é uma figura geométrica singular que estabelece uma relação direta entre o número áureo e o Teorema de Pitágoras. Trata-se de um triângulo retângulo cujas medidas dos lados evidenciam propriedades algébricas e geométricas fundamentais associadas à razão áurea.

Figura 2.13 – O triângulo de Kpler



Fonte: O autor.

Nesse triângulo, o cateto menor possui comprimento igual à unidade, o cateto maior mede $\sqrt{\varphi}$ e a hipotenusa possui comprimento igual a φ , onde φ representa o número áureo. Observa-se que essas medidas estão dispostas em progressão geométrica, sendo 1 o primeiro termo, φ o último termo e $\sqrt{\varphi}$ o termo médio, o que reforça a coerência proporcional da figura.

Além disso, essas medidas satisfazem o Teorema de Pitágoras, uma vez que

$$\varphi^2 = \varphi + 1,$$

relação fundamental do número áureo que garante a consistência métrica do triângulo de Kepler e que será amplamente explorada ao longo deste trabalho.

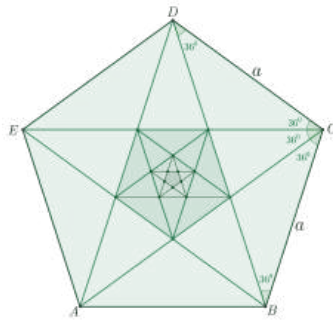
A Figura 2.13 ilustra a configuração geométrica do triângulo retângulo áureo, permitindo visualizar a disposição de seus lados e a relação proporcional entre eles. Ressalta-se ainda que o triângulo de Kepler pode ser construído a partir do retângulo áureo, conforme

apresentado anteriormente na Figura 2.3, evidenciando a conexão estrutural entre essas duas construções geométricas.

2.11 A magia do pentagrama no pentágono

O pentagrama, obtido a partir da ligação das diagonais de um pentágono regular, constitui um dos exemplos geométricos mais notáveis da ocorrência do número áureo na geometria plana. Embora não seja o foco principal deste trabalho, sua análise revela, de forma clara e elegante, como a razão áurea emerge naturalmente de relações de semelhança e proporcionalidade entre segmentos.

Figura 2.14 – A magia do pentagrama



Fonte: O autor.

Historicamente, o pentagrama já era conhecido pelos pitagóricos, que o utilizavam tanto como símbolo quanto como objeto de estudo matemático, em virtude das proporções recorrentes presentes em sua estrutura. Essas proporções podem ser compreendidas a partir das propriedades do pentágono regular, descritas nos *Elementos* de Euclides de Alexandria.

Do ponto de vista geométrico, ao traçar as diagonais de um pentágono regular, observa-se que cada diagonal é seccionada pelas demais em segmentos que se encontram em razão áurea. Em particular, considerando-se um segmento maior denotado por a e o menor por b , verifica-se a relação

$$\frac{a}{b} = \frac{a+b}{a} = \varphi,$$

em que

$$\varphi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$$

representa o número áureo. Essa propriedade decorre da semelhança entre os triângulos isósceles formados no interior do pentagrama, conhecidos como triângulos áureos.

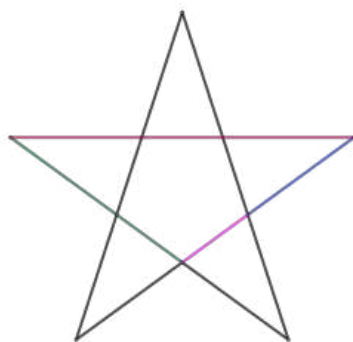
Além disso, o pentagrama apresenta uma notável propriedade de auto-semelhança, pois contém em seu interior uma infinidade de pentágonos e pentagramas menores, todos relacionados pela mesma proporção áurea. Essa característica reforça seu papel como um modelo geométrico paradigmático para o estudo da razão áurea, evidenciando sua recorrência em diferentes escalas.

Assim, embora o pentagrama não seja tratado como tema central deste trabalho, sua inclusão justifica-se por oferecer um exemplo clássico, rigoroso e visualmente intuitivo, que contribui para uma compreensão mais profunda das propriedades geométricas associadas à razão áurea.

2.12 O pentagrama destacado do pentágono

O pentagrama pode ser analisado de forma independente a partir de sua construção geométrica, evidenciando suas propriedades sem a necessidade de considerar explicitamente o pentágono original. Essa abordagem permite destacar a estrutura interna da figura, bem como as relações de semelhança e proporcionalidade que a caracterizam.

Figura 2.15 – O pentagrama



Fonte: O autor.

Como apresentado anteriormente, o pentagrama surge ao se ligar cada vértice de um pentágono regular ao vértice não adjacente. O resultado é uma estrela de cinco pontas que contém, em seu interior, novos pentágonos e pentagramas em escalas progressivamente menores. A Figura 2.15 ilustra essa construção, destacada da Figura 2.14, constituindo-se das diagonais do pentágono regular, permitindo uma visualização mais clara das propriedades geométricas da figura e de sua auto-semelhança. É possível verificar que cada uma das cinco pontas do pentagrama é o próprio triângulos de ouro.

2.12.1 Relação com o Número Áureo

Uma das propriedades mais importantes do pentagrama é sua conexão com a razão áurea ($\varphi \approx 1,618$)

- As diagonais do pentágono se dividem em segmentos áureos.
- A razão entre o comprimento de uma diagonal e o lado do pentágono é exatamente φ
- Cada novo pentágono interno repete a mesma proporção, caracterizando autossimilaridade.

Essa propriedade torna o pentagrama um exemplo clássico em trabalhos sobre o número áureo, especialmente em TCCs de matemática.

2.12.2 Propriedades matemáticas relevantes

- Simetria: possui simetria rotacional de ordem 5.
- Ângulos notáveis: aparecem ângulos de 36° , 72° e 108° .
- Semelhança de triângulos, vários triângulos isósceles semelhantes surgem naturalmente.
- Figura fractal discreta: repetição da mesma estrutura em escalas menores.

2.12.3 Importância ao longo do tempo

O pentagrama é um símbolo geométrico de grande relevância na tradição matemática antiga, estando historicamente associado à escola pitagórica, vinculada ao pensamento de Pitágoras. Para os pitagóricos, a estrela de cinco pontas representava a harmonia, a ordem e a perfeição matemática, expressando a concepção de que a realidade poderia ser compreendida por meio das relações numéricas e das proporções geométricas. A própria estrutura do pentagrama evidencia a presença recorrente da razão áurea, o que reforça sua importância como objeto de estudo matemático e filosófico desde a antiguidade.

Esse símbolo encontra-se sistematizado na obra *Elementos*, de Euclides, especialmente nos livros dedicados ao estudo dos polígonos regulares, nos quais são apresentadas construções geométricas fundamentadas nos princípios da geometria euclidiana. O pentagrama surge, nesse contexto, como consequência direta da análise do pentágono regular e de suas diagonais, evidenciando relações proporcionais constantes e propriedades geométricas fundamentais.

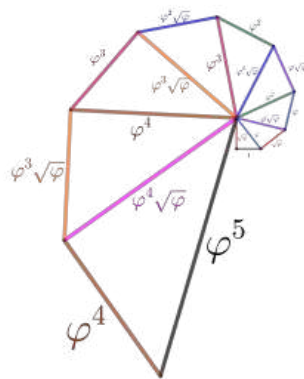
Ao longo da Idade Média, o pentagrama preservou significados predominantemente positivos, sendo incorporado ao simbolismo cristão como representação das cinco chagas de Cristo e como emblema de proteção. Posteriormente, no pensamento renascentista e na alquimia, passou a simbolizar o microcosmo humano, refletindo a ideia de que o ser humano está submetido às mesmas leis matemáticas que regem o universo. Apenas em períodos mais recentes, sobretudo a partir dos séculos XIX e XX, surgiram interpretações culturais que atribuíram ao pentagrama invertido conotações negativas, dissociadas de seus significados históricos e matemáticos originais.

Dessa forma, a permanência do pentagrama em discussões contemporâneas, inclusive em produções audiovisuais amplamente divulgadas, evidencia o contínuo interesse por temas que articulam matemática, simbolismo e realidade. O estudo desse símbolo reforça a relevância das proporções geométricas, demonstrando que conceitos como a razão áurea extrapolam o campo abstrato da matemática e se manifestam de forma significativa na cultura e no imaginário coletivo.

2.13 A espiral φ

A espiral φ , também conhecida como espiral do número áureo, é uma construção geométrica que evidencia, de forma progressiva, a presença da razão áurea em processos de crescimento e proporcionalidade. Sua formação pode ser compreendida a partir da repetição sistemática de uma transformação geométrica baseada na multiplicação das dimensões de uma figura inicial por um fator constante relacionado ao número áureo.

Figura 2.16 – A beleza do número aureo em espiral



Fonte: O autor.

Na construção ilustrada na Figura 2.16, considera-se inicialmente um triângulo retângulo áureo, cujo menor cateto possui comprimento unitário. Os lados desse triângulo encontram-se em progressão geométrica de razão $\sqrt{\varphi}$. Ao multiplicar todas as medidas

desse triângulo por $\sqrt{\varphi}$, obtêm-se as dimensões de um segundo triângulo semelhante ao primeiro.

Repetindo-se esse procedimento sucessivamente, isto é, multiplicando-se as medidas de cada triângulo pelo fator $\sqrt{\varphi}$, são gerados novos triângulos, todos geometricamente semelhantes, porém em escalas progressivamente maiores. A disposição ordenada desses triângulos permite a construção de uma curva contínua que se desenvolve em forma de espiral, conhecida como espiral de ouro.

Dessa maneira, a espiral φ resulta de um processo iterativo de ampliação proporcional, no qual a razão áurea atua como elemento fundamental na definição da forma e do crescimento da curva, reforçando sua relevância tanto no estudo matemático quanto em aplicações de caráter estético e geométrico.

2.14 Revisão da literatura

2.14.1 A divisão em extrema e média razão na tradição euclidiana

O número áureo surge formalmente na matemática clássica a partir da obra *Os Elementos*, de Euclid (2009), na qual é apresentado por meio da divisão de um segmento em extrema e média razão. Segundo Euclides, um segmento é dividido nessa razão quando o todo está para a parte maior assim como a parte maior está para a parte menor. Essa definição, embora de natureza geométrica, conduz de forma natural a uma relação algébrica que caracteriza o número atualmente denotado por φ .

Na Proposição VI.30 de *Os Elementos*, Euclides estabelece propriedades fundamentais dessa divisão, que posteriormente se revelaram centrais para a construção de polígonos regulares, em especial do pentágono regular. Conforme a tradução moderna de Euclides realizada por Richard Fitzpatrick (Euclid, 2009), lê-se: “*A straight line is said to have been cut in extreme and mean ratio...*”, com tradução “Diz-se que uma linha reta foi cortada em razão extrema e média...”, indicando o caráter estrutural dessa proporção na geometria clássica.

Do ponto de vista contemporâneo, essa definição geométrica conduz à equação

$$\varphi^2 = \varphi + 1,$$

cujas soluções positivas é

$$\varphi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}.$$

Esse resultado evidencia a profunda conexão entre geometria e álgebra já presente no pensamento euclidiano.

Outros matemáticos também foram responsáveis pela difusão e consolidação do conceito de número áureo ao longo da história. É atribuído a Mark Barr o uso sistemático da letra grega φ para representar o número áureo, em referência ao escultor grego Fídias, cujas obras são tradicionalmente associadas a proporções harmônicas (Barr, 1909).

Entre os autores que contribuíram decisivamente para a disseminação da proporção áurea, destaca-se Luca Pacioli, autor da obra *Divina Proportione* (1509), um dos tratados mais influentes sobre a chamada proporção divina, cujas ilustrações geométricas foram elaboradas por Leonardo da Vinci (Pacioli, 1509). Além de colaborar nessa obra, Leonardo da Vinci aplicou extensivamente a proporção áurea em seus estudos anatômicos, arquitetônicos e em suas composições artísticas (Vinci, 1970).

Johannes Kepler, em sua obra *Harmonices Mundi*, referiu-se ao número áureo como “um dos tesouros da geometria”, ressaltando sua relevância tanto na matemática quanto na descrição das leis harmônicas da natureza (Kepler, 1619).

2.14.2 O pentágono regular e a emergência natural da razão áurea

Diversos autores destacam que o pentágono regular é a figura geométrica plana na qual a razão áurea se manifesta de maneira mais direta e inevitável. Ao traçar as diagonais do pentágono, obtém-se o pentagrama, no qual surgem sucessivas divisões em razão áurea. Segundo Livio (2003), o pentagrama é “a porta de entrada geométrica mais simples para o número áureo”, pois a razão entre a diagonal e o lado do pentágono é exatamente φ . O autor observa ainda que essa relação independe de medidas específicas, sendo puramente estrutural.

Além disso, a presença de triângulos isósceles semelhantes no interior do pentagrama cria uma cadeia infinita de autossimilaridades, característica que torna essa figura especialmente rica para a resolução de problemas geométricos envolvendo proporções áureas relativas e semelhança de triângulos.

2.14.3 Semelhança de triângulos e autossimilaridade do pentagrama

O estudo do pentagrama revela uma organização hierárquica de triângulos semelhantes, em que cada nível preserva a mesma razão entre seus lados. Essa propriedade é amplamente explorada em problemas clássicos de geometria plana, nos quais se busca determinar razões de segmentos ou áreas relativa sem recorrer a coordenadas ou cálculos analíticos. Triângulos semelhantes são aqueles que possuem os mesmos ângulos. Quando além de possuírem os mesmos ângulos os triângulos possuem os lados homólogos de igual tamanho diz-se que eles são congruentes.

O pentagrama constitui um exemplo paradigmático de figura autossimilar na geometria euclidiana, sendo possível obter a razão áurea exclusivamente por argumentos de semelhança (Herz-Fischler, 1987).

Essa característica torna o pentagrama um instrumento didático poderoso, pois permite demonstrar propriedades do número áureo utilizando apenas conceitos fundamentais da geometria plana: congruência, paralelismo, ângulos e semelhança de triângulos.

2.14.4 Construções geométricas clássicas e o número áureo

A geometria euclidiana oferece diversas construções com régua e compasso que conduzem naturalmente ao número áureo. Entre elas, destacam-se:

- a construção do pentágono regular;
- a divisão de um segmento em extrema e média razão;
- a construção do decágono regular a partir do pentágono.

Segundo Coxeter (1969), a razão áurea ocupa uma posição singular entre os números irracionais, por surgir como elemento estrutural na teoria dos polígonos regulares, especialmente aqueles associados à simetria de ordem cinco. O autor ressalta que essas construções não apenas ilustram propriedades algébricas, mas também reforçam o papel da geometria como fundamento conceitual da matemática, aspecto particularmente relevante no contexto da formação de professores.

2.14.5 Abordagens modernas e didáticas na resolução de problemas

Autores contemporâneos defendem que a exploração do número áureo por meio de problemas geométricos promove uma compreensão mais profunda dos conceitos de proporcionalidade e semelhança. Prusinkiewicz e Lindenmayer (1990), embora atuem no campo da modelagem de sistemas naturais, mostram que muitas dessas estruturas podem ser compreendidas a partir de construções geométricas elementares.

No contexto educacional, o número áureo emerge como elo entre a geometria clássica e a matemática moderna, possibilitando a articulação entre demonstração rigorosa e visualização geométrica.

2.14.6 Síntese e contribuições para o desenvolvimento do TCC

A revisão da literatura evidencia que o número áureo possui uma fundamentação sólida na geometria euclidiana plana, especialmente por meio do estudo do pentágono,

do pentagrama e das construções clássicas com régua e compasso. Autores clássicos e contemporâneos convergem no reconhecimento de que sua presença em problemas geométricos não é acidental, mas consequência direta de simetrias e relações de semelhança bem definidas.

Dessa forma, um TCC centrado na resolução de problemas geométricos encontra no número áureo um objeto matemático privilegiado, capaz de integrar teoria, construção e demonstração rigorosa, sem recorrer a interpretações místicas ou meramente estéticas.

2.15 A BNCC e o ensino de matemática na educação básica

A Base Nacional Comum Curricular (BNCC) constitui-se como um documento normativo que orienta a organização curricular da Educação Básica no Brasil, abrangendo a Educação Infantil, o Ensino Fundamental e o Ensino Médio. Seu propósito é assegurar o desenvolvimento de aprendizagens essenciais e competências que possibilitem aos estudantes compreender, interpretar e atuar de forma crítica na realidade social. No que se refere ao ensino de Matemática, a BNCC propõe a superação de práticas pedagógicas centradas exclusivamente na memorização de procedimentos, enfatizando a compreensão conceitual, o raciocínio lógico, a argumentação e a resolução de problemas em diferentes contextos (Brasil, 2018).

Nesse documento, a Matemática é compreendida como uma ciência humana, histórica e culturalmente construída, cujos conceitos emergem de necessidades práticas e de processos investigativos desenvolvidos ao longo do tempo. Tal perspectiva valoriza a articulação entre conteúdos matemáticos, investigação e contextualização histórica, favorecendo uma aprendizagem significativa. Essa concepção dialoga diretamente com os objetivos deste trabalho, que se fundamenta no estudo de conceitos clássicos da geometria, com ênfase nas relações matemáticas associadas ao Número Áureo, considerando sua origem histórica, estrutura conceitual e relevância teórica.

A abordagem defendida pela BNCC contribui para o desenvolvimento do pensamento abstrato e da capacidade argumentativa dos estudantes, especialmente por meio do estudo de construções geométricas, relações métricas e demonstrações matemáticas. Para a Licenciatura em Matemática, essas diretrizes são fundamentais, pois subsidiam a formação de professores capazes de integrar o rigor conceitual da Matemática a práticas pedagógicas reflexivas, críticas e contextualizadas, alinhadas às demandas da Educação Básica.

2.15.1 Relação deste trabalho com a Base Nacional Comum Curricular (BNCC)

Ao investigar o Número Áureo no contexto da geometria, o presente trabalho estabelece diálogo direto com as competências gerais propostas pela BNCC, particularmente aquelas relacionadas ao conhecimento matemático, ao pensamento científico, à valorização cultural e ao uso de diferentes linguagens. O estudo da razão áurea permite articular fundamentos teóricos da Matemática com processos investigativos e representações geométricas, favorecendo a compreensão de conceitos e relações matemáticas de forma integrada.

A Competência Geral 1, que trata da valorização dos conhecimentos historicamente construídos, manifesta-se na abordagem do número áureo enquanto conceito matemático clássico, presente desde a antiguidade em diferentes contextos geométricos. Sua análise contribui para a compreensão da Matemática como um campo de conhecimento em constante construção, fundamentado em relações conceituais e históricas.

A Competência Geral 2, relacionada ao pensamento científico, crítico e criativo, evidencia-se na investigação das propriedades do número áureo, na análise de construções geométricas e na resolução de problemas envolvendo proporções e relações entre segmentos. Esse processo favorece a formulação de conjecturas, o desenvolvimento do raciocínio lógico e a argumentação matemática.

A Competência Geral 3, que enfatiza a valorização do repertório cultural, também se articula ao tema estudado, uma vez que o número áureo está presente em manifestações históricas, científicas e culturais. A análise de suas aplicações em construções geométricas clássicas e em representações encontradas na natureza e na produção humana amplia o repertório dos estudantes e reforça a Matemática como parte integrante da construção do conhecimento humano.

Por fim, a Competência Geral 4, referente ao uso de diferentes linguagens, relaciona-se diretamente ao estudo do número áureo, que exige a articulação entre a linguagem matemática, a linguagem geométrica e a linguagem visual. A interpretação de figuras, diagramas e representações gráficas é essencial para a compreensão das propriedades da razão áurea e para a comunicação clara de ideias matemáticas.

Dessa forma, o estudo do número áureo na geometria contribui para o desenvolvimento das competências previstas na BNCC, ao promover a compreensão conceitual, o pensamento investigativo, a valorização histórico-cultural e o uso integrado de diferentes linguagens, reforçando o papel da Matemática na formação integral dos estudantes.

No que se refere às habilidades matemáticas desenvolvidas ao longo deste trabalho, destacam-se aquelas relacionadas à resolução e à elaboração de problemas que envolvem

razões, proporções e relações métricas em figuras geométricas planas. A investigação dessas relações favorece a compreensão das propriedades internas das figuras, especialmente dos polígonos, por meio de construções geométricas e da análise de suas características estruturais.

Além disso, o estudo proposto contempla a utilização de relações trigonométricas na resolução de problemas geométricos, contribuindo para o aprofundamento do raciocínio matemático e para a articulação entre diferentes áreas da Matemática. Tais abordagens possibilitam que o estudante compreenda a Matemática como uma ciência historicamente construída, fundamentada em processos de investigação, formalização e demonstração, em consonância com as diretrizes da Base Nacional Comum Curricular.

Diante disso, evidencia-se que este trabalho encontra respaldo nas diretrizes da BNCC para a Educação Básica, contribuindo para uma abordagem do ensino de Matemática que valoriza o rigor conceitual, a contextualização histórica e o desenvolvimento das competências cognitivas, aspectos essenciais à formação matemática dos estudantes e à prática docente.

2.16 Elementos da matemática aplicados aos problemas

2.16.1 O significado da relação $a \div b \div c$

Inicialmente, faz-se necessário retomar o conceito de proporção, fundamental para a compreensão das relações quantitativas abordadas ao longo deste trabalho. De modo geral, uma proporção entre dois números expressa a relação existente entre seus valores, indicando quanto um deles representa em relação ao outro.

Assim, ao afirmar que a está para b assim como 3 está para 4, entende-se que existe um número real positivo k tal que $a = 3k$ e $b = 4k$. Essa representação evidencia que os valores de a e b são diretamente proporcionais aos números 3 e 4, respectivamente. Para fins de simplificação e maior clareza didática, pode-se restringir essa análise ao conjunto dos números naturais. Desse modo, tomando-se $k = 2$, obtém-se $a = 6$ e $b = 8$, preservando-se a razão

$$\frac{a}{b} = \frac{3}{4}.$$

Em diversos problemas, especialmente no contexto da Geometria, torna-se necessário trabalhar com relações envolvendo três grandezas simultaneamente, as quais são expressas na forma $a : b : c$. Essa noção integra o conteúdo da matemática elementar e, por essa razão, justifica-se, neste ponto, uma breve revisão conceitual.

Do ponto de vista matemático, a relação

$$a \div b \div c = 1 \div 3 \div 7$$

indica que a grandeza b é três vezes maior que a , enquanto a grandeza c é sete vezes maior que a . Além disso, observa-se que b e c também se encontram em proporção entre si, na razão $3 : 7$.

De maneira geral, ao multiplicar todos os termos da razão $(1 \div 3 \div 7)$ por um mesmo fator real positivo k , obtém-se a relação $(k \div 3k \div 7k)$, a qual preserva integralmente a proporção inicial. Tal propriedade é essencial para a resolução de problemas geométricos e algébricos que envolvem razões e proporções, pois permite a generalização dos resultados a partir de uma razão fundamental.

Onde esta notação é usada:

- Matemática (razões e proporções)
- Geometria (razão entre lados)
- Física (grandezas proporcionais)
- Química (proporção de substâncias)
- Estatística e escalas

2.16.2 Relações angulares em retas paralelas cortadas por uma transversal

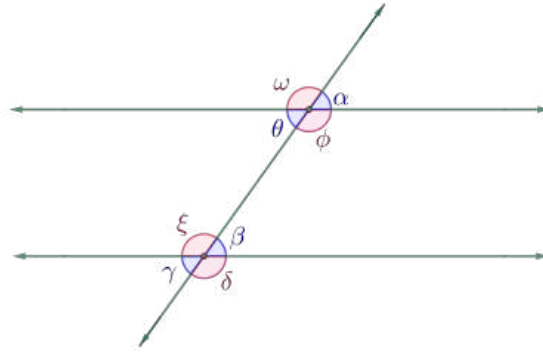
Duas retas são ditas paralelas quando pertencem a um mesmo plano e não possuem ponto de interseção. Denomina-se reta transversal aquela que intercepta duas ou mais retas em pontos distintos. Quando uma reta transversal corta duas retas paralelas, formam-se ângulos que apresentam relações métricas bem definidas, as quais constituem um dos fundamentos da Geometria Plana.

Nessa configuração, destacam-se os ângulos alternos internos e alternos externos, que se situam em lados opostos da transversal e apresentam medidas iguais. Os ângulos correspondentes, por sua vez, ocupam posições equivalentes em relação às retas paralelas e à transversal, sendo igualmente congruentes. Já os ângulos colaterais internos localizam-se no interior das retas paralelas e no mesmo lado da transversal, não sendo congruentes, mas suplementares, de modo que a soma de suas medidas é igual a 180° .

Essas relações são ilustradas na Figura 2.17, que apresenta a disposição dos principais ângulos formados quando duas retas paralelas são interceptadas por uma

transversal. A identificação dessas relações permite estabelecer igualdades e proporções entre ângulos e segmentos, constituindo a base lógica para demonstrações geométricas subsequentes.

Figura 2.17 – Ângulos formados por retas paralelas cortadas por transversal



Fonte: O autor.

Da Figura 2.17, obtêm-se as seguintes relações angulares apresentadas no Quadro 2.1:

Quadro 2.1 – Relação de Congruências Entre Ângulos

Relação	Classificação dos Ângulos
$\alpha = \beta$	Ângulos correspondentes
$\alpha = \theta$	Ângulos opostos pelo vértice
$\gamma = \beta$	Ângulos opostos pelo vértice
$\theta = \beta$	Ângulos alternos internos
$\phi = \xi$	Ângulos colaterais internos

A compreensão dessas propriedades angulares é fundamental para o desenvolvimento do raciocínio geométrico, uma vez que elas sustentam a semelhança entre triângulos formados por retas paralelas e transversais. Dessa forma, o conteúdo apresentado estabelece a base conceitual necessária para o estudo do Teorema de Tales, abordado na subseção seguinte.

2.16.3 Teorema de Tales

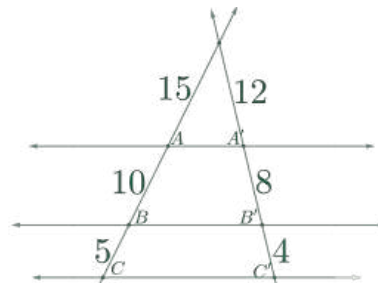
O Teorema de Tales constitui um dos resultados fundamentais da Geometria Euclidiana, sendo amplamente utilizado no estudo da proporcionalidade de segmentos e

da semelhança de figuras planas. Esse teorema estabelece uma relação direta entre retas paralelas e segmentos determinados por transversais, permitindo a dedução de razões proporcionais sem a necessidade de medições diretas.

De forma geral, o teorema afirma que, quando um conjunto de retas paralelas intercepta duas ou mais retas transversais, os segmentos correspondentes formados nessas transversais mantêm entre si uma relação de proporcionalidade. Tal propriedade é consequência direta da semelhança entre os triângulos formados pelas interseções das retas, o que garante a preservação das razões entre os comprimentos dos lados correspondentes.

No contexto dos triângulos, uma aplicação clássica do Teorema de Tales ocorre quando uma reta paralela a um dos lados do triângulo intercepta os outros dois lados. Nessa situação, os segmentos formados nesses lados são proporcionais, conforme ilustrado na Figura 2.18. Essa propriedade é amplamente empregada na resolução de problemas geométricos, no cálculo de medidas inacessíveis e na fundamentação de conceitos posteriores da Trigonometria.

Figura 2.18 – Ilustração do teorema de Tales



Fonte: O autor.

Do ponto de vista histórico, o teorema é atribuído a Tales de Mileto, matemático e filósofo grego do século VI a.C., reconhecido como um dos pioneiros do pensamento científico racional. De acordo com registros históricos, Tales teria utilizado princípios de proporcionalidade para determinar alturas e distâncias de forma indireta, como no célebre episódio da medição da altura das pirâmides egípcias por meio da comparação de sombras.

Figura 2.19 – Ilustração digital realista de Tales de Mileto (624 a.C–546 a.C).⁶



Fonte: Imagem gerada por inteligência artificial (ChatGPT/DALL · E, V5.2, em 13/02/2026).

2.16.4 Semelhança de triângulos

A semelhança de triângulos é um conceito fundamental da Geometria Plana, associado à comparação entre figuras que possuem a mesma forma, porém dimensões proporcionais. Dois triângulos são ditos semelhantes quando seus ângulos correspondentes possuem a mesma medida e os comprimentos de seus lados correspondentes são proporcionais. A razão comum entre os comprimentos dos lados correspondentes é denominada razão de semelhança.

Sejam $\triangle ABC$ e $\triangle DEF$ dois triângulos. Esses triângulos são semelhantes se existir uma correspondência entre seus vértices tal que

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{DE}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{EF}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{DF}}.$$

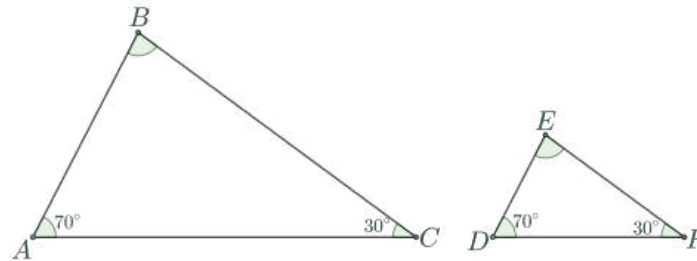
Essa relação expressa que os lados correspondentes mantêm entre si uma proporcionalidade constante, independentemente das dimensões absolutas dos triângulos.

- Caso 1 – A identificação da semelhança entre triângulos pode ser realizada por meio de critérios específicos, denominados casos de semelhança. O caso Ângulo–Ângulo (AA) estabelece que dois triângulos são semelhantes quando apresentam dois ângulos

⁶ Ilustração digital realista em estilo clássico de Tales de Mileto, filósofo e matemático grego da Antiguidade, retrato em meio corpo, homem maduro com cabelos grisalhos e barba cheia, expressão serena e reflexiva. Vestimentas simples da Grécia Antiga em tons neutros e sóbrios. Tales segura uma tábua de madeira com construções geométricas desenhadas com linhas retas e pontos, simbolizando proporcionalidade e fundamentos da Geometria. Ao fundo, elementos históricos discretos, como uma coluna jônica e uma pirâmide egípcia, levemente desfocados para não competir com a figura principal. Iluminação suave e natural, texturas realistas, estilo pictórico inspirado em pinturas clássicas a óleo, paleta de cores acadêmica e equilibrada, representação historicamente respeitosa, composição adequada para uso em trabalhos acadêmicos e TCC.

correspondentes com a mesma medida, o que garante a proporcionalidade entre os lados correspondentes.

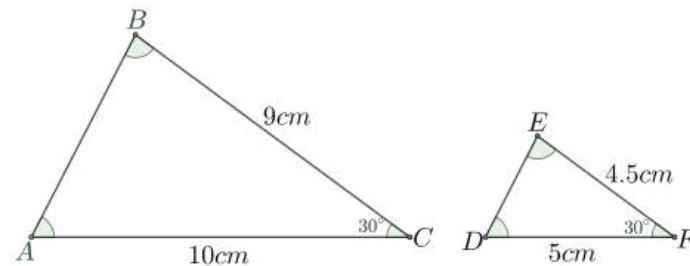
Figura 2.20 – Semelhança de triângulo – caso 1



Fonte: O autor.

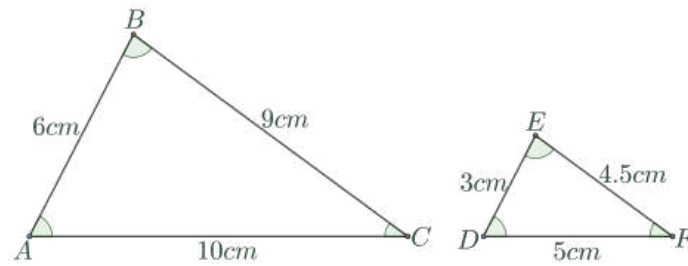
- Caso 2 – Outro critério é o caso Lado-Ângulo-Lado (LAL), segundo o qual dois triângulos são semelhantes quando dois pares de lados correspondentes são proporcionais e o ângulo compreendido entre esses lados possui a mesma medida em ambos os triângulos.

Figura 2.21 – Semelhança de triângulo – caso 2



Fonte: O autor.

- Caso 3 – Por fim, o caso Lado-Lado-Lado (LLL) afirma que dois triângulos são semelhantes quando os comprimentos dos três pares de lados correspondentes são proporcionais. Nesse caso, a semelhança é estabelecida exclusivamente por relações métricas, sem a necessidade de comparação direta entre ângulos.

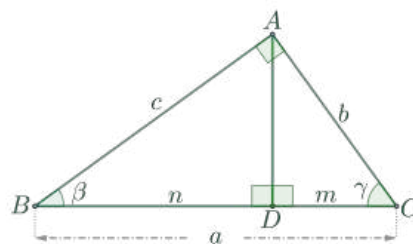
Figura 2.22 – Semelhança de triângulo – caso 3

Fonte: O autor.

A semelhança de triângulos desempenha papel essencial na resolução de problemas geométricos envolvendo proporcionalidade, escalas e medidas indiretas, além de constituir fundamento para resultados clássicos da Geometria Plana, como o Teorema de Tales.

2.16.5 Teorema de Pitágoras

Considere-se o triângulo retângulo $\triangle ABC$, retângulo em A , conforme ilustrado na Figura 2.23. Sejam a , b e c os comprimentos dos lados opostos aos vértices A , B e C , respectivamente, de modo que a representa a hipotenusa do triângulo. Traça-se a altura relativa ao vértice A até a hipotenusa $\overline{BC}$, encontrando-a no ponto D . Essa construção divide o triângulo original em dois novos triângulos retângulos, $\triangle ABD$ e $\triangle ADC$.

Figura 2.23 – Ilustração do teorema de Pitágoras

Fonte: O autor.

Observa-se que os triângulos $\triangle ABC$, $\triangle ABD$ e $\triangle ADC$ possuem ângulos correspondentes com a mesma medida. Assim, esses triângulos são semelhantes entre si, em virtude da igualdade angular.

Da semelhança entre os triângulos $\triangle ABC$ e $\triangle ABD$, tem-se a correspondência entre os lados

$$\overline{BC} \leftrightarrow \overline{AB} \quad \text{e} \quad \overline{AB} \leftrightarrow \overline{BD},$$

o que permite escrever a proporção correta

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{BD}}{\overline{AB}}.$$

Dessa relação, obtém-se

$$\overline{AB}^2 = \overline{BD} \cdot \overline{BC}.$$

Como $\overline{AB} = c$, $\overline{BC} = a$ e $\overline{BD} = n$, segue que

$$c^2 = a \cdot n.$$

De modo análogo, da semelhança entre os triângulos $\triangle ABC$ e $\triangle ADC$, estabelece-se a correspondência

$$\overline{BC} \leftrightarrow \overline{AC} \quad \text{e} \quad \overline{AC} \leftrightarrow \overline{DC},$$

resultando na proporção

$$\frac{\overline{AC}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{DC}}{\overline{AC}},$$

da qual decorre

$$\overline{AC}^2 = \overline{DC} \cdot \overline{BC}.$$

Como $\overline{AC} = b$, $\overline{BC} = a$ e $\overline{DC} = m$, obtém-se

$$b^2 = a \cdot m.$$

Somando-se as duas igualdades, tem-se

$$b^2 + c^2 = a(m + n).$$

Observando que $m + n = a$, conclui-se que

$$b^2 + c^2 = a^2,$$

o que demonstra o Teorema de Pitágoras por meio da semelhança de triângulos.

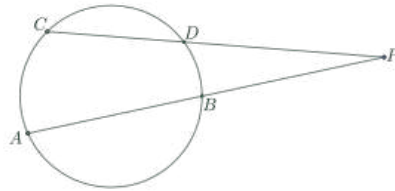
2.16.6 Tangente a duas circunferências tangentes externamente

O estudo das retas tangentes a circunferências constitui um tópico relevante da Geometria Plana, especialmente na análise de configurações envolvendo duas circunferências. Considere-se duas circunferências tangentes externamente entre si, com centros alinhados e raios R e r . Uma reta pode ser traçada de modo a ser tangente simultaneamente a ambas, tocando cada circunferência em um único ponto, denominados pontos de tangência.

Nessa configuração, o segmento que une os pontos de tangência apresenta propriedades geométricas bem definidas, pois os raios traçados dos centros até esses pontos

- Caso 1: Duas retas secantes se intersectando num ponto P externo à circunferência. Considere um ponto P localizado externamente a uma circunferência. Qualquer reta secante traçada a partir desse ponto intercepta a circunferência em dois pontos distintos, como A e B , conforme ilustrado na Figura 2.25.

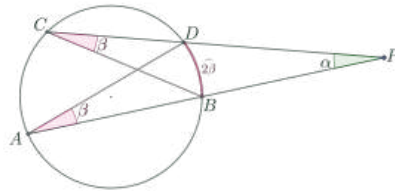
Figura 2.25 – Potência de ponto - caso 1



Fonte: O autor.

Traçando-se os segmentos $\overline{AD}$ e $\overline{BC}$, conforme apresentado na Figura 2.26, observa-se que os ângulos $\angle BAD$ e $\angle BCD$ possuem a mesma medida, pois enxergam o mesmo arco da circunferência.

Figura 2.26 – Demonstração



Fonte: O autor.

Dessa forma, os triângulos $\triangle BCP$ e $\triangle ADP$ são semelhantes pelo caso Ângulo-Ângulo (AA). Assim, pode-se estabelecer a proporção

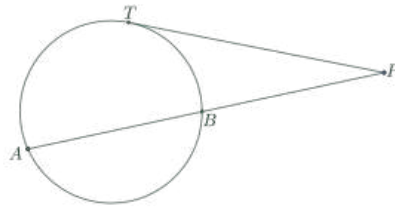
$$\frac{\overline{PA}}{\overline{PC}} = \frac{\overline{PD}}{\overline{PB}}, \quad (2.20)$$

da qual resulta a relação fundamental da potência de um ponto:

$$\overline{PA} \cdot \overline{PB} = \overline{PC} \cdot \overline{PD}. \quad (2.21)$$

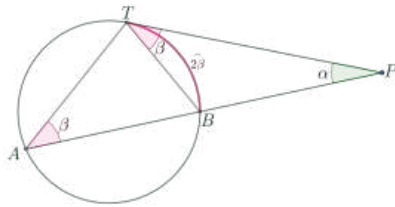
- Caso 2: Ponto P exterior à circunferência com reta tangente e reta secante

Considere agora um ponto P exterior à circunferência, do qual se traça uma reta tangente que toca a circunferência no ponto T , bem como uma reta secante que a intercepta nos pontos A e B , conforme apresentado na Figura 2.27.

Figura 2.27 – Potência de ponto - caso 2

Fonte: O autor.

A construção auxiliar ilustrada na Figura 2.28 evidencia a semelhança entre os triângulos $\triangle ATP$ e $\triangle BTP$.

Figura 2.28 – Demonstração

Fonte: O autor.

Em virtude da semelhança dos triângulos, obtém-se a proporção

$$\frac{\overline{PA}}{\overline{PT}} = \frac{\overline{PT}}{\overline{PB}}, \quad (2.22)$$

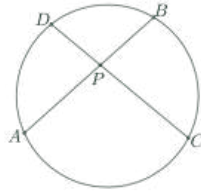
o que conduz à relação

$$\overline{PT}^2 = \overline{PA} \cdot \overline{PB}. \quad (2.23)$$

Essa relação é conhecida como **teorema da tangente**.

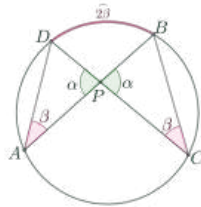
- Caso 3: Duas cordas se intersectando num Ponto P no interior da circunferência

Considere um ponto P situado no interior de uma circunferência, no qual duas cordas distintas $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ se interceptam, conforme ilustrado na Figura 2.29.

Figura 2.29 – Potência de ponto - caso 3

Fonte: O autor.

A construção dos segmentos auxiliares $\overline{AD}$ e $\overline{BC}$, apresentada na Figura 2.30, permite observar que os ângulos $\angle BAD$ e $\angle BCD$ são congruentes, pois interceptam o mesmo arco. Além disso, os ângulos $\angle APD$ e $\angle BPC$ são opostos pelos vértices.

Figura 2.30 – Demonstração

Fonte: O autor.

Dessa forma, os triângulos $\triangle BCP$ e $\triangle ADP$ são semelhantes, resultando na relação:

$$\overline{PA} \cdot \overline{PB} = \overline{PC} \cdot \overline{PD}. \quad (2.24)$$

Conclui-se que o conceito de potência de um ponto constitui uma ferramenta essencial da Geometria Plana, pois unifica diferentes configurações geométricas em uma única relação algébrica. Sua compreensão favorece o desenvolvimento do raciocínio lógico-dedutivo, sendo de grande relevância tanto no ensino básico quanto no ensino superior.

2.16.8 Dispositivo Prático de Briot-Ruffini

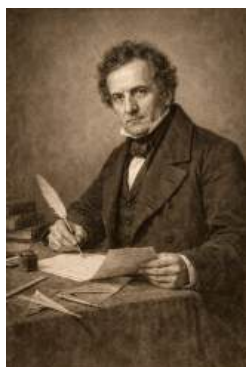
O dispositivo prático de Briot–Ruffini consiste em uma técnica algébrica empregada para a redução do grau de um polinômio quando se conhece previamente uma de suas raízes. Tal procedimento baseia-se na organização sistemática dos coeficientes do polinômio em uma linha horizontal, enquanto o valor da raiz conhecida é posicionado à esquerda dessa disposição.

Inicialmente, o coeficiente líder do polinômio é transcrito para uma linha inferior. Em seguida, esse valor é multiplicado pela raiz considerada, e o produto obtido é somado ao

coeficiente imediatamente seguinte do polinômio. O resultado dessa soma é então registrado na linha inferior, abaixo do coeficiente correspondente. O processo prossegue de forma análoga: a cada etapa, o valor obtido anteriormente é multiplicado pela raiz conhecida e somado ao próximo coeficiente, sendo o novo resultado anotado na linha inferior.

Ao término do procedimento, obtém-se um último valor que corresponde ao resto da divisão do polinômio original pelo binômio associado à raiz considerada. Quando esse valor é nulo, confirma-se que o número adotado é, de fato, uma raiz do polinômio. Além disso, os números dispostos na linha inferior, com exceção do último, representam exatamente os coeficientes do polinômio de grau reduzido em uma unidade, resultante da aplicação do método.

Figura 2.31 – Retrato ilustrativo de Paolo Ruffini (1765–1822).⁷



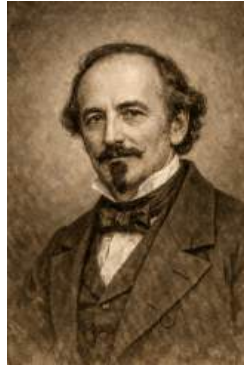
Fonte: Imagem gerada por inteligência artificial (ChatGPT/DALL · E, V5.2, em 09/02/2026).

O denominado dispositivo prático de Briot–Ruffini recebe essa nomenclatura em referência a dois matemáticos distintos que contribuíram, em momentos diferentes, para o desenvolvimento e a consolidação do método. O matemático italiano Paolo Ruffini foi um dos primeiros a empregar um procedimento algébrico sistemático para a divisão de

⁷ Retrato acadêmico realista de Paolo Ruffini, matemático italiano do final do século XVIII e início do século XIX. Homem de meia-idade, expressão concentrada e intelectual, cabelos curtos e levemente ondulados, vestindo trajes formais típicos da época (casaca escura, colete, camisa branca com colarinho alto). O matemático está sentado à mesa, segurando uma pena de escrever em uma das mãos e um papel manuscrito na outra. Sobre a mesa, instrumentos matemáticos e científicos da época, como compasso, régua, livros antigos e folhas com anotações algébricas. Ambiente de gabinete de estudos clássico, iluminação suave lateral, fundo neutro e desfocado. Paleta de cores em tons sépia, textura de fotografia antiga, alto nível de realismo, composição clássica e estética acadêmica apropriada para ilustração em trabalho científico ou TCC.

⁸ Retrato fotográfico histórico realista de Charles Auguste Briot, matemático francês do século XIX, inspirado em gravura histórica da época. Homem de meia-idade, testa alta e levemente calva, cabelos curtos ondulados nas laterais, bigode espesso e cavanhaque fino. Expressão séria e intelectual, olhar ligeiramente voltado para a lateral. Vestindo trajes formais do século XIX: casaca escura, colete, camisa branca de colarinho alto e gravata borboleta. Enquadramento em meio-busto, composição clássica de estúdio. Iluminação suave e difusa, fundo neutro e desfocado. Paleta de cores em tons sépia, textura de fotografia antiga, alto nível de realismo, aparência de retrato acadêmico do século XIX, estética adequada para ilustração científica e uso em Trabalho de Conclusão de Curso.

Figura 2.32 – Retrato ilustrativo de Charles Auguste Briot (1817–1882).⁸



Fonte: Imagem gerada por inteligência artificial (ChatGPT/DALL · E, em 09/02/2026).

polinômios e para o estudo das equações algébricas, especialmente no contexto da resolução de equações de grau superior. Posteriormente, o matemático francês Charles Auguste Briot contribuiu para a reorganização, simplificação e difusão desse procedimento, conferindo-lhe uma forma mais prática e didática, amplamente utilizada no ensino da Álgebra. Dessa forma, a denominação Briot–Ruffini reconhece tanto a contribuição original de Ruffini quanto o aperfeiçoamento e a sistematização promovidos por Briot.

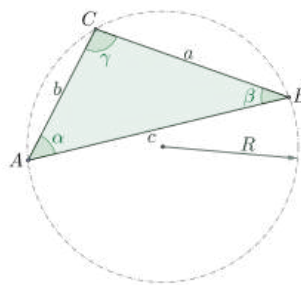
2.16.9 Lei dos senos

A Lei dos Senos estabelece uma relação entre os comprimentos dos lados de um triângulo qualquer e os senos de seus ângulos opostos, sendo válida para triângulos acutângulos, obtusângulos e retângulos. Para um triângulo ABC , com lados a , b e c opostos, respectivamente, aos ângulos α , β e γ , essa relação é expressa por

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma} = 2R \quad ,$$

onde R representa o raio da circunferência circunscrita ao triângulo. A interpretação geométrica dessa relação pode ser observada na figura 2.33, elaborada pelo autor.

Figura 2.33 – Representação geométrica da lei dos senos



Fonte: O autor.

2.16.9.1 Demonstração da lei dos senos

Considere um triângulo ABC inscrito em uma circunferência de raio R , com centro O , conforme ilustrado na figura 2.33. Denotem-se por a , b e c os comprimentos dos lados opostos, respectivamente, aos ângulos α , β e γ .

Traçando-se o diâmetro da circunferência que passa por um dos vértices do triângulo, por exemplo, o vértice A , obtém-se o triângulo retângulo $\triangle ADC$, ver Figura 2.34, uma vez que o ângulo $\angle ACD$, inscrito na circunferência que tem como um dos lados o diâmetro é reto. Nesse triângulo retângulo, o lado oposto ao ângulo β corresponde ao segmento de comprimento b , enquanto a hipotenusa corresponde ao diâmetro da circunferência, de comprimento $2R$.

Aplicando a definição de seno no triângulo $\triangle ACD$, retângulo em C , tem-se:

$$\text{sen } \beta = \frac{b}{2R}$$

o que implica

$$\frac{b}{\text{sen } \beta} = 2R$$

Procedendo de modo análogo para os ângulos α e γ , obtêm-se as relações:

$$\frac{a}{\text{sen } \alpha} = 2R \quad \text{e} \quad \frac{c}{\text{sen } \gamma} = 2R$$

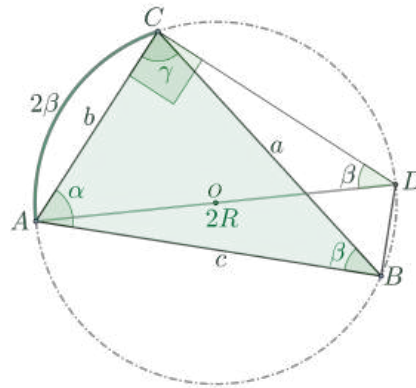
Dessa forma, conclui-se que

$$\frac{a}{\text{sen } \alpha} = \frac{b}{\text{sen } \beta} = \frac{c}{\text{sen } \gamma} = 2R \quad ,$$

o que demonstra a relação existente entre a Lei dos Senos e a circunferência circunscrita ao triângulo.

Os ângulos $\angle ABC$ e $\angle ADC$ medem β pelo fato de ambos serem inscritos na mesma circunferência e delimitarem o mesmo arco 2β , visto que o ângulo inscrito mede metade do ângulo central que mede 2β . A demonstração desta última afirmação foge do escopo deste trabalho.

Figura 2.34 – Representação geométrica da demonstração da lei dos senos



Fonte: O autor.

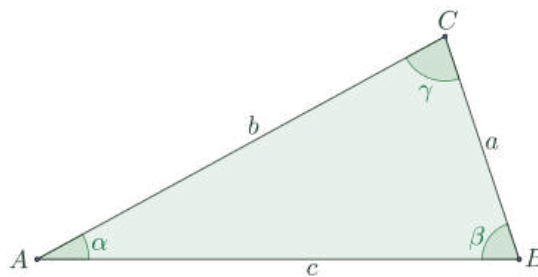
2.16.10 Lei dos cossenos

A Lei dos Cossenos generaliza o Teorema de Pitágoras para qualquer triângulo, relacionando os comprimentos dos lados ao cosseno de um ângulo interno. Considerando um triângulo ABC , com lados a , b e c opostos, respectivamente, aos ângulos α , β e γ , essa lei é dada por

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos \alpha \quad ,$$

sendo obtidas expressões análogas por permutação dos lados e ângulos. A aplicação dessa relação é ilustrada na figura 2.35, também elaborada pelo autor.

Figura 2.35 – Representação geométrica da lei dos cossenos



Fonte: O autor.

2.16.10.1 Demonstração da lei dos cossenos

Considere um triângulo ABC , conforme ilustrado na Figura 2.36, cujos lados a , b e c são opostos, respectivamente, aos ângulos α , β e γ . Sem perda de generalidade, seja α o ângulo formado pelos lados b e c .

Traça-se a altura relativa ao lado b , a partir do vértice oposto, encontrando o ponto D sobre esse lado. Com isso, o triângulo ABC é decomposto em dois triângulos retângulos. Denotando-se por h a altura traçada, tem-se, pelo triângulo retângulo formado:

$$h = c \sen \alpha.$$

Além disso, a projeção do lado c sobre o lado b é dada por $c \cos \alpha$, de modo que o segmento $\overline{CD}$ mede $b - c \cos \alpha$. Aplicando o Teorema de Pitágoras, Subseção 2.16.5, ao triângulo retângulo BCD , obtém-se:

$$a^2 = h^2 + (b - c \cos \alpha)^2.$$

Substituindo $h = c \sen \alpha$ na expressão anterior, resulta:

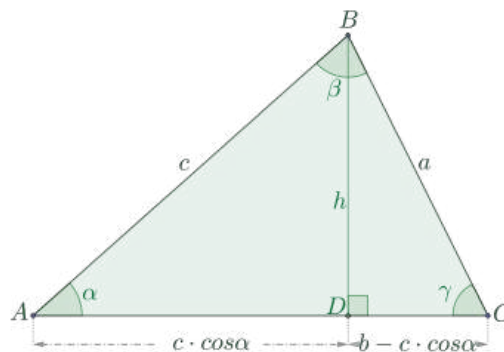
$$a^2 = (c \sen \alpha)^2 + (b - c \cos \alpha)^2.$$

Desenvolvendo os termos e utilizando a identidade trigonométrica fundamental $\sen^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$, chega-se a:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos \alpha$$

Procedendo de forma análoga para os demais ângulos do triângulo, obtêm-se as expressões correspondentes, o que demonstra a Lei dos Cossenos.

Figura 2.36 – Representação geométrica da demonstração da lei dos cossenos



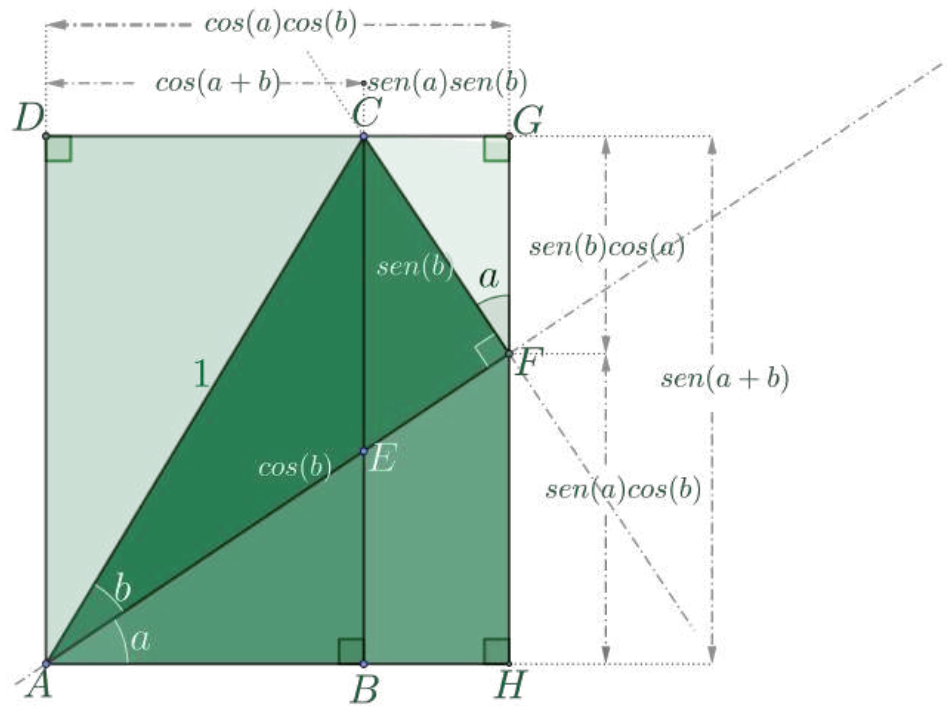
Fonte: O autor.

2.16.11 Seno e cosseno da soma e da diferença de arcos

A dedução das fórmulas do seno e do cosseno da soma e da diferença de arcos pode ser realizada por meio de uma construção geométrica baseada em triângulos retângulos. Considera-se um retângulo cuja diagonal possui comprimento unitário, o que permite relacionar diretamente segmentos com valores trigonométricos.

Conforme ilustrado na figura 2.37, traça-se uma reta passando pelo vértice A , a qual intercepta o segmento $\overline{BC}$ no ponto E . Pelo ponto C , constrói-se uma perpendicular a essa reta, determinando o ponto F , de modo que o triângulo $\triangle AFC$ seja retângulo em F . A partir de F , traça-se uma perpendicular ao segmento $\overline{AB}$, interceptando seu prolongamento no ponto H , formando o triângulo retângulo $\triangle AHF$. O ponto G é obtido pela interseção dos prolongamentos dos segmentos $\overline{CD}$ e $\overline{FH}$, definindo o triângulo retângulo $\triangle CFG$.

Figura 2.37 – Seno e cosseno da soma e da diferença de arcos



Fonte: O autor.

Atribuem-se aos ângulos $\angle FAH$ e $\angle FAC$ as medidas a e b , respectivamente. No triângulo $\triangle FAC$, cuja hipotenusa satisfaz $\overline{AC} = 1$, obtêm-se as relações

$$\overline{AF} = \cos b \quad \text{e} \quad \overline{CF} = \sin b.$$

Considerando o triângulo $\triangle AHF$, cuja hipotenusa é $\overline{AF} = \cos b$ e cujo ângulo é

a , resultam as expressões

$$\overline{AH} = \cos a \cos b \quad \text{e} \quad \overline{FH} = \sin a \cos b.$$

De modo análogo, no triângulo $\triangle CFG$, cuja hipotenusa é $\overline{CF} = \sin b$ e cujo ângulo também é a , obtêm-se

$$\overline{FG} = \sin b \cos a \quad \text{e} \quad \overline{CG} = \sin a \sin b.$$

Observa-se que o segmento $\overline{GH}$ corresponde à soma dos segmentos $\overline{HF}$ e $\overline{FG}$. Dessa forma, obtém-se a identidade

$$\sin(a + b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a.$$

De modo análogo, a relação entre os segmentos associados ao cateto adjacente conduz à expressão

$$\cos(a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b.$$

As fórmulas do seno e do cosseno da diferença de arcos decorrem da substituição de b por $-b$, em conjunto com as identidades $\sin(-b) = -\sin b$ e $\cos(-b) = \cos b$, resultando em

$$\sin(a - b) = \sin a \cos b - \sin b \cos a \quad \text{e} \quad \cos(a - b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b.$$

2.16.12 Fórmulas de Werner da trigonometria

As fórmulas de Werner apresentadas no Quadro 2.2, e que serão deduzidas ao longo desta seção, mostram-se extremamente úteis na resolução de diversos problemas geométricos, especialmente naqueles em que se deseja empregar um tratamento trigonométrico mais adequado ou quando a própria natureza do problema assim o exige. Tais identidades permitem transformar somas e diferenças de funções trigonométricas em produtos, simplificando expressões e facilitando análises algébricas e geométricas.

Fonte: (Iezzi, 2013)

Essas identidades são também conhecidas como fórmulas de transformação trigonométrica de somas em produtos e, inversamente, de produtos em somas. As demonstrações são desenvolvidas nesta seção na seguinte ordem: soma de senos, diferença de senos, soma de cossenos e diferença de cossenos, conforme apresentadas no Quadro 2.2. Para esse fim, utilizam-se as fórmulas do seno e do cosseno da soma e da diferença de dois arcos,

Quadro 2.2 – Fórmulas Trigonométricas de Werner

$\text{sen}(A) + \text{sen}(B) = 2 \cdot \text{sen}\left(\frac{A+B}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{A-B}{2}\right)$
$\text{sen}(A) - \text{sen}(B) = 2 \cdot \text{sen}\left(\frac{A-B}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{A+B}{2}\right)$
$\cos(A) + \cos(B) = 2 \cdot \cos\left(\frac{A+B}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{A-B}{2}\right)$
$\cos(A) - \cos(B) = -2 \cdot \text{sen}\left(\frac{A-B}{2}\right) \cdot \text{sen}\left(\frac{A+B}{2}\right)$

deduzidas na Subseção 2.16.11, as quais são reapresentadas a seguir para fins de referência:

$$\text{sen}(a+b) = \text{sen } a \cdot \cos b + \text{sen } b \cdot \cos a, \quad (2.25)$$

$$\cos(a+b) = \cos a \cdot \cos b - \text{sen } a \cdot \text{sen } b, \quad (2.26)$$

$$\text{sen}(a-b) = \text{sen } a \cdot \cos b - \text{sen } b \cdot \cos a, \quad (2.27)$$

$$\cos(a-b) = \cos a \cdot \cos b + \text{sen } a \cdot \text{sen } b. \quad (2.28)$$

Somando a Equação 2.25 e a Equação 2.27, obtém-se $\text{sen}(a+b) + \text{sen}(a-b) = 2 \text{sen } a \cdot \cos b$. Introduzindo as substituições $A = a+b$ e $B = a-b$, tem-se o sistema linear $\{a+b = A, a-b = B\}$, cuja resolução fornece $a = \frac{A+B}{2}$ e $b = \frac{A-B}{2}$. Substituindo esses valores na expressão anterior, resulta a identidade

$$\text{sen } A + \text{sen } B = 2 \text{sen}\left(\frac{A+B}{2}\right) \cos\left(\frac{A-B}{2}\right).$$

De modo análogo, efetuando-se a diferença entre a Equação 2.25 e a Equação 2.27, obtém-se $\text{sen}(a+b) - \text{sen}(a-b) = 2 \text{sen } b \cdot \cos a$, o que, após as mesmas substituições algébricas, conduz à fórmula

$$\text{sen } A - \text{sen } B = 2 \text{sen}\left(\frac{A-B}{2}\right) \cos\left(\frac{A+B}{2}\right).$$

Procedendo-se de forma semelhante com a Equação 2.26 e a Equação 2.28, obtém-se, respectivamente, $\cos(a+b) + \cos(a-b) = 2 \cos a \cdot \cos b$ e $\cos(a+b) - \cos(a-b) = -2 \text{sen } a \cdot \text{sen } b$, o que, após a aplicação das substituições $A = a+b$ e $B = a-b$, resulta nas identidades

$$\cos A + \cos B = 2 \cos\left(\frac{A+B}{2}\right) \cos\left(\frac{A-B}{2}\right)$$

e

$$\cos A - \cos B = -2 \text{sen}\left(\frac{A-B}{2}\right) \text{sen}\left(\frac{A+B}{2}\right).$$

Conclui-se, assim, a dedução das fórmulas de Werner. Do ponto de vista histórico, Johann Werner viveu no final do século XV e início do século XVI, período de transição entre a Idade Média tardia e o Renascimento científico europeu, no qual a matemática encontrava-se fortemente associada à astronomia, à cartografia e à navegação, áreas que exigiam

métodos cada vez mais precisos para o cálculo de ângulos e distâncias. A cidade de Nuremberg, sua terra natal, destacava-se como um importante centro intelectual e comercial, reunindo matemáticos, astrônomos, impressores e construtores de instrumentos científicos, circunstância que favoreceu o desenvolvimento e a disseminação de suas contribuições.

Contribuições matemáticas

Embora hoje seu nome apareça sobretudo nas chamadas fórmulas de Werner, ele fez contribuições mais amplas:

1. Na trigonometria Werner sistematizou identidades trigonométricas que facilitaram cálculos manuais, especialmente: . transformações de soma em produtos; . relações usadas em triângulos planos e esféricos.

Essas fórmulas eram essenciais antes da existência de tabelas extensas ou calculadoras.

2. Na astronomia e cartografia Werner também foi um astrônomo respeitado:

. Escreveu sobre movimento dos corpos celestes;

. Estudou projeções cartográficas, antecipando ideias usadas mais tarde na confecção de mapas mais precisos;

. Propôs métodos para determinar longitudes e latitudes com base em observações astronômicas.

Obras e legado:

.trigonometria aplicada à astronomia;

.projeções da esfera celeste no plano;

.métodos matemáticos para observação astronômica.

Mesmo não sendo tão famoso quanto Copérnico ou Kepler, Werner é considerado um elo importante entre a matemática medieval e a ciência moderna, com suas fórmulas tornando-se ferramentas-padrão no ensino da trigonometria. Influenciou o desenvolvimento posterior da astronomia renascentista e representa a figura do matemático-prático, preocupado menos com abstração e mais com cálculo eficiente para a resolução de problemas práticos do dia a dia, relacionado às grandes navegações, principalmente, mas também aplicados ao estudo teórico da astronomia.

A figura 2.38 mostra uma ilustração artística em estilo pintura a óleo retratando Johann Werner (1468–1522), matemático, astrônomo e geógrafo alemão, conhecido por suas contribuições à trigonometria esférica e pelas fórmulas de Werner, fundamentais para a transformação e simplificação de expressões trigonométricas. A composição apresenta o matemático em ambiente renascentista europeu, com vestes típicas do início do século XVI, segurando um compasso e manuscritos matemáticos. Ao fundo, observam-se diagramas geométricos, triângulos esféricos e expressões trigonométricas simbolizando suas contribuições científicas. A iluminação e a paleta de cores remetem ao estilo clássico renascentista, reforçando o caráter histórico e acadêmico da obra.

Figura 2.38 – Pintura ilustrativa de Johann Werner (1468–1522).⁹



Fonte: Imagem gerada por inteligência artificial (ChatGPT/DALL · E, V5.2, em 09/02/2026).

⁹ Prompt utilizado: O personagem segura um compasso de metal em uma das mãos e manuscritos matemáticos antigos na outra. Ao fundo, um ambiente de estudo renascentista, com pergaminhos contendo diagramas de trigonometria, triângulos esféricos, construções geométricas e fórmulas trigonométricas associadas às fórmulas de Werner. Iluminação suave em claro-escuro (chiaroscuro), paleta de cores quentes e sóbrias, textura realista de pintura a óleo, alto nível de detalhamento, estilo histórico, acadêmico e científico, fundo escuro neutro, atmosfera erudita.

2.16.13 Valores trigonométricos

Para os cálculos, quando necessário, foram utilizados valores trigonométricos, apresentados na Tabela 2.2, bem como as já citadas fórmulas de Werner, organizadas no Quadro 2.2, além de outras fórmulas mais usuais dispostas em seguida.

Tabela 2.2 – Tabela de senos, cossenos e tangentes de ângulos notáveis

Ângulo	Seno	Cosseno	Tangente
15°	$\frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$	$\frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$	$2 - \sqrt{3}$
18°	$\frac{\sqrt{5} - 1}{4}$	$\frac{\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}}{4}$	$\sqrt{\frac{5 - 2\sqrt{5}}{5}}$
30°	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
36°	$\frac{\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}}{4}$	$\frac{\sqrt{5} + 1}{4}$	$\sqrt{5 - \sqrt{5}}$
45°	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1
54°	$\frac{\sqrt{5} + 1}{4}$	$\frac{\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}}{4}$	$\sqrt{\frac{5 + 2\sqrt{5}}{5}}$
60°	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$
72°	$\frac{\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}}{4}$	$\frac{\sqrt{5} - 1}{4}$	$\sqrt{5 + 2\sqrt{5}}$
75°	$\frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$	$\frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$	$2 + \sqrt{3}$

Fonte: O autor

Os valores trigonométricos apresentados na Tabela 2.2 podem ser obtidos a partir de construções geométricas elementares e do uso de identidades trigonométricas clássicas. Inicialmente, considera-se o triângulo equilátero, do qual, ao traçar a bissetriz de um de seus ângulos, obtém-se um triângulo retângulo com ângulos de 30°, 60° e 90°, permitindo determinar diretamente $\sin(30^\circ) = 0,5$ e, por meio do Teorema de Pitágoras, o valor de $\cos(30^\circ)$. A partir desses resultados, aplicam-se as fórmulas do seno e do cosseno do arco metade, obtendo-se os valores de $\sin(15^\circ)$ e $\cos(15^\circ)$, bem como, por complementaridade, os correspondentes a 75°. De modo análogo, o uso do triângulo áureo possibilita a determinação dos valores de seno e cosseno de 18° e de seu complementar, 72°. Além disso, por meio das

fórmulas do seno e do cosseno do arco duplo, obtém-se o seno de 36° e, conseqüentemente, os valores de seno e cosseno de 54° . Completa-se, assim, a Tabela 2.2, incluindo-se ainda os valores de $\sin(45^\circ)$ e $\cos(45^\circ)$, cuja obtenção é imediata a partir de um triângulo retângulo isósceles.

2.16.14 Outras relações trigonométricas, expressões para áreas e identidades do número áureo

É possível consultar no Quadro 2.3 as principais equações empregadas ao longo deste trabalho, acompanhadas de suas respectivas designações, com o objetivo de facilitar a consulta e a compreensão dos resultados e demonstrações desenvolvidos.

Quadro 2.3 – Outras Equações e Designações Utilizadas no Trabalho

Equação	Designação
$[ABC] = \frac{1}{2} a b \sin \hat{C}$	Área do triângulo em função de dois lados e do ângulo compreendido
$[ABC] = \frac{b \cdot h}{2}$	Área do triângulo em função da base e da altura
$[ABCD] = \frac{B+b}{2} h$	Área do trapézio
$\varphi^2 = \varphi + 1$	Identidade fundamental do número áureo
$\frac{1}{\varphi - 1} = \varphi$	Propriedade algébrica do número áureo
$\sqrt{5} = 2\varphi - 1$	Relação entre o número áureo e a raiz de cinco
$\sin^2(\theta) + \cos^2(\theta) = 1$	Identidade trigonométrica fundamental
$B_{\text{média}} = \frac{B_{\text{maior}} + b_{\text{menor}}}{2}$	Base média do trapézio
Se $a = b$ e $b = c$, então $a = c$	Princípio da transitividade na matemática
$a(b + c) = ab + ac$	Propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição
$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$	Fórmula de Bhaskara

3 APLICAÇÕES

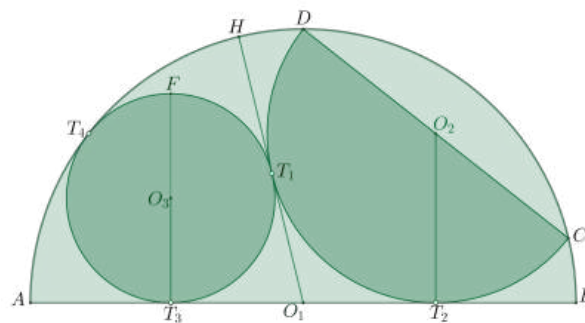
Problema 1.

Na configuração geométrica da figura abaixo, composta por duas semicircunferências e uma circunferência, pede-se calcular a relação $a \div b \div c$, sendo estes respectivamente os raios da circunferência, da semicircunferência menor e da semicircunferência maior.

Na configuração apresentada, adotam-se as seguintes convenções:

- O_1 , O_2 e O_3 são os centros;
- T_1 , T_2 , T_3 e T_4 são pontos de tangência;
- $\overline{AB} = 2c$, $\overline{CD} = 2b$ e $\overline{T_3F} = 2a$ são diâmetros.

Figura 3.1 – Problema 1



Fonte: O autor.

Solução.

Nesta subseção apresenta-se a solução do problema envolvendo a configuração geométrica descrita, com o objetivo de determinar a razão entre as medidas a , b e c . Como se trata de uma razão entre comprimentos, pode-se adotar uma normalização conveniente, uma vez que tais razões permanecem invariantes por homotetia.

Assim, sem perda de generalidade, considera-se o raio do semicírculo maior igual à unidade, isto é,

$$c = 1. \quad (3.29)$$

O detalhamento geométrico necessário à análise encontra-se apresentado na Figura 3.2.

Por transitividade, princípio apresentado no Quadro 2.3, tem-se:

$$\overline{O_1T_2} = \overline{O_1T_3}, \quad (3.38)$$

isto é,

$$x = y. \quad (3.39)$$

Dessa igualdade decorre que:

$$\sqrt{1 - 2a} = \sqrt{1 - 2b^2} \Rightarrow a = b^2. \quad (3.40)$$

Quando duas circunferências de raios R e r são tangentes externamente, a distância entre os pontos de tangência em uma tangente comum é dada por:

$$d = 2\sqrt{Rr}, \quad (3.41)$$

conforme apresentado na Subseção 2.16.6.

No contexto do problema, considerando $R = b$ e $r = a$, obtém-se:

$$x + y = 2\sqrt{ab}. \quad (3.42)$$

Como $x = y = \sqrt{1 - 2b^2}$ e $a = b^2$, segue que:

$$\sqrt{1 - 2b^2} = \sqrt{b^3}. \quad (3.43)$$

Elevando-se ambos os membros ao quadrado, resulta:

$$b^3 + 2b^2 - 1 = 0. \quad (3.44)$$

Como -1 é raiz desse polinômio, aplica-se o dispositivo de Briot–Ruffini, conforme a Subseção 2.16.8, obtendo-se:

$$b^2 + b - 1 = 0. \quad (3.45)$$

Aplicando-se a fórmula resolutive da equação do segundo grau, constante do Quadro 2.3, obtém-se a raiz positiva:

$$b = \frac{1}{\varphi}. \quad (3.46)$$

Como $a = b^2$, conclui-se que:

$$a = \frac{1}{\varphi^2}. \quad (3.47)$$

Portanto, a razão solicitada é dada por:

$$a : b : c = \frac{1}{\varphi^2} : \frac{1}{\varphi} : 1 \quad (3.48)$$

Sabe-se que ao multiplicar qualquer valor $k \in \mathbb{R}$ pelos fatores (a, b, c) tem-se a proporção equivalente (ka, kb, kc) , então, a fim de apresentar a resposta à questão sem denominadores, o que a torna mais elegante, optou-se por fazer $k = \varphi^2$.

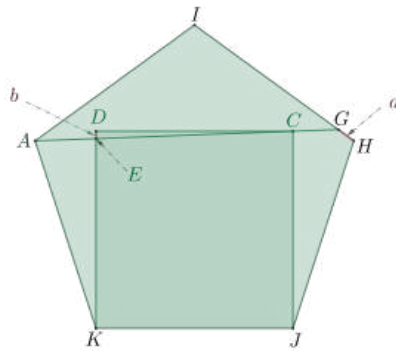
Desta forma:

$$a : b : c = 1 : \varphi : \varphi^2 \quad \blacksquare \quad (3.49)$$

Problema 2.

A figura a seguir consiste em um pentágono regular $AKJHI$ e o quadrado $CDKJ$, de mesmo lado. O vértice A do pentágono, o vértice C do quadrado e o ponto G , este pertencente ao segmento $\overline{HI}$, são colineares. O segmento $\overline{AG}$ intersepta o lado $\overline{DK}$ do quadrado no ponto E . Calcular a razão $\frac{a}{b} = \frac{\overline{GH}}{\overline{DE}}$.

Figura 3.3 – Problema 2



Fonte: O autor.

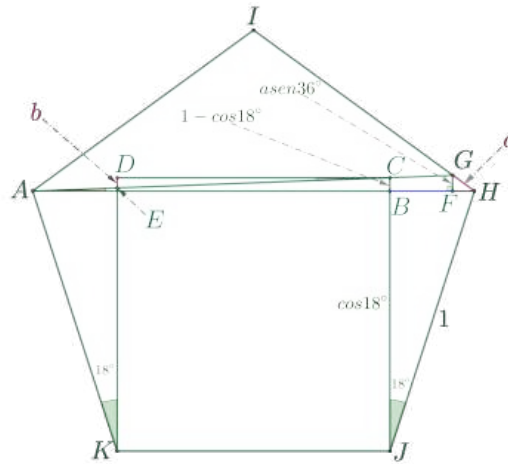
Solução.

A resolução do problema fundamenta-se em uma abordagem de natureza trigonométrica. Ao longo do desenvolvimento da solução, utilizam-se as fórmulas de Werner (3) e (4), apresentadas na Subseção 2.16.12 e sistematizadas no Quadro 2.2. Tais expressões possibilitam a transformação de somas e diferenças de cossenos em produtos de funções trigonométricas, o que contribui para a simplificação das relações obtidas. Embora as fórmulas (1) e (2) não sejam empregadas diretamente neste problema, optou-se por mantê-las, bem como por apresentar suas demonstrações, com o objetivo de complementar o

embasamento teórico, estando ambas disponíveis na subseção e no quadro anteriormente citados.

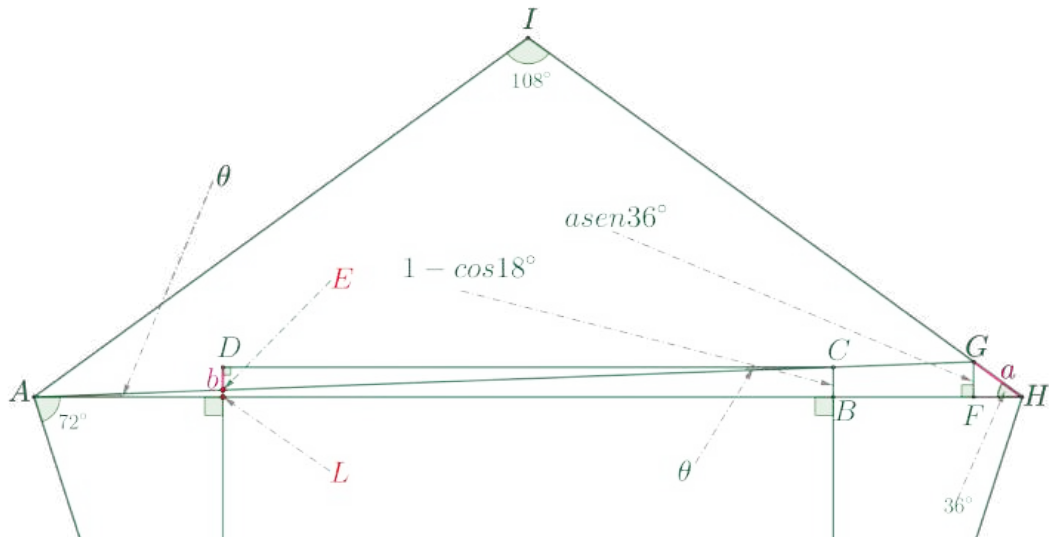
A Figura 3.4 apresenta o detalhamento geométrico necessário à análise, enquanto a figura 3.5 exibe uma ampliação da configuração, de modo a favorecer a visualização dos elementos considerados.

Figura 3.4 – Detalhamento do problema 2



Fonte: O autor.

Figura 3.5 – Detalhamento do problema 2 (ampliado)



Fonte: O autor.

Observa-se que os triângulos $\triangle ABC$, $\triangle CDE$ e $\triangle AFG$ são semelhantes, conforme discutido na Subseção 2.14.3. Os triângulos $\triangle ABC$ e $\triangle AFG$ são semelhantes por possuírem um ângulo comum θ e serem retângulos. Por sua vez, os triângulos $\triangle ABC$ e $\triangle CDE$ são

semelhantes, visto que os ângulos $\angle BAC$ e $\angle DCE$ são alternos internos, considerando-se que $\overline{AB}$ é paralela a $\overline{CD}$ e que $\overline{CE}$ atua como transversal, conforme abordado na Subseção 2.16.2. Dessa forma, pela transitividade da semelhança de triângulos, obtém-se:

$$\frac{\overline{BC}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{DE}}{\overline{CD}} = \frac{\overline{FG}}{\overline{AF}}. \quad (3.50)$$

Faz-se necessária, neste ponto, a justificativa das medidas adotadas. Sem perda de generalidade, considera-se a unidade como comprimento do lado do pentágono. Nessas condições, observa-se que o segmento $\overline{BJ}$ corresponde à projeção do segmento $\overline{HJ}$, formando com este um ângulo de 18° . Assim,

$$\overline{BJ} = \overline{HJ} \cos 18^\circ.$$

Como $\overline{HJ} = 1$, obtém-se:

$$\overline{BJ} = \cos 18^\circ.$$

Da análise da figura, verifica-se que:

$$\overline{BC} = \overline{CJ} - \overline{BJ}.$$

Como $\overline{CJ} = 1$, por se tratar do lado do quadrado, segue que:

$$\overline{BC} = 1 - \cos 18^\circ.$$

Além disso, o segmento $\overline{AH}$ possui comprimento igual a φ , valor obtido por meio da aplicação da Lei dos Cossenos no triângulo $\triangle AHI$. Da Figura 3.5, observa-se ainda que:

$$\overline{FH} = a \cos 36^\circ.$$

Consequentemente,

$$\overline{AF} = \overline{AH} - \overline{FH},$$

ou seja,

$$\overline{AF} = \varphi - a \cos 36^\circ.$$

Observa-se ainda que o segmento $\overline{AL}$ corresponde à projeção do segmento $\overline{AK}$, formando com este um ângulo de 72° . Assim,

$$\overline{AL} = \overline{AK} \cos 72^\circ.$$

Como $\cos 72^\circ = \sin 18^\circ$, tem-se:

$$\overline{AL} = \overline{AK} \sin 18^\circ.$$

Sendo $\overline{AK} = 1$, conclui-se que:

$$\overline{AL} = \sin 18^\circ.$$

Da figura ampliada, observa-se que:

$$\overline{AB} = \overline{AL} + \overline{LB}.$$

Substituindo-se os valores obtidos, resulta:

$$\overline{AB} = \sin 18^\circ + 1,$$

ou, de forma equivalente,

$$\overline{AB} = 1 + \sin 18^\circ.$$

Por fim, da mesma figura, conclui-se que:

$$\overline{FG} = a \sin 36^\circ.$$

Substituindo-se as expressões algébricas correspondentes aos segmentos na relação de proporcionalidade anteriormente obtida, tem-se:

$$\frac{1 - \cos 18^\circ}{1 + \sin 18^\circ} = \frac{b}{1} = \frac{a \sin 36^\circ}{\varphi - a \cos 36^\circ}. \quad (3.51)$$

Igualando-se a primeira e a terceira razões, obtém-se:

$$\frac{1 - \cos 18^\circ}{1 + \sin 18^\circ} = \frac{a \sin 36^\circ}{\varphi - a \cos 36^\circ}. \quad (3.52)$$

Efetuando-se o produto dos meios pelos extremos, resulta:

$$a \sin 36^\circ + a \sin 36^\circ \sin 18^\circ = \varphi - \varphi \cos 18^\circ - a \cos 36^\circ + a \cos 36^\circ \cos 18^\circ. \quad (3.53)$$

Agrupando-se os termos de modo conveniente para a aplicação das fórmulas de Werner, tem-se:

$$a \sin 36^\circ - \frac{a}{2} [-2 \sin 36^\circ \sin 18^\circ] - \frac{a}{2} [2 \cos 36^\circ \cos 18^\circ] + a \cos 36^\circ = \varphi (1 - \cos 18^\circ). \quad (3.54)$$

Aplicando-se as fórmulas de Werner, conforme a Subseção 2.16.12, no sentido inverso, obtém-se:

$$a \sen 36^\circ - \frac{a}{2}(\cos 54^\circ - \cos 18^\circ) - \frac{a}{2}(\cos 54^\circ + \cos 18^\circ) + a \cos 36^\circ = \varphi(1 - \cos 18^\circ). \quad (3.55)$$

Simplificando-se a expressão, resulta:

$$a \sen 36^\circ - a \cos 54^\circ + a \cos 36^\circ = \varphi(1 - \cos 18^\circ). \quad (3.56)$$

Como $\sen 36^\circ = \cos 54^\circ$, os dois primeiros termos se anulam, obtendo-se:

$$a \cos 36^\circ = \varphi(1 - \cos 18^\circ), \quad (3.57)$$

e, portanto,

$$a = \frac{\varphi(1 - \cos 18^\circ)}{\cos 36^\circ}. \quad (3.58)$$

Para determinar a razão solicitada, divide-se a expressão obtida para a pelo valor correspondente a b , resultando:

$$\frac{a}{b} = \frac{\varphi(1 - \cos 18^\circ)}{\cos 36^\circ} \cdot \frac{1 + \sen 18^\circ}{1 - \cos 18^\circ} = \frac{\varphi(1 + \sen 18^\circ)}{\sen 54^\circ}. \quad (3.59)$$

Da tabela trigonométrica e da relação entre o número áureo e a raiz quadrada de cinco, constantes do Quadro 2.3, tem-se:

$$\sen 18^\circ = \frac{1}{2\varphi}, \quad \sen 54^\circ = \frac{\varphi}{2}. \quad (3.60)$$

Substituindo-se esses valores na expressão anterior e utilizando-se a identidade fundamental do número áureo, $\varphi^2 = \varphi + 1$, obtém-se:

$$\frac{a}{b} = \frac{\varphi \left(1 + \frac{1}{2\varphi}\right)}{\frac{\varphi}{2}} = \varphi + 1 = \varphi^2. \quad (3.61)$$

Portanto, conclui-se que:

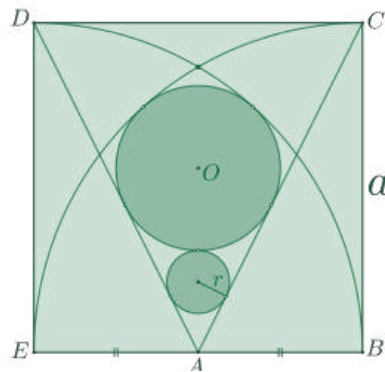
$$\frac{a}{b} = \varphi^2 \quad \blacksquare \quad (3.62)$$

Problema 3.

A figura mostra um quadrado de lado “ a ” e duas circunferências tangentes entre si externamente. O triângulo $\triangle ACD$ tem seus lados $\overline{AC}$ e $\overline{AD}$ tangentes concomitantemente

aos círculos maior e menor, sendo A ponto médio de $\overline{BE}$. Os arcos $\widehat{BD}$ e $\widehat{EC}$ estão centrados no pontos E e B , respectivamente e tangenciam a circunferência maior. Determinar a razão $\frac{a}{r}$ entre o comprimento do lado do quadrado, denotado por a , e o raio r da circunferência menor.

Figura 3.6 – Problema 3



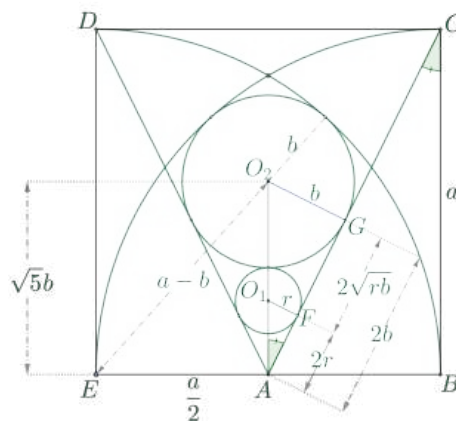
Fonte: O autor.

Solução.

Para a resolução do problema, procede-se inicialmente à análise das relações geométricas decorrentes da disposição das circunferências no interior do quadrado. A identificação dos pontos notáveis, segmentos e triângulos auxiliares permite estabelecer as relações métricas necessárias à determinação da razão solicitada.

O detalhamento geométrico utilizado na solução, com a identificação dos segmentos e pontos relevantes para a análise, é apresentado na Figura 3.7.

Figura 3.7 – Detalhamento do problema 3



Fonte: O autor.

Observa-se que os triângulos $\triangle ABC$, $\triangle AFO_1$ e $\triangle AGO_2$ são semelhantes. De fato, os ângulos $\angle BCA$ e $\angle CAO_2$ são alternos internos (ver Subseção 2.16.2), em relação às retas paralelas que contêm os segmentos $\overline{BC}$ e $\overline{AO_2}$, possuindo, portanto, a mesma medida. Ademais, todos os triângulos considerados são retângulos, uma vez que os ângulos $\angle ABC$, $\angle AFO_1$ e $\angle AGO_2$ medem 90° , visto que B é vértice do quadrado e os pontos F e G correspondem a pontos de tangência entre raios e retas tangentes.

Pela semelhança dos triângulos $\triangle ABC$ e $\triangle GO_2A$ (ver Subseção 2.14.3), atribuindo-se $\overline{GO_2} = b$, obtém-se:

$$\overline{AG} = 2b, \quad (3.63)$$

e, de modo análogo,

$$\overline{AF} = 2r, \quad (3.64)$$

em virtude da semelhança desses triângulos com o triângulo $\triangle FO_1A$.

Aplicando-se o Teorema de Pitágoras constante na Subseção 2.16.5, ao triângulo $\triangle AGO_2$, resulta:

$$\overline{AO_2}^2 = \overline{AG}^2 + \overline{GO_2}^2. \quad (3.65)$$

$$\overline{AO_2}^2 = (2b)^2 + b^2 \quad (3.66)$$

$$\overline{AO_2}^2 = 5b^2 \quad (3.67)$$

$$\overline{AO_2} = \sqrt{5}b. \quad (3.68)$$

A medida do segmento $\overline{FG} = 2\sqrt{rb}$ encontra-se demonstrada na Subseção 2.16.6. Dessa forma, todos os comprimentos indicados na Figura 3.7 estão devidamente justificados.

Da configuração geométrica, tem-se:

$$\overline{FG} = \overline{AG} - \overline{AF} = 2b - 2r = 2\sqrt{rb}. \quad (3.69)$$

Simplificando-se a expressão, obtém-se:

$$b - r = \sqrt{rb}. \quad (3.70)$$

Elevando-se ambos os membros ao quadrado, segue:

$$b^2 - 2rb + r^2 = rb. \quad (3.71)$$

Reorganizando-se os termos, chega-se à equação do segundo grau em b :

$$b^2 - 3rb + r^2 = 0. \quad (3.72)$$

Fazendo uso da fórmula resolutive da equação do segundo grau, constante do Quadro 2.3, obtém-se a solução compatível com o problema:

$$b = \frac{3 + \sqrt{5}}{2} r, \quad (3.73)$$

uma vez que a outra raiz conduz a um valor de b inferior a r , o que não é compatível com a configuração geométrica analisada.

Escrevendo-se o resultado em função do número áureo φ , obtém-se:

$$b = r \varphi^2. \quad (3.74)$$

Para a determinação do valor de a , considera-se o triângulo $\triangle AO_2E$ e aplica-se novamente o Teorema de Pitágoras (Subseção 2.16.5), obtendo-se:

$$(a - b)^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + (b\sqrt{5})^2. \quad (3.75)$$

Após a simplificação, resulta a equação do segundo grau em a :

$$3a^2 - 8ba - 4b^2 = 0. \quad (3.76)$$

Aplicando-se novamente a fórmula resolutive, constante do Quadro 2.3, obtém-se como solução compatível com o problema:

$$a = 4b, \quad (3.77)$$

pois a outra raiz conduz a um valor negativo, desprovido de significado geométrico.

Substituindo-se o valor de b dado em (3.74), tem-se:

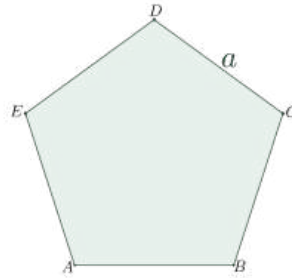
$$a = 4r \varphi^2. \quad (3.78)$$

Portanto, conclui-se que a razão procurada é:

$$\frac{a}{r} = 4\varphi^2 \quad \blacksquare \quad (3.79)$$

Problema 4.

Calcular a área de um pentágono regular de lado a e expressar este resultado como função de a em termo único, isto é, sem parcelas em adição ou subtração.

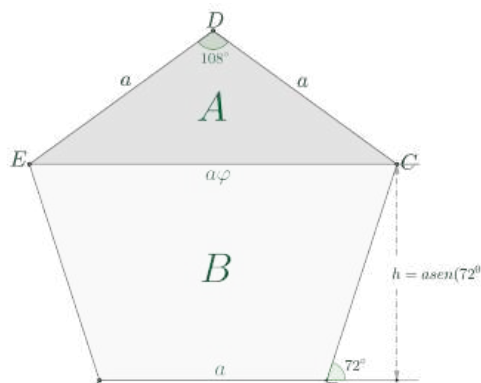
Figura 3.8 – Problema 4

Fonte: O autor.

Solução.

Com vistas à simplificação dos cálculos, procede-se à decomposição do pentágono $ABCDE$ em duas regiões planas: o triângulo $\triangle CDE$ e o trapézio $ABCE$. As áreas dessas regiões serão denotadas, respectivamente, por $[CDE]$ e $[ABCE]$.

O detalhamento geométrico correspondente a essa decomposição, bem como a identificação dos elementos métricos envolvidos, é apresentado na Figura 3.9.

Figura 3.9 – Detalhamento do problema 4

Fonte: O autor.

Aplicando-se a expressão da área de um triângulo em função de dois lados e do ângulo compreendido entre eles, conforme apresentado no Quadro 2.3, ao triângulo

$\triangle CDE$, obtém-se:

$$\begin{aligned}
 [CDE] &= \frac{1}{2} a^2 \sin 108^\circ \\
 &= \frac{1}{2} a^2 \cos 18^\circ \\
 &= \frac{a^2}{2} \cdot \frac{\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}}{4} \\
 &= \frac{a^2}{2} \cdot \frac{\sqrt{8 + 4\varphi}}{4} \\
 &= \frac{a^2 \sqrt{2 + \varphi}}{4}.
 \end{aligned} \tag{3.80}$$

Consultando-se a Tabela 2.2 e utilizando-se a expressão para a área de um trapézio, apresentada no Quadro 2.3, calcula-se a área do trapézio $ABCE$:

$$\begin{aligned}
 [ABCE] &= \frac{(a\varphi + a)}{2} \cdot a \cos 18^\circ \\
 &= \frac{a^2(\varphi + 1)}{2} \cdot \frac{\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}}{4} \\
 &= \frac{a^2(\varphi + 1)}{2} \cdot \frac{\sqrt{10 + 4\varphi - 2}}{4} \\
 &= \frac{a^2\varphi^2 \sqrt{2 + \varphi}}{4}.
 \end{aligned} \tag{3.81}$$

Observa-se, nesse desenvolvimento, o emprego da identidade fundamental do número áureo, $\varphi^2 = \varphi + 1$, bem como da relação entre o número áureo e a raiz quadrada de cinco, ambas constantes no Quadro 2.3. Tais relações permitem a simplificação das expressões algébricas e dos radicais envolvidos.

Somando-se as áreas das duas regiões consideradas, obtém-se a área total do pentágono:

$$\begin{aligned}
 [ABCDE] &= \frac{a^2 \sqrt{2 + \varphi}}{4} (\varphi^2 + 1) \\
 &= \frac{a^2 \sqrt{2 + \varphi}}{4} (\varphi + 1 + 1)
 \end{aligned} \tag{3.82}$$

$$= \frac{a^2 \sqrt{2 + \varphi}}{4} (2 + \varphi). \tag{3.83}$$

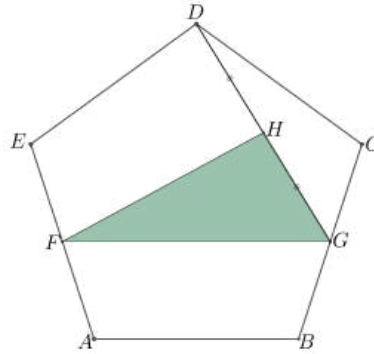
Dessa forma, conclui-se que a área do pentágono regular, em função do comprimento do lado a , é expressa por:

$$[ABCDE] = \frac{a^2(2 + \varphi)^{\frac{3}{2}}}{4} \quad \blacksquare \tag{3.84}$$

Problema 5.

Considere-se um pentágono regular $ABCDE$, de lado a , no qual os pontos F , G e H correspondem, respectivamente, aos pontos médios dos segmentos $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ e $\overline{DG}$. Calcular a relação entre a área do triângulo FGH e a área do pentágono $ABCDE$.

Figura 3.10 – Problema 5



Fonte: O autor.

Solução.

A estratégia de resolução adotada baseia-se na decomposição da região do triângulo FGH em áreas geometricamente relacionadas, permitindo sua determinação por meio de adições e subtrações convenientes. Observa-se que a área $[FGH]$ pode ser obtida a partir da soma da área do trapézio $[FGCE]$ com a área do triângulo $\triangle CDE$, subtraindo-se o dobro da área do triângulo $\triangle DEF$ e, posteriormente, dividindo-se o resultado por dois.

Essa divisão justifica-se pelo fato de o triângulo $\triangle DFG$ possuir base dupla em relação ao triângulo $\triangle FGH$, uma vez que o ponto H é o ponto médio do segmento $\overline{DG}$. O detalhamento geométrico dessa construção é apresentado na Figura 3.11.

A área do pentágono regular já foi determinada anteriormente na Subseção 3, sendo aqui reapresentada para fins de referência:

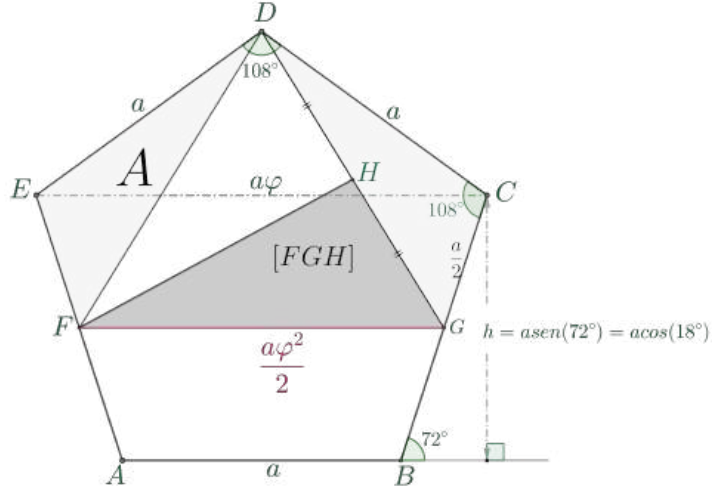
$$[ABCDE] = \frac{a^2(2 + \varphi)^{\frac{3}{2}}}{4}. \quad (3.85)$$

Desse modo, a área do triângulo FGH satisfaz a relação:

$$[FGH] = \frac{[FGCE] + [CDE] - 2[DEF]}{2}. \quad (3.86)$$

Utilizando-se a identidade fundamental do número áureo, bem como a expressão da base média do trapézio, ambas constantes do Quadro 2.3, determina-se o comprimento

Figura 3.11 – Detalhamento do problema 5



Fonte: O autor.

do segmento $\overline{FG}$:

$$\begin{aligned}
 \overline{FG} &= \frac{\overline{AB} + \overline{CE}}{2} \\
 &= \frac{a + a\varphi}{2} \\
 &= \frac{a\varphi^2}{2}.
 \end{aligned} \tag{3.87}$$

A área do trapézio $FGCE$ é calculada com base na expressão correspondente, constante do Quadro 2.3. Observa-se que a altura do trapézio é dada por $h' = \frac{a}{2} \cos 18^\circ$. Consultando-se o valor de $\cos 18^\circ$ na Tabela 2.2, expresso em função do número áureo, obtém-se:

$$\begin{aligned}
 [FGCE] &= \frac{a\varphi + \frac{a\varphi^2}{2}}{2} \cdot \frac{a}{2} \cdot \frac{\sqrt{2+\varphi}}{2} \\
 &= \frac{3\varphi + 1}{16} a^2 \sqrt{2+\varphi}.
 \end{aligned} \tag{3.88}$$

A área do triângulo $\triangle DEF$ pode ser determinada em função de dois lados e do ângulo compreendido entre eles, conforme expressão constante do Quadro 2.3:

$$[DEF] = \frac{1}{2} \cdot a \cdot \frac{a}{2} \cdot \cos 18^\circ. \tag{3.89}$$

Substituindo-se o valor de $\cos 18^\circ$, constante da Tabela 2.2, e empregando a relação entre o número áureo e a raiz quadrada de cinco, obtém-se:

$$2[DEF] = \frac{a^2 \sqrt{2+\varphi}}{4}. \tag{3.90}$$

De modo análogo, calcula-se a área do triângulo $\triangle CDE$:

$$[CDE] = \frac{a^2 \sqrt{2+\varphi}}{4}. \quad (3.91)$$

Substituindo-se esses valores na Equação (3.86), resulta:

$$\begin{aligned} [FGH] &= \frac{1}{2} \left[\frac{a^2 \sqrt{2+\varphi}}{4} \left(\frac{3\varphi+1}{4} \right) \right] \\ &= \frac{a^2(2+\varphi)^{\frac{1}{2}}}{4} \cdot \frac{3\varphi+1}{8}. \end{aligned} \quad (3.92)$$

A razão entre a área do triângulo FGH e a área do pentágono $ABCDE$ é, portanto, dada por:

$$\frac{[FGH]}{[ABCDE]} = \frac{a^2(2+\varphi)^{\frac{1}{2}}}{4} \cdot \frac{3\varphi+1}{8} \cdot \frac{4}{a^2(2+\varphi)^{\frac{3}{2}}}. \quad (3.93)$$

Simplificando-se a expressão e utilizando-se a identidade $\varphi^2 = \varphi + 1$, obtém-se:

$$\begin{aligned} \frac{[FGH]}{[ABCDE]} &= \frac{3\varphi+1}{8(2+\varphi)} \\ &= \frac{\varphi}{8}. \end{aligned} \quad (3.94)$$

Assim, conclui-se que a relação entre as áreas solicitadas é expressa por:

$$\frac{[FGH]}{[ABCDE]} = \frac{\varphi}{8} \quad \blacksquare \quad (3.95)$$

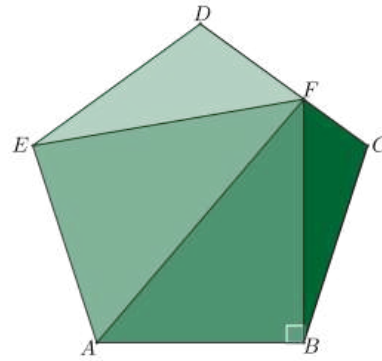
Problema 6.

No pentágono regular $ABCDE$, da figura a seguir, tem-se o segmento $\overline{BF}$ perpendicular ao lado $\overline{AB}$. A área do triângulo $\triangle FBC$ mede uma unidade e nestas condições pede-se mostrar que as áreas dos triângulos $\triangle ABF$, $\triangle AFE$ e $\triangle DEF$ medem respectivamente 2φ , $\varphi + 2$ e φ .

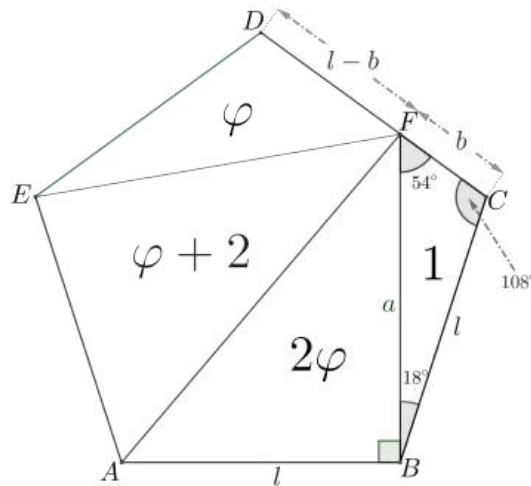
Solução.

A resolução apresentada a seguir fundamenta-se em resultados previamente estabelecidos ao longo deste trabalho, de modo a evitar repetições desnecessárias. Em particular, utiliza-se o resultado obtido no problema 4, segundo o qual a área de um pentágono regular de lado l é dada por:

$$[ABCDE] = \frac{l^2(2+\varphi)^{\frac{3}{2}}}{4}. \quad (3.96)$$

Figura 3.12 – Problema 6

Fonte: O autor.

Figura 3.13 – Detalhamento do problema 6

Fonte: O autor.

Com base na Tabela 2.2, expressam-se as razões trigonométricas relevantes em função do número áureo. Para tanto, utiliza-se a relação entre o número áureo e a raiz quadrada de cinco, apresentada no Quadro 2.3:

$$\operatorname{sen} 18^\circ = \frac{1}{2\varphi}, \quad \operatorname{sen} 54^\circ = \frac{\varphi}{2}, \quad \cos 18^\circ = \frac{(2 + \varphi)^{\frac{1}{2}}}{2}. \quad (3.97)$$

A área do triângulo $\triangle BCF$, em função de dois lados e do ângulo compreendido entre eles, conforme apresentado no Quadro 2.3, é dada por:

$$[BCF] = \frac{1}{2} l a \operatorname{sen} 18^\circ. \quad (3.98)$$

Impondo-se a condição estabelecida no problema $[BCF]=1$, substituindo $\operatorname{sen} 18^\circ =$

$\frac{1}{2\varphi}$, da Tabela 2.2, e isolando “ a ” obtém-se:

$$a = \frac{4\varphi}{l}. \quad (3.99)$$

A área do triângulo $\triangle ABF$, cuja base é a e cuja altura é l , conforme expressão constante no Quadro 2.3, resulta em:

$$[ABF] = \frac{1}{2} a l = \frac{1}{2} \cdot \frac{4\varphi}{l} \cdot l = 2\varphi \quad \blacksquare \quad (3.100)$$

Aplicando-se a lei dos senos, apresentada na Subseção 2.16.9, ao triângulo $\triangle BCF$, tem-se:

$$\frac{a}{\sin 108^\circ} = \frac{l}{\sin 54^\circ}. \quad (3.101)$$

Utilizando-se as identidades trigonométricas $\sin 108^\circ = \cos 18^\circ$ e os valores apresentados em (3.97), obtém-se:

$$\frac{a}{(2 + \varphi)^{\frac{1}{2}}} = \frac{l}{\varphi}. \quad (3.102)$$

Das expressões (3.99) e (3.102), conclui-se que:

$$l^2 = \frac{4\varphi^2}{(2 + \varphi)^{\frac{1}{2}}}. \quad (3.103)$$

Ainda no triângulo $\triangle BCF$, pela aplicação da lei dos senos, obtém-se:

$$\frac{b}{\sin 18^\circ} = \frac{l}{\sin 54^\circ} \Rightarrow b = \frac{l}{\varphi^2}. \quad (3.104)$$

O comprimento do segmento $\overline{DF}$ pode, então, ser expresso por:

$$\overline{DF} = l - b = l \left(1 - \frac{1}{\varphi^2} \right) = \frac{l}{\varphi}. \quad (3.105)$$

A área do triângulo $\triangle DEF$, dados dois lados e o ângulo compreendido, conforme o Quadro 2.3, é dada por:

$$[DEF] = \frac{1}{2} l (l - b) \sin 108^\circ. \quad (3.106)$$

Substituindo-se o valor de $l - b$ obtido em (3.105) e atentando ao fato que $\sin 108^\circ = \cos 18^\circ = \frac{(2 + \varphi)^{\frac{1}{2}}}{2}$, da Tabela 2.2, resulta:

$$[DEF] = \frac{l^2 (2 + \varphi)^{\frac{1}{2}}}{4\varphi}. \quad (3.107)$$

Por fim, substituindo-se o valor de l^2 dado em (3.103) na expressão (3.107), conclui-se que:

$$[DEF] = \varphi \quad \blacksquare \quad (3.108)$$

Resta determinar a área da região $[AEF]$, o que é feito por subtração das áreas parciais. Substituindo-se (3.103) em (3.96), obtém-se:

$$[ABCDE] = \varphi^2(2 + \varphi). \quad (3.109)$$

Assim,

$$\begin{aligned} [AEF] &= [ABCDE] - [BCF] - [ABF] - [DEF] \\ &= \varphi^2(2 + \varphi) - 1 - 2\varphi - \varphi \\ &= (1 + \varphi)(2 + \varphi) - 1 - 2\varphi - \varphi \\ &= 1 + \varphi^2 \\ &= 2 + \varphi \quad \blacksquare \end{aligned} \quad (3.110)$$

4 RESULTADOS E DISCUSSÃO

4.1 Resultados

A aplicação da metodologia proposta, baseada na coleta, seleção e resolução de problemas geométricos associados ao Número Áureo, permitiu a identificação de um conjunto consistente de situações matemáticas nas quais a razão áurea se manifesta de forma explícita ou implícita. Os problemas analisados, oriundos de grupos especializados em geometria e matemática recreativa, revelaram que o número áureo não se limita a contextos estéticos ou históricos, mas emerge naturalmente de construções rigorosas da geometria euclidiana plana, especialmente aquelas relacionadas ao pentágono regular, ao pentagrama, aos triângulos áureos e às relações trigonométricas de ângulos notáveis.

Os resultados obtidos evidenciam que grande parte das relações métricas presentes nessas figuras pode ser expressa diretamente em termos de φ , φ^2 ou de expressões radicais equivalentes. Em particular, observou-se que, nos problemas envolvendo o pentágono regular, as diagonais e os lados apresentam uma razão constante igual ao número áureo, o que conduz naturalmente à formação do pentagrama e a sucessivas subdivisões em triângulos semelhantes. Esse comportamento geométrico confirma que a razão áurea atua como um invariante estrutural dessas construções, garantindo a repetição de padrões proporcionais em diferentes escalas.

No âmbito da trigonometria, os valores exatos de seno, cosseno e tangente de ângulos como 18° , 36° , 54° e 72° , apresentados na Tabela 2.2, foram obtidos a partir do valor do seno de dezoito graus calculado na construções geométricas da Figura 2.12. Das fórmulas de seno e cosseno do arco metade, arco duplo, arco triplo e da relação fundamental da trigonometria pode-se completar a tabela citada. Tais valores, frequentemente apresentados apenas de forma algébrica em manuais de trigonometria, puderam ser interpretados geometricamente, o que fortalece sua compreensão conceitual. Além disso, as fórmulas trigonométricas de Werner, apresentadas no Quadro 2.2, mostraram-se ferramentas eficazes para a obtenção desses valores, permitindo calcular senos e cossenos de arcos especiais por meio de somas, diferenças, arcos metade e arcos duplos.

Outro resultado relevante foi a possibilidade de resolver problemas de áreas, comprimentos e proporções por meio do uso direto do número áureo, reduzindo significativamente a complexidade algébrica dos cálculos. Em vários dos problemas analisados, expressões que inicialmente envolveriam sistemas de equações ou aplicações extensas do Teorema de Pitágoras puderam ser simplificadas ao reconhecer-se a presença de proporções áureas nos segmentos envolvidos.

4.2 Discussão

Os resultados obtidos confirmam a hipótese central deste trabalho: o Número Áureo não constitui apenas uma curiosidade matemática ou um elemento estético associado à arte e à natureza, mas um objeto matemático de grande potência didática e estrutural. Sua presença recorrente nas construções do pentágono regular, nos triângulos áureos e nas relações trigonométricas evidencia que φ emerge como consequência natural da própria lógica interna da geometria euclidiana.

Do ponto de vista pedagógico, a abordagem adotada mostrou-se particularmente relevante. Ao substituir a apresentação puramente algébrica de fórmulas por construções geométricas, o estudante é conduzido a compreender de onde surgem as relações trigonométricas e por que certos valores assumem formas específicas envolvendo radicais e o número áureo. Isso favorece a aprendizagem significativa, pois conecta diferentes áreas da matemática — geometria, álgebra e trigonometria — em um mesmo contexto conceitual.

Essa perspectiva fundamenta-se na teoria da aprendizagem significativa de Ausubel, que enfatiza o papel central da estrutura cognitiva prévia do estudante no processo educacional. Segundo o autor:

A aprendizagem significativa ocorre quando novas ideias, informações ou conceitos se relacionam de maneira não arbitrária e substantiva com ideias relevantes já existentes na estrutura cognitiva do aprendiz. O fator isolado mais importante que influencia a aprendizagem é aquilo que o estudante já sabe. Descubra isso e ensine-o de acordo. (AUSUBEL, 1968, p. vi, tradução nossa).

Assim, ao promover a integração entre diferentes campos da matemática por meio de construções geométricas fundamentadas conceitualmente, cria-se um ambiente propício para que novos conhecimentos se ancorem em estruturas cognitivas já consolidadas, favorecendo uma aprendizagem duradoura e significativa.

À luz dessa concepção, ao articular diferentes campos da matemática em torno de construções geométricas significativas, promove-se a ancoragem dos novos conteúdos aos conhecimentos já existentes na estrutura cognitiva do aluno, favorecendo, assim, a consolidação de uma aprendizagem não mecânica, mas verdadeiramente significativa.

A utilização das fórmulas de Werner, por sua vez, revelou-se uma estratégia eficiente tanto do ponto de vista matemático quanto didático. Essas fórmulas permitem explorar identidades trigonométricas de maneira sistemática e visualmente fundamentada, sobretudo quando associadas a triângulos e figuras geométricas que apresentam simetrias e proporcionalidades áureas. Tal abordagem contrasta com métodos puramente mecânicos

de resolução, frequentemente encontrados no ensino tradicional, nos quais o aluno aplica fórmulas sem compreender sua origem.

Além disso, a análise dos problemas coletados em ambientes informais de aprendizagem, como grupos de redes sociais, demonstrou que a matemática recreativa e os desafios geométricos possuem grande potencial como instrumentos motivadores. Esses problemas, embora muitas vezes apresentados como enigmas ou desafios visuais, contêm uma rica estrutura matemática que pode ser explorada em sala de aula, promovendo o raciocínio lógico, a visualização espacial e a argumentação matemática.

Por fim, os resultados deste trabalho indicam que o uso do Número Áureo como fio condutor no ensino da geometria plana pode contribuir para tornar o aprendizado mais integrado, intuitivo e atraente. Ao revelar padrões recorrentes e relações proporcionais profundas, o estudo de φ possibilita ao estudante perceber a matemática não como um conjunto fragmentado de fórmulas, mas como um sistema coerente de ideias interligadas.

5 CONCLUSÃO

O presente trabalho teve como objetivo investigar o Número Áureo como elemento estruturante da geometria euclidiana plana e como recurso didático no ensino da matemática, especialmente no contexto da Educação Básica. A partir da análise de construções geométricas, problemas clássicos e relações trigonométricas, foi possível evidenciar que a razão áurea não constitui apenas uma curiosidade matemática, mas um conceito profundamente enraizado na própria organização das figuras geométricas, em particular aquelas relacionadas ao pentágono regular e às formas dele derivadas.

Os resultados obtidos demonstraram que muitas relações métricas e proporcionais podem ser expressas de maneira simples por meio do número áureo, permitindo uma significativa redução da complexidade algébrica dos cálculos envolvidos. Essa característica torna o estudo de φ especialmente relevante no ensino, pois possibilita que o estudante compreenda e resolva problemas geométricos complexos a partir de relações proporcionais elegantes e recorrentes. Além disso, a articulação entre geometria, álgebra e trigonometria evidenciou o caráter integrador do número áureo, reforçando sua importância como eixo organizador de diversos conteúdos matemáticos.

Do ponto de vista pedagógico, a abordagem adotada neste trabalho contribui para a construção de uma aprendizagem mais significativa, uma vez que associa fórmulas e procedimentos a construções geométricas concretas e visualmente interpretáveis. A utilização de problemas extraídos de ambientes informais de aprendizagem, como redes sociais e comunidades de matemática, mostrou-se uma estratégia eficaz para aproximar o estudante de situações-problema desafiadoras, despertando o interesse, a curiosidade e o pensamento crítico.

Assim, conclui-se que o Número Áureo, quando explorado de forma sistemática e contextualizada, constitui uma poderosa ferramenta para o ensino da geometria plana, favorecendo não apenas o domínio técnico dos conteúdos, mas também o desenvolvimento do raciocínio lógico, do entendimento e aplicação das propriedades das entidades geométricas e da apreciação da Matemática como uma ciência estruturada e harmoniosa.

6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Ao longo deste trabalho, buscou-se demonstrar que o Número Áureo pode desempenhar um papel central na organização e compreensão de diversos fenômenos geométricos e trigonométricos. As análises realizadas indicam que sua presença em construções clássicas da geometria euclidiana não é acidental, mas resulta de propriedades matemáticas profundas relacionadas à semelhança, à proporcionalidade e à simetria.

Do ponto de vista do ensino, a exploração do número áureo como elemento unificador de diferentes conteúdos revela-se particularmente promissora. Ao permitir a conexão entre figuras geométricas, identidades trigonométricas e relações algébricas, essa abordagem contribui para superar a fragmentação frequentemente observada no ensino da matemática, favorecendo uma visão mais integrada e coerente da disciplina.

Espera-se que os resultados e reflexões apresentados neste trabalho possam servir de subsídio para professores e futuros docentes no planejamento de atividades que valorizem a investigação, a visualização e a resolução de problemas. A incorporação do Número Áureo em práticas pedagógicas pode estimular a curiosidade dos alunos, promover o pensamento matemático e fortalecer a compreensão dos conceitos fundamentais da geometria e da trigonometria.

Essa perspectiva dialoga com a concepção de resolução de problemas defendida por Pólya, para quem o ensino de Matemática deve estimular o raciocínio ativo e a busca de estratégias. Conforme afirma o autor:

Resolver um problema significa encontrar um meio de superar uma dificuldade, uma maneira de contornar um obstáculo, alcançar um objetivo que não era imediatamente alcançável. É uma grande descoberta resolver qualquer problema. Se você deseja aprender a nadar, precisa entrar na água; e, se deseja tornar-se um bom resolvidor de problemas, precisa resolver problemas. (PÓLYA, 1945, p. 1, tradução nossa).

À luz dessa concepção, ao propor atividades que envolvam exploração geométrica e investigação conceitual, cria-se um ambiente no qual o estudante não apenas aplica fórmulas, mas constrói estratégias, testa hipóteses e desenvolve autonomia intelectual, elementos centrais no pensamento matemático defendido por Pólya.

Como perspectivas futuras, sugere-se a ampliação deste estudo para a análise do número áureo em contextos tridimensionais, em sequências numéricas como a de Fibonacci e em aplicações interdisciplinares envolvendo arte, arquitetura e biologia. Tais desdobramentos podem enriquecer ainda mais o potencial didático desse notável objeto matemático e contribuir para uma formação matemática mais rica e significativa.

REFERÊNCIAS

- BARR, M. A note on the golden ratio. *The American Mathematical Monthly*, v. 16, n. 1, p. 1–2, 1909. Primeira utilização documentada do símbolo φ para o número áureo.
- Brasil. *Base Nacional Comum Curricular*. Brasília: Ministério da Educação, 2018.
- COXETER, H. S. M. *Introduction to Geometry*. New York: Wiley, 1969.
- EUCLID. *The Elements*: Books i–xiii. Austin: The University of Texas at Austin, 2009. Translated from Greek by Richard Fitzpatrick. Available at <<https://farside.ph.utexas.edu/Books/Euclid/Elements.pdf>>.
- EUCLIDES. *Os Elementos*. São Paulo: Editora UNESP, 2009.
- Fatos Desconhecidos. *O número áureo está em tudo*. 2022. <<https://www.youtube.com/watch?v=XXXX>>. Vídeo disponível no YouTube. Acesso em: 5 fev. 2026.
- HERZ-FISCHLER, R. *A Mathematical History of the Golden Number*. New York: Dover, 1987.
- HUNTLEY, H. E. *The Divine Proportion: A Study in Mathematical Beauty*. 1. ed. New York: Dover Publications, 1970.
- IEZZI, G. *Fundamentos de matemática elementar, 3: trigonometria*. [S.l.]: Atual, 2013.
- KEPLER, J. *Harmonices Mundi*. Linz: Johannes Planck, 1619. Obra na qual Kepler descreve a proporção áurea como um dos tesouros da geometria.
- KOSHY, T. *Fibonacci and Lucas Numbers with Applications*. 2. ed. Hoboken: John Wiley & Sons, 2011.
- LIVIO, M. *The Golden Ratio: The Story of Phi, the World's Most Astonishing Number*. New York: Broadway Books, 2003.
- LIVIO, M. *The Golden Ratio: The Story of Phi, the World's Most Astonishing Number*. 1. ed. New York: Broadway Books, 2008.
- PACIOLI, L. *De Divina Proportione*. Veneza: Paganino de Paganini, 1509.
- PRUSINKIEWICZ, P.; LINDENMAYER, A. *The Algorithmic Beauty of Plants*. New York: Springer, 1990.
- SIGLER, L. E. *Fibonacci's Liber Abaci: A Translation into Modern English of Leonardo Pisano's Book of Calculation*. New York: Springer, 2002.
- VINCI, L. da. *The Notebooks of Leonardo da Vinci*. New York: Dover Publications, 1970. Reimpressão das anotações originais do século XV–XVI.

APÊNDICE A – FÓRMULA DO TERMO GERAL DA SEQUÊNCIA DE FIBONACCI

Este capítulo apresenta a demonstração da fórmula do termo geral da sequência de Fibonacci, uma sequência numérica amplamente estudada na Matemática, com aplicações em diversas áreas do conhecimento.

A sequência de Fibonacci é definida pelos termos iniciais

$$0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, \dots,$$

nos quais cada termo, a partir do terceiro, é obtido pela soma dos dois anteriores. Tal propriedade permite descrevê-la por meio da relação de recorrência

$$F_{n+2} = F_{n+1} + F_n.$$

O objetivo consiste em determinar uma expressão fechada que descreva essa sequência, dispensando o uso da definição recursiva. Para tanto, observa-se que a sequência é completamente determinada pelo sistema

$$\begin{cases} F_{n+2} = F_{n+1} + F_n, \\ F_0 = 0, \\ F_1 = 1. \end{cases}$$

Ressalta-se que a relação de recorrência, isoladamente, não define uma sequência única, uma vez que existem infinitas sequências que a satisfazem. A unicidade da sequência de Fibonacci é garantida somente quando as condições iniciais são especificadas.

A unicidade pode ser demonstrada por absurdo. Admita-se a existência de duas sequências (A_n) e (B_n) distintas que satisfaçam o sistema acima, com

$$A_0 = B_0 = 0 \quad \text{e} \quad A_1 = B_1 = 1.$$

Suponha-se que exista um índice mínimo $k > 1$ tal que

$$A_k \neq B_k.$$

Como ambas satisfazem a relação de recorrência, tem-se

$$A_k = A_{k-1} + A_{k-2} \quad \text{e} \quad B_k = B_{k-1} + B_{k-2}.$$

Entretanto, pela escolha de k como o menor índice de divergência, segue que

$$A_{k-1} = B_{k-1} \quad \text{e} \quad A_{k-2} = B_{k-2},$$

o que implica $A_k = B_k$, gerando uma contradição. Portanto, a sequência definida pelo sistema é única.

Estabelecida a unicidade, procede-se à investigação de uma expressão fechada para o termo geral. Para isso, considera-se o comportamento da razão entre termos consecutivos da sequência. Dividindo-se a relação de recorrência por F_{n+1} , obtém-se

$$\frac{F_{n+2}}{F_{n+1}} = 1 + \frac{F_n}{F_{n+1}} = 1 + \frac{1}{\frac{F_{n+1}}{F_n}}.$$

O cálculo de algumas razões sucessivas fornece aproximações como

$$\frac{F_{14}}{F_{13}} \approx 1,6180555, \quad \frac{F_{17}}{F_{16}} \approx 1,6180327, \quad \frac{F_{19}}{F_{18}} \approx 1,6180339,$$

indicando a convergência para um número real positivo r .

Admitindo-se a existência do limite

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F_{n+1}}{F_n} = r,$$

tem-se, no limite,

$$r = 1 + \frac{1}{r},$$

o que equivale à equação quadrática

$$r^2 - r - 1 = 0.$$

As soluções dessa equação são

$$r_1 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \quad \text{e} \quad r_2 = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}.$$

Esses valores permitem construir soluções da forma $F_n = r^n$ para a relação de recorrência. Assim, a solução geral pode ser escrita como uma combinação linear:

$$F_n = A \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n + B \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n.$$

Aplicando-se as condições iniciais, obtém-se

$$A = \frac{1}{\sqrt{5}} \quad \text{e} \quad B = -\frac{1}{\sqrt{5}},$$

resultando na expressão fechada do termo geral da sequência de Fibonacci:

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n \right].$$

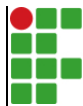
Essa expressão é conhecida como fórmula de Binet e permite o cálculo direto do n -ésimo termo da sequência de Fibonacci, sem recorrer à definição recursiva. Embora receba o nome de Jacques Philippe Marie Binet, fórmulas equivalentes já haviam sido estudadas anteriormente por Abraham de Moivre e Leonhard Euler no século XVIII, sendo posteriormente sistematizadas e difundidas por Binet no século XIX.

Figura A.1 – Retrato artístico de Jacques Philippe Marie Binet (1776–1856).¹



Fonte: Imagem gerada por inteligência artificial (ChatGPT/DALL · E, em 10/02/2026).

¹ Prompt utilizado: Retrato artístico de época em estilo pintura a óleo neoclássica do século XIX, representando um matemático francês em meia-idade, inspirado em Jacques Philippe Marie Binet. O personagem está em posição frontal levemente angulada, com expressão serena e olhar direto ao observador. Cabelos curtos e ondulados em tom castanho escuro, vestindo traje formal do início do século XIX: casaca preta, colete claro e camisa branca com colarinho alto. Iluminação suave e difusa, fundo neutro em tons quentes, estilo acadêmico e realista, adequado para trabalho científico.



INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA DA PARAÍBA
Campus Cajazeiras - Código INEP: 25008978
Rua José Antônio da Silva, 300, Jardim Oásis, CEP 58.900-000, Cajazeiras (PB)
CNPJ: 10.783.898/0005-07 - Telefone: (83) 3532-4100

Documento Digitalizado Ostensivo (Público)

ENTREGA DO TCC

Assunto:	ENTREGA DO TCC
Assinado por:	Stenio Ferreira
Tipo do Documento:	Demonstrativo
Situação:	Finalizado
Nível de Acesso:	Ostensivo (Público)
Tipo do Conferência:	Cópia Simples

Documento assinado eletronicamente por:

- **Stenio Machado Ferreira, DISCENTE (202112020021) DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA - CAJAZEIRAS**, em 03/03/2026 09:13:20.

Este documento foi armazenado no SUAP em 03/03/2026. Para comprovar sua integridade, faça a leitura do QRCode ao lado ou acesse <https://suap.ifpb.edu.br/verificar-documento-externo/> e forneça os dados abaixo:

Código Verificador: 1785467

Código de Autenticação: 1491923eac

