



**INSTITUTO  
FEDERAL**  
Paraíba

**Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia da Paraíba**

**Campus João Pessoa**

**Programa de Pós-Graduação em Tecnologia da Informação**

**Nível Mestrado Profissional**

**CALEBE OLIVEIRA DE FIGUEIRÊDO**

**HIPER-HEURÍSTICAS E MÉTODOS EXATOS  
APLICADOS AO PROBLEMA DO POSICIONAMENTO DE  
PONTOS DE ACESSO EM AMBIENTES INTERNOS**

**DISSERTAÇÃO DE MESTRADO**

**JOÃO PESSOA**

**2026**

**Calebe Oliveira de Figueirêdo**

**Hiper-heurísticas e métodos exatos aplicados ao Problema do  
Posicionamento de Pontos de Acesso em Ambientes Internos**

Dissertação apresentada como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Tecnologia da Informação, pelo Programa de Pós-Graduação em Tecnologia da Informação do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia da Paraíba – IFPB.

Orientador: Prof. Dr. Thiago Gouveia

João Pessoa

2026

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)  
Biblioteca Nilo Peçanha - *Campus* João Pessoa, PB.

F475h Figueirêdo, Calebe Oliveira de.

Hiper-heurísticas e métodos exatos aplicados ao problema do posicionamento de pontos de acesso em ambientes internos / Calebe Oliveira de Figueirêdo. – 2026.

100 f. : il.

Dissertação (Mestrado em Tecnologia da Informação) – Instituto Federal de Educação da Paraíba / Programa de Pós-Graduação em Tecnologia da Informação (PPGTI), 2026.

Orientação: Prof<sup>o</sup> Dr. Thiago Gouveia.

1. APPP. 2. Hiper-heurísticas. 3. Otimização exata. 4. Redes wi-fi internas. I. Título.

CDU 004.023(043)

**CALEBE OLIVEIRA FIGUEIRÊDO**

**HIPER-HEURÍSTICAS E MÉTODOS EXATOS APLICADOS AO PROBLEMA DO POSICIONAMENTO DE PONTOS DE ACESSO EM AMBIENTES INTERNOS**

**DISSERTAÇÃO** apresentada como requisito para obtenção do título de Mestre em Tecnologia da Informação, pelo Programa de Pós-Graduação em Tecnologia da Informação do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia da Paraíba - IFPB - Campus João Pessoa.

Aprovado em 09 de março de 2026.

**Membros da Banca Examinadora:**

**Prof. Dr. Thiago Gouveia da Silva**  
Instituto Federal da Paraíba (IFPB)  
*Orientador*

**Prof. Dr. Ruan Delgado Gomes**  
Instituto Federal da Paraíba (IFPB)  
*Examinador*

**Prof. Dr. Gilberto Farias de Sousa Filho**  
Instituto Federal da Paraíba (UFPB)  
*Examinador*

Documento assinado eletronicamente por:

- **Thiago Gouveia da Silva**, PROFESSOR ENS BASICO TECN TECNOLOGICO, em 10/03/2026 09:37:52.
- **Ruan Delgado Gomes**, PROFESSOR ENS BASICO TECN TECNOLOGICO, em 10/03/2026 09:47:18.
- **Gilberto Farias de Sousa Filho**, PROFESSOR DE ENSINO SUPERIOR NA ÁREA DE ORIENTAÇÃO EDUCACIONAL, em 10/03/2026 14:29:20.

Este documento foi emitido pelo SUAP em 06/03/2026. Para comprovar sua autenticidade, faça a leitura do QRCode ao lado ou acesse <https://suap.ifpb.edu.br/autenticar-documento/> e forneça os dados abaixo:

Código 845954

Verificador: f2018c96e4

Código de Autenticação:



# AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente a Deus, por me conceder saúde, força, disposição e perseverança durante a jornada acadêmica e de trabalho nos últimos anos.

Aos meus pais, Moisés e Disterro, pelo amor incondicional, pelo incentivo constante e pelo investimento de tempo e dedicação na minha criação, sem os quais eu não teria chegado até aqui. Aos meus irmãos, Jeriel e Quézia, que também sempre me incentivaram. Quanto mais penso sobre nossa criação, mais me sinto abençoado.

À minha esposa, Andressa, que me ajuda de diversas formas, me acompanhou com frequência no desenvolvimento deste trabalho e foi meu porto seguro nos momentos de maior dificuldade. Aos meus sogros, meus segundos pais, que sempre nos apoiam desde o início. Me sinto muito privilegiado pela família que tenho.

Ao meu orientador, Prof. Dr. Thiago Gouveia, pela dedicação, paciência e pelos ensinamentos de extrema importância para o desenvolvimento deste trabalho. Sua orientação foi determinante para o meu crescimento acadêmico e profissional, e suas observações aguçadas foram um diferencial para a conclusão desta dissertação.

Aos colegas do laboratório do POP, com quem compartilhei todos esses anos frequentando o mesmo espaço e enfrentando desafios hercúleos pelo simples prazer de resolver problemas difíceis de otimização e programação competitiva. A convivência e as trocas ao longo desse período foram importantíssimas para o meu desenvolvimento como pesquisador, comunicador e engenheiro.

A todos que, direta ou indiretamente, contribuíram para a realização desta dissertação, os meus sinceros agradecimentos.

*"Mas o que sou eu para mim mesmo sem Ti,  
senão um guia para minha própria queda?"  
(Agostinho de Hipona, Confissões, Livro IV)*

## RESUMO

O crescente uso de dispositivos móveis e aplicações de alta demanda torna o planejamento eficiente de redes Wi-Fi em ambientes internos um desafio relevante. O Problema do Posicionamento de Pontos de Acesso (APPP) consiste em determinar a quantidade, localização e configuração de *Access Points* (APs) de modo a garantir cobertura e capacidade adequadas, minimizando custos. Trata-se de um problema de otimização NP-difícil, cuja complexidade limita a aplicação de métodos exatos em instâncias de grande porte. Este trabalho propõe e avalia duas abordagens complementares para o APPP: hiper-heurísticas e métodos de otimização exata. Na vertente heurística, foram desenvolvidas hiper-heurísticas *online* e *offline*, além da aplicação do algoritmo BRKGA, incorporando novas heurísticas de construção e busca local específicas para o problema. Os experimentos demonstraram que as hiper-heurísticas obtiveram valores de função objetivo menores ou iguais aos melhores resultados da literatura em instâncias de médio e grande porte, com diferenças estatisticamente significativas ( $p < 0,05$ ) pelo teste de Wilcoxon. Na vertente exata, foram propostas duas formulações matemáticas baseadas em cobertura de pontos e cobertura de regiões, incorporando modelos de propagação e restrições realistas de capacidade e canais. Testes conduzidos em 148 instâncias reais indicaram que a formulação baseada em regiões apresenta melhor escalabilidade computacional, com menor incidência de *timeout* em instâncias maiores e reduções de até 97% no número de APs em relação à formulação baseada em pontos. Enquanto métodos exatos se mostraram viáveis para instâncias pequenas e médias, as abordagens heurísticas apresentaram melhor desempenho em cenários de maior porte. Os resultados evidenciam que a combinação de hiper-heurísticas e modelagens exatas constitui uma estratégia eficaz para o APPP, contribuindo com novas heurísticas, formulações matemáticas e análises comparativas fundamentadas estatisticamente.

**Palavras-chaves:** APPP, hiper-heurísticas, otimização exata, redes Wi-Fi internas.

## ABSTRACT

The increasing use of mobile devices and bandwidth-intensive services makes efficient indoor Wi-Fi network planning a relevant challenge. The Access Point Placement Problem (APPP) consists of determining the number, location, and configuration of Access Points (APs) to ensure adequate coverage and capacity while minimizing costs. This is an NP-hard optimization problem, whose computational complexity limits the applicability of exact methods to large-scale instances. This work proposes and evaluates two complementary approaches to the APPP: hyper-heuristics and exact optimization methods. In the heuristic framework, online and offline hyper-heuristics were developed, along with the application of the Biased Random-Key Genetic Algorithm (BRKGA), incorporating new construction and local search heuristics tailored to the problem. Computational experiments demonstrated that the hyper-heuristic approaches achieved objective function values equal to or better than the best results reported in the literature for medium and large-scale instances, with statistically significant differences ( $p < 0.05$ ) as assessed by the Wilcoxon signed-rank test. In the exact optimization framework, two mathematical formulations were proposed based on point coverage and region coverage, incorporating propagation models and realistic capacity and channel constraints. Experiments conducted on 148 real-world instances indicate that the region-based formulation presents better computational scalability, with fewer timeouts for larger instances and reductions of up to 97% in the number of APs compared to the point-based formulation. While exact methods proved viable for small and medium-sized instances, heuristic approaches showed superior performance in larger scenarios. The results demonstrate that combining hyper-heuristics and exact modeling constitutes an effective strategy for addressing the APPP, contributing new heuristics, mathematical formulations, and statistically grounded comparative analyses.

**Key-words:** Access Point Placement Problem, hyper-heuristics, exact optimization, indoor Wi-Fi networks.

## LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Exemplo de planta-baixa . . . . .	14
Figura 2 – Classificação de hiper-heurísticas . . . . .	21
Figura 3 – Fluxograma de etapas de projeto de posicionamento de APs . . . . .	27
Figura 4 – Exemplo de iteração do <i>AllChangeLink()</i> . . . . .	36
Figura 5 – Exemplo de iteração do <i>AllDryAP()</i> . . . . .	38
Figura 6 – Exemplo de iteração do <i>BestAddAP()</i> . . . . .	39
Figura 7 – Exemplo de iteração do <i>AllBestRadiusType()</i> . . . . .	40
Figura 8 – Exemplo de iteração do <i>BestLink()</i> . . . . .	41
Figura 9 – Exemplo de iteração do <i>AllBestCapacityType()</i> . . . . .	42
Figura 10 – Exemplo de iteração do <i>AllClosestMoveAP()</i> . . . . .	43
Figura 11 – Sequência de <i>bits</i> de uma solução . . . . .	43
Figura 12 – Exemplo de execução do BSP . . . . .	45
Figura 13 – Exemplo de uma planta discretizada . . . . .	47
Figura 14 – Curvas de p-valores para comparações pareadas entre métodos . . . . .	53
Figura 15 – Exemplo de planta-baixa discretizada no modelo de cobertura de pontos. . .	58
Figura 16 – Exemplo de planta-baixa com pontos representativos selecionados por região	65
Figura 17 – Cisco Catalyst 9162I . . . . .	71
Figura 18 – Distribuição das 148 instâncias por categoria de tamanho. . . . .	74
Figura 19 – Número médio de APs por categoria de tamanho . . . . .	75
Figura 20 – Tempo computacional médio por categoria de tamanho . . . . .	76
Figura 21 – Percentual de execuções que atingiram o limite de <i>timeout</i> por categoria . .	77

## LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Modelo de atenuação para anteparos . . . . .	47
Tabela 2 – Execução de testes com instâncias de dimensões 8x14 . . . . .	49
Tabela 3 – Execução de testes com instâncias de dimensões 13x13 . . . . .	49
Tabela 4 – Execução de testes com instâncias de dimensões 11x23 . . . . .	49
Tabela 5 – Execução de testes com instâncias de dimensões 25x25 . . . . .	50
Tabela 6 – Execução de testes com instâncias de dimensões 30x30 . . . . .	50
Tabela 7 – Execução de testes com instâncias de dimensões 50x25 . . . . .	50
Tabela 8 – Execução de testes com instâncias de dimensões 50x50 . . . . .	51
Tabela 9 – Execução de testes com instâncias de dimensões 100x50 . . . . .	51
Tabela 10 – Execução de testes com instâncias de dimensões 100x100 . . . . .	52
Tabela 11 – Teste de normalidade (Shapiro-Wilk) para as melhores soluções . . . . .	54
Tabela 12 – Teste de normalidade (Shapiro-Wilk) para as soluções médias . . . . .	54
Tabela 13 – Testes estatísticos para comparações pareadas (melhores soluções) . . . . .	54
Tabela 14 – Testes estatísticos para comparações pareadas (soluções médias) . . . . .	55
Tabela 15 – Limiares de RSSI e taxas de dados por banda, categoria de ponto e tipo de associação . . . . .	60
Tabela 16 – Canais suportados pelo Cisco Catalyst 9162 . . . . .	72
Tabela 17 – Características gerais das instâncias experimentais . . . . .	73
Tabela 18 – Comparação do número de APs obtidos pelos métodos exatos . . . . .	74
Tabela 19 – Resultados médios por categoria de tamanho de instância . . . . .	75
Tabela 20 – Análise de <i>timeouts</i> (execuções que atingiram 600 segundos) . . . . .	75
Tabela 21 – Percentual de <i>timeouts</i> por categoria de tamanho. . . . .	76
Tabela 22 – Correlação entre pontos de alta demanda e métricas de desempenho . . . . .	77
Tabela 23 – Top 10 instâncias com maior diferença absoluta a favor do Método por Regiões. . . . .	78
Tabela 24 – Top 10 instâncias com maior redução percentual a favor do Método por Regiões. . . . .	78
Tabela 25 – Expoente de Perda de Percurso e desvio padrão medidos em diferentes edifícios. . . . .	87
Tabela 26 – Coeficientes de perda de potência, $n$ , para cálculo de perda de transmissão em ambientes internos . . . . .	88
Tabela 27 – Fatores de perda por penetração em pisos, $PL_f$ (dB), com $n$ sendo o número de andares penetrados, para cálculo de perda de transmissão interna . . . . .	89
Tabela 28 – Resultados experimentais completos para todas as instâncias testadas. . . . .	95

## LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

AG	Algoritmo Genético
AP	<i>Access Point</i> (Ponto de Acesso)
APPP	<i>Access Point Placement Problem</i> (Problema do Posicionamento de Pontos de Acesso)
BRKGA	<i>Biased Random-Key Genetic Algorithm</i>
COST	<i>European Cooperation in Science and Technology</i>
FDTD	<i>Finite Difference Time-Domain</i>
ILS	<i>Iterated Local Search</i>
ITU-R	<i>International Telecommunication Union – Radiocommunication Sector</i>
MAC	<i>Medium Access Control</i>
NP	<i>Nondeterministic Polynomial Time</i>
QoS	<i>Quality of Service</i> (Qualidade de Serviço)
RSSI	<i>Received Signal Strength Indicator</i>
SA	<i>Simulated Annealing</i>
TS	<i>Tabu Search</i>

# SUMÁRIO

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO</b>	<b>13</b>
<b>1.1</b>	<b>Objetivos</b>	<b>15</b>
<b>1.2</b>	<b>Estrutura do Documento</b>	<b>15</b>
<b>2</b>	<b>FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA</b>	<b>16</b>
<b>2.1</b>	<b>Heurísticas</b>	<b>16</b>
2.1.1	Heurísticas Construtivas	16
2.1.2	Heurísticas de Refinamento	17
<b>2.2</b>	<b>Meta-heurísticas</b>	<b>18</b>
2.2.1	<i>Iterated Local Search</i>	18
2.2.2	Algoritmos Genéticos	19
<b>2.3</b>	<b>Hiper-heurísticas</b>	<b>20</b>
<b>2.4</b>	<b>Métodos Exatos de Otimização</b>	<b>23</b>
2.4.1	Programação Linear Inteira e Mista	23
2.4.2	Métodos de Solução	24
2.4.2.1	<i>Branch-and-Bound</i>	24
2.4.2.2	<i>Branch-and-Cut</i>	25
2.4.2.3	<i>Solvers Comerciais e de Código Aberto</i>	25
2.4.3	Limitações e Desafios Computacionais	26
<b>2.5</b>	<b>Modelos de Propagação em ambientes internos</b>	<b>27</b>
2.5.1	Modelos empíricos	28
2.5.2	Modelos determinísticos	28
<b>2.6</b>	<b>Trabalhos Relacionados</b>	<b>29</b>
<b>3</b>	<b>ABORDAGENS HEURÍSTICAS</b>	<b>32</b>
<b>3.1</b>	<b>Definição do problema</b>	<b>32</b>
<b>3.2</b>	<b>Hiper-heurística <i>online</i></b>	<b>33</b>
3.2.1	Heurísticas de Construção	33
3.2.2	Heurísticas de Busca Local	34
3.2.3	Estrutura da Hiper-heurística <i>Online</i>	41
<b>3.3</b>	<b>Hiper-heurística <i>offline</i></b>	<b>44</b>
<b>3.4</b>	<b><i>Biased Random-Key Genetic Algorithm</i></b>	<b>45</b>
<b>3.5</b>	<b><i>Benchmark</i></b>	<b>46</b>
<b>3.6</b>	<b>Resultados Experimentais</b>	<b>48</b>
3.6.1	Análise comparativa dos resultados	48
3.6.2	Análise Estatística dos Resultados	52

<b>4</b>	<b>PROPOSTAS DE MÉTODOS EXATOS</b>	<b>56</b>
<b>4.1</b>	<b>Definição moderna do problema</b>	<b>56</b>
<b>4.2</b>	<b>Formulação baseada em cobertura de pontos</b>	<b>58</b>
4.2.1	Discretização do Espaço	58
4.2.2	Modelo de Propagação	59
4.2.3	Agregação por Áreas	60
4.2.4	Formulação Matemática	61
<b>4.3</b>	<b>Formulação baseada em cobertura de regiões</b>	<b>63</b>
4.3.1	Discretização Regional do Espaço	63
4.3.2	Estratégia de Melhoria Iterativa	64
4.3.3	Formulação Matemática	67
4.3.4	Vantagens e Limitações	69
<b>4.4</b>	<b>Benchmark</b>	<b>70</b>
4.4.1	AP escolhido	71
4.4.2	Instâncias	72
<b>4.5</b>	<b>Resultados Experimentais</b>	<b>73</b>
4.5.1	Resultados Comparativos	74
4.5.2	Melhores e Piores Casos	77
<b>5</b>	<b>CONSIDERAÇÕES FINAIS</b>	<b>79</b>
	<b>REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS</b>	<b>81</b>
	<b>APÊNDICES</b>	<b>86</b>
	<b>APÊNDICE A – MODELO ONE SLOPE</b>	<b>87</b>
	<b>APÊNDICE B – MODELO ITU-R P.1238-1</b>	<b>88</b>
	<b>APÊNDICE C – MODELO COST 231: KEENAN-MOTLEY</b>	<b>90</b>
	<b>APÊNDICE D – MODELO DE RAY-TRACING</b>	<b>91</b>
	<b>APÊNDICE E – MODELO FDTD</b>	<b>93</b>
	<b>APÊNDICE F – RESULTADOS EXPERIMENTAIS ENTRE OS MÉTODOS DE OTIMIZAÇÃO EXATA</b>	<b>95</b>

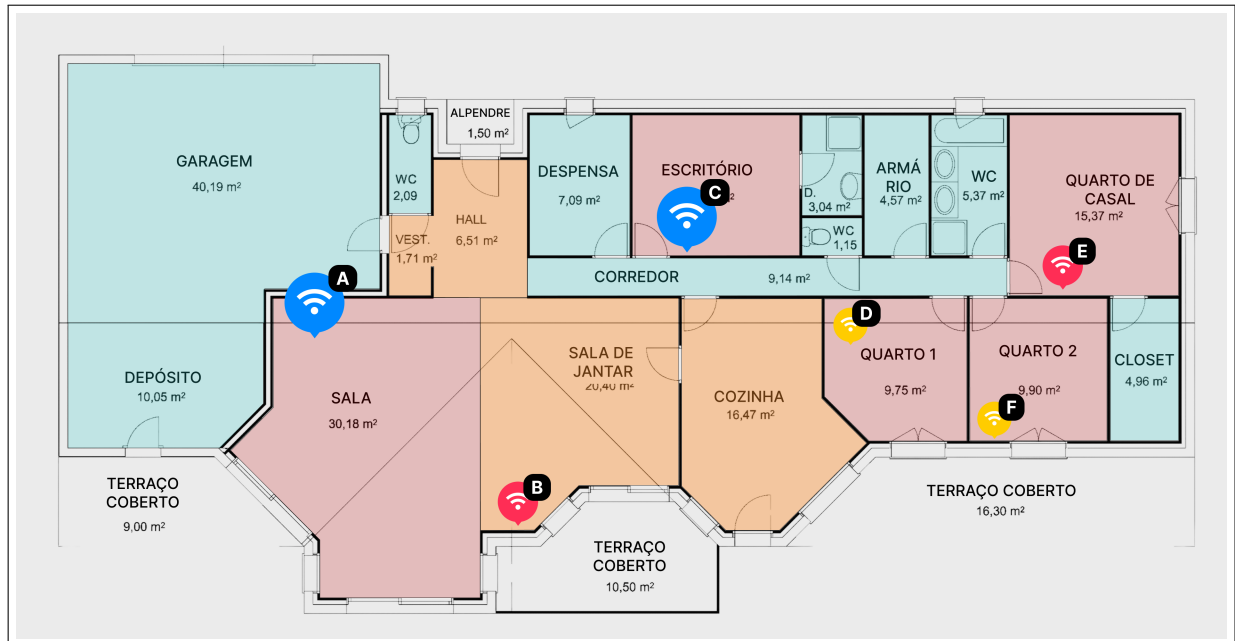
# 1 INTRODUÇÃO

Na atualidade, as redes sem fio são um padrão cada vez mais frequente no cotidiano. Em uma realidade mais conectada, impulsionada pela crescente utilização de dispositivos móveis e *wearables* (dispositivos de uso vestível), a necessidade de um projeto assertivo de implantação de redes em ambientes internos se mostra fundamental para uma boa conectividade e experiência de utilização de tais aparelhos (MOZAFFARIAHRAR; THEOLEYRE; MENTH, 2022). Além disso, desafios como instalações complexas que possuem vários tipos de barreiras físicas e individualização de requisitos de cada usuário, exigem um planejamento cuidadoso para garantir desde a cobertura necessária até a minimização de interferências.

Comumente, o projetista define as necessidades da cobertura da rede com base em uma planta-baixa detalhada, podendo estabelecer exigências variadas de cobertura, também considerando fatores importantes como obstáculos físicos e regulamentações. Dessa maneira, equilibram-se as necessidades específicas de cada realidade, otimizando desempenho, custo e cobertura da rede. O projeto envolve a determinação estratégica da quantidade e posicionamento de APs (do inglês, *Access Points*, ou Pontos de Acesso), que são dispositivos responsáveis por criar e gerenciar o acesso a redes sem fio locais, permitindo que dispositivos clientes se conectem à rede através de protocolos como Wi-Fi (KHOROV et al., 2019).

Como exemplo, a Figura 1 expõe uma planta-baixa que representa um ambiente interno para o qual será desenvolvido um projeto de redes. Como apresentado, o ambiente possui vários cômodos com requisitos de projeto diferentes. Em azul, são vistos os cômodos com necessidade mínima de sinal, em contraste com o vermelho, que representa os cômodos que devem possuir alta qualidade de sinal, como a sala, quartos e os escritórios, onde o uso de dispositivos conectados à Internet é mais intenso. Além deles, podem ser vistos cômodos em laranja, que requerem uma qualidade de sinal mediana, e as áreas em cinza, que são pontos onde não há necessidade de cobertura. Ao realizar o dimensionamento dos APs, o projetista decidiu posicionar 6 APs em regiões distintas do ambiente, como na sala, na sala de jantar, no escritório e nos quartos. Os APs da sala e do escritório (A e C) são do mesmo tipo e possuem maior capacidade. Os APs posicionados nos quartos 1 e 2 (D e F) também são de outro tipo e possuem capacidade ajustada para esses ambientes. Já os APs do quarto de casal e sala de jantar (B e E) possuem capacidade mediana, escolhidos apenas para cobrir a demanda requerida.

Figura 1 – Exemplo de planta-baixa



Fonte: Autoria própria, 2026.

Sendo assim, o posicionamento adequado de pontos de acesso é relevante para assegurar um funcionamento confiável e eficiente, levando a uma experiência adequada com o uso das redes sem fio. Para contribuir com o contexto apresentado, o trabalho aborda o APPP (do inglês, *Access Point Placement Problem*, ou Problema de Posicionamento de Pontos de Acesso) para ambientes internos, um problema de otimização NP-difícil. Com o intuito de minimizar custos com APs e manter a cobertura nos pontos prioritários definidos pelos projetos, tal problema é provado como NP-difícil por Megiddo e Tamir (1982), sendo comparável em termos de dificuldade aos problemas mais difíceis em NP.

Diversos trabalhos na literatura propuseram abordagens heurísticas e meta-heurísticas para o APPP, obtendo bons resultados em instâncias sintéticas com formulações simplificadas do problema (KAMENETSKY; UNBEHAUN, 2002) (RUFINO A.; SILVA, 2016). No entanto, essas formulações abstraem aspectos operacionais relevantes em cenários reais, como a alocação de canais de frequência, restrições de interferência entre APs vizinhos e requisitos de redundância de conectividade.

Diante desse contexto, este trabalho desenvolve-se em duas frentes complementares. Na primeira, parte-se da formulação estabelecida por Rufino A.; Silva (2016) para propor hiper-heurísticas online e offline e uma aplicação do BRKGA, buscando superar o estado da arte heurístico em instâncias de maior escala para esta definição do problema. A utilização da abordagem de hiper-heurísticas é reforçada quando exemplos exitosos são vistos na literatura para uma grande diversidade de problemas difíceis e reais, como otimização de rotas (OLGUN; KOÇ; ALTIPARMAK, 2021) e planejamento de manutenções (DAHAL; ALDRIDGE; GALLOWAY, 2007).

Na segunda abordagem, propõe-se uma formulação modernizada do APPP, incorporando múltiplas bandas de frequência, alocação de canais e conectividade de redundância, para a qual são desenvolvidos dois métodos de otimização exata, avaliados em plantas-baixas reais. Os resultados são tabulados e analisados, com a intenção de esclarecer qual dos métodos obtém melhor desempenho para instâncias pequenas, médias e grandes, bem como a viabilidade das soluções exatas frente ao aumento da dimensão dos problemas. Enquanto as abordagens heurísticas se mostram mais adequadas para instâncias de grande porte, os métodos exatos oferecem garantias formais de otimalidade para instâncias de pequeno e médio porte, estabelecendo limites de qualidade para comparação futura.

## 1.1 Objetivos

O objetivo deste trabalho é propor soluções eficientes para o APPP por meio de hiper-heurísticas e métodos de otimização exata. Para alcançar este objetivo, foram estabelecidos os seguintes objetivos específicos:

1. Propor hiper-heurísticas *online* e *offline* para o APPP;
2. Propor uma solução utilizando o BRKGA e novas heurísticas para o APPP;
3. Propor métodos de otimização exata que satisfaçam dimensionamentos reais.
4. Comparar os métodos propostos com os melhores resultados da literatura para estas restrições do problema;

## 1.2 Estrutura do Documento

O restante deste trabalho está organizado da seguinte forma: o Capítulo 2 apresenta a fundamentação teórica sobre heurísticas, meta-heurísticas, hiper-heurísticas e métodos exatos, descreve os modelos de propagação em ambientes internos e revisa os principais trabalhos relacionados na literatura; o Capítulo 3 estabelece a metodologia, as abordagens hiper-heurísticas (*online* e *offline*) propostas, e o algoritmo BRKGA, apresentando também os respectivos resultados experimentais com instâncias geradas sinteticamente; o Capítulo 4 descreve as formulações matemáticas para os métodos exatos baseados em cobertura de pontos e de regiões, discutindo sua eficácia e eficiência computacional em instâncias reais; por fim, o Capítulo 5 traz as considerações finais, a síntese das contribuições realizadas e as propostas de trabalhos futuros.

## 2 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

Este capítulo apresenta a fundamentação teórica que sustenta o desenvolvimento deste trabalho, reunindo os principais conceitos, definições e abordagens relevantes ao problema estudado. A organização deste capítulo segue uma progressão lógica que parte dos fundamentos gerais de técnicas de otimização, abordando heurísticas, meta-heurísticas, hiper-heurísticas e métodos exatos, além de avançar para aspectos mais específicos relacionados ao APPP, incluindo modelos de propagação de sinal e características técnicas do padrão Wi-Fi, concluindo na revisão dos trabalhos relacionados que contextualizam as contribuições desta pesquisa.

### 2.1 Heurísticas

Heurísticas são definidas como critérios, métodos ou princípios para decidir quais sequências de ações serão efetivas para atingir um objetivo. Muitos problemas complexos requerem a avaliação de uma série de possibilidades para atingir uma solução exata. Entretanto, o esforço requerido para encontrar uma solução exata pode atingir um tempo significativo, como décadas ou centenas de anos. Desta forma, para problemas desta magnitude de complexidade, heurísticas possuem o papel de indicar uma forma de reduzir o número de procedimentos e avaliações a fim de obter soluções com limites de tempos razoáveis (PEARL, 1984). O fato de heurísticas entregarem um caminho para a resolução de problemas, de maneira a não considerar todas as alternativas, implica na possibilidade de não obter resultados ótimos, mas razoáveis no intervalo de tempo adotado para a execução dos procedimentos determinados pela heurística.

Assim, heurísticas realizam buscas no espaço de solução de um problema, com uma sequência de passos que são determinados por um certo critério, mas este não garante a sua otimalidade. A construção de uma heurística frequentemente é realizada a partir de palpites refinados específicos para o problema, geralmente parecidos com técnicas gulosas. Heurísticas podem ser divididas em dois tipos: heurísticas construtivas e heurísticas de refinamento.

#### 2.1.1 Heurísticas Construtivas

Uma heurística construtiva tem como objetivo a construção de uma solução, elemento por elemento. A maneira pela qual cada elemento será inserido a cada etapa do procedimento irá variar de acordo com a função de avaliação específica ao problema abordado. Em métodos clássicos de heurísticas de construção, os elementos candidatos são geralmente ordenados seguindo uma função gulosa, de forma a selecionar elementos que melhor condizem com determinado critério, a cada etapa, sem se importar com os efeitos desta escolha nas próximas etapas (SOUZA, 2022).

Outra forma comum de construir uma solução inicial é a seleção aleatória de elementos candidatos. Então, ao contrário da seleção gulosa, cada elemento inserido na solução final não é o “melhor”, mas pode ser qualquer candidato dentre o conjunto de elementos ainda não selecionados. Estas são mais fáceis de serem desenvolvidas, devido a sua simplicidade de implementação, mas tendem a produzir soluções de baixa qualidade que podem exigir mais esforço computacional em etapas de refinamento seguintes.

### 2.1.2 Heurísticas de Refinamento

As heurísticas de refinamento, também chamadas de heurísticas de busca local, são uma família de técnicas baseadas na noção de vizinhança. A definição de vizinhança é importantíssima para uma heurística de refinamento, de maneira que, a partir de cada solução do espaço de soluções, sempre deve ser possível atingir qualquer outra solução viável em um número finito de etapas. Esta classe de heurísticas parte de uma solução inicial qualquer, gerada por uma heurística construtiva, e caminha, de vizinho a vizinho, de acordo com a definição de vizinhança determinada.

Um método de busca local pode ser interpretado como um procedimento que percorre um caminho em um grafo não-orientado  $G = (S, E)$ , no qual cada vértice  $s \in S$  representa uma solução do problema e  $E$  representa o conjunto de arestas  $(s, s')$  para todo  $s' \in N(s)$ , sendo  $N : S \rightarrow S$  a função de vizinhança da heurística (HERTZ; WIDMER, 2003). Entretanto, em muitos problemas combinatórios é difícil até mesmo encontrar uma solução viável. Nessas situações, pode ser prejudicial caminhar apenas no espaço das soluções viáveis do problema considerado. Nestes problemas, o espaço de busca pode incluir soluções inviáveis, obtidas a partir de um relaxamento de certas restrições do problema original. Desta forma, bastaria acrescentar à função objetivo (a que avaliaria a solução) componentes que penalizam violações às restrições (SOUZA, 2022).

Um exemplo comum no qual é difícil de encontrar uma solução viável é o Problema de Programação de Horários de Cursos Universitários (BABAEI; KARIMPOUR; HADIDI, 2015). A restrição principal deste problema exige que as aulas oferecidas pelo mesmo professor para diferentes turmas não sejam realizadas no mesmo horário (ou seja, não se sobreponham), visto que este não pode estar em mais de um lugar ao mesmo tempo. Se a mudança das aulas de um curso de um horário para outro for considerado como movimento  $m$ , seria improvável não gerarmos quadros de horários sem sobreposições de aulas. Para isso, seria possível relaxar estas restrições, penalizando-as (com algum valor de alta magnitude) na função de avaliação, de maneira que a exploração do espaço de busca será mais eficiente (HERTZ, 1992).

## 2.2 Meta-heurísticas

Meta-heurísticas, assim como as heurísticas, são métodos para encontrar uma boa solução em um tempo razoável. As heurísticas costumam ter soluções específicas em relação aos requisitos do problema. Já as meta-heurísticas possuem a capacidade de produzir uma estrutura genérica para aplicar a diversos problemas de otimização (ABDEL-BASSET; ABDEL-FATAH; SANGAIAH, 2018).

O termo “meta-heurística” foi cunhado para ilustrar um método heurístico que não possui características específicas de um problema (GLOVER, 1986). As meta-heurísticas são munidas de mecanismos para evitar o aprisionamento de soluções em ótimos locais possivelmente distantes dos ótimos globais. Esta classe de procedimentos se divide em duas categorias: busca por trajetória e busca populacional, dependendo do princípio utilizado para realizar a exploração do espaço de busca (SOUZA, 2022).

Nas meta-heurísticas baseadas em busca por trajetória, o espaço de soluções é explorado por meio de movimentos aplicados à atual solução, de maneira a gerar soluções promissoras em vizinhanças. *Iterated Local Search* (ILS), *Simulated Annealing* (SA) e *Tabu Search* (TS) são exemplos desta categoria. Já os métodos baseados em busca populacional mantêm conjuntos de soluções boas o suficiente para combiná-las e produzir melhores soluções. Algoritmos Genéticos, *Memetic Algorithms* e *Ant Colony Optimization* são exemplos deste tipo de procedimento, indicando uma forte inspiração de processos biológicos a fim de construir boas soluções para problemas difíceis. Para ilustrar ainda melhor as diferenças entre estes dois tipos de meta-heurísticas, podemos apresentar, a seguir, dois exemplos referenciados na literatura.

### 2.2.1 *Iterated Local Search*

O método ILS baseia-se na ideia de um procedimento de busca local que é executado através da geração de novas soluções de partida, obtidos a partir de perturbações aplicadas a ótimos locais previamente identificados. Esta abordagem permite escapar de nichos de soluções subótimas, explorando regiões distintas do espaço de busca sem descartar completamente o conhecimento obtido durante o processo. O procedimento ILS, apresentado no Algoritmo 1, opera através de ciclos iterativos que alternam entre intensificação e diversificação da busca.

**Algoritmo 1:** Procedimento Iterated Local Search**Procedimento ILS():**

```

 $s_0 \leftarrow \text{GeraSoluçãoInicial}();$ 
 $s \leftarrow \text{BuscaLocal}(s_0);$ 
repita
   $s' \leftarrow \text{Perturbação}(\text{histórico}, s);$ 
   $s'' \leftarrow \text{BuscaLocal}(s');$ 
   $s \leftarrow \text{CritérioAceitação}(s, s'', \text{histórico});$ 
até (critérios de parada serem satisfeitos);
Retorne  $s$ ;

```

Como visto anteriormente, para aplicar o ILS, temos quatro componentes principais. O procedimento **GeraSoluçãoInicial()** gera uma solução inicial para o problema partindo de uma heurística construtiva. O procedimento **BuscaLocal()** retorna uma solução possivelmente melhorada. O procedimento **Perturbação()** aplica modificações à solução atual para conduzi-la a uma solução intermediária. Por fim, o procedimento **CritérioAceitação()** escolhe qual solução sofrerá determinada perturbação.

## 2.2.2 Algoritmos Genéticos

Os Algoritmos Genéticos são uma meta-heurística inspirada pelo processo biológico de evolução (MICHALEWICZ; SCHOENAUER, 1996). Proposto por Holland (1992), são inspirados na Teoria Darwiniana de Seleção Natural. Os elementos básicos de uma AG são representações em cromossomos, seleção de aptidão (*fitness*) e outros operadores inspirados na biologia, como mutações e *crossover*. O Algoritmo 2 demonstra a sequência de decisões de um algoritmo genético.

**Algoritmo 2:** Procedimento de um Algoritmo Genético**Procedimento AG():**

```

 $t \leftarrow 0;$ 
Seja  $P(t)$  a população inicial;
Avalie  $P(t)$ ;
repita
   $t \leftarrow t + 1;$ 
  Gere  $P(t)$  a partir de  $P(t - 1)$ ;
  Avalie  $P(t)$ ;
  Defina a população sobrevivente;
até (critérios de parada serem satisfeitos);
Retorne  $P(t)$ .

```

Os cromossomos são definidos como uma sequência de números binários. Cada elemento (também chamado de *locus*) possui diversos valores possíveis (geralmente definidos como 0 ou 1), sendo chamados de alelos, representando uma variedade genética. Um cromossomo pode significar diversas abstrações, como uma possível escolha de pontos dentro de uma solução. Uma função de *fitness* é utilizada para avaliar o cromossomo dependendo de um critério.

Os operadores inspirados pela biologia são a seleção, mutação e cruzamento, sendo este último comumente chamado de *crossover*. Na seleção, os cromossomos são selecionados com base no valor retornado pela função de *fitness*. Na operação de *crossover*, um *locus* é escolhido aleatoriamente e realiza-se uma troca entre subsequências entre cromossomos, a fim de criar uma nova geração de cromossomos. Por fim, na mutação, alguns *locus* (normalmente chamados de *bits*) são invertidos de valor aleatoriamente baseado em uma probabilidade escolhida (KATOCH; CHAUHAN; KUMAR, 2020).

### 2.3 Hiper-heurísticas

Hiper-heurísticas são métodos de alto nível que automatizam seleção, combinação e/ou geração de heurísticas para resolver problemas de busca computacional considerados difíceis. Diferentemente de meta-heurísticas, que exploram diretamente o espaço de soluções, as hiper-heurísticas operam em um espaço de heurísticas, em busca de estratégias eficazes para classes amplas de problemas (BURKE et al., 2013). Essa generalidade é alcançada ao abstrair detalhes do problema em componentes parametrizáveis, como funções de avaliação e operadores de vizinhança, de maneira a possibilitar uma adaptação a novos domínios com uma mínima reconfiguração.

Embora o termo hiper-heurística tenha sido cunhado nos anos 2000, com o trabalho de (COWLING; KENDALL; SOUBEIGA, 2000), sua essência remonta a trabalhos pioneiros como o de Fisher e Thompson (1963), que exploraram a combinação automática de regras de despacho para escalonamento de tarefas. Fisher e Thompson (1963) chegaram à conclusão de que a combinação de diferentes heurísticas de baixo nível produz soluções de melhor qualidade do que se aplicadas de maneira separada. O estudo menciona que heurísticas específicas podem ser efetivas em certos estágios do espaço de busca, mas podem ter uma performance reduzida em outros momentos. Assim, o objetivo crucial da pesquisa de hiper-heurísticas não é competir com o estado da arte de abordagens de problemas específicos, mas oferecer técnicas genéricas para disponibilizar soluções de boa qualidade em uma variedade de problemas de otimização.

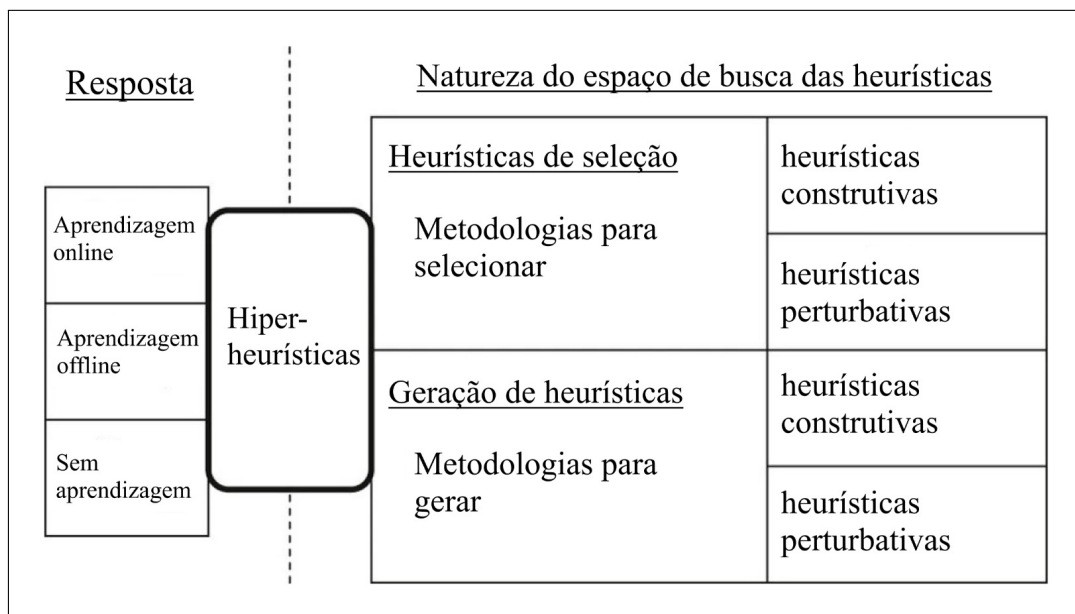
As hiper-heurísticas também tratam do Dilema de *Exploitation-Exploration* (Intensificação e Diversificação, em tradução livre). Heurísticas baseadas em intensificação podem ser escolhidas em detrimento das baseadas em diversificação, dependendo do retorno da função objetivo do problema. A World Hyper-Heuristic (DALIRI et al., 2024), por exemplo, realiza trocas dinâmicas de estratégias focadas em intensificação ou diversificação, a partir de um

conjunto de heurísticas.

O *No Free Lunch Theorem* (NFLT) (WOLPERT; MACREADY, 1997) estabelece que, para qualquer par de algoritmos de otimização, o desempenho médio sobre todas as possíveis funções objetivo é idêntico. Isso implica que heurísticas especializadas para um problema podem falhar em outro, reforçando a necessidade de métodos adaptativos como hiper-heurísticas. Estas, ao operarem no espaço de heurísticas, contornam as limitações do NFLT ao gerar ou selecionar estratégias específicas para cada contexto.

No momento da elaboração deste trabalho, a área encontra-se consolidada em duas categorias principais de hiper-heurísticas. A primeira corresponde às **hiper-heurísticas de seleção**, que operam sobre um conjunto previamente definido de heurísticas de baixo nível, realizando sua escolha de forma dinâmica ao longo do processo de busca. A segunda categoria abrange as **hiper-heurísticas de geração**, cujo objetivo é sintetizar novas heurísticas a partir de componentes primitivos, tais como operadores de busca e critérios de aceitação, permitindo a construção automática de estratégias adaptativas para o problema em questão. A Figura 2 detalha esta taxonomia, bem como divide as hiper-heurísticas a partir da utilização da resposta e em relação à natureza do espaço de busca. À respeito da fonte de *feedback* durante o processo de aprendizagem, a divisão é consolidada em três tipos:

Figura 2 – Classificação de hiper-heurísticas



Fonte: (BURKE et al., 2013). Tradução livre.

**Hiper-heurísticas de aprendizagem online:** ajustam a seleção ou geração de heurísticas durante a execução, utilizando o retorno imediato do estado corrente da solução. No APPP, por exemplo, uma Hiper-heurística *online* pode se adaptar à melhoria da adição ou remoção de um AP em uma determinada região.

**Hiper-heurísticas de aprendizagem *offline*:** aprendem políticas de seleção/geração antes da execução, usando conjuntos de treinamento com instâncias históricas, para, em seguida, generalizar em novas instâncias.

**Heurísticas sem aprendizagem:** não há a utilização de informação no processo de busca na performance de heurísticas de baixo nível.

A aprendizagem online ocorre durante a resolução de uma instância do problema. A depender do resultado da aplicação de uma heurística de adição de APs, por exemplo, uma função objetivo pode pontuar a aplicação e favorecer a heurística em passos futuros da resolução do problema. No caso de aprendizagem *offline*, a ideia é coletar conhecimento em forma de regras a partir de um conjunto de instâncias de treino. Diferentes abordagens podem ser empregadas neste contexto: o aprendizado supervisionado treina uma rede neural para mapear características do problema, como densidade de pontos  $P$  e distribuição de demanda  $d_i$ , à heurística mais adequada; a programação genética *offline* evolui heurísticas em um ambiente simulado com grupos de instâncias do APPP, gerando regras generalizáveis; a aprendizagem força-bruta *offline* procura padrões sem critérios pré-definidos, ou aleatórios, até um determinado tempo limite, mantendo os melhores resultados.

A escolha entre abordagens *online* e *offline* pode ser definida a partir dos dados disponíveis do problema. Em cenários dinâmicos, com mudanças frequentes, abordagens *online* podem ser a escolha ideal. Já em instâncias estáticas e com poucas mudanças, o treinamento *offline* pode ser realizado para identificar padrões e diminuir a exploração de heurísticas. Entretanto, algumas metodologias combinam seleção e geração de heurísticas, evidenciando a possibilidade de abordagens híbridas.

Além da seleção ou geração de heurísticas, o critério de aceitação determina se uma nova solução candidata substitui a solução corrente. Diferentes critérios podem ser empregados, como o critério *All Moves*, que aceita todas as soluções geradas, independentemente da qualidade; o critério *Only Improving* aceita apenas soluções que melhorem a função objetivo; o critério *Simulated Annealing* aceita soluções piores com probabilidade decrescente ao longo do tempo, permitindo escapar de ótimos locais; e o critério *Great Deluge* aceita soluções cujo valor esteja abaixo de um limiar dinâmico que decresce gradualmente.

Por sua vez, hiper-heurísticas de seleção focam na orquestração de heurísticas existentes. Um exemplo relevante é o *framework* HyFlex (OCHOA et al., 2012), que gerencia heurísticas heterogêneas, como *Simulated Annealing* e *Tabu Search*, para resolver problemas de otimização combinatória. A seleção pode ser guiada por desempenho histórico, priorizando heurísticas que melhoraram soluções recentemente, como redução de custo em iterações anteriores. Uma outra abordagem é guiar a seleção por diversidade, alternando heurísticas para evitar estagnação em ótimos locais, inserindo perturbações aleatórias assim que possível. No contexto do APPP, esta abordagem é útil para combinar heurísticas de construção (adição de APs até um certo limite)

e refinamento (substituição de APs em determinados pontos) dependendo do estado atual da solução.

Por fim, as hiper-heurísticas de geração sintetizam heurísticas ou meta-heurísticas novas, a partir de métodos já existentes, frequentemente via técnicas evolutivas. Ao contrário das hiper-heurísticas de seleção, as hiper-heurísticas de geração possuem uma heurística nova como saída proposta para determinada solução, com uma sequência de procedimentos a serem realizados. Assim, esta heurística pode ser potencialmente reutilizada em instâncias novas do problema.

## 2.4 Métodos Exatos de Otimização

Métodos exatos de otimização são algoritmos que garantem encontrar a solução ótima de um problema, caso ela exista, ou provar sua inexistência em tempo finito. Diferentemente das heurísticas e meta-heurísticas, que buscam soluções de boa qualidade sem garantias de otimalidade, os métodos exatos exploram sistematicamente o espaço de soluções até identificar a melhor solução possível de acordo com a função objetivo (WOLSEY, 1999).

Estes métodos são particularmente relevantes em problemas de otimização combinatória, onde decisões discretas devem ser tomadas, como selecionar ou não um determinado local para instalação de um AP, alocar ou não um canal a um dispositivo, ou decidir se um ponto de demanda será atendido por um AP específico. A capacidade de garantir otimalidade torna os métodos exatos ferramentas valiosas tanto para resolver instâncias de porte tratável quanto para servir como referência (*benchmark*) na avaliação de algoritmos heurísticos.

No contexto do APPP, métodos exatos permitem obter soluções certificadamente ótimas para instâncias de pequeno e médio porte, fornecendo limites de qualidade para comparação com soluções heurísticas. Além disso, a formulação matemática rigorosa do problema facilita a incorporação de múltiplas restrições realistas de forma integrada e consistente, como: cobertura mínima, capacidade de rede, limites de interferência e restrições de orçamento.

### 2.4.1 Programação Linear Inteira e Mista

A Programação Linear Inteira (PLI) e a Programação Linear Inteira Mista (PLIM) constituem as principais ferramentas para modelagem e resolução exata de problemas de otimização combinatória. Um problema de PLIM pode ser expresso na forma geral:

$$\text{Minimizar } c^T x + h^T y \quad (1)$$

$$\text{sujeito a } Ax + Gy \leq b \quad (2)$$

$$x \in \mathbb{Z}^n, y \in \mathbb{R}^m \quad (3)$$

Onde  $x$  representa variáveis de decisão inteiras,  $y$  variáveis contínuas,  $c$  e  $h$  são vetores de coeficientes da função objetivo, e  $A$ ,  $G$  e  $b$  definem o conjunto de restrições lineares do problema.

Quando todas as variáveis são inteiras ( $m = 0$ ), tem-se um problema de PLI; quando todas são binárias ( $x \in \{0, 1\}^n$ ), denomina-se Programação Linear Binária (PLB) (WOLSEY, 1999). No APPP, variáveis binárias são frequentemente utilizadas para representar decisões como:

- $y_i \in \{0, 1\}$ : indica se um AP é instalado na posição candidata  $i$ ;
- $x_{ij} \in \{0, 1\}$ : indica se o ponto de demanda  $j$  é atendido pelo AP instalado em  $i$ ;
- $z_{ic} \in \{0, 1\}$ : indica se o AP em  $i$  opera no canal  $c$ .

Restrições lineares podem então expressar requisitos como cobertura mínima (cada ponto deve ser atendido por pelo menos um AP), limitações de capacidade (cada AP não pode exceder seu *throughput* máximo), e regras de não-interferência (APs próximos não devem operar no mesmo canal).

## 2.4.2 Métodos de Solução

A resolução de problemas de PLI/PLIM é NP-difícil, o que significa que não se conhecem algoritmos de tempo polinomial para resolvê-los no caso geral. Entretanto, técnicas sofisticadas desenvolvidas nas últimas décadas permitem resolver instâncias de tamanho considerável de forma eficiente. Os principais métodos são descritos nas subseções a seguir.

### 2.4.2.1 *Branch-and-Bound*

O método *Branch-and-Bound* (B&B) é a base dos *solvers* comerciais e de código aberto para PLI/PLIM. O algoritmo funciona por meio de uma exploração sistemática do espaço de soluções, combinando:

**Ramificação (*Branching*):** Divisão do problema em subproblemas menores ao fixar valores de variáveis inteiras. Por exemplo, se  $y_i$  é uma variável binária fracionária na solução relaxada, criam-se dois subproblemas: um com  $y_i = 0$  e outro com  $y_i = 1$ .

**Limitação (*Bounding*):** Resolução da relaxação linear de cada subproblema (onde as restrições de integralidade são temporariamente removidas) para obter limites inferiores (em problemas de minimização) ou superiores (em problemas de maximização) para a solução ótima inteira.

**Poda (*Pruning*):** Eliminação de subproblemas cuja solução relaxada seja pior que a melhor solução inteira conhecida, ou que sejam comprovadamente inviáveis.

O algoritmo B&B mantém uma estrutura de árvore de busca, onde cada nó representa um subproblema. A exploração continua até que todos os nós tenham sido resolvidos ou podados, garantindo a otimalidade da melhor solução inteira encontrada (WOLSEY, 1999; NEMHAUSER; WOLSEY, 1988).

### 2.4.2.2 *Branch-and-Cut*

O método *Branch-and-Cut* (B&C) expande o B&B ao incorporar a geração dinâmica de planos de corte (*cutting planes*, normalmente chamados na literatura) durante a exploração da árvore de busca. Planos de corte são desigualdades válidas que eliminam regiões do espaço de soluções relaxadas sem excluir soluções inteiras viáveis, fortalecendo a formulação e reduzindo a distância entre os limites dual e primal (NEMHAUSER; WOLSEY, 1988).

Existem diversas famílias de cortes empregadas em *solvers* modernos para o fortalecimento das formulações de Programação Linear Inteira e Mista. Entre elas, destacam-se os cortes de Gomory, derivados automaticamente a partir da *tableau* do método Simplex; os cortes de cobertura, particularmente adequados para problemas com estrutura de conjuntos; e os cortes de clique, amplamente utilizados em formulações associadas a problemas de grafos. Além dessas classes gerais, também são utilizados cortes específicos do problema, desenvolvidos a partir da estrutura particular da formulação modelada, com o objetivo de explorar propriedades estruturais adicionais e melhorar o desempenho computacional.

De modo alternativo, quando o problema é modelado usando conjuntos de restrições exponenciais, é possível adicionar iterativamente partes destes conjuntos até que a solução ótima seja obtida, desde que não viole nenhuma restrição que foi deixada de fora do modelo. A adição de planos de corte fortalece os limites obtidos pela relaxação linear, acelerando a convergência do algoritmo. Entretanto, a geração excessiva de cortes pode aumentar o tamanho do problema, demandando um equilíbrio entre eficácia e eficiência computacional (CORNUJOLS, 2008).

### 2.4.2.3 *Solvers Comerciais e de Código Aberto*

A implementação direta de algoritmos B&B e B&C é complexa e demanda expertise em otimização computacional. Por essa razão, a comunidade científica e a indústria frequentemente recorrem a *solvers* especializados. Entre os principais *solvers* disponíveis destacam-se:

**CPLEX (IBM):** *Solver* comercial amplamente utilizado em problemas de otimização combinatoria, conhecido por sua robustez e eficiência. Oferece implementações avançadas de B&C, pré-processamento automático, heurísticas primais e diversas opções de configuração (IBM, 2022).

**Gurobi:** *Solver* comercial que compete diretamente com o CPLEX, frequentemente apresentando desempenho superior em classes específicas de problemas. Possui interface amigável e amplo suporte a linguagens de programação (Gurobi Optimization, LLC, 2023).

**GLPK:** *Solver* de código aberto, voltado para a resolução de problemas de PL, PLI e PLIM. Oferece implementações do método simplex, do método de pontos interiores e de B&B para variáveis inteiras, sendo bastante adotado em contextos de pesquisa por sua distribuição gratuita. (MAKHORIN, 2012).

Esses *solvers* permitem que pesquisadores e profissionais especifiquem o problema por meio de linguagens de modelagem algébrica (como AMPL, GAMS, interfaces em Python via PuLP, Pyomo, docplex) ou APIs diretas, abstraindo a complexidade dos algoritmos de solução.

### 2.4.3 Limitações e Desafios Computacionais

Embora métodos exatos garantam otimalidade, seu uso prático enfrenta limitações inerentes à natureza NP-difícil dos problemas de otimização combinatória. O tempo de execução de algoritmos B&B e B&C cresce exponencialmente com o tamanho da instância no pior caso, tornando instâncias suficientemente grandes intratáveis mesmo com *solvers* modernos.

No contexto do APPP, o número de variáveis e restrições cresce rapidamente com as seguintes características: número de posições candidatas para instalação de APs, granularidade da discretização espacial do ambiente, a quantidade de pontos de demanda a serem atendidos, número de canais disponíveis e as restrições de não-interferência. Por exemplo, em um ambiente discretizado em  $n$  posições candidatas,  $m$  pontos de demanda e  $c$  canais disponíveis, o número de variáveis binárias pode ser da ordem de  $O(n \times m + n \times c)$ , resultando em problemas com milhares ou milhões de variáveis para ambientes realistas.

Diversas estratégias podem ser adotadas para mitigar essas limitações. Uma delas consiste no pré-processamento do modelo, por meio da eliminação de variáveis e restrições redundantes antes da etapa de solução, reduzindo o tamanho efetivo do problema. Outra abordagem amplamente utilizada é a decomposição, na qual o problema original é dividido em subproblemas menores, resolvidos de forma coordenada, como ocorre nos métodos de Decomposição de Benders e de Lagrange.

Adicionalmente, heurísticas primais podem ser empregadas para gerar soluções viáveis de boa qualidade em estágios iniciais da busca, contribuindo para acelerar o processo de poda na árvore de ramificação. Também é comum realizar a configuração cuidadosa de parâmetros do *solver*, incluindo estratégias de ramificação, critérios de seleção de nós e intensidade de geração de cortes, de modo a adequar o algoritmo às características específicas do problema.

No contexto do APPP, métodos exatos permitem obter configurações ótimas de APs em ambientes de dimensões moderadas, servindo como referência de qualidade máxima alcançável. Além disso, a formulação matemática explícita facilita a análise do impacto de variações paramétricas (ex: mudanças em custos, limites de capacidade, níveis mínimos de cobertura) sobre a solução ótima. No início do projeto, os métodos exatos permitem verificar formalmente se um conjunto de requisitos é viável ou identificar restrições conflitantes que impossibilitam a solução.

Trabalhos recentes na literatura do APPP têm explorado formulações exatas baseadas em PLI/PLIM para capturar de forma mais fidedigna aspectos como restrições de capacidade, interferência entre APs, qualidade de serviço por usuário e características específicas de padrões modernos como Wi-Fi 6 (OUSTRY et al., 2022; QIU et al., 2020). Esses estudos evidenciam

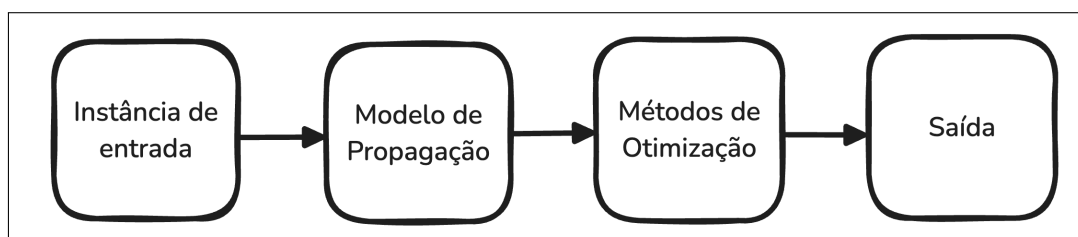
que, embora o custo computacional seja elevado, a precisão e as garantias formais oferecidas pelos métodos exatos os tornam atrativos para a resolução direta de instâncias tratáveis, além de serem ferramentas de apoio ao desenvolvimento e validação de métodos aproximados.

## 2.5 Modelos de Propagação em ambientes internos

A modelagem da propagação de sinais em ambientes internos é importante durante o planejamento eficiente de redes Wi-Fi, especialmente em cenários complexos como escritórios, hospitais, fábricas e ambientes escolares. A propagação do sinal em ambientes internos é influenciada por múltiplos fatores, incluindo atenuação por paredes e móveis, reflexão em superfícies metálicas e interferências de outros dispositivos. Para lidar com essa complexidade, utilizam-se modelos de propagação que podem ser empíricos ou determinísticos, dependendo do nível de precisão necessário e das condições do ambiente. Cada classe possui características distintas, sendo aplicável a diferentes cenários e requisitos de precisão.

No contexto do projeto de APs, uma representação do ambiente interno é criada com base em discretização espacial, levando em conta a estrutura física do local e os materiais presentes na construção. Esse modelo serve como entrada para os cálculos de propagação do sinal, permitindo a aplicação de métodos de otimização para determinar o posicionamento ideal dos dispositivos. Por sua vez, um modelo de propagação é aplicado a esta instância, que servirá de base para a aplicação dos métodos de otimização para o posicionamento eficaz dos dispositivos. A Figura 3 apresenta um fluxograma das etapas fundamentais para o posicionamento otimizado de APs, começando pela modelagem do ambiente e finalizando com a otimização da posição dos dispositivos.

Figura 3 – Fluxograma de etapas de projeto de posicionamento de APs



Fonte: Autoria própria, 2026.

A escolha do modelo de propagação influencia os resultados dos métodos de otimização, pois define a qualidade da estimativa do sinal recebido em diferentes pontos do ambiente ao aplicar em um cenário real. Modelos mais simplificados podem reduzir o custo computacional, enquanto modelos mais detalhados podem aumentar a precisão da solução obtida.

Neste contexto, os modelos de propagação se baseiam em realizar a predição de Perda de Percurso referente à atenuação da potência do sinal à medida que ele se propaga do transmissor ao receptor em um sistema de comunicação sem fio. Essa perda ocorre devido a fatores como

dissipação de energia no espaço livre, reflexões, difrações e absorção por obstáculos presentes no ambiente. As subseções seguintes tratarão da definição dos modelos empíricos e determinísticos.

### 2.5.1 Modelos empíricos

Diversos modelos empíricos na literatura são utilizados para estimar a Perda de Percurso em ambientes internos, destacando-se três em específico: **One Slope**, **ITU-R P.1238-1** e **Keenan-Motley**. Esses modelos são particularmente úteis por sua simplicidade e eficiência computacional, e oferecem abordagens para incorporar efeitos como atenuação por obstáculos, reflexões e características de frequência, aumentando a acurácia das soluções do APPP. Para simular a atenuação de um sinal de um AP para um ponto qualquer, devemos utilizar ou desenvolver um modelo de atenuação do sinal baseado na distância do AP até o ponto considerado.

É importante destacar que, embora esses modelos sejam valorizados por sua simplicidade e eficiência computacional, eles podem apresentar limitações em cenários específicos ou complexos. Por exemplo, ambientes com alta densidade de obstáculos ou materiais que causam alta atenuação podem não ser perfeitamente modelados por essas abordagens simplificadas.

**Modelo One Slope** é uma abordagem simplificada para a predição da perda de percurso em ambientes internos, considerando apenas a distância entre o transmissor e o receptor (ANDERSEN; RAPPAPORT; YOSHIDA, 1995). Por sua formulação direta e baixo custo computacional, é amplamente utilizado em cenários onde não se dispõe de informações detalhadas sobre os obstáculos presentes no ambiente. Uma descrição completa do modelo é apresentada no Apêndice A.

**Modelo ITU-R P.1238-1** é uma recomendação da *International Telecommunication Union – Radiocommunication Sector* para a estimativa da perda de percurso em ambientes internos, incorporando a dependência da frequência do sinal e a classificação do ambiente em categorias como residencial, comercial e de escritório. Além disso, o modelo contempla a atenuação adicional causada pela travessia de andares, tornando-o adequado para edificações de múltiplos pavimentos. O detalhamento do modelo encontra-se no Apêndice B.

**Modelo COST 231: Keenan-Motley** é um modelo empírico que incorpora, além da distância, a contribuição individual de paredes e pisos atravessados pelo sinal, considerando suas respectivas perdas de propagação (TELECOMMUNICATIONS, 1999). Essa abordagem oferece maior acurácia em relação aos modelos anteriores ao levar em conta a heterogeneidade dos materiais presentes no ambiente. A formulação completa do modelo está descrita no Apêndice C.

### 2.5.2 Modelos determinísticos

Os modelos de propagação determinísticos, também chamados de modelos teóricos ou físicos, baseiam-se nas Equações de Maxwell para descrever a interação entre ondas eletromagnéticas e o ambiente. Esses métodos são amplamente utilizados em problemas de alta frequência,

como análise de antenas e propagação de sinais. Dois modelos determinísticos destacam-se na literatura: *Ray-Tracing* (do inglês, Traçado de Raios) e FDTD (*Finite-difference Time-domain*, do inglês Domínio do Tempo de Diferenças Finitas)

**Modelo de *Ray-Tracing*** é um método determinístico baseado na Ótica Geométrica que simula a propagação de ondas eletromagnéticas por meio do rastreamento de raios que interagem com o ambiente através de reflexões, transmissões e difrações (SCHAUBACH; DAVIS; RAPPAPORT, 1992). Embora apresente elevado custo computacional, oferece alta precisão na estimativa da perda de percurso, sendo especialmente indicado para ambientes complexos com geometria e materiais bem definidos, e é bastante utilizado em estudos de propagação de sinais. A descrição detalhada do método é apresentada no Apêndice D.

**Modelo FDTD (*Finite-Difference Time-Domain*)** é um método determinístico baseado na discretização direta das Equações de Maxwell no domínio do tempo e do espaço, permitindo simular com elevada precisão a propagação de ondas eletromagnéticas em ambientes complexos (YEE, 1966). O método divide o ambiente em uma grade tridimensional de células, calculando iterativamente os campos elétrico e magnético em cada ponto da malha ao longo do tempo. Apesar de ser o modelo determinístico de maior acurácia, seu custo computacional é significativamente elevado, tornando-o mais adequado para ambientes de pequenas dimensões ou quando se exige máxima fidelidade na estimativa da perda de percurso (REMLEY; WEISSHAAR; ANDERSON, 1998). A descrição detalhada do método é apresentada no Apêndice E.

## 2.6 Trabalhos Relacionados

Diversos estudos abordam a resolução do APPP, porém, a forma como o problema é definido é bastante fragmentada, em função das adaptações feitas para contemplar projetos reais, o que acaba dificultando a organização e sistematização das pesquisas na área. Esta seção revisita a literatura sobre o APPP, abordando alguns dos trabalhos que propõem soluções para o problema por meio de métodos heurísticos e exatos.

Kamenetsky e Unbehaun (2002) propuseram uma combinação de duas abordagens utilizando um algoritmo de remoções sucessivas chamado *Pruning* para construir uma solução inicial viável. Em seguida, melhorias são realizadas a partir desta solução utilizando a meta-heurística *Simulated Annealing*. A fim de avaliar o método proposto, foi desenvolvida uma função objetivo em um espaço discreto, considerando a área de cobertura e qualidade do sinal obtido.

Em seu trabalho, Lu et al. (2006) propuseram um método baseado na meta-heurística de Busca Tabu para a definição da quantidade de APs e o seu posicionamento em relação aos critérios de cobertura, interferências e qualidade de serviço. Uma cadeia de Markov é utilizada para avaliar a capacidade de *throughput* em cada célula da área. Por fim, a cobertura é estimada por um simulador de propagação de rádio de multi-resolução.

Arroyo e Marques (2006) propuseram dois métodos baseados na meta-heurística GRASP (do inglês, *Greedy Randomized Adaptive Search Procedure*) para resolver o problema de alocação de antenas de transmissão em uma região. Nesse trabalho, a função objetivo do modelo buscou maximizar a cobertura do sinal ao utilizar um número mínimo de antenas e instalá-las o mais próximo possível dos pontos de demanda, levando em consideração as restrições de alcance do sinal de transmissão e a presença de obstáculos.

Por sua vez, Vanhatupa, Hannikainen e Hamalainen (2007) apresentam um novo Algoritmo Genético (AG) para o desenvolvimento de redes WLAN de acordo com os requisitos desejados, além de realizar uma estimativa da qualidade de serviço dividida entre: cobertura, custos de implantação e capacidade da rede. Assim, essas estimativas fornecem um *feedback* para o próprio algoritmo e o construtor da rede. Outros requisitos são levados em conta neste método, como o consumo de energia, possíveis pontos de posicionamento de APs e quantidade de APs permitidos. Adicionalmente, Farkas e Huszák (2013) propuseram um novo método baseado em *Simulated Annealing*, com o objetivo de encontrar o posicionamento e o número ideal de pontos de acesso Wi-Fi de tal forma que cada ponto na área seja coberto por pelo menos três APs.

Uma meta-heurística baseada no ILS (*Iterated Local Search*) foi proposta por Rufino A.; Silva (2016) para resolver instâncias sintéticas e reais de dimensões pequenas, médias e grandes. Para avaliar o método proposto, experimentos computacionais envolvendo adaptações de meta-heurísticas da literatura foram realizados e comparados com os demais resultados. Vieira et al. (2019) aplicam a meta-heurística *Simulated Annealing* para o posicionamento de APs em prédios de 1000 metros quadrados no campus Formiga do Instituto Federal de Minas Gerais. A implementação foi baseada em CUDA e paralelização para fins de otimização de tempo, mantendo uma complexidade computacional cúbica.

Akram et al. (2021) propuseram uma otimização multi-objetivo baseada no BPSO (do inglês, *Binary Particle Swarm Optimization*) para redução da quantidade de APs, obedecendo critérios de cobertura e qualidade de serviço. Além disso, Karima e Shiddiqi (2022) usaram uma abordagem baseada em *K-Means Clustering* para o problema, a fim de atingir uma melhor distribuição de APs em uma área interna. A métrica RSSI (*Received Signal Strength Indicator*) é utilizada para verificar a força do sinal entre um AP e um receptor.

Por fim, vale ressaltar o crescimento dos trabalhos relacionados à posicionamentos de APs em ambientes internos para *Wi-fi fingerprinting* (SHANG; WANG, 2022). A técnica *Wi-fi fingerprinting* é amplamente utilizada em sistemas de posicionamento internos, especialmente em locais onde os sinais de GPS são fracos ou inexistentes, como grandes edifícios, *shoppings*, aeroportos e hospitais. Esse método determina a localização de um dispositivo com base nas características únicas dos sinais de Wi-Fi em um determinado ambiente, aproveitando a infraestrutura já existente, tornando-se uma solução eficaz em termos de custo para a localização em ambientes internos. Desta forma, abordagens de tomadas de decisões para posicionamento desses APs é de grande importância para estas aplicações. Roy e Chowdhury (2024) utilizam

meta-heurísticas e algoritmos de aprendizagem de máquina para analisar as regiões de coberturas dos APs para localizar dispositivos móveis em ambientes internos.

Embora a literatura sobre o APPP seja predominantemente dominada por abordagens heurísticas e meta-heurísticas, trabalhos mais recentes têm explorado o uso de métodos de otimização exatos, motivados principalmente pela necessidade de maior fidelidade na representação de cenários reais e pela busca de garantias formais de cobertura e capacidade.

Oustry et al. (2022) propõem uma formulação baseada em programação linear binária para o planejamento de redes Wi-Fi em ambientes internos, considerando explicitamente restrições de cobertura, capacidade e interferência entre pontos de acesso. O modelo utiliza uma discretização espacial do ambiente e curvas de propagação para estimar a qualidade do sinal, permitindo a obtenção de soluções ótimas para instâncias de médio porte. Os autores destacam que, apesar do elevado custo computacional, o modelo é particularmente útil como referência de qualidade para avaliação de métodos aproximados. Cerca de 90% das instâncias são resolvidas de maneira ótima em menos de 3600 segundos.

Qiu et al. (2020) investigam o problema conjunto de posicionamento de pontos de acesso e alocação de recursos em redes WiFi densas baseadas no padrão IEEE 802.11ax, incorporando restrições de qualidade de serviço e tolerância a falhas. Diferentemente de abordagens que tratam o posicionamento de APs de forma isolada, os autores integram decisões de potência de transmissão, seleção de canais e alocação de unidades de recurso (RUs) viabilizadas pelo mecanismo de OFDMA. O problema é formulado como um modelo de otimização com o objetivo de minimizar o número de APs, garantindo níveis mínimos de *throughput* para os usuários mesmo na presença de falhas simultâneas de APs. Devido à natureza NP-difícil do problema, também proposto um algoritmo heurístico de tempo polinomial, cuja eficácia é avaliada por meio de simulações. Os resultados indicam reduções expressivas no número de APs quando comparado a estratégias gulosas e aleatórias.

Diante dessas lacunas, este trabalho busca contribuir em duas frentes complementares: propõe hiper-heurísticas online e offline e uma aplicação do BRKGA para superar o estado da arte heurístico em instâncias de maior escala, e desenvolve formulações exatas modernizadas do APPP, incorporando características do padrão IEEE 802.11ax, avaliadas em plantas-baixas reais, preenchendo uma lacuna ainda pouco explorada na literatura. Esta revisão da literatura evidencia que, embora o APPP tenha sido amplamente investigado por meio de abordagens heurísticas e meta-heurísticas, a maioria dos trabalhos adota formulações simplificadas do problema, que frequentemente abstraem aspectos operacionais relevantes em cenários reais, como a alocação de canais de frequência, restrições de interferência entre APs vizinhos e requisitos de redundância de conectividade (RUFINO A.; SILVA, 2016) (KAMENETSKY; UNBEHAUN, 2002) (VANHATUPA; HANNIKAINEN; HAMALAINEN, 2007). Os trabalhos que exploram métodos exatos, embora mais recentes e promissores, ainda são escassos e focados em instâncias de porte limitado (OUSTRY et al., 2022) (QIU et al., 2020).

## 3 ABORDAGENS HEURÍSTICAS

Este capítulo apresenta as abordagens heurísticas da pesquisa, detalha os métodos adotados e discute os resultados obtidos, incluindo a descrição dos experimentos computacionais realizados. A Seção 3.1 descreve a definição do problema nessa abordagem. Em seguida, a Seção 3.2 expõe a proposta de hiper-heurísticas *online*, além de definir todas as heurísticas utilizadas para esta abordagem do problema. A Seção 3.3 descreve a hiper-heurística *offline*, e a Seção 3.4 propõe uma aplicação de *Biased Random-Key Genetic Algorithm*. Os resultados computacionais são expostos na Seção 3.6, ao realizar experimentos que verificam o desempenho das abordagens em relação à meta-heurística ILS-RVND, levantada como referência na literatura deste problema até então, utilizando instâncias descritas na Seção 3.5.

### 3.1 Definição do problema

Nesta versão do APP, utilizamos a abordagem definida por Rufino A.; Silva (2016), na qual procura-se minimizar o custo total do projeto de posicionamento de pontos de acesso em um ambiente interno, representado por uma planta baixa discretizada em uma grade de pontos equidistantes, separados entre si por exatamente um metro nas direções horizontal e vertical.

O ambiente é composto por quatro tipos de elementos: pontos clientes, pontos de instalação de APs, pontos proibidos e anteparos. Os **pontos clientes** representam as localizações no ambiente que devem ser atendidas por algum AP, sendo cada um deles caracterizado por uma demanda de qualidade de sinal (baixa, média ou alta) e uma demanda de *throughput*. Para que um ponto cliente seja considerado atendido, é necessário que exista ao menos um AP ativo dentro do seu raio de cobertura que satisfaça simultaneamente suas restrições de qualidade de sinal e de capacidade de *throughput*.

Os **pontos de instalação** são as posições candidatas para o posicionamento de APs no ambiente. Cada AP instalado possui três características: o raio de cobertura, o custo de aquisição e a capacidade máxima de *throughput*. Um mesmo ponto de instalação pode receber APs de diferentes tipos, sendo que cada tipo representa um modelo com combinações distintas dessas três características. A função objetivo busca minimizar o custo total dos APs instalados na solução, penalizando fortemente as soluções que violam as restrições de capacidade ou de qualidade de sinal.

Os **pontos proibidos** são posições do ambiente nas quais não é permitido instalar APs e não pode haver quaisquer coberturas, como regiões externas, áreas restritas ou locais estruturalmente inadequados. Esses pontos são considerados durante o processo de construção e busca de soluções, de forma que a sua cobertura ou associação será fortemente penalizada pela função objetivo. Desta forma, a função objetivo busca minimizar simultaneamente o custo total

dos APs instalados e a soma das penalizações pela cobertura de pontos proibidos, incentivando o método a evitá-los sem tornar inviável qualquer solução que os cubra.

Por fim, os **anteparos** representam os obstáculos físicos presentes no ambiente, tais como paredes de diferentes materiais e espessuras. Cada anteparo introduz um fator de atenuação do sinal, expresso em decibéis (dB), que reduz a qualidade do sinal recebido pelos pontos clientes situados além do obstáculo.

## 3.2 Hiper-heurística *online*

Nesta seção será apresentada a hiper-heurística de geração (*online*) proposta. Inicialmente, apresentamos as heurísticas construtivas e heurísticas de busca local escolhidas para compor as meta-heurísticas a serem construídas. São descritas nove heurísticas, seis propostas por Rufino A.; Silva (2016) e três propostas neste trabalho, marcadas com '\*'.

### 3.2.1 Heurísticas de Construção

As heurísticas de construção são responsáveis por gerar as soluções iniciais da hiper-heurística, sendo executadas uma única vez no início de cada meta-heurística avaliada. Uma boa solução inicial de posicionamento de APs pode reduzir significativamente o esforço das heurísticas de busca local subsequentes. Neste trabalho, duas heurísticas de construção foram levadas em consideração: *GeraçãoGulosa* e *GeraçãoAleatória*.

***GeraçãoGulosa()***: No APPP, uma das principais dificuldades é garantir que todos os pontos clientes sejam cobertos com o menor número de APs possível. Esta heurística de construção contribui para esse objetivo ao posicionar cada AP de forma a maximizar a cobertura local a cada passo, priorizando regiões de maior concentração de pontos ainda não cobertos. Por privilegiar APs de maior raio, tende a produzir soluções iniciais com boa cobertura espacial, servindo como ponto de partida para as heurísticas de busca local. As soluções inviáveis geradas são penalizadas na função objetivo, incentivando a correção pelos processos subsequentes.

**\**GeraçãoAleatória()***: A diversidade de tipos de APs disponíveis no APPP representa um desafio adicional: soluções que utilizam apenas APs de um mesmo tipo podem ser sub-ótimas em custo ou cobertura. Esta heurística de construção complementa a *GeraçãoGulosa()* ao introduzir diversidade na população inicial, posicionando APs de tipos variados em locais aleatórios enquanto houver pontos descobertos. Por explorar o espaço de soluções de forma ampla e sem viés, esta heurística nos ajuda diversificar as combinações de tipos de APs como solução inicial, permitindo a melhoria nas demais melhorias realizadas pelas buscas locais.

O Algoritmo 3 detalha o fluxo compartilhado pelas duas heurísticas de construção. O procedimento *GeraçãoConstrução()* recebe como parâmetro o *modo* de escolha, que determina o comportamento da função *EscolheAP()*: no modo *Guloso*, o ponto de instalação e o tipo de AP

são escolhidos de forma a maximizar a cobertura a cada iteração, enquanto no modo *Aleatório*, ambas as escolhas são feitas de maneira equiprovável. Em ambos os casos, o processo se repete até que não existam mais pontos clientes descobertos, garantindo que toda solução construída possua cobertura total do ambiente.

---

**Algoritmo 3:** Heurísticas de Construção
 

---

**Procedimento** *GeraçãoConstrução(modos)*:

**repita**

    Seja  $(ponto, tipo) \leftarrow EscolheAP(modos)$ ;  
     Adicione um AP do tipo *tipo* ao *ponto*;  
     Atualize o conjunto de pontos clientes descobertos;

**até não existirem pontos clientes descobertos;**

**Função** *EscolheAP(modos)*:

**if** *modo = GeraçãoGulosa* **then**

    Seja *ponto*  $\leftarrow$  ponto de instalação que cobre o maior número de pontos clientes descobertos;  
     Seja *tipo*  $\leftarrow$  tipo de AP com maior raio de cobertura disponível;

**if** *modo = GeraçãoAleatória* **then**

    Seja *ponto*  $\leftarrow$  ponto de instalação escolhido aleatoriamente;  
     Seja *tipo*  $\leftarrow$  tipo de AP escolhido aleatoriamente;

**Retorne**  $(ponto, tipo)$ ;

---

### 3.2.2 Heurísticas de Busca Local

*AllChangeLink()*: A violação da capacidade de *throughput* é uma das principais fontes de inviabilidade no APPP. Esta heurística atua diretamente nessa restrição ao redistribuir pontos clientes sobrecarregados para APs com capacidade disponível, sem alterar o posicionamento dos APs. Sua contribuição está em reduzir penalidades de inviabilidade de forma localizada e eficiente, tornando soluções previamente inviáveis em candidatas viáveis sem necessidade de reposicionamento, como descrito no Algoritmo 4.

A Figura 4 exemplifica uma iteração da heurística *AllChangeLink()*. A princípio, no exemplo A, temos uma configuração de 6 APs com cobertura completa no ambiente interno. Após uma iteração, no exemplo B, a *AllChangeLink()* pôde verificar que alguns pontos cobertos do AP A poderiam ser cobertos para os APs B e C. Com isso, todos os APs conseguiram ficar abaixo do seu limite de *throughput*.

*AllDryAP()*: Quando um AP excede significativamente sua capacidade de *throughput*, a redistribuição parcial de seus pontos pode ser insuficiente. Esta heurística trata casos mais críticos ao desassociar completamente todos os pontos clientes de APs sobrecarregados e redistribuí-los entre APs ativos com capacidade disponível. No contexto do APPP, isso contribui para eliminar gargalos de capacidade que comprometem a viabilidade global da solução, sendo especialmente útil quando a sobrecarga de um AP é alta, como exposto no Algoritmo 5.

**Algoritmo 4:** Heurística *AllChangeLink()***Procedimento** AllChangeLink():

```

Seja PontosClientes ← conjunto de pontos clientes da solução que estão conectados
por algum AP;
Seja APsDisponiveis ← conjunto de APs que não possuam sua capacidade máxima
de banda;
para cada ponto ∈ PontosClientes faça
  Seja AP ← AP do ponto cliente;
  Seja capacidadeDeBanda ← a capacidade de throughput do AP;
  Seja limiteDePassagem ← o limite de throughput do AP;
  Seja demanda ← a demanda do ponto por throughput;
  if capacidadeDeBanda > limiteDePassagem then
    para cada APVizinho ∈ APsDisponiveis faça
      Seja capacidadeBandaVizinho ← a capacidade de throughput do
      APVizinho ;
      Seja limiteDePassagemVizinho ← o limite de throughput do APVizinho ;
      if capacidadeBandaVizinho + demanda ≤ limitePassagemVizinho then
        | Associe ponto ao APVizinho;
      end
    fim
  end
fim

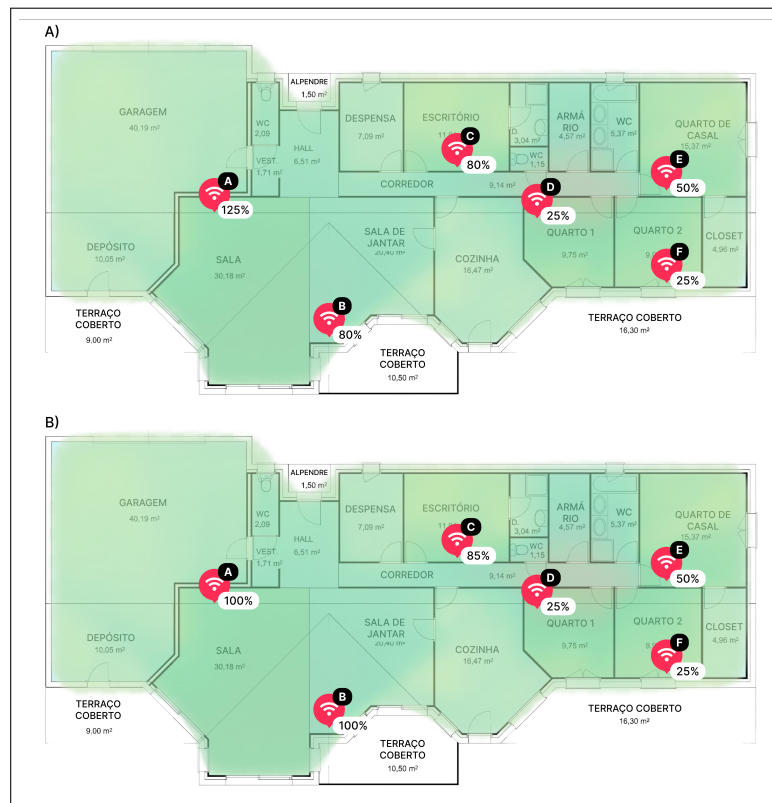
```

A Figura 5 demonstra um exemplo de iteração do *AllDryAP()*. Na primeira configuração da planta-baixa (A) há uma solução com 6 APs: A, B, C, D, E e F. O AP C excede 15% da sua capacidade máxima. Após uma execução da heurística (B), os APs A, B, D e E suportaram a cobertura dos pontos cobertos pelo AP C, pois possuíam capacidade abaixo do seu limite de *throughput*.

**BestAddAP()**: A cobertura incompleta de pontos clientes é um dos critérios de inviabilidade mais diretos neste problema. Esta heurística responde a esse cenário ao identificar e inserir o AP que melhor supre a demanda dos pontos ainda não conectados, respeitando as restrições de capacidade e qualidade de serviço, como demonstrado no Algoritmo 6. Sua contribuição está em expandir a solução de forma orientada, priorizando o ganho de cobertura a cada inserção e evitando adições desnecessárias de APs.

A Figura 6 exemplifica uma iteração do *BestAddAPP()*. No exemplo A, alguns pontos da planta-baixa possuem um gradiente vermelho, demonstrando que sua demanda não está atendida pela configuração de APs da solução atual. Assim, os APs A e B não conseguem satisfazer a demanda atual, e, ao executar a heurística uma vez, no exemplo B, o AP C foi escolhido para atender os pontos clientes pendentes.

Figura 4 – Exemplo de iteração do *AllChangeLink()*



Fonte: Autoria própria, 2026<sup>a</sup>.

<sup>a</sup> Para ilustrar o comportamento do *ray tracing* em todas as figuras subsequentes, os *heatmaps* de cobertura de sinal foram gerados utilizando o software Hamina Wireless (<https://www.hamina.com/>), e adaptados posteriormente nas plantas baixas para simular cenários de baixa, média e alta cobertura.

### Algoritmo 6: Heurística *BestAddAP()*

#### Procedimento *BestAddAP()*:

- Seja *pontosNaoConectados* ← conjunto de pontos clientes ainda não conectados a nenhum AP da solução;
- Seja *pontoDeMaiorCobertura* ← ponto de maior cobertura de pontos clientes não conectados;
- Seja *APAleatorio* ← AP aleatório que possua capacidade para a demanda que o ponto necessita;
- Adicione *APAleatorio* ao *pontoDeMaiorCobertura*;

*AllBestRadiusType()*: A qualidade do sinal recebido pelos pontos clientes depende diretamente do raio de cobertura do AP ao qual estão associados. No APDP, utilizar um AP com raio excessivo ou insuficiente para um determinado ponto representa desperdício de recursos ou violação de qualidade de serviço, respectivamente. Esta heurística, detalhada no Algoritmo 7, contribui ao ajustar o tipo de cada AP com base na real demanda de sinal dos seus pontos conectados, substituindo-o por um modelo de raio mais adequado quando disponível, equilibrando cobertura e eficiência.

**Algoritmo 5:** Heurística *AllDryAP()***Procedimento** *AllDryAP()*:

```

Seja APsAcimaDoLimite ← conjunto de APS ativos que estejam com uma exigência
de throughput acima do limite suportado;
Seja APsAbaixoDoLimite ← conjunto de APs ativos que estejam com uma exigência
de throughput abaixo do limite suportado;
para cada AP ∈ APsAcimaDoLimite faça
  Seja pontosDoAP ← conjunto de pontos cliente associados ao AP;
  para cada ponto ∈ pontosDoAP faça
    Seja demandaPonto ← demanda do ponto por capacidade de throughput;
    para cada APVizinho ∈ APsAbaixoDoLimite faça
      Seja capacidadeAPVizinho ← a capacidade do APVizinho;
      Seja limiteAPVizinho ← limite de throughput associado ao APVizinho;
      if capacidadeAPVizinho + demandaPonto ≤ limiteAPVizinho then
        | Associe ponto ao APVizinho;
      end
    fim
  fim
fim

```

**Algoritmo 7:** Heurística de *AllBestRadiusType()***Procedimento** *AllBestRadiusType()*:

```

Seja APsAssociados ← conjunto de APs associados a um ponto cliente na solução;
para cada AP ∈ APsAssociados faça
  Seja pontosConectados ← conjunto de pontos clientes ainda já conectados ao
  AP;
  para cada ponto ∈ pontosConectados faça
    if ponto não está sendo satisfeito pela qualidade de sinal then
      | Procure por um AP de raio maior e associe a este ponto;
    end
    if ponto está com uma qualidade de sinal acima do necessário then
      | Procure por um AP de raio menor e associe a este ponto;
    end
  fim
fim

```

A Figura 7 exemplifica uma iteração da heurística *AllBestRadiusType*. Na configuração A, a planta-baixa possui pontos não satisfeitos em qualidade de sinal, representados pelas cores amarelo e vermelho. Ao executar os procedimentos da heurística, na configuração B, o AP C foi substituído por um novo tipo de AP com raio de cobertura maior, a fim de satisfazer as necessidades dos pontos cliente.

**BestLink()**: Em muitas soluções parciais do APPP, pontos clientes podem estar dentro do raio de cobertura de APs já posicionados, mas não associados a eles por limitações do processo construtivo. Esta heurística aproveita a infraestrutura já instalada ao conectar esses pontos aos

Figura 5 – Exemplo de iteração do *AllDryAP()*



Fonte: Autoria própria, 2026.

APs existentes com capacidade disponível, sem inserir novos equipamentos, como descrito no Algoritmo 8. Sua contribuição é maximizar o aproveitamento dos APs já presentes na solução, reduzindo a necessidade de adições e contribuindo para soluções mais enxutas.

---

**Algoritmo 8:** Heurística de *BestLink()*

---

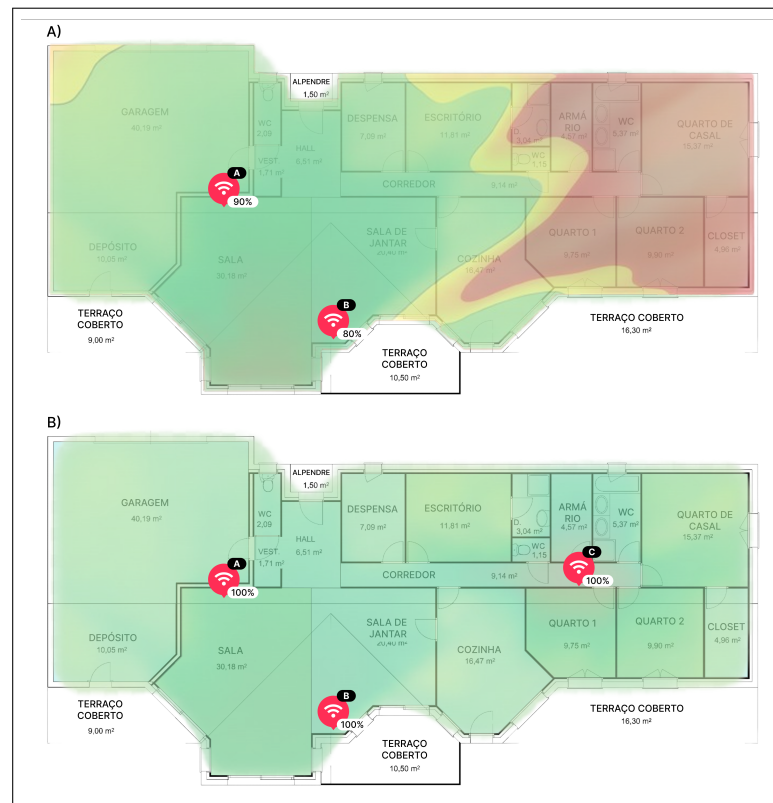
**Procedimento** *BestLink()*:

```

Seja pontosNaoConectados ← conjunto de pontos clientes ainda não conectados a
nenhum AP da solução;
Seja APsAssociados ← conjunto de APs associados a um ponto cliente na solução;
para cada ponto ∈ pontosNaoConectados faça
    para cada AP ∈ APsAssociados faça
        Seja pontosDentroDoRaio ← pontos dentro do raio do AP associado;
        if ponto ∈ pontosDentroDoRaio then
            Associe o AP ao ponto;
        end
    fim
fim
    
```

---

A Figura 8 ilustra uma iteração da heurística *BestLink()*. Na primeira configuração da planta-baixa (A), alguns pontos não estão conectados a nenhum AP da solução, representado pela cor cinza. Ao realizar uma execução dos procedimentos da heurística (B), os pontos foram corretamente associados aos APs já presentes na solução: A, B e C. Além disso, todos atingiram

Figura 6 – Exemplo de iteração do *BestAddAP()*

Fonte: Autoria própria, 2026.

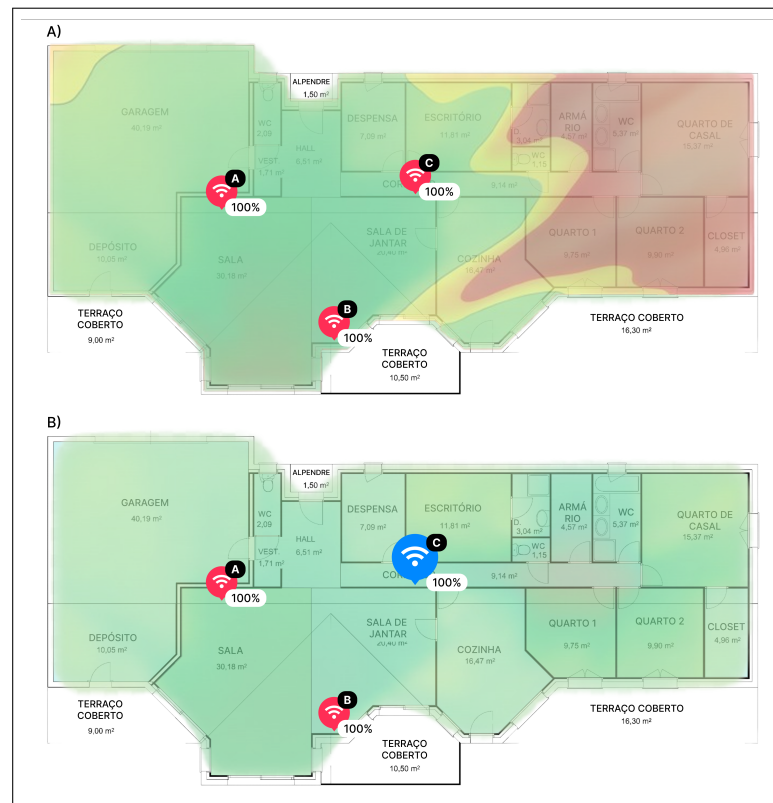
sua capacidade total e satisfizeram os requisitos da solução.

**\*AllBestCapacityType():** A escolha do tipo de AP adequado em termos de capacidade de *throughput* é importante para analisar a viabilidade e o custo da solução nesta formulação do APP. APs superdimensionados elevam o custo sem necessidade, enquanto APs subdimensionados geram violações de capacidade. O Algoritmo 9 expõe a heurística proposta, de maneira que evidencia sua contribuição ao revisar todos os APs da solução e substituí-los por modelos com capacidade mais ajustada à demanda real dos seus pontos clientes, promovendo um uso mais eficiente dos recursos disponíveis.

A Figura 9 exemplifica uma iteração dos procedimentos propostos pela heurística *AllBestCapacityType()*. Nessa configuração (A), a planta-baixa possui os APs A e C acima de sua capacidade normal, e os APs D e F estão com capacidade muito aquém do esperado. Após uma execução da heurística (B), os APs A e C são substituídos por APs de maior capacidade, e todos os pontos que estes cobrem exigem apenas 50% e 40% de suas capacidades, respectivamente. Os APs D e F foram substituídos por APs de menor capacidade, e agora ambos estão usando 70% de sua capacidade para cobrirem os mesmos pontos cliente.

**\*AllClosestMoveAP():** O posicionamento espacial dos APs influencia diretamente a quantidade de pontos clientes cobertos e, por consequência, o número total de APs necessários. No APP, um AP mal posicionado pode cobrir poucos pontos enquanto regiões densas permanecem

Figura 7 – Exemplo de iteração do *AllBestRadiusType()*



Fonte: Autoria própria, 2026.

**Algoritmo 9:** Heurística de *AllBestCapacityType()*

**Procedimento** *AllBestCapacityType()* :

Seja *APsAssociados* ← conjunto de APs associados a um ponto cliente na solução;

**para cada** *AP* ∈ *APsAssociados* **faça**

    Seja *capacidadeUtilizada* ← a capacidade utilizada do AP no momento;

    Seja *capacidadeTotal* ← a capacidade total do AP;

**if** *capacidadeUtilizada* > *capacidadeTotal* **then**

        | Associe todos os pontos deste AP a um AP com capacidade maior;

**end**

**if** *capacidadeUtilizada* < *capacidadeTotal* **then**

        | Associe todos os pontos deste AP a um AP com capacidade menor;

**end**

**fim**

desatendidas. A heurística, descrita no Algoritmo 10, contribui ao reposicionar os APs para locais mais próximos que ampliem sua cobertura efetiva, reduzindo lacunas de atendimento sem aumentar o número de equipamentos na solução.

A Figura 10 demonstra uma iteração da heurística *AllClosestMoveAP()*. Na primeira configuração (A), alguns pontos estão em vermelho, representando que não há a cobertura requerida, mesmo com os APs A, B e C cobrindo diversos pontos cliente. Após os procedimentos realizados na heurística (B), o AP C foi reposicionado para uma localidade que fornece maior

Figura 8 – Exemplo de iteração do *BestLink()*



Fonte: Autoria própria, 2026.

**Algoritmo 10:** Heurística *AllClosestMoveAP()*

**Procedimento** *AllClosestMoveAP()* :

- Seja *APsAssociados* ← conjunto de APs associados a um ponto cliente na solução;
- para cada** *AP* ∈ *APsAssociados* **faça**
- Seja *pontosNaoConectados* ← conjunto de pontos clientes não conectados a um AP;
- Seja *pontoMaiorCobertura* ← ponto de maior cobertura pertencente a *pontosMaisProximos*;
- Seja *pontosMaisProximos* ← conjunto de pontos mais próximos pertencentes a *pontosNaoConectados*;
- Mova AP para o ponto *pontoMaiorCobertura*;

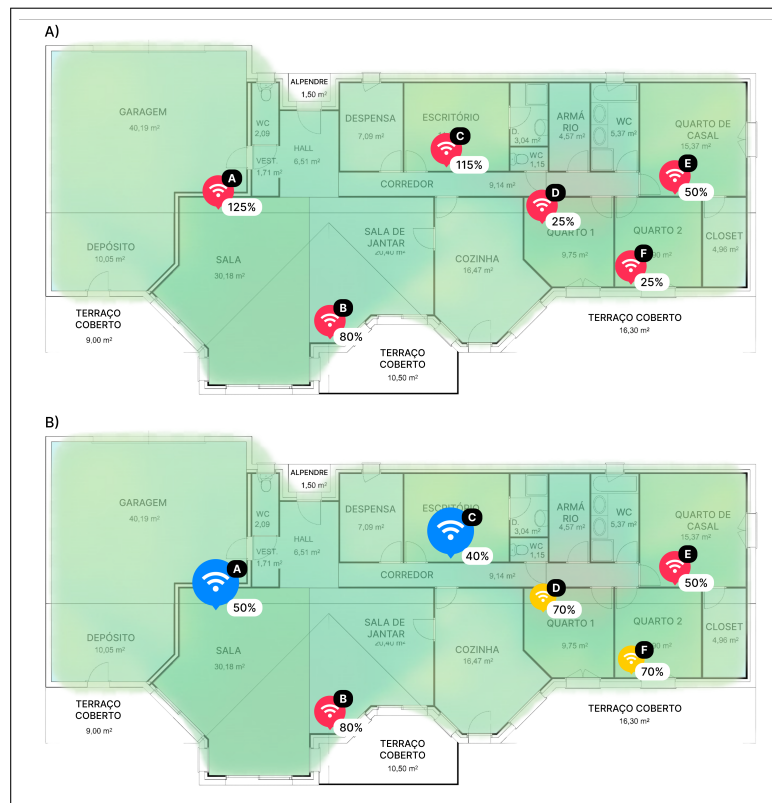
**fim**

cobertura de pontos, saltando de 30 pontos cobertos para 120. Assim, nesse cenário, todos os pontos clientes foram satisfeitos ao reposicionar este AP.

3.2.3 Estrutura da Hiper-heurística *Online*

Dadas as heurísticas de construção e de busca local selecionadas, esta seção descreve a estrutura proposta para a hiper-heurística *online*, assim como os operadores de Crossover e Mutação. A hiper-heurística de construção proposta realiza buscas no espaço das heurísticas de maneira *online*, ou seja, a aprendizagem da hiper-heurística ocorre com o *feedback* em tempo

Figura 9 – Exemplo de iteração do *AllBestCapacityType()*



Fonte: Autoria própria, 2026.

de execução do programa. Além disso, a estrutura é baseada em um AG, como se descreve no Algoritmo 11.

---

**Algoritmo 11: Hiper-heurística online**

---

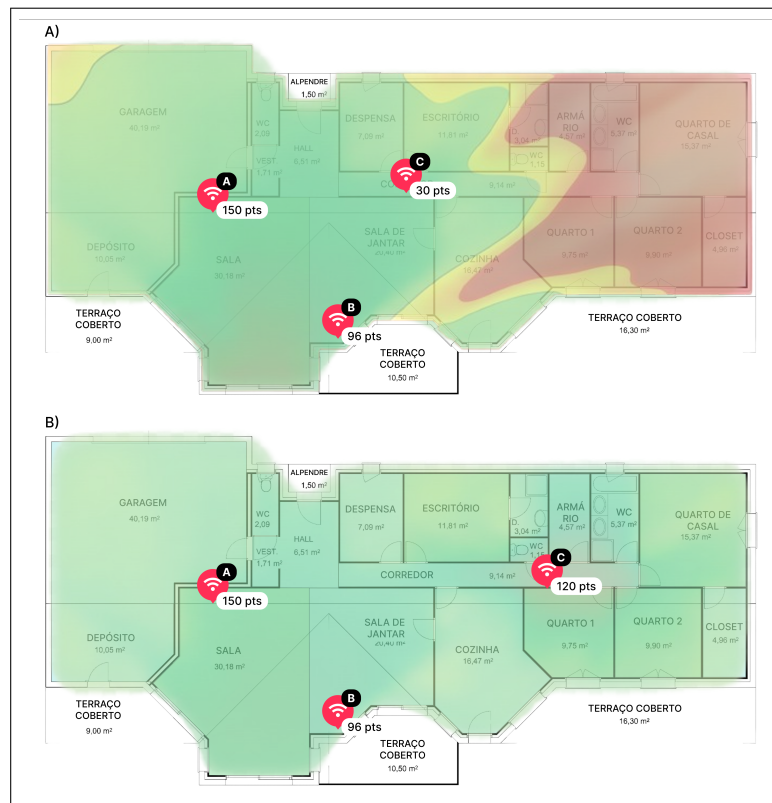
**Procedimento Hiper-heurística():**

$t \leftarrow 0$ ;  
 $P(t) \leftarrow$  população inicial com 14 soluções;  
 Avalie  $P(t)$  de acordo com o fitness;  
**repita**  
      $t \leftarrow t + 1$ ;  
     Gere  $P(t)$  a partir de  $P(t - 1)$ , utilizando crossover e mutação;  
     Avalie  $P(t)$  de acordo com o fitness;  
     Defina a população sobrevivente a partir das melhores soluções;  
**até tempo limite não for excedido**;  
**Retorne**  $P(t)$ ;

---

Cada indivíduo da população é uma meta-heurística, representada pelo vetor binário  $S = (s_1, s_2, \dots, s_9)$ . Os 2 primeiros *bits* representam as heurísticas de construção utilizadas, enquanto os demais são as heurísticas de busca local. Deste modo, para cada *bit*  $s_i$  ativado, a *i*-ésima heurística é utilizada para construir a meta-heurística em questão. A Figura 11 ilustra a composição de bits de uma solução. Neste exemplo, a segunda heurística de construção foi escolhida, bem como a segunda, terceira, quinta e sétima heurísticas de busca local. A esta

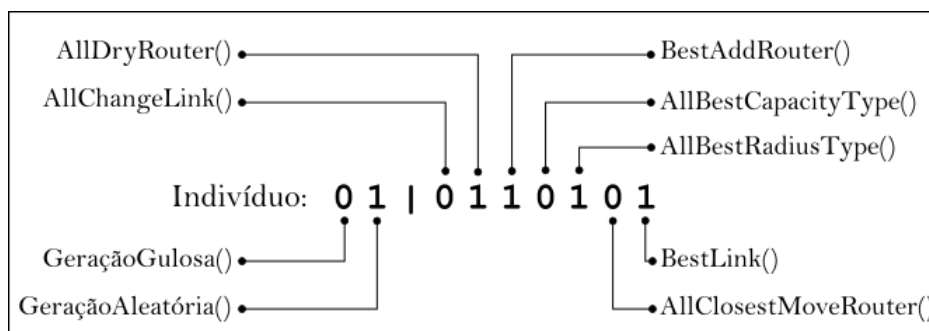
Figura 10 – Exemplo de iteração do *AllClosestMoveAP()*



Fonte: Autoria própria, 2026.

solução, também será associado o valor da função objetivo, que possui o intuito de minimizar a quantidade de APs instalados.

Figura 11 – Sequência de *bits* de uma solução



Fonte: Autoria própria, 2026.

Durante a fase de criação da população inicial são geradas exatamente 14 meta-heurísticas. São utilizadas as duas heurísticas de construção e as sete de busca local, sendo cada meta-heurística composta por exatamente uma heurística de construção e uma de busca local, totalizando 14 combinações diferentes. Enquanto o tempo limite não é alcançado, o algoritmo gera novas populações de meta-heurísticas. São selecionados aleatoriamente sete pares, e é criado, para cada par, mais um par de soluções, utilizando o operador de *Crossover*. Estas soluções

passam por um processo de mutação, e 50% das soluções são descartadas, sendo estas as que obtiveram os piores valores de função objetivo.

Ao término de cada execução completa do algoritmo genético, uma nova população inicial é gerada e o processo é reiniciado, preservando sempre a melhor solução encontrada entre todas as reinicializações. Esse mecanismo permite que diferentes combinações de heurísticas de baixo nível sejam exploradas ao longo do tempo disponível. Sendo assim, a hiper-heurística *online* adota uma estratégia *multi-start* para melhor explorar o espaço de busca dentro do tempo limite estabelecido.

Sejam  $A = (a_1, a_2, \dots, a_9)$  e  $B = (b_1, b_2, \dots, b_9)$  o par de soluções sobre as quais será realizado o *Crossover*, e  $C = (c_1, c_2, \dots, c_9)$  o seu resultado, cada bit  $c_i$  é escolhido de maneira equiprovável entre  $a_i$  e  $b_i$ . São geradas duas soluções para cada operação de *Crossover*. Após a realização de um *Crossover*, cada meta-heurística gerada passa por um procedimento de mutação. Aqui, cada *bit* da solução passa tem uma chance de 2% de ser substituído pelo seu valor oposto, permitindo criar uma maior diversidade de soluções e não prender-se em ótimos locais.

### 3.3 Hiper-heurística *offline*

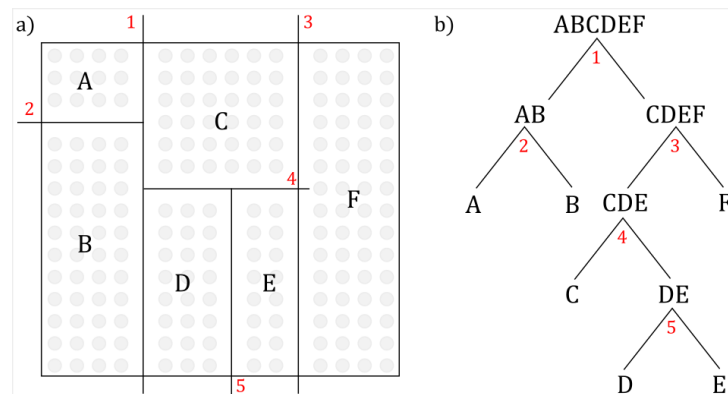
Além de uma abordagem *online*, foi elaborada uma hiper-heurística de construção para realizar buscas no espaço das heurísticas de maneira *offline*, possibilitando a realização de treinamentos em um conjunto sintético de instâncias de treino com objetivo de usar o *feedback* destas execuções para extrair informações relevantes para a resolução do problema nas instâncias da literatura. A criação das instâncias de treino foi baseada na geração de plantas baixas em um espaço bidimensional. A divisão do espaço em cômodos, simulando paredes, foi efetuada usando a técnica de *Binary Space Partition* (BSP), definida primeiramente por (FUCHS; KEDEM; NAYLOR, 1980).

A técnica de BSP se baseia na divisão recursiva de um espaço em subconjuntos menores, através de hiperplanos. Este processo resulta em uma árvore BSP, comumente chamada de *BSP-Tree*, onde cada nó representa uma região do espaço e cada folha corresponde a uma subdivisão final do espaço inicial. Nesta representação de *BSP-Tree*, cada divisão do espaço resulta em uma nova partição da planta baixa, de forma que os polígonos internos são salas e possuem paredes que são obstáculos servindo como anteparos. Dada inicialmente uma região do espaço bidimensional, o método de geração de instâncias proposto seleciona aleatoriamente um corte horizontal ou vertical para particionar esta região em duas.

A Figura 12 exibe um exemplo de execução do BSP para geração de uma planta baixa usada para criar instâncias do APPP. A Figura 12a) exibe a planta baixa com a sequência de cortes que originou as salas ABCDE e F. Por sua vez, a A Figura 12b) exibe a árvore binária utilizada pelo BSP para gerar esta instância. Dada a área inicial, foi escolhido aleatoriamente o corte vertical (que poderia ser horizontal, ou tocar outro ponto) que separa as regiões AB e CDEF.

O método é chamado recursivamente para as duas novas regiões criadas. Este procedimento termina quando o número máximo de cortes ou o tamanho mínimo de área for atingido.

Figura 12 – Exemplo de execução do BSP



Fonte: Autoria própria, 2026.

Foram gerados 9 grupos de instâncias com tamanhos variando entre  $8 \times 14$  e  $100 \times 100$ , e para cada grupo foram geradas 10 instâncias diferentes. A hiper-heurística *offline* recebe estas instâncias como entrada para treinamento. Para cada instância de treino, são executadas todas as  $9!$  permutações de possíveis meta-heurísticas. Após esta etapa de treinamento, é analisada a frequência dos bits que foram mais utilizados entre todas as soluções para a construção de uma nova meta-heurística, considerada a melhor para execução.

A hiper-heurística *offline* também adota uma estratégia *multi-start*, aplicada tanto na etapa de treinamento quanto na execução final. Durante o treinamento, cada permutação de meta-heurísticas é executada múltiplas vezes sobre as instâncias sintéticas geradas pelo BSP, preservando sempre a melhor solução encontrada entre as reinicializações. Na execução final, a meta-heurística selecionada a partir dos padrões aprendidos no treinamento é igualmente submetida ao mecanismo *multi-start*, garantindo que o tempo limite disponível seja aproveitado de maneira completa.

### 3.4 Biased Random-Key Genetic Algorithm

*Biased Random-Key Genetic Algorithm* (BRKGA) é uma técnica genérica de Algoritmos Genéticos projetada para problemas de otimização combinatória proposta por Gonçalves e Resende (2011). O BRKGA representa indivíduos da população do AG como vetores de números. Estes vetores devem ser decodificados em soluções viáveis para o problema de otimização que se deseja resolver. Uma das principais características do BRKGA é a introdução de um viés na geração de novos indivíduos. Em vez de selecionar pais de forma completamente aleatória, o BRKGA escolhe uma fração da nova população a partir dos melhores indivíduos da geração anterior, garantindo uma pressão seletiva que acelera a convergência para soluções ótimas.

A sequência de passos do BRKGA inclui: (i) *Inicialização*: geração de uma população inicial de vetores de números reais; (ii) *Decodificação*: conversão destes vetores em soluções concretas para o problema; (iii) *Avaliação*: cálculo da qualidade de cada solução; (iv) *Seleção e Reprodução*: formação de uma nova geração a partir de indivíduos selecionados com base em sua aptidão, com introdução de viés para favorecer os melhores; e (v) *Mutação*: pequenas alterações aleatórias nos vetores para manter a diversidade genética.

Para a implementação deste trabalho, foi adotada como base a interface de programação de aplicação (API) proposta por Toso e Resende (2014). Esta API explora a característica genérica da abordagem BRKGA, delegando ao usuário apenas a responsabilidade pelos requisitos específicos do problema, permitindo uma fácil adaptação e aplicação do algoritmo a diferentes contextos e tipos de problemas de otimização combinatória.

Para a aplicação do BRKGA no APPP, dado o vetor  $v = (v_1, v_2, \dots, v_{n-1}, v_n)$ , cada par de valores consecutivos é decodificado como uma adição de um AP em um ponto  $p$  do tipo  $t$ . Desta forma, esta etapa se assemelha à heurística de construção *Geração Aleatória*, na medida que constrói uma solução baseada em adição de APs aleatoriamente.

---

**Algoritmo 12:** Etapa de decodificação do BRKGA

---

**Procedimento** Decodificação():

Seja  $v \leftarrow$  vetor de valores respectivos a uma população;

Seja  $APs \leftarrow \emptyset$ ;

Seja  $i \leftarrow 0$ ;

**repita**

    Adicione o AP  $v[i]$  do tipo  $v[i+1]$  na solução;

$i = i + 2$

**até todos os pontos estarem cobertos;**

**Retorne**  $APs$ ;

---

Na etapa de Avaliação, o custo total é calculado de acordo com a função objetivo para a solução em questão, considerando os diversos fatores de penalização. Em seguida, as etapas de seleção, reprodução e mutação são realizadas conforme o modelo básico do BRKGA.

### 3.5 Benchmark

Como *benchmark* para comparar as abordagens heurísticas, foram utilizadas instâncias criadas por Rufino A.; Silva (2016), baseadas na discretização das plantas baixas em uma grade de pontos. Cada um destes pontos é posicionado horizontal e verticalmente (90° entre si) a exatamente um metro de distância. A Figura 13 exemplifica a discretização ao ilustrar possíveis posicionamentos de APs em uma planta baixa. O modelo de propagação utilizado foi baseado nos estudos de Nakprasit e Phongcharoenpanich (2018) e Androne e Palade (2010), que abordam o comportamento do sinal das redes Wi-Fi na frequência de 2,4 GHz. A Tabela 1 descreve os

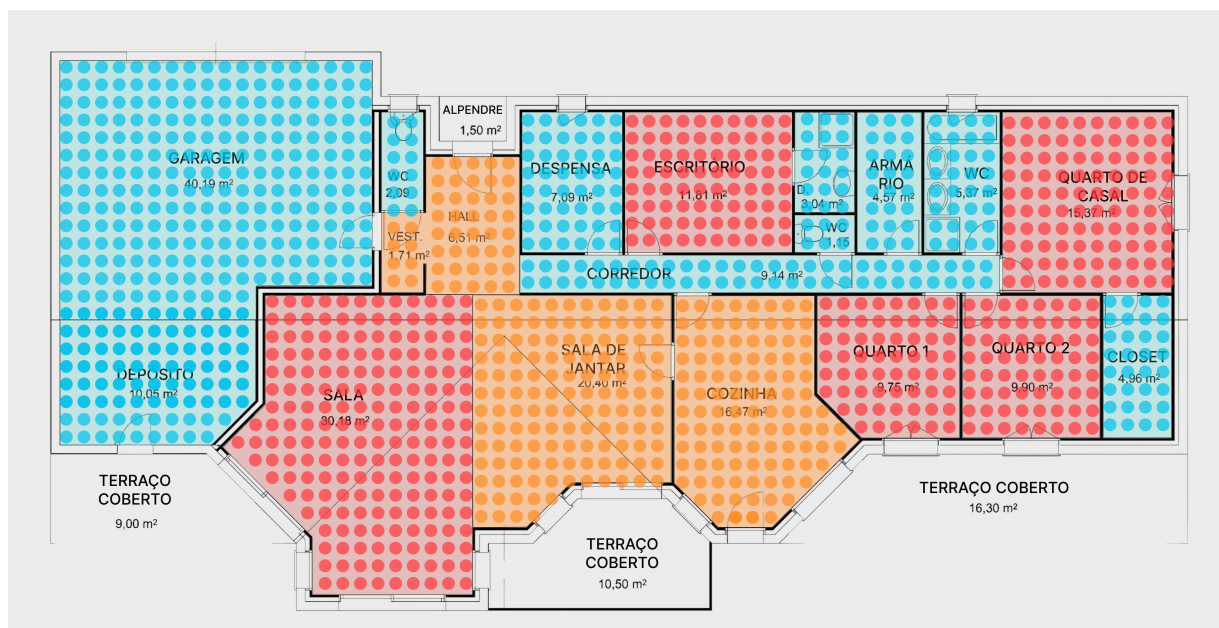
valores de atenuação utilizados nestas instâncias presente no trabalho de Rufino A.; Silva (2016).

Tabela 1 – Modelo de atenuação para anteparos

Tipo de Anteparo	Espessura (cm)	Atenuação (dB)
Divisória de Madeira	4	2
Divisória de Vidro	3	3
Placa de gesso ( <i>Drywall</i> )	5 a 10	4
Parede de Tijolo	15	6
Parede de Concreto	15 a 20	9
Parede de Concreto	25 a 30	12

Cada instância deve ser resolvida utilizando tipos de APs com três características específicas: o raio de cobertura, o custo e a capacidade. Todas as instâncias devem utilizar APs dos seguintes tipos: A=(150R\$, 100m, 150Mbps), representando um AP de entrada; B=(200R\$, 100m, 300Mbps), representando um AP de médio porte; e C=(300R\$,400m, 400Mbps), representando um AP de alta qualidade. Além disso, cada ponto é fornecido com as informações sobre sua posição na grade (x e y), demanda por qualidade (baixa, média ou alta) e a demanda por capacidade. Os anteparos são descritos pelas coordenadas iniciais e finais na grade e pelo fator de redução do sinal. A Figura 13 ilustra uma instância de exemplo. Neste caso, há paredes como anteparos. Os pontos vermelhos representam o requerimento de sinal com alta capacidade de rede. Os pontos em laranja representam a necessidade obrigatória de sinais de alta qualidade. Os pontos em azul representam requerimentos de cobertura com qualidade mínima.

Figura 13 – Exemplo de uma planta discretizada



Fonte: Autoria própria, 2026.

O *benchmark* possui 8 grupos de instâncias aleatórias, cada um contendo 10 casos de teste, em ordem crescente de dificuldade. Cada grupo possui o mesmo conjunto de pontos e de

anteparos, sendo o tipo de anteparo selecionado ao acaso, assim como a demanda por qualidade e capacidade de *throughput* de cada ponto. Os grupos 8x14 e 100x100 são os menores e maiores, respectivamente.

### 3.6 Resultados Experimentais

Esta seção apresenta os experimentos computacionais e os resultados obtidos em relação às hiper-heurísticas *offline* e *online* desenvolvidas, bem como a meta-heurística BRKGA aplicada ao APPP, as quais são comparadas com os resultados da meta-heurística *ILS-RVND* (RUFINO A.; SILVA, 2016).

Os conjuntos de testes utilizados podem ser organizados em 9 grupos, divididos por suas dimensões: 8x14, 13x13, 11x23, 25x25, 30x30, 50x25, 50x50, 100x50 e 100x100. Cada conjunto de teste possui 10 instâncias distintas, indexados a partir de 0. Para fins de simplificação, denominamos as hiper-heurísticas desenvolvidas neste trabalho de *HH-off* e *HH-on* (siglas para hiper-heurísticas *offline* e *online*, respectivamente), e a meta-heurística *ILS-RVND* de apenas *ILS*. Em conjunto com o BRKGA, todos os métodos foram submetidos a 10 execuções para cada instância, com um tempo limite de 10 segundos para cada execução.

#### 3.6.1 Análise comparativa dos resultados

Em todas as tabelas, a coluna **I** denomina cada instância de entrada. Para cada algoritmo: **ILS**, **BRKGA**, **HH-on** e **HH-off**, temos as colunas **avg** e **best**, que reportam a média do resultado da função objetivo para as 10 execuções de cada instância, e a melhor solução encontrada entre as execuções, respectivamente. Adicionalmente, a coluna **best-sequence** denota a sequência (descrita na Figura 11) encontrada para a melhor função objetivo obtida para a **HH-on**.

Nas instâncias de dimensão 8x14, o *ILS*, *HH-on* e *HH-off* ficaram aproximadamente empatados em todos os testes, obtendo os melhores resultados em relação à função objetivo. Já o BRKGA ficou próximo dos melhores resultados apenas 4 vezes nas 10 instâncias de teste. Para as instâncias de 13x13, o desempenho entre o *ILS* e o *HH-on* se mantém, com os melhores resultados empatados. Porém, o *HH-off* e, principalmente, o BRKGA ficaram mais distantes dos melhores resultados encontrados. No caso do BRKGA, a diferença entre resultados chegou até 355 vezes. Nas instâncias 11x23, a *HH-off* conquistou os melhores resultados em 8 casos de teste, enquanto o *ILS* e a *HH-on* tiveram melhores resultados em 2 desses casos. Além disso, o BRKGA teve o pior desempenho entre todas as abordagens selecionadas. Com os testes das instâncias de dimensão 25x25, a *HH-on* teve os melhores resultados em todos os testes e o *ILS* empatou em 8 deles. A *HH-off* ficou próxima dos melhores resultados encontrados e BRKGA seguiu com padrões de discrepância altos. Já nas instâncias 30x30, o *ILS* teve melhores resultados em 9 casos de teste, a *HH-on* venceu em 1 caso e empatou com o *ILS* em mais um. Além disso, a *HH-off* e o BRKGA seguiram o comportamento usual até o momento, com a *HH-off* se aproximando dos

melhores valores e o BRKGA alcançando valores até 487 vezes maiores.

Tabela 2 – Execução de testes com instâncias de dimensões 8x14

I	ILS		BRKGA		HH-on			HH-off	
	avg	best	avg	best	avg	best	best-sequence	avg	best
0	339	339	339	339	339	339	1 0 1 0 0 0 0 1 0 0	339,2	339
1	181	181	335	335	181	181	0 1 1 0 0 1 0 1 0 0	242,2	181
2	181	181	337	337	181	181	0 1 1 0 0 0 0 0 0 0	182,7	181
3	333	333	335	335	333,8	333	0 1 1 0 0 0 0 0 0 0	340,3	333
4	326	326	326	326	326	326	0 1 1 0 0 0 0 0 0 0	334,9	326
5	338	338	338	338	338	338	1 0 1 1 0 0 0 0 0 0	344,7	339
6	222	222	336	336	222	222	0 1 1 0 0 0 0 0 0 0	234,3	222
7	336	336	338	338	336,2	336	0 1 1 0 0 1 1 0 0 0	337,9	336
8	229	229	339	339	229	229	1 0 1 0 0 1 0 0 0 0	328,6	229
9	339	339	339	339	339,1	339	0 1 1 0 0 0 0 0 1 0	359,9	339

Tabela 3 – Execução de testes com instâncias de dimensões 13x13

I	ILS		BRKGA		HH-on			HH-off	
	avg	best	avg	best	avg	best	best-sequence	avg	best
0	300	300	140307	140307	300	300	0 1 1 0 0 0 1 0 0 0	502,2	457
1	305	305	60318	60318	305	305	0 1 1 0 0 0 0 0 0 1	622,8	523
2	513	513	80321	80321	513	513	0 1 1 0 0 0 0 0 0 0	722,8	673
3	512	512	10317	10317	512	512	0 1 1 0 0 0 0 1 0 0	3811,2	812
4	613	613	350318	350318	613	613	0 1 1 0 0 0 0 0 0 0	2958	823
5	613	613	430307	430307	613	613	0 1 1 0 0 0 0 0 0 1	4211	1073
6	703	703	260307	260307	703	703	0 1 1 0 1 0 0 1 0 1	7241	1221
7	812	812	10307	10307	812	812	0 1 1 0 0 0 0 0 0 0	2229	1169
8	963	963	10322	10322	963	963	0 1 1 0 0 0 0 0 0 0	6368	1323
9	1212	1212	430318	430318	1212	1212	0 1 1 0 0 0 0 0 0 0	7663	1573

Tabela 4 – Execução de testes com instâncias de dimensões 11x23

I	ILS		BRKGA		HH-on			HH-off	
	avg	best	avg	best	avg	best	best-sequence	avg	best
0	300	457	80306	80306	300	457	1 0 1 0 0 0 0 1 0 0	355	305
1	305	522	309	309	305	522	0 1 1 0 0 0 0 0 0 0	329	305
2	619,6	619	340310	340310	<b>618,1</b>	<b>618</b>	0 1 1 0 0 1 0 0 0 0	553	513
3	752,6	750	80310	80310	752,6	750	0 1 1 0 1 0 0 0 0 0	573	513
4	823	823	10213	10213	823	823	0 1 1 0 0 0 0 1 0 0	1578	563
5	<b>1103,3</b>	<b>1019</b>	90310	90310	1094,7	1022	0 1 1 0 1 0 0 0 0 0	1688	663
6	1113,1	113	40310	40310	1113,1	113	0 1 1 0 0 0 0 0 0 0	778,6	703
7	1156,2	1153	340310	340310	1150	1150	0 1 1 0 0 0 0 0 0 0	2893	813
8	1322,8	1322	340310	340310	<b>1322</b>	1322	0 1 1 0 0 0 0 0 0 0	3058	963
9	1523	1523	80310	80310	1523	1523	0 1 1 0 0 0 0 0 0 0	4308	1263

Já nas instâncias de 50x25, como pode ser visto na Tabela 7, o *HH-on* consegue superar o *ILS* por 4 vezes, mas possui valores de função objetivo piores por 5 momentos. E como foi visto anteriormente, a *HH-off* segue aproximando-se dos valores vencedores.

Tabela 5 – Execução de testes com instâncias de dimensões 25x25

I	ILS		BRKGA		HH-on			HH-off	
	avg	best	avg	best	avg	best	best-sequence	avg	best
0	1300	1300	940300	940300	1300	1300	0 1 1 0 0 0 0 1 0 0	4440	1400
1	1300	1270	1390300	1390300	<b>1270</b>	<b>1200</b>	0 1 1 0 1 1 0 0 0 0	1485	1300
2	1600	1600	10300	10300	1600	1600	0 1 1 0 0 0 0 0 0 1	11650	1700
3	1855	1800	740300	740300	1855	1800	0 1 1 0 0 0 0 0 0 0	3040	1900
4	2055	2000	1460300	1460300	<b>2030</b>	2000	0 1 1 0 0 0 0 0 0 0	7185	2100
5	2380	2300	1690300	1690300	<b>2325</b>	2300	0 1 1 0 0 0 0 0 0 0	8535	2450
6	2570	2500	270300	270300	2570	2500	0 1 1 1 0 1 0 0 0 0	4665	2550
7	3100	3100	1390300	1390300	3100	<b>3050</b>	0 1 1 0 0 1 0 1 0 0	14210	3250
8	3820	3800	1670300	1670300	3820	3800	0 1 1 0 0 0 0 1 0 0	13920	13700
9	<b>3930</b>	3900	1690300	1690300	3955	3900	0 1 1 0 1 0 0 0 0 0	14055	4100

Tabela 6 – Execução de testes com instâncias de dimensões 30x30

I	ILS		BRKGA		HH-on			HH-off	
	avg	best	avg	best	avg	best	best-sequence	avg	best
0	<b>1244,2</b>	<b>1208</b>	300351	300351	1293	1244	0 1 1 0 1 0 0 0 0 0	4499	1318
1	<b>1333,3</b>	<b>1333</b>	10481	10481	1346,5	1343	0 1 1 0 0 0 0 1 0 0	2553,4	1500
2	1804,9	1775	320398	320398	<b>1775</b>	1775	0 1 1 0 1 0 0 0 0 0	4915	1825
3	<b>1626,7</b>	<b>1600</b>	10481	10481	1730,9	1706	0 1 1 1 0 0 0 1 0 0	7001	1943
4	2247,6	2175	1060411	1060411	<b>2175</b>	2175	0 1 1 0 0 0 0 0 0 0	8410	2375
5	<b>2455,4</b>	<b>2452</b>	10454	10454	2512,6	2474	0 1 1 0 0 0 0 0 1 0	6689,3	2600
6	<b>3065</b>	<b>2975</b>	390380	390380	3075	3075	0 1 1 0 0 0 0 0 0 1	14165	3175
7	<b>2930,8</b>	<b>2890</b>	10539	10539	3064,8	3023	0 1 1 0 0 0 0 0 0 0	7230	3225
8	<b>4238</b>	<b>4175</b>	320372	320372	4290	4225	0 1 1 0 0 0 0 0 0 0	13355	4325
9	<b>4048,9</b>	<b>3971</b>	350351	350351	4131	4058	0 1 1 0 0 1 0 0 0 1	11204,1	4125

Tabela 7 – Execução de testes com instâncias de dimensões 50x25

I	ILS		BRKGA		HH-on			HH-off	
	avg	best	avg	best	avg	best	best-sequence	avg	best
0	2300	2300	1790300	1790300	<b>2290</b>	<b>2250</b>	0 1 1 0 0 0 0 0 0 0	9435	2400
1	2700	2700	220300	220300	<b>2620</b>	<b>2600</b>	0 1 1 0 0 0 0 0 0 0	9700	2800
2	3690	3600	600300	600300	<b>3655</b>	3600	0 1 1 0 0 0 0 1 0 0	7775	3700
3	4070	4000	2190300	2190300	<b>4060</b>	4000	0 1 1 0 0 1 0 0 0 0	6190	4000
4	4980	4900	2160300	2160300	4980	<b>4850</b>	0 1 1 0 0 0 0 0 0 0	14040	5050
5	<b>5185</b>	<b>5100</b>	230300	230300	5215	5150	0 1 1 0 0 1 0 0 0 0	12320	5350
6	<b>5985</b>	<b>5800</b>	1500300	1500300	6025	5900	0 1 1 0 0 1 0 0 0 0	14050	6150
7	<b>6605</b>	<b>6550</b>	510300	510300	6650	6650	0 1 1 0 0 1 0 0 0 1	12730	6600
8	<b>7765</b>	<b>7600</b>	1430300	1430300	7890	7750	0 1 1 0 0 0 0 1 0 0	12910	7800
9	<b>8725</b>	<b>8600</b>	1840300	1840300	8865	8800	0 1 1 0 0 0 0 0 0 1	17795	9000

Ao analisar as Tabelas 8 e 9, pode-se verificar que o *HH-on* consegue superar o método *ILS* em todos os melhores resultados de função objetivo e com uma diferença bem mais expressiva, chegando a ultrapassar os grandes valores obtidos pelo *BRKGA* em alguns dos testes. Adicionalmente, o *HH-on* possui uma média menor da função objetivo em 2 instâncias de

50x50. Além disso, o *HH-off* continuou apresentando os mesmos comportamentos dos testes anteriores. Por fim, a Tabela 10 deixa ainda mais clara a vantagem do *HH-on* em relação aos demais métodos, uma vez que este método alcançou os melhores resultados, tanto na coluna *best* quanto na *avg*, para todas as 10 instâncias deste grupo.

Tabela 8 – Execução de testes com instâncias de dimensões 50x50

I	ILS		BRKGA		HH-on			HH-off	
	avg	best	avg	best	avg	best	best-sequence	avg	best
0	4950	4850	4850331	4850331	<b>4550</b>	<b>4300</b>	0 1 1 1 1 0 0 0 0 1	15095	5200
1	6185	6150	4420324	4420324	<b>5810</b>	<b>5450</b>	0 1 1 0 1 0 0 0 0 0	13320	6350
2	7265	7150	1360349	1360349	<b>6890</b>	<b>6700</b>	0 1 1 0 0 1 0 1 0 1	18365	7200
3	8338	8240	10130200	10130200	<b>8173,7</b>	<b>7847</b>	0 1 1 0 0 1 0 0 0 0	20404,5	8350
4	9650	9600	2920308	2920308	<b>9190</b>	<b>9000</b>	0 1 1 0 0 0 0 0 0 0	32590	9850
5	<b>11146,4</b>	11050	10990200	10990200	11170	<b>10750</b>	0 1 1 0 0 1 0 0 0 1	33134,3	20850
6	12605	11450	10230321	10230321	<b>11215</b>	<b>10900</b>	0 1 1 0 0 0 0 1 0 0	34580	21850
7	13262,7	12979	8960300	8960300	<b>12799,9</b>	<b>12250</b>	0 1 1 1 1 1 0 0 0 0	42178,6	23100
8	<b>16905</b>	16550	8130330	8130330	17030	<b>16500</b>	0 1 1 0 0 1 0 0 0 0	45735	36650
9	17435	17150	2770307	2770307	<b>17380</b>	<b>17000</b>	1 0 1 1 1 1 0 1 0 0	31465	17600

Tabela 9 – Execução de testes com instâncias de dimensões 100x50

I	ILS		BRKGA		HH-on			HH-off	
	avg	best	avg	best	avg	best	best-sequence	avg	best
0	26985,4	10266	15010300	15010300	<b>10331,7</b>	<b>9993</b>	0 1 1 0 0 1 0 1 0 0	39173,7	19929
1	12643,7	12415	4980364	4980364	<b>12548,9</b>	<b>12189</b>	0 1 1 0 0 1 0 0 0 0	18414,5	12310
2	57995,1	15500	16620367	16620367	<b>15263,3</b>	<b>14737</b>	0 1 1 0 0 1 0 0 0 0	53954,7	24873
3	51970	18880	20200371	20200371	<b>18968,3</b>	<b>18409</b>	0 1 1 0 1 0 0 0 0 0	47379,1	28143
4	44730	20100	11650354	11650354	<b>19775</b>	<b>19000</b>	0 1 1 0 0 0 0 0 0 0	33550	29400
5	115255,9	22450	16670300	16670300	<b>22056,5</b>	<b>21400</b>	0 1 1 0 0 0 0 0 0 0	57570,5	41684
6	131958,4	25400	14310300	14310300	<b>25074,8</b>	<b>23723</b>	0 1 1 0 1 0 0 0 0 0	55428,6	34974
7	164387	31422	18850361	18850361	<b>27734,5</b>	<b>26850</b>	0 1 1 1 1 0 0 0 0 0	43975	36800
8	239045,3	37400	21200300	21200300	<b>35120,2</b>	<b>34350</b>	0 1 1 0 1 1 0 0 0 0	85067,3	64200
9	454971,5	37731	21190300	21190300	<b>37322,8</b>	<b>36700</b>	0 1 1 1 1 1 0 0 0 0	71963,9	46438

Por conseguinte, podemos observar que o *HH-on* tende a encontrar resultados melhores para instâncias de dimensões maiores. No conjunto de instâncias construídas por (RUFINO A.; SILVA, 2016), o *HH-on* conseguiu encontrar resultados melhores no mesmo tempo limite mais vezes, principalmente impulsionado pelas instâncias de maior escala. O *ILS*, mesmo sendo uma meta-heurística que obteve bons resultados para o problema em instâncias menores, parece não conseguir explorar outros ótimos locais rapidamente. Isto se percebe ao verificar a magnitude alta das colunas *ILS-avg* em relação a *HH-on-avg*, chegando a serem quase 10 vezes de diferença em certos casos. O *HH-on-avg* possui valores próximos de *HH-on-best* também nas instâncias, indicando que a *HH-on* conseguiu chegar próximo no possível ótimo global em todas as execuções nesses cenários.

Outro ponto a ressaltar são as escolhas das heurísticas de baixo nível pela *HH-on*. Por diversas vezes na solução, as melhores execuções não precisaram ter mais do que 4 heurísticas de busca local. Na maioria das vezes, precisaram apenas de 1 ou 2 destas heurísticas. Um ponto a se considerar é que apenas uma instância, entre as Tabelas 8 e 9, possui a heurística de construção gulosa. Todas as demais tiveram a heurística de construção aleatória como parte da solução final, indicando que as heurísticas performaram melhor ao precisarem reajustar as posições dos APs. Contudo, esse comportamento se inverte nos resultados da Tabela 10.

Tabela 10 – Execução de testes com instâncias de dimensões 100x100

I	ILS		BRKGA		HH-on			HH-off	
	avg	best	avg	best	avg	best	best-sequence	avg	best
0	∞	∞	∞	∞	<b>20149</b>	<b>19834</b>	1 1 1 0 0 0 0 0 0 1	58291,3	30808
1	∞	∞	∞	∞	∞	<b>23734</b>	1 0 1 1 0 0 0 0 0 0	<b>51009</b>	24134
2	∞	∞	∞	∞	<b>29774</b>	<b>29484</b>	1 0 1 0 0 0 0 0 1 0	429555521,6	39934
3	∞	∞	∞	∞	<b>32944</b>	<b>32684</b>	1 0 1 0 0 0 0 0 0 0	∞	53234
4	∞	∞	∞	∞	<b>38474</b>	<b>38134</b>	1 0 1 0 0 0 0 1 1 0	∞	48674
5	∞	∞	∞	∞	<b>43984</b>	<b>43734</b>	1 1 1 0 0 0 0 0 0 1	115904,5	73882
6	∞	∞	∞	∞	4203024	<b>47034</b>	1 0 1 0 1 0 0 0 0 0	<b>91748,6</b>	67484
7	∞	∞	∞	∞	<b>52584</b>	<b>51984</b>	1 0 1 0 0 0 1 1 0 0	214833615,5	73116
8	∞	∞	∞	∞	<b>66714</b>	<b>65984</b>	1 1 1 0 1 0 0 0 0 0	119663,2	66926
9	∞	∞	∞	∞	6286054	<b>69484</b>	1 0 1 0 1 0 0 0 0 0	∞	109934

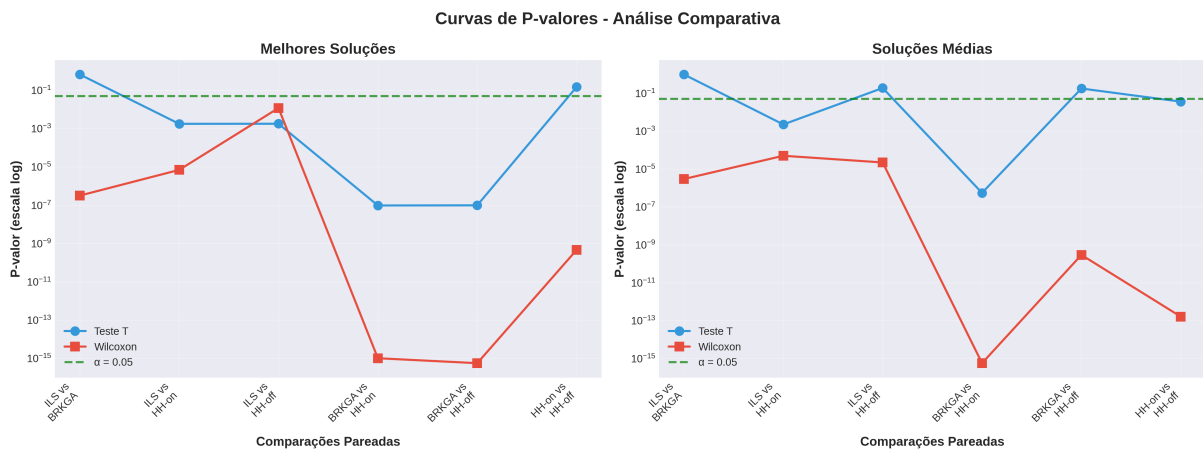
É importante ressaltar, contudo, que as grandes diferenças entre os valores encontrados pelas heurísticas se devem ao forte fator de penalização adotado para soluções inviáveis. Isto demonstra o grau de dificuldade para lidar com o APPP, uma vez que os métodos apresentam dificuldades até para conseguir soluções viáveis em instâncias de grandes dimensões. Neste sentido, acreditamos que seja necessário criar novas heurísticas de construção que sejam capazes de gerar, desde o início, soluções viáveis.

### 3.6.2 Análise Estatística dos Resultados

Para validar a significância estatística das diferenças entre as abordagens propostas e os métodos base (ILS e BRKGA), foram realizados testes de hipóteses sobre os resultados obtidos nas instâncias experimentais. Esta seção apresenta os testes de normalidade e comparações pareadas utilizando os testes de Wilcoxon e T de Student.

Inicialmente, foi aplicado o teste de Shapiro-Wilk para verificar se os dados correspondiam a uma distribuição normal (SHAPIRO; WILK, 1965). Este teste é utilizado para determinar a aplicabilidade de testes paramétricos, como o teste T, ou a necessidade de testes não-paramétricos, como Wilcoxon. A Figura 14 apresenta uma visualização dos p-valores obtidos em todas as comparações pareadas, tanto para as melhores soluções quanto para as soluções médias. A representação em escala logarítmica permite identificar claramente quais comparações apresentam diferenças estatisticamente significativas, evidenciando a magnitude dessas diferenças.

Figura 14 – Curvas de p-valores para comparações pareadas entre métodos



Fonte: Autoria própria, 2026.

Na Figura 14, observa-se que o teste T de Student (linha azul) não detecta diferença significativa em alguns cenários, permanecendo acima da linha de  $\alpha = 0,05$  nestes. Já o teste de Wilcoxon (linha vermelha) apresenta p-valores extremamente baixos ( $p < 10^{-6}$ ), evidenciando diferenças que são mascaradas pela não-normalidade dos dados. Tanto para ILS vs HH quanto para BRKGA vs HH, ambos os testes apresentam p-valores significativamente abaixo de  $\alpha$ , com o teste de Wilcoxon atingindo valores próximos a  $10^{-15}$  nas comparações BRKGA vs HH, indicando diferenças estatísticas extremamente robustas. Para as melhores soluções (painel esquerdo), o teste T não detecta diferença significativa, enquanto o Wilcoxon revela diferença altamente significativa ( $p < 10^{-10}$ ). Já para as soluções médias (painel direito), ambos os testes detectam diferença significativa entre as duas hiper-heurísticas, sendo que o sinal negativo da estatística T ( $T = -2, 11$ ) indica que a HH-on apresenta médias menores, ou seja, soluções de maior qualidade nessa métrica. A similaridade dos padrões entre os dois painéis demonstra que as diferenças observadas refletem diferenças sistemáticas no desempenho dos métodos.

A visualização reforça a importância de aplicar tanto testes paramétricos quanto não-paramétricos em experimentos de otimização combinatória, uma vez que o teste de Wilcoxon detectou diferenças significativas em todas as comparações, enquanto o teste T falhou em detectar diferenças em 3 das 6 comparações para melhores soluções e em 4 das 6 para soluções médias.

As Tabelas 11 e 12 apresentam os resultados dos testes de normalidade para as melhores soluções e soluções médias, respectivamente. O teste de Shapiro-Wilk calcula uma estatística  $W$  que varia entre 0 e 1, na qual os valores próximos a 1 indicam maior aderência à distribuição normal. O p-valor associado permite rejeitar a hipótese nula de normalidade quando inferior ao nível de significância adotado ( $\alpha = 0.05$ ).

Como pode ser observado, todas as abordagens apresentaram p-valores extremamente baixos ( $p < 0.001$ ), indicando forte rejeição da hipótese de normalidade. Este resultado justifica a utilização do teste não-paramétrico de Wilcoxon para comparações pareadas, uma vez que

Tabela 11 – Teste de normalidade (Shapiro-Wilk) para as melhores soluções

Abordagem	Estatística W	P-valor
ILS-best	0.3758	$9.34 \times 10^{-18}$
BRKGA-best	0.6498	$2.47 \times 10^{-13}$
HH-on-best	0.6672	$5.62 \times 10^{-13}$
HH-off-best	0.6635	$4.71 \times 10^{-13}$

Tabela 12 – Teste de normalidade (Shapiro-Wilk) para as soluções médias

Abordagem	Estatística W	P-valor
ILS-avg	0.3816	$1.11 \times 10^{-17}$
BRKGA-avg	0.6498	$2.47 \times 10^{-13}$
HH-on-avg	0.1527	$2.25 \times 10^{-20}$
HH-off-avg	0.2374	$1.89 \times 10^{-19}$

este não assume distribuição normal dos dados. A Tabela 13 apresenta os resultados dos testes T de Student e Wilcoxon para comparações pareadas entre todas as abordagens considerando as melhores soluções encontradas.

Tabela 13 – Testes estatísticos para comparações pareadas (melhores soluções)

Comparação	Estatística T	P-valor (T)	Estatística W	P-valor (Wilcoxon)
ILS-best vs BRKGA-best	-0.4346	$6.64 \times 10^{-1}$	683.0	$3.16 \times 10^{-7}$
ILS-best vs HH-on-best	3.1753	$1.76 \times 10^{-3}$	183.5	$6.93 \times 10^{-6}$
ILS-best vs HH-off-best	3.1729	$1.78 \times 10^{-3}$	1095.0	$1.18 \times 10^{-2}$
BRKGA-best vs HH-on-best	5.5619	$9.65 \times 10^{-8}$	7.0	$1.02 \times 10^{-15}$
BRKGA-best vs HH-off-best	5.5582	$9.82 \times 10^{-8}$	1.0	$5.65 \times 10^{-16}$
HH-on-best vs HH-off-best	-1.4502	$1.49 \times 10^{-1}$	321.0	$4.61 \times 10^{-10}$

Os resultados revelam diferenças estatisticamente significativas ( $p < 0.05$ ) nas seguintes comparações:

**ILS vs BRKGA:** Apesar do teste T não indicar diferença significativa ( $p = 0.664$ ), o teste de Wilcoxon revela diferença altamente significativa ( $p = 3.16 \times 10^{-7}$ ), demonstrando que a não-normalidade dos dados mascara diferenças detectadas por métodos não-paramétricos.

**ILS vs Hiper-heurísticas:** Ambas hiper-heurísticas (online e offline) apresentam diferenças significativas em relação ao ILS ( $p < 0.01$  em ambos os testes), indicando superioridade estatística das abordagens propostas.

**BRKGA vs Hiper-heurísticas:** As diferenças são altamente significativas ( $p < 10^{-7}$  para ambas hiper-heurísticas), confirmando que as abordagens hiper-heurísticas superam consistentemente o BRKGA.

**HH-online vs HH-offline:** Embora o teste T não indique diferença significativa ( $p = 0.149$ ), o teste de Wilcoxon revela diferença altamente significativa ( $p = 4.61 \times 10^{-10}$ ), sugerindo que a

hiper-heurística online apresenta desempenho superior à versão offline nas melhores soluções.

A Tabela 14 apresenta os resultados análogos para as soluções médias obtidas pelas abordagens.

Tabela 14 – Testes estatísticos para comparações pareadas (soluções médias)

Comparação	Estatística T	P-valor (T)	Estatística W	P-valor (Wilcoxon)
ILS-avg vs BRKGA-avg	0.0364	$9.71 \times 10^{-1}$	785.0	$2.95 \times 10^{-6}$
ILS-avg vs HH-on-avg	3.1013	$2.24 \times 10^{-3}$	364.0	$4.98 \times 10^{-5}$
ILS-avg vs HH-off-avg	-1.3224	$1.88 \times 10^{-1}$	993.0	$2.21 \times 10^{-5}$
BRKGA-avg vs HH-on-avg	5.1987	$5.47 \times 10^{-7}$	1.0	$5.65 \times 10^{-16}$
BRKGA-avg vs HH-off-avg	-1.3573	$1.76 \times 10^{-1}$	481.0	$2.92 \times 10^{-10}$
HH-on-avg vs HH-off-avg	-2.1146	$3.59 \times 10^{-2}$	214.0	$1.61 \times 10^{-13}$

As análises das soluções médias corroboram e expandem os achados das melhores soluções:

**ILS vs BRKGA:** Novamente, apenas o teste de Wilcoxon detecta diferença significativa ( $p = 2.95 \times 10^{-6}$ ), reforçando a importância de testes não-paramétricos para estes dados.

**ILS vs Hiper-heurísticas:** Ambas hiper-heurísticas apresentam diferenças significativas em relação ao ILS, com a HH-online mostrando p-valores ligeiramente menores ( $p = 4.98 \times 10^{-5}$  vs  $p = 2.21 \times 10^{-5}$ ).

**BRKGA vs Hiper-heurísticas:** As diferenças permanecem altamente significativas, confirmando a robustez das abordagens hiper-heurísticas.

**HH-online vs HH-offline:** Diferentemente das melhores soluções, nas médias tanto o teste T ( $p = 0.036$ ) quanto Wilcoxon ( $p = 1.61 \times 10^{-13}$ ) indicam diferença significativa, favorecendo a versão online.

A análise estatística apresentada confirma que as distribuições dos resultados não seguem distribuição normal, justificando a aplicação de testes não-paramétricos. As hiper-heurísticas propostas (tanto *online* quanto *offline*) superam estatisticamente o ILS-RVND e o BRKGA nas instâncias testadas e propostas por Rufino A.; Silva (2016). Além disso, hiper-heurística *online* apresenta desempenho superior à versão *offline*, particularmente em termos de consistência (soluções médias). Sendo assim, a aplicação conjunta de testes paramétricos e não-paramétricos foi importante para detectar diferenças significativas mascaradas pela violação da premissa de normalidade.

Estes resultados fornecem evidências estatísticas robustas da eficácia das abordagens hiper-heurísticas propostas para o APPP, validando a hipótese de que a seleção e geração automática de heurísticas podem ser métodos relevantes na literatura.

## 4 PROPOSTAS DE MÉTODOS EXATOS

O APPP tem sido amplamente investigado na literatura por meio de abordagens heurísticas e meta-heurísticas, sobretudo em razão da elevada complexidade computacional associada a formulações exatas tradicionais. Ainda assim, modelos matemáticos exatos desempenham um papel fundamental na formalização rigorosa do problema, permitindo explicitar premissas, restrições e objetivos que refletem, de forma estruturada, aspectos relevantes do domínio de aplicação.

Nesse contexto, a partir de discussões conduzidas com especialistas da área de redes sem fio e planejamento de infraestruturas internas, foram identificados elementos práticos recorrentes em cenários reais de ambientes internos que motivaram o desenvolvimento de novas abordagens de modelagem. Com base nesse conhecimento especializado, foram propostos dois novos métodos exatos, concebidos com o intuito de representar, de maneira mais fidedigna, características observadas em projetos reais de posicionamento de pontos de acesso, ampliando o nível de detalhamento e aderência do modelo matemático ao contexto de aplicação.

Os métodos exatos propostos neste capítulo não têm como propósito substituir ou competir diretamente com as abordagens heurísticas apresentadas nos capítulos anteriores. Em vez disso, estes são introduzidos como contribuições complementares de natureza metodológica, voltadas à modelagem matemática do problema e à incorporação de conhecimento especializado do domínio. Cada método enfatiza diferentes aspectos práticos do ambiente interno, resultando em formulações distintas que buscam maior aderência a cenários reais de implantação.

Nas seções subsequentes, cada um dos métodos exatos será apresentado de forma detalhada, incluindo a motivação específica, as premissas adotadas e a formulação matemática correspondente. Ao final do capítulo, são discutidas as principais características e limitações, destacando seu potencial como base para investigações futuras e aplicações práticas.

### 4.1 Definição moderna do problema

A partir de discussões conduzidas com especialistas da área de redes sem fio e planejamento de infraestruturas internas, foram identificados elementos práticos recorrentes em cenários reais de ambientes internos que motivaram o desenvolvimento de uma formulação mais abrangente e aderente ao estado da arte em tecnologias Wi-Fi. Nesse contexto, a versão do APPP tratada neste capítulo incorpora aspectos ausentes na formulação original de Rufino A.; Silva (2016), tais como suporte a múltiplas bandas de frequência, alocação de canais, restrições de interferência e conectividade de redundância, alinhando-se ao padrão IEEE 802.11ax (*Wi-Fi 6*) e sua extensão *Wi-Fi 6E*.

O padrão IEEE 802.11ax, comercialmente conhecido como *Wi-Fi 6*, representa uma evolução das tecnologias Wi-Fi orientada para eficiência espectral, redução de latência e incremento da capacidade em ambientes densos, tais como escritórios, auditórios e instalações institucionais. Em relação às gerações anteriores (IEEE 802.11n, Wi-Fi 4, e IEEE 802.11ac, Wi-Fi 5), o 802.11ax introduz inovações nas camadas físicas e de controle de acesso ao meio que favorecem a convivência de um grande número de usuários e aplicações sensíveis à latência; adicionalmente, o padrão opera nas bandas de 2,4 GHz e 5 GHz e, com a extensão Wi-Fi 6E, também na banda de 6 GHz. Essas características tornam o Wi-Fi 6 relevante para o planejamento de pontos de acesso em ambientes internos, pois alteram parâmetros centrais de capacidade, interferência e políticas de alocação de recursos (KHOROV et al., 2019; MOZAFFARIAHRAR; THEOLEYRE; MENTH, 2022).

Neste contexto, o APPP tratado neste capítulo busca minimizar o número total de APs instalados no ambiente, considerando um conjunto mais rico de restrições operacionais. O ambiente interno é representado por uma planta baixa discretizada em pontos, classificados em três categorias: **pontos livres**, que constituem tanto as localizações candidatas para instalação de APs quanto as áreas que requerem cobertura de sinal; **pontos de obstáculos**, que modelam elementos físicos como paredes e colunas, utilizados no cálculo de propagação via *ray tracing* mas não elegíveis para instalação; e **pontos de alta demanda**, que identificam regiões críticas do ambiente com maior concentração de usuários ou requisitos superiores de qualidade de serviço, recebendo tratamento diferenciado nas restrições de cobertura e capacidade.

O modelo de propagação adotado é baseado em *ray tracing* pré-computado (discutido na Subseção 2.5.2 e no Apêndice D) que estima o nível de sinal recebido RSSI (*Received Signal Strength Indicator*, do inglês) entre os pares de pontos do ambiente. Esse modelo considera tanto a atenuação por distância, segundo o modelo logarítmico de perda de percurso, quanto a atenuação adicional causada pela interceptação de obstáculos físicos. A conversão de RSSI em taxa de transmissão alcançável utiliza mapeamentos derivados dos padrões IEEE 802.11, considerando os esquemas de modulação e codificação (MCS — *Modulation and Coding Scheme*) viáveis sob diferentes níveis de qualidade de sinal, conforme estabelecido em Khorov et al. (2019).

A formulação incorpora ainda dois aspectos operacionais relevantes em redes Wi-Fi corporativas modernas. O primeiro diz respeito à **conectividade de redundância**: cada ponto do ambiente deve possuir não apenas uma associação primária com um AP capaz de atender sua demanda em operação normal, mas também ao menos duas associações de *backup* com APs alternativos, garantindo continuidade do serviço em situações de falha de equipamento. O segundo refere-se à **alocação de canais por banda**: cada AP instalado deve receber exatamente um canal em cada uma das bandas suportadas (2,4 GHz, 5 GHz e 6 GHz), e APs próximos ficam sujeitos a restrições de interferência que impedem a utilização simultânea de canais interferentes. A função objetivo é minimizar a quantidade de APs, a fim de diminuir o custo de projeto. As próximas seções descrevem o problema por meio de modelos matemáticos.

## 4.2 Formulação baseada em cobertura de pontos

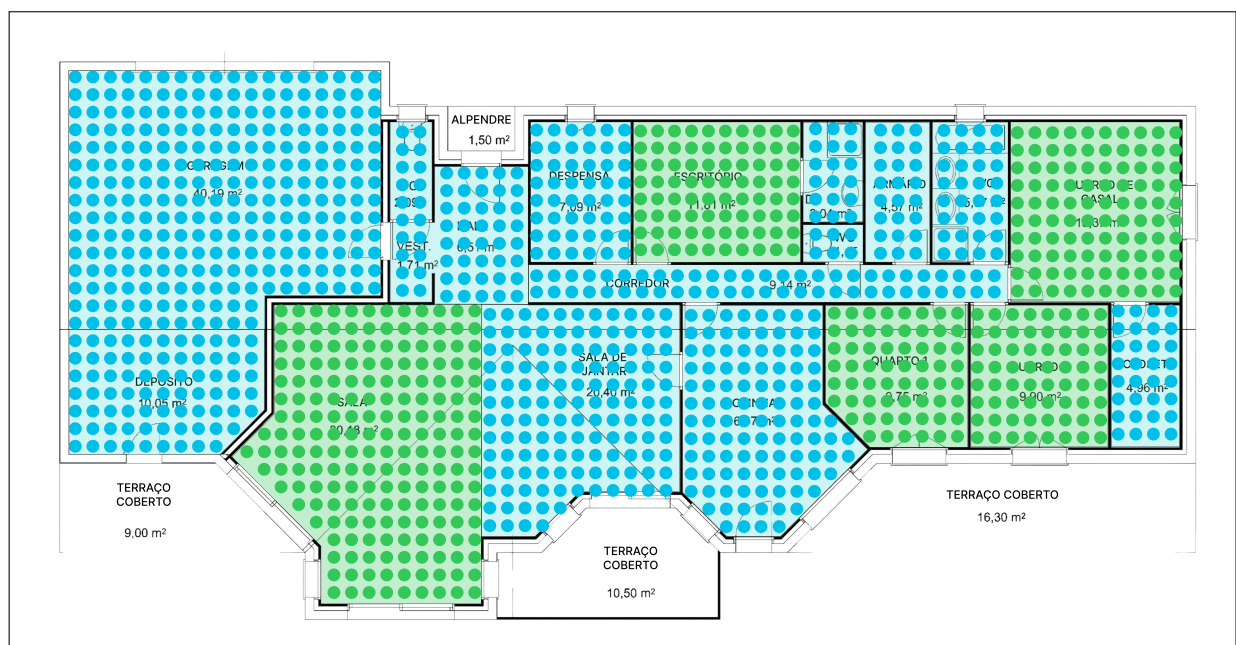
A formulação de otimização baseada em pontos representa uma abordagem de granularidade fina para o problema de planejamento de redes sem fio em ambientes internos. Nessa abordagem, o espaço físico é discretizado em um conjunto de pontos, sendo cada ponto tratado, simultaneamente, como uma potencial localização para a instalação de pontos de acesso (APs) e como uma unidade espacial que requer cobertura de sinal.

Essa modelagem contrasta com abordagens baseadas em regiões, nas quais áreas inteiras do ambiente são tratadas de forma agregada. A abordagem baseada em pontos permite uma representação mais precisa das características espaciais do ambiente e da propagação do sinal, ao custo de um aumento significativo da complexidade computacional do problema.

A principal motivação para a adoção dessa abordagem reside na necessidade de capturar, de maneira mais fiel, as variações espaciais presentes em ambientes construídos. Em cenários internos reais, obstáculos físicos como paredes, colunas e demais elementos estruturais exercem influência significativa sobre a propagação do sinal sem fio. Ao discretizar o ambiente em pontos individuais, o modelo possibilita representar explicitamente essa heterogeneidade espacial, bem como identificar áreas de maior demanda que requerem maior capacidade de atendimento.

### 4.2.1 Discretização do Espaço

Figura 15 – Exemplo de planta-baixa discretizada no modelo de cobertura de pontos.



Fonte: Autoria própria, 2026.

O ambiente interno é representado por um conjunto de pontos discretos, cada um associado a coordenadas espaciais específicas e a uma classificação de tipo que determina seu papel

no contexto da otimização. A Figura 15 exemplifica a formulação, dividindo a planta-baixa em pontos discretizados. Os pontos são classificados em três categorias principais:

**Pontos Livres:** Representam áreas navegáveis do ambiente nos quais os usuários podem estar presentes e onde a instalação de APs é permitida. Esses pontos constituem tanto o espaço de busca para o posicionamento dos equipamentos quanto as áreas que requerem cobertura de sinal. Na Figura 15, esses pontos são representados pela cor azul.

**Pontos de Obstáculos:** Modelam obstáculos físicos que provocam atenuação do sinal sem fio. Esses pontos não são elegíveis para a instalação de APs nem requerem cobertura direta, mas são fundamentais para o cálculo preciso da propagação do sinal, especialmente no contexto do modelo de propagação via *ray-tracing*.

**Pontos de Alta Demanda:** Identificam áreas críticas do ambiente onde se espera uma concentração elevada de usuários ou requisitos superiores de qualidade de serviço. Esses pontos recebem tratamento diferenciado nas restrições de cobertura e capacidade do modelo. Estes pontos são representados pela cor verde na Figura 15.

#### 4.2.2 Modelo de Propagação

A formulação utiliza um modelo de propagação baseado em *ray tracing* pré-computado, responsável por estimar a força do sinal recebido (RSSI – *Received Signal Strength Indicator*) entre todos os pares de pontos do ambiente. Embora essa etapa de pré-processamento seja computacionalmente custosa, ela permite que o otimizador avalie de forma eficiente a viabilidade de cobertura durante a busca pela solução ótima.

O modelo de propagação considera tanto a atenuação por distância, segundo o modelo de perda de percurso logarítmica (*log-distance path loss*), quanto a atenuação adicional causada pela interceptação de obstáculos físicos. Para cada par de pontos  $(i, j)$ , verifica-se se o caminho direto entre eles intercepta pontos classificados como paredes, aplicando penalidades de atenuação proporcionais ao número e ao tipo de obstáculos atravessados.

A conversão entre RSSI e taxa de dados alcançável é realizada com base nos esquemas de modulação e codificação definidos pelo padrão IEEE 802.11ax para cada uma das três bandas de frequência suportadas pelo Cisco Catalyst 9162: 2,4 GHz com canal de 40 MHz, 5 GHz com canal de 80 MHz e 6 GHz com canal de 80 MHz. A Tabela 15 apresenta os limiares de RSSI adotados neste trabalho para cada banda, categoria de ponto e tipo de associação. Para pontos de alta demanda, exige-se uma taxa primária mínima de 250 Mbps, correspondendo a limiares de RSSI de -54 dBm na banda de 2,4 GHz (MCS 10), -66 dBm na banda de 5GHz (MCS 5) e -65 dBm na banda de 6 GHz (MCS 5). Para pontos de demanda mínima, a taxa primária requerida é de 100 Mbps, correspondendo a limiares de -70dBm na banda de 2,4 GHz (MCS 4), -77 dBm na banda de Ghz (MCS 2) e -75 dBm na banda de 6Hz (MCS 2). As associações de *backup* operam com limiares menos restritivos, considerando metade da taxa primária como requisito mínimo

para garantir a continuidade do serviço em cenários de falha. Vale destacar que, na banda de 2,4 GHz, atingir 250 Mbps requer MCS 10 com canal de 40 MHz, o que exige condições favoráveis de propagação e é mais sensível à presença de obstáculos e interferências externas do que nas bandas superiores.

Tabela 15 – Limiares de RSSI e taxas de dados por banda, categoria de ponto e tipo de associação

Banda	Tipo de Ponto	Associação	Taxa (Mbps)	MCS	RSSI mínimo (dBm)
2,4 GHz (40 MHz)	Alta Demanda	Primária	250	MCS 10	-54
	Alta Demanda	Backup	125	MCS 4	-70
	Demanda Mínima	Primária	100	MCS 4	-70
	Demanda Mínima	Backup	50	MCS 2	-77
5 GHz (80 MHz)	Alta Demanda	Primária	250	MCS 5	-66
	Alta Demanda	Backup	125	MCS 3	-74
	Demanda Mínima	Primária	100	MCS 2	-77
	Demanda Mínima	Backup	50	MCS 1	-79
6 GHz (80 MHz)	Alta Demanda	Primária	250	MCS 5	-65
	Alta Demanda	Backup	125	MCS 3	-72
	Demanda Mínima	Primária	100	MCS 2	-75
	Demanda Mínima	Backup	50	MCS 1	-77

Fonte: Adaptado de IEEE 802.11ax/Wi-Fi 6E, 1 spatial stream.

#### 4.2.3 Agregação por Áreas

Embora o modelo opere fundamentalmente no nível de pontos individuais, uma camada adicional de agregação por regiões é introduzida com o intuito de melhor representar os requisitos de projeto. O espaço é particionado em regiões retangulares de dimensões configuráveis, e as restrições de demanda são aplicadas a nível de área, com a carga sendo distribuída uniformemente entre os pontos pertencentes a essa delimitação. Neste trabalho, cada cômodo individual é uma área diferente, como quartos, salas, banheiros, varandas, etc.

Essa estratégia representa um compromisso entre a precisão da modelagem ponto a ponto e o requisito de cobertura total mínima de uma região, que, nos nossos exemplos, são cômodos de uma residência. A demanda total associada a cada área é dividida igualmente entre seus pontos constituintes, permitindo capturar variações espaciais de demanda em escala moderada.

A abordagem não trata de pontos proibidos pela natureza não prática do requisito: não há necessidade de que um ponto deixe necessariamente de ser coberto, mesmo que este seja um obstáculo ou parte externa das áreas. Assim, basta que nos preocupemos com a demanda mínima associada à área. O modelo de otimização emprega diferentes conjuntos de variáveis de decisão para representar as escolhas fundamentais relacionadas à instalação de APs, à associação de pontos e à alocação de canais de frequência.

#### 4.2.4 Formulação Matemática

Esta formulação apresenta o modelo de otimização com granularidade ponto-a-ponto, onde cada posição do ambiente é explicitamente representada. O modelo utiliza os seguintes conjuntos:  $P$  representa o conjunto de pontos livres do ambiente (candidatos a APs e pontos que requerem cobertura);  $W$  denota os pontos classificados como obstáculo ou parede, usados no cálculo de propagação, mas não elegíveis para instalação;  $P_H \subseteq P$  identifica o subconjunto de pontos de alta demanda;  $C_{2.4}$ ,  $C_5$  e  $C_6$  correspondem aos conjuntos de canais disponíveis nas bandas 2,4 GHz, 5 GHz e 6 GHz, respectivamente; e  $\mathcal{K}$  representa o conjunto de pares  $(i, i')$  de APs cuja proximidade implica restrições de interferência.

Os parâmetros do modelo incluem:  $RSSI_{ij}$ , que representa o nível de sinal pré-computado entre o ponto  $i$  (AP candidato) e o ponto  $j$  (receptor), obtido via *ray-tracing*;  $\tau_j^{\text{prim}}$  e  $\tau_j^{\text{backup}}$ , que denotam as demandas primária e de *backup* associadas ao ponto  $j$  (em Mbps);  $\Gamma$ , a capacidade máxima de *throughput* por AP (Mbps);  $\Lambda$ , o número máximo de associações simultâneas por AP; e as funções  $\beta^{\text{prim}}(\cdot)$  e  $\beta^{\text{backup}}(\cdot)$ , que mapeiam RSSI em taxa de dados alcançável para conexões primária e de *backup*, respectivamente, derivadas de curvas MCS  $\times$  RSSI compatíveis com IEEE 802.11.

As variáveis de decisão do modelo são todas binárias:  $x_i$  indica se um AP é instalado no ponto  $i \in P$  (Equação 4);  $p_{ij}$  indica se o ponto  $j \in P$  está associado primariamente ao AP em  $i$  (Equação 5);  $b_{ij}$  indica se o ponto  $j \in P$  está associado como *backup* ao AP em  $i$  (Equação 6); e  $z_{ic}^{2.4}$ ,  $z_{ic}^5$  e  $z_{ic}^6$  indicam se o canal  $c$  nas bandas 2,4 GHz, 5 GHz e 6 GHz, respectivamente, é alocado ao AP  $i$  (Equações 7, 8 e 9).

A função objetivo, exposta na Equação 10, busca minimizar o número total de APs instalados no ambiente, representando a redução do custo de infraestrutura. O modelo está sujeito aos seguintes grupos de restrições: cobertura primária (equação 11), que garante que cada ponto tenha exatamente um servidor primário entre APs capazes de atender sua demanda primária; cobertura de *backup* (equação 12), que assegura que cada ponto possua pelo menos duas associações de *backup* elegíveis; exclusão mútua primário-*backup* (equação 13), que impede que um ponto esteja simultaneamente associado como primário e *backup* ao mesmo AP; vinculação à instalação (equações 14 e 15), que estabelece que associações só podem existir se o AP estiver instalado; capacidade de *throughput* (equação 16), que limita a soma das demandas primária e *backup* associadas a cada AP à sua capacidade máxima; capacidade de associações (equação 17), que restringe o número total de associações por AP; alocação de canal por banda (equações 18, 19 e 20), que determina que cada AP instalado receba exatamente um canal em cada banda de frequência; e restrições de interferência (equação 21 e análogas para as demais bandas), que impedem a utilização simultânea de canais interferentes por APs próximos.

### Variáveis de Decisão

$$x_i \in \{0, 1\}, \quad 1 \text{ se um AP é instalado no ponto } i \in P \quad (4)$$

$$p_{ij} \in \{0, 1\}, \quad 1 \text{ se o ponto } j \in P \text{ está associado primariamente ao AP em } i \quad (5)$$

$$b_{ij} \in \{0, 1\}, \quad 1 \text{ se o ponto } j \in P \text{ está associado como } \textit{backup} \text{ ao AP em } i \quad (6)$$

$$z_{ic}^{2,4} \in \{0, 1\}, \quad 1 \text{ se o canal } c \in C_{2,4} \text{ é alocado ao AP } i \quad (7)$$

$$z_{ic}^5 \in \{0, 1\}, \quad 1 \text{ se o canal } c \in C_5 \text{ é alocado ao AP } i \quad (8)$$

$$z_{ic}^6 \in \{0, 1\}, \quad 1 \text{ se o canal } c \in C_6 \text{ é alocado ao AP } i \quad (9)$$

### Função Objetivo

Minimizar o número total de APs instalados no ambiente:

$$\min \sum_{i \in P} x_i \quad (10)$$

### Restrições

*Cobertura Primária:*

$$\sum_{i \in P: \beta^{\text{prim}}(\text{RSSI}_{ij}) \geq \tau_j^{\text{prim}}} p_{ij} = 1, \quad \forall j \in P \quad (11)$$

*Cobertura de Backup:*

$$\sum_{i \in P: \beta^{\text{backup}}(\text{RSSI}_{ij}) \geq \tau_j^{\text{backup}}} b_{ij} \geq 2, \quad \forall j \in P \quad (12)$$

*Exclusão Mútua Primário-Backup:*

$$p_{ij} + b_{ij} \leq 1, \quad \forall i, j \in P \quad (13)$$

*Vinculação à Instalação:*

$$p_{ij} \leq x_i, \quad \forall i, j \in P \quad (14)$$

$$b_{ij} \leq x_i, \quad \forall i, j \in P \quad (15)$$

*Capacidade de Throughput:*

$$\sum_{j \in P} \left( \tau_j^{\text{prim}} \cdot p_{ij} + \tau_j^{\text{backup}} \cdot b_{ij} \right) \leq \Gamma \cdot x_i, \quad \forall i \in P \quad (16)$$

*Capacidade de Associações:*

$$\sum_{j \in P} (p_{ij} + b_{ij}) \leq \Lambda \cdot x_i, \quad \forall i \in P \quad (17)$$

*Alocação de Canal por Banda:*

$$\sum_{c \in C_{2,4}} z_{ic}^{2,4} = x_i, \quad \forall i \in P \quad (18)$$

$$\sum_{c \in C_5} z_{ic}^5 = x_i, \quad \forall i \in P \quad (19)$$

$$\sum_{c \in C_6} z_{ic}^6 = x_i, \quad \forall i \in P \quad (20)$$

*Restrições de Interferência (banda 2,4 GHz):*

$$z_{ic_1}^{2,4} + z_{i'c_2}^{2,4} \leq 1, \quad \forall (i, i') \in \mathcal{K}, \forall c_1, c_2 \in C_{2,4} : |c_1 - c_2| \leq 4 \quad (21)$$

Restrições análogas aplicam-se às bandas de 5 GHz e 6 GHz.

### 4.3 Formulação baseada em cobertura de regiões

O modelo de otimização baseado em cobertura de regiões representa uma abordagem adaptativa para o problema de planejamento de redes sem fio que busca equilibrar a precisão da modelagem com a tratabilidade computacional. Esta estratégia reconhece uma limitação fundamental dos modelos de granularidade fina: a explosão combinatória que ocorre quando cada ponto discreto do ambiente é tratado como uma entidade independente nas restrições de otimização.

A motivação central desta abordagem reside na observação de que, em ambientes típicos, apenas uma fração dos pontos do espaço apresenta desafios significativos de cobertura. Alguns pontos naturalmente são servidos pelos mesmos APs daqueles pontos que estão mais próximos, enquanto outras regiões, tipicamente aquelas distantes de locais candidatos ideais ou cercadas por múltiplos obstáculos, constituem os verdadeiros gargalos do problema. Em vez de modelar explicitamente todos os pontos desde o início, este modelo começa com um conjunto reduzido de restrições representativas e incorpora progressivamente os pontos que não tiveram seus requisitos satisfeitos conforme são identificados durante iterações sucessivas de otimização.

#### 4.3.1 Discretização Regional do Espaço

O ambiente é inicialmente particionado em regiões retangulares de dimensões configuráveis por meio de um processo de geração de grade. Este particionamento serve a dois propósitos complementares: agregação de demanda e seleção de pontos representativos.

Quanto à agregação de demanda, a demanda total de tráfego (primária e *backup*) é especificada em nível regional, refletindo padrões de ocupação e uso agregados; esta abordagem é mais realista do que atribuir demandas independentes a cada ponto individual, pois captura a natureza espacialmente correlacionada da utilização de redes sem fio. No que se refere à seleção de pontos representativos, para cada região, um conjunto inicial de pontos representativos é extraído para participar das restrições de otimização, representando a cobertura de toda a região e permitindo que o modelo inicie com uma formulação compacta.

A demanda regional é uniformemente distribuída entre os pontos constituintes da região, uma simplificação que permite o tratamento consistente de pontos em restrições de capacidade. Formalmente, se uma região  $r$  possui demanda primária  $d_r^{\text{prim}}$  e contém  $|P_r|$  pontos, cada ponto herda uma demanda efetiva de  $\tau_i^{\text{prim}} = d_r^{\text{prim}} / |P_r|$ .

O modelo de propagação adotado é idêntico ao descrito na Seção 4.2.2, utilizando *ray tracing* pré-computado para estimar o RSSI entre todos os pares de pontos do ambiente. A mesma estratégia de pré-computação completa da matriz de RSSI é empregada, garantindo consultas em tempo constante durante as iterações de otimização e consistência na estimativa de atenuação por obstáculos.

Os limiares de RSSI e o mapeamento MCS adotados seguem os valores apresentados na Tabela 15.

#### 4.3.2 Estratégia de Melhoria Iterativa

O processo de otimização segue uma estrutura iterativa de refinamento progressivo composta por seis etapas principais:

**Inicialização:** O modelo inicial é construído incorporando apenas pontos representativos de cada região. Estes pontos podem ser até 5: o centro e os pontos extremos de cada lado de uma região retangular. As restrições de cobertura são impostas para este subconjunto reduzido. A Figura 16 ilustra a seleção inicial de pontos no modelo.

**Otimização:** O modelo atual é resolvido por meio do solver CPLEX, produzindo uma solução candidata que especifica localizações de APs e associações primárias/*backup* para os pontos atualmente no modelo.

**Verificação de Violações:** A solução candidata é avaliada contra todos os pontos do ambiente (não apenas aqueles no modelo corrente) para identificar violações de requisitos de cobertura.

**Seleção de Pontos Críticos:** Para cada região que apresenta violações, o ponto com menor qualidade de cobertura (medida pelo RSSI máximo alcançável de qualquer AP na solução) é identificado.

**Melhoria:** Os pontos críticos identificados são adicionados ao modelo, expandindo o conjunto de restrições de cobertura.

**Critério de Parada:** O processo continua até que nenhuma nova violação seja detectada ou um limite máximo de iterações seja atingido.

Figura 16 – Exemplo de planta-baixa com pontos representativos selecionados por região



Fonte: Autoria própria, 2026.

A função de identificação de pontos críticos implementa a heurística central da melhoria iterativa. Para cada ponto não presente no modelo corrente, o algoritmo calcula a taxa máxima alcançável (a maior taxa de dados que o ponto pode obter de qualquer AP na solução corrente, considerando propagação e RSSI) e a contagem de cobertura (quantos APs podem fornecer cobertura primária com taxa  $\geq \tau_i^{\text{prim}}$  e quantos podem fornecer cobertura *backup* com taxa  $\geq \tau_i^{\text{backup}}$ ). Para cada região, o ponto com menor taxa máxima alcançável é selecionado como representante da deficiência de cobertura regional. Este critério é conservador: mesmo que um ponto tenha cobertura primária e *backup* suficientes, se sua qualidade de sinal for a pior da região, ele é candidato à inclusão para forçar o otimizador a melhorar a cobertura naquela área.

O algoritmo converge quando uma das seguintes condições é satisfeita: cobertura completa, onde nenhum ponto adicional viola os requisitos de cobertura primária (exatamente um AP com taxa suficiente) e *backup* (pelo menos dois APs com taxa suficiente); ou limite de iterações, com um número máximo de rodadas (tipicamente configurado entre 5 e 10) executado para prevenir execução infinita em casos de instâncias extremamente difíceis ou infactíveis.

O modelo emprega três famílias de variáveis binárias. As variáveis de instalação ( $x_i$ ) determinam quais pontos do ambiente são selecionados para a instalação de APs, sendo definidas

para todos os pontos a serem cobertos e constituindo o espaço de busca completo, mesmo que nem todos os pontos participem ativamente das restrições em uma dada iteração. As variáveis de associação primária ( $p_{ij}$ ) estabelecem o mapeamento entre cada ponto  $j$  (atualmente no modelo) e o AP no ponto  $i$  designado como seu servidor principal, determinando as responsabilidades nominais de atendimento sob operação normal. As variáveis de associação *backup* ( $b_{ij}$ ) definem conexões de redundância, permitindo que cada ponto seja associado a múltiplos APs alternativos que podem assumir o atendimento em caso de falha. Apenas os pontos explicitamente adicionados ao modelo por meio do processo iterativo possuem restrições de associação ativas; os demais pontos do ambiente têm suas variáveis de associação declaradas, mas não restritas, mantendo a estrutura do modelo consistente entre iterações.

Para cada ponto  $j$  explicitamente incluído no modelo, são definidas restrições de cobertura por ponto que garantem tanto a conectividade primária quanto a redundância. A restrição de cobertura primária assegura que o ponto seja associado a exatamente um AP capaz de fornecer taxa de transmissão suficiente para sua demanda primária, com viabilidade pré-verificada de modo que apenas APs  $i$  tais que  $\beta^{\text{prim}}(\text{RSSI}_{ij}) \geq \tau_j^{\text{prim}}$  possam participar da associação primária. A restrição de cobertura *backup* garante que o ponto seja associado a pelo menos dois APs capazes de fornecer taxa suficiente para sua demanda *backup* (tipicamente menor que a primária), assegurando a continuidade do serviço em caso de falhas de equipamento. Esta decomposição da cobertura em primária e *backup* reflete práticas operacionais reais de redes Wi-Fi empresariais, nas quais os clientes mantêm listas de APs preferenciais, ordenadas por qualidade de sinal.

Além disso, cada AP potencial está sujeito a limitações de capacidade. A restrição de capacidade de *throughput* estabelece que a carga agregada (primária e *backup*) não pode exceder a capacidade física do equipamento, tipicamente modelada como 2500 Mbps para APs tri-band modernos (soma das capacidades das bandas 2.4 GHz, 5 GHz e 6 GHz). A restrição de capacidade de associações impõe que o número total de clientes (pontos) associados não pode exceder limites práticos de gerenciamento, tipicamente 150 associações simultâneas. A modelagem de capacidade considera que pontos em associação *backup* contribuem para a carga potencial mesmo quando inativos, refletindo o dimensionamento conservador necessário para garantir funcionamento sob cenários de falha.

Por fim, um conjunto de restrições garante a consistência lógica da solução. Um ponto não pode estar simultaneamente em associação primária e *backup* com o mesmo AP. Associações (primárias ou *backup*) só podem existir se o AP correspondente foi instalado. A instalação de um AP implica sua capacidade de atender pelo menos um ponto. O modelo minimiza o número total de APs instalados, refletindo o objetivo econômico de redução de orçamento. Esta função objetivo simples, combinada com restrições rigorosas de cobertura e capacidade, induz o otimizador a buscar configurações eficientes que maximizam o reuso de cada equipamento instalado.

### 4.3.3 Formulação Matemática

Esta formulação apresenta o modelo de otimização baseado em regiões com geração dinâmica de restrições, permitindo escalabilidade para ambientes de grande porte. O modelo utiliza os seguintes conjuntos:  $P$  representa o conjunto de todos os pontos a serem cobertos no ambiente;  $W$  denota os pontos classificados como obstáculo ou parede, usados no cálculo de propagação mas não elegíveis para instalação;  $R$  representa o conjunto de regiões do ambiente;  $P_r \subseteq P$  corresponde ao conjunto de pontos pertencentes à região  $r \in R$ ;  $R_H \subseteq R$  identifica o subconjunto de regiões de alta demanda;  $P^{(k)} \subseteq P$  denota o conjunto de pontos explicitamente representados no modelo na iteração  $k$ ;  $C_{2,4}$ ,  $C_5$  e  $C_6$  correspondem aos conjuntos de canais disponíveis nas bandas 2,4 GHz, 5 GHz e 6 GHz, respectivamente; e  $\mathcal{K}$  representa o conjunto de pares  $(i, i')$  de APs cuja proximidade implica restrições de interferência.

Os parâmetros do modelo incluem:  $\text{RSSI}_{ij}$ , que representa o nível de sinal pré-computado entre o ponto  $i$  (AP candidato) e o ponto  $j$  (receptor);  $d_r^{\text{prim}}$  e  $d_r^{\text{backup}}$ , que denotam as demandas primária e de *backup* agregadas da região  $r$  (em Mbps);  $\tau_j^{\text{prim}} = d_r^{\text{prim}} / |P_r|$  e  $\tau_j^{\text{backup}} = d_r^{\text{backup}} / |P_r|$ , que representam as demandas primária e de *backup* por ponto na região contendo  $j$ ;  $\Gamma$ , a capacidade máxima de throughput por AP (Mbps);  $\Lambda$ , o número máximo de associações simultâneas por AP; e as funções  $\beta^{\text{prim}}(\cdot)$  e  $\beta^{\text{backup}}(\cdot)$ , que mapeiam RSSI em taxa de dados alcançável para conexões primária e de *backup*, respectivamente, derivadas de curvas MCS  $\times$  RSSI compatíveis com IEEE 802.11.

As variáveis de decisão do modelo são todas binárias:  $x_i$  indica se um AP é instalado no ponto  $i \in P$  (Equação 22);  $p_{ij}$  indica se o ponto  $j \in P^{(k)}$  está associado primariamente ao AP em  $i$  (Equação 23);  $b_{ij}$  indica se o ponto  $j \in P^{(k)}$  está associado como *backup* ao AP em  $i$  (Equação 24); e  $z_{ic}^{2,4}$ ,  $z_{ic}^5$  e  $z_{ic}^6$  indicam se o canal  $c$  nas bandas 2,4 GHz, 5 GHz e 6 GHz, respectivamente, é alocado ao AP  $i$  (equações 25, 26 e 27).

A função objetivo (Equação 28) busca minimizar o número total de APs instalados no ambiente, representando a redução do custo de infraestrutura. O modelo está sujeito aos seguintes grupos de restrições: cobertura primária (Equação 29), que garante que cada ponto explicitamente representado tenha exatamente um servidor primário entre APs capazes de atender sua demanda primária; cobertura de *backup* (Equação 30), que assegura que cada ponto explicitamente representado possua pelo menos duas associações de *backup* elegíveis; exclusão mútua primário-*backup* (Equação 31), que impede que um ponto esteja simultaneamente associado como primário e *backup* ao mesmo AP; vinculação à instalação (equações 32 e 33), que estabelece que associações só podem existir se o AP estiver instalado; capacidade de *throughput* (Equação 34), que limita a soma das demandas primária e *backup* associadas a cada AP à sua capacidade máxima; capacidade de associações (Equação 35), que restringe o número total de associações por AP; alocação de canal por banda (equações 36, 37 e 38), que determina que cada AP instalado receba exatamente um canal em cada banda de frequência; e restrições de interferência (Equação 39 e análogas para as demais bandas), que impedem a utilização

simultânea de canais interferentes por APs próximos.

### Variáveis de Decisão.

$$x_i \in \{0, 1\}, \quad 1 \text{ se um AP é instalado no ponto } i \in P \quad (22)$$

$$p_{ij} \in \{0, 1\}, \quad 1 \text{ se o ponto } j \in P^{(k)} \text{ está associado primariamente ao AP em } i \quad (23)$$

$$b_{ij} \in \{0, 1\}, \quad 1 \text{ se o ponto } j \in P^{(k)} \text{ está associado como } \textit{backup} \text{ ao AP em } i \quad (24)$$

$$z_{ic}^{2,4} \in \{0, 1\}, \quad 1 \text{ se o canal } c \in C_{2,4} \text{ é alocado ao AP } i \quad (25)$$

$$z_{ic}^5 \in \{0, 1\}, \quad 1 \text{ se o canal } c \in C_5 \text{ é alocado ao AP } i \quad (26)$$

$$z_{ic}^6 \in \{0, 1\}, \quad 1 \text{ se o canal } c \in C_6 \text{ é alocado ao AP } i \quad (27)$$

### Função Objetivo

Minimizar o número total de APs instalados no ambiente:

$$\min \sum_{i \in P} x_i \quad (28)$$

### Restrições

*Cobertura Primária:*

$$\sum_{i \in P: \beta^{\text{prim}}(\text{RSSI}_{ij}) \geq \tau_j^{\text{prim}}} p_{ij} = 1, \quad \forall j \in P^{(k)} \quad (29)$$

*Cobertura de Backup:*

$$\sum_{i \in P: \beta^{\text{backup}}(\text{RSSI}_{ij}) \geq \tau_j^{\text{backup}}} b_{ij} \geq 2, \quad \forall j \in P^{(k)} \quad (30)$$

*Exclusão Mútua Primário-Backup:*

$$p_{ij} + b_{ij} \leq 1, \quad \forall i \in P, \forall j \in P^{(k)} \quad (31)$$

*Vinculação à Instalação:*

$$p_{ij} \leq x_i, \quad \forall i \in P, \forall j \in P^{(k)} \quad (32)$$

$$b_{ij} \leq x_i, \quad \forall i \in P, \forall j \in P^{(k)} \quad (33)$$

*Capacidade de Throughput:*

$$\sum_{j \in P^{(k)}} \left( \tau_j^{\text{prim}} \cdot p_{ij} + \tau_j^{\text{backup}} \cdot b_{ij} \right) \leq \Gamma \cdot x_i, \quad \forall i \in P \quad (34)$$

*Capacidade de Associações:*

$$\sum_{j \in P^{(k)}} (p_{ij} + b_{ij}) \leq \Lambda \cdot x_i, \quad \forall i \in P \quad (35)$$

*Alocação de Canal por Banda:*

$$\sum_{c \in C_{2,4}} z_{ic}^{2,4} = x_i, \quad \forall i \in P \quad (36)$$

$$\sum_{c \in C_5} z_{ic}^5 = x_i, \quad \forall i \in P \quad (37)$$

$$\sum_{c \in C_6} z_{ic}^6 = x_i, \quad \forall i \in P \quad (38)$$

*Restrições de Interferência (banda 2,4 GHz):*

$$z_{ic_1}^{2,4} + z_{i'c_2}^{2,4} \leq 1, \quad \forall (i, i') \in \mathcal{K}, \forall c_1, c_2 \in C_{2,4} : |c_1 - c_2| \leq 4 \quad (39)$$

Restrições análogas aplicam-se às bandas de 5 GHz e 6 GHz.

O procedimento iterativo de geração de restrições é descrito no Algoritmo 13. Trata-se de um problema de Programação Linear Inteira Mista (MILP) com geração dinâmica de restrições, que permite balancear rigor matemático com pragmatismo computacional.

---

**Algoritmo 13:** Otimização com Melhoria Iterativa

---

- 1: Inicializar  $P^{(0)} \leftarrow$  pontos representativos de cada região  $r \in R$
  - 2:  $k \leftarrow 0$
  - 3: **while**  $k < k_{\max}$  e existem violações **do**
  - 4:   Construir modelo  $M^{(k)}$  com conjunto de pontos  $P^{(k)}$  usando as restrições 29–35
  - 5:   Resolver  $M^{(k)}$  via solver MILP  $\rightarrow$  obter solução  $S^{(k)} = \{x_i^{(k)}, p_{ij}^{(k)}, b_{ij}^{(k)}\}$
  - 6:    $V \leftarrow \{j \in P \setminus P^{(k)} : j \text{ viola cobertura primária ou } \textit{backup} \text{ sob } S^{(k)}\}$
  - 7:   **if**  $V = \emptyset$  **then**
  - 8:     **return**  $S^{(k)}$  {Solução factível para todo  $P$ }
  - 9:   **end if**
  - 10:   Identificar ponto mais crítico de cada região com violações
  - 11:    $P^{(k+1)} \leftarrow P^{(k)} \cup \{\text{pontos críticos identificados}\}$
  - 12:    $k \leftarrow k + 1$
  - 13: **end while**
  - 14: **return** melhor solução obtida ou declarar infeasibilidade
- 

#### 4.3.4 Vantagens e Limitações

Uma das principais vantagens da abordagem proposta reside em sua escalabilidade. Ao iniciar a resolução a partir de um modelo reduzido e expandi-lo progressivamente por meio

da inclusão incremental de pontos relevantes, o método torna possível tratar ambientes com milhares de pontos discretos sem provocar, de forma imediata, uma explosão no número de variáveis e restrições do modelo de otimização. Essa característica aproxima a abordagem de técnicas construtivas e adaptativas comumente exploradas em métodos heurísticos, preservando, entretanto, a estrutura formal de um modelo exato.

O caráter iterativo do método demonstra adaptabilidade à complexidade da instância considerada. Ambientes estruturalmente simples tendem a convergir em poucas iterações, enquanto cenários mais desafiadores recebem refinamento adicional nas regiões que apresentam maiores dificuldades de cobertura. Diferentemente de abordagens puramente heurísticas, nas quais a adaptação ocorre de forma implícita por meio de regras de decisão, neste modelo, a adaptação é guiada por critérios formais de viabilidade e otimalidade.

Outro aspecto positivo está relacionado às garantias de cobertura fornecidas pelo processo de verificação exaustiva ao final de cada iteração. Essa etapa assegura que a solução final atende aos requisitos de cobertura para todos os pontos do ambiente, incluindo aqueles que não foram explicitamente considerados nas iterações iniciais do modelo. Em contraste com métodos meta-heurísticos e hiper-heurísticos, nos quais a cobertura global é frequentemente avaliada de forma agregada ou aproximada, o modelo proposto fornece garantias formais de atendimento às restrições.

Por fim, a estratégia de inclusão incremental de pontos preserva a otimalidade do método. Em última instância, caso necessário, todos os pontos do ambiente podem ser incorporados ao modelo, fazendo com que a abordagem convirja para a solução ótima do problema completo.

Apesar de suas vantagens, a abordagem apresenta algumas limitações relevantes. A qualidade e a velocidade de convergência da solução dependem de forma significativa do critério empregado para a identificação dos pontos críticos a serem adicionados ao modelo. Outra limitação está associada ao tempo total de execução. Embora cada iteração individual seja computacionalmente menos custosa do que a resolução direta do modelo baseado em pontos, instâncias que demandam um grande número de iterações podem resultar em tempos totais de processamento elevados. Nesse sentido, enquanto hiper-heurísticas tendem a priorizar soluções viáveis em tempos reduzidos, a abordagem exata proposta privilegia a obtenção de soluções com garantias formais, mesmo que isso implique maior esforço computacional em cenários mais complexos.

#### **4.4 Benchmark**

A definição de um *benchmark* adequado é fundamental para garantir que os modelos desenvolvidos sejam testados em condições representativas de cenários reais de implantação de redes sem fio. Com esse propósito, esta seção descreve o ambiente experimental utilizado para avaliar os métodos exatos propostos neste trabalho, bem como apresenta o equipamento

de referência adotado na modelagem e o conjunto de instâncias sobre o qual os experimentos foram conduzidos. A escolha de um ponto de acesso comercial e de plantas-baixas reais busca assegurar que os resultados obtidos reflitam, de forma fidedigna, os desafios encontrados em aplicações práticas do problema de posicionamento de APs em ambientes internos.

#### 4.4.1 AP escolhido

A definição do equipamento considerado no processo de modelagem exata exerce influência direta sobre a fidelidade da formulação matemática em relação a cenários reais de implantação. Com esse objetivo, os métodos exatos propostos neste trabalho adotam como referência o Cisco Catalyst 9162, um ponto de acesso corporativo de última geração amplamente utilizado em ambientes internos de pequeno e médio porte.

O Cisco Catalyst 9162 é compatível com os padrões IEEE 802.11ax (Wi-Fi 6) e 802.11ax estendido para a banda de 6 GHz (Wi-Fi 6E), oferecendo suporte simultâneo às bandas de 2,4 GHz, 5 GHz e 6 GHz (CISCO, 2023). Essa característica permite maior capacidade agregada, melhor aproveitamento espectral e redução de interferência, aspectos particularmente relevantes em ambientes internos densos e heterogêneos, como escritórios, edifícios acadêmicos e espaços corporativos modernos. A Figura 17 expõe o *Access Point* Cisco Catalyst 9162I.

Figura 17 – Cisco Catalyst 9162I



Fonte: Cisco (2023).

Do ponto de vista da capacidade física, o equipamento suporta uplink e downlink OFDMA, MU-MIMO, BSS coloring e Target Wake Time (TWT), mecanismos introduzidos no padrão 802.11ax para melhorar a eficiência em cenários com múltiplos clientes concorrentes. Essas funcionalidades tornam o comportamento do ponto de acesso fortemente dependente da densidade e do perfil de demanda dos usuários, reforçando a necessidade de modelos matemáticos capazes de representar restrições de capacidade de forma explícita.

Outro aspecto relevante para a modelagem exata diz respeito às características de transmissão do dispositivo. O Catalyst 9162 possui antenas internas omnidirecionais, com ganhos típicos de até 4 dBi na banda de 2,4 GHz e 5 dBi nas bandas de 5 GHz e 6 GHz, além de níveis configuráveis de potência de transmissão que podem atingir 20 dBm (100 mW) em todas as bandas suportadas. Essas especificações são consistentes com cenários reais de ambientes

internos, nos quais a cobertura tende a ser predominantemente isotrópica em planta, mas sensível a obstáculos, *layout* arquitetônico e restrições regulatórias.

No que se refere à conectividade com a infraestrutura cabeada, o equipamento dispõe de uma interface Multigigabit Ethernet de até 2,5 Gbps, compatível com PoE+ (IEEE 802.3at) e UPOE (IEEE 802.3bt), permitindo operação completa dos três rádios sem a necessidade de fontes externas adicionais. Essa característica reforça a adequação do dispositivo a implantações reais, nas quais limitações de cabeamento e fornecimento de energia precisam ser consideradas no planejamento da rede sem fio.

A escolha do Cisco Catalyst 9162 como ponto de acesso de referência para os métodos exatos propostos justifica-se, portanto, por sua ampla adoção em ambientes corporativos modernos, por suas capacidades técnicas alinhadas ao estado da prática em redes Wi-Fi internas e por oferecer parâmetros bem definidos de capacidade, potência e operação. Ao ancorar a formulação matemática em um equipamento real e representativo, busca-se garantir que os modelos exatos desenvolvidos reflitam, de maneira mais fidedigna, os desafios encontrados em cenários reais de posicionamento de pontos de acesso em ambientes internos.

Tabela 16 – Canais suportados pelo Cisco Catalyst 9162

<b>Banda</b>	<b>Faixa de Frequência</b>	<b>Canais Suportados</b>
2,4 GHz	2400–2483,5 MHz	1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11
5 GHz	5150–5850 MHz	36, 40, 44, 48, 52, 56, 60, 64, 100, 104, 108, 112, 116, 120, 124, 128, 132, 136, 140, 144, 149, 153, 157, 161, 165
6 GHz (Wi-Fi 6E)	5925–7125 MHz	1, 5, 9, 13, 17, 21, 25, 29, 33, 37, 41, 45, 49, 53, 57, 61, 65, 69, 73, 77, 81, 85, 89, 93, 97, 101, 105, 109, 113, 117, 121, 125, 129, 133, 137, 141, 145, 149, 153, 157, 161, 165, 169, 173, 177, 181, 185, 189, 193, 197, 201, 205, 209, 213, 217, 221, 225, 229, 233

#### 4.4.2 Instâncias

A representação adequada do ambiente físico é um elemento fundamental para a modelagem realista do APPP. Neste trabalho, a descrição geométrica dos ambientes é baseada em um *dataset* de plantas-baixas originalmente proposto para tarefas de análise semântica de plantas arquitetônicas, descrito por Heras et al. (2015) e chamado de CFC-FP.

O *dataset* foi originalmente concebido para apoiar pesquisas em detecção automática de salas, regiões funcionais e elementos estruturais em plantas-baixas de ambientes internos, utilizando técnicas de visão computacional e reconhecimento de padrões. Embora não tenha sido desenvolvido com foco em redes sem fio ou planejamento de infraestrutura, o conjunto de dados

apresenta características que o tornam particularmente adequado para a modelagem espacial necessária neste trabalho.

De maneira geral, o *dataset* é composto por 148 documentos de plantas-baixas bidimensionais de ambientes internos, contendo a delimitação explícita de paredes, corredores, salas e outras regiões arquitetônicas. As plantas representam ambientes reais, como edifícios residenciais, comerciais ou institucionais, e fornecem uma base geométrica consistente para a identificação de regiões internas passíveis de cobertura por pontos de acesso sem fio.

Neste trabalho, o *dataset* é utilizado com uma finalidade distinta daquela originalmente proposta. Em vez de empregar as anotações para tarefas de reconhecimento semântico, as plantas-baixas são exploradas como representações geométricas do ambiente interno, permitindo a identificação de regiões que devem ser consideradas no processo de cobertura por pontos de acesso.

Especificamente, as regiões detectadas nas plantas-baixas são interpretadas como unidades espaciais de demanda, sobre as quais se impõe a necessidade de cobertura por APs. Como descrito previamente em exemplos, as regiões de salas e escritórios foram definidas como posições de alta demanda. Essa adaptação é conceitualmente consistente, uma vez que salas e áreas funcionais representam, em cenários reais, locais onde usuários e dispositivos sem fio estão mais presentes. As 148 instâncias testadas apresentam grande heterogeneidade em termos de tamanho e complexidade. A Tabela 17 sumariza as principais características do conjunto de dados.

Tabela 17 – Características gerais das instâncias experimentais

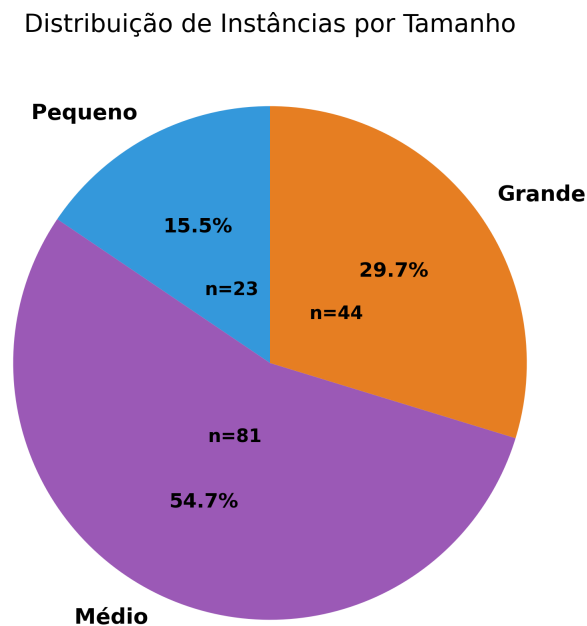
<b>Característica</b>	<b>Média</b>	<b>Mínimo</b>	<b>Máximo</b>	<b>Desvio Padrão</b>
Pontos de Alta Demanda	220.4	28	777	213.1
Pontos de Demanda Mínima	655.5	29	2835	583.4
Pontos de Anteparos	2830.3	63	9442	3252.4
Total de Pontos	3706.2	120	12054	3918.7

Para facilitar a análise, as instâncias foram categorizadas em três grupos segundo o número total de pontos ao discretizá-las: **pequenas**, com até 1.000 pontos (23 instâncias, 15,2%); **médias**, com 1.001 a 5.000 pontos (81 instâncias, 53,6%); e **grandes**, com acima de 5.000 pontos (47 instâncias, 31,1%). A distribuição dessas categorias é ilustrada na Figura 18.

## 4.5 Resultados Experimentais

Esta seção apresenta a avaliação experimental de dois métodos exatos para resolução do APPP: o Método de Cobertura de Pontos e o Método de Cobertura de Regiões. Os experimentos foram conduzidos em um conjunto de 148 instâncias reais, com limite de tempo de 600 segundos por execução. Quando há *timeout*, a quantidade de APs da solução corrente do método é preservada, mesmo que não seja ótima.

Figura 18 – Distribuição das 148 instâncias por categoria de tamanho.



Fonte: Autoria própria, 2026.

Os experimentos foram conduzidos utilizando o *solver* de otimização *IBM ILOG CPLEX*, versão 22.1.1, obtido sob licença acadêmica disponibilizada pelo programa *IBM Academic Initiative* (IBM, 2022), visto que o CPLEX é um dos *solvers* comerciais mais consolidados no meio acadêmico, oferecendo suporte a na literatura de otimização combinatória, oferecendo suporte aos nossos requisitos. Neste trabalho, foi utilizada a capacidade de resolução de problemas de programação inteira mista para obter as soluções dos métodos exatos propostos para o APPP.

#### 4.5.1 Resultados Comparativos

Tabela 18 – Comparação do número de APs obtidos pelos métodos exatos

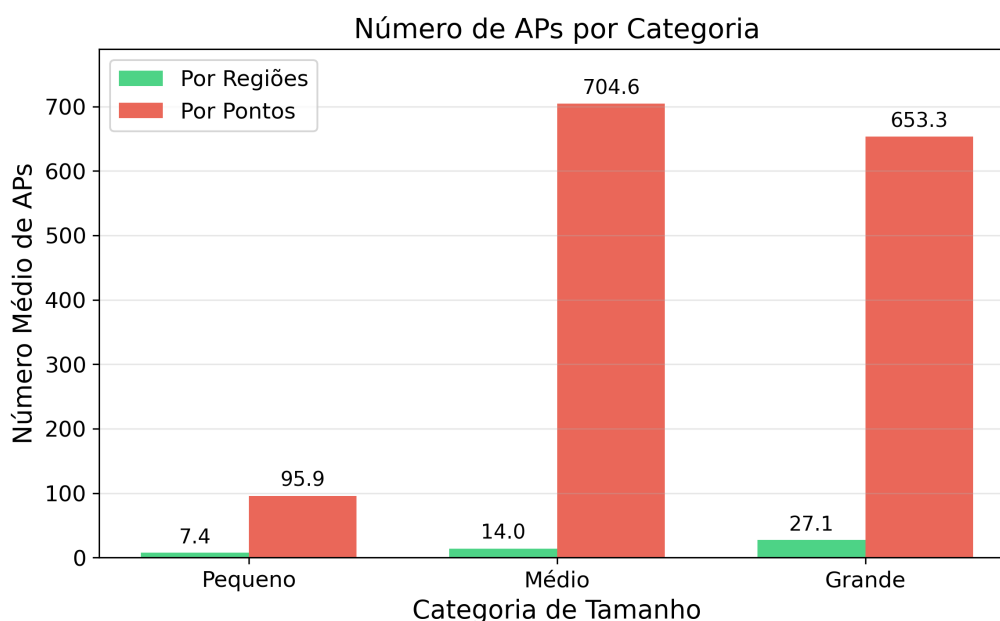
Método	Média	Mediana	Mínimo	Máximo
Cobertura de Regiões	16,88	14,0	4	43
Cobertura de Pontos	594,74	677,0	4	2053

A Tabela 18 apresenta a comparação entre os dois métodos em termos de número de APs posicionados. O Método de Cobertura de Regiões apresentou desempenho significativamente superior em termos de qualidade das soluções, com uma média de apenas 16,88 APs por instância, comparado a 594,74 APs do Método por Pontos – uma diferença de **97,2%**. Esta discrepância sugere que a abordagem por regiões é mais eficaz em identificar posicionamentos ótimos que minimizam redundâncias de cobertura. A distribuição detalhada dos resultados por categoria de tamanho é apresentada na Tabela 19.

Tabela 19 – Resultados médios por categoria de tamanho de instância

Categoria	N	APs Médios		Tempo Médio (s)	
		Regiões	Pontos	Regiões	Pontos
Pequenas ( $\leq 1.000$ )	23	7,39	95,87	46,93	248,71
Médias (1.001–5.000)	81	14,00	704,58	77,94	555,47
Grandes ( $> 5.000$ )	44	27,14	653,32	413,96	558,91

Figura 19 – Número médio de APs por categoria de tamanho



Fonte: Autoria própria, 2026.

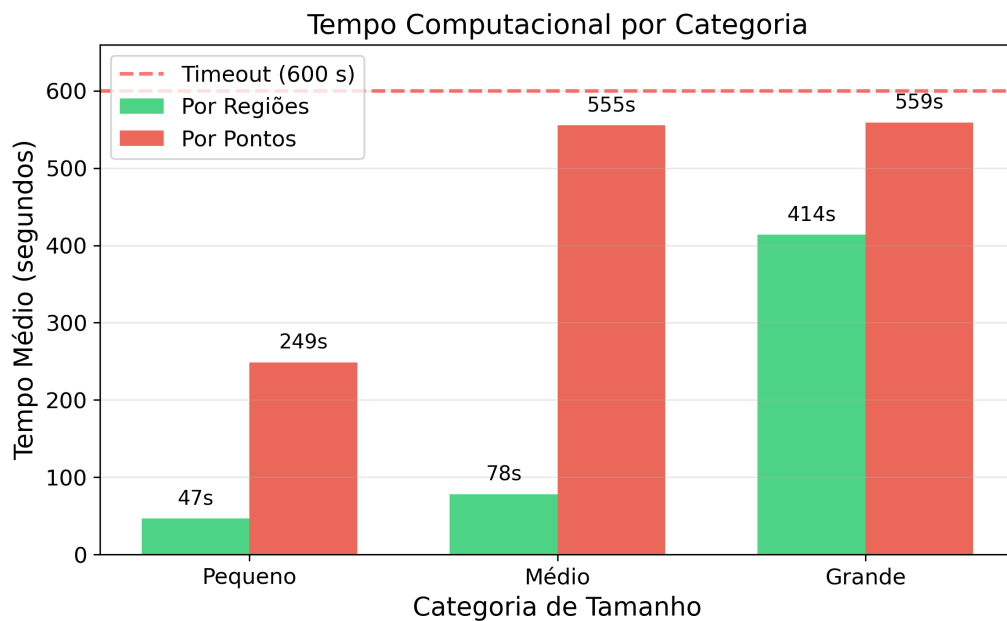
Observa-se que, em instâncias pequenas, ambos os métodos apresentam resultados comparáveis (7,39 vs 95,87 APs); porém, a diferença se acentua drasticamente em instâncias médias e grandes, onde o Método de Cobertura de Regiões mantém soluções com média de 14,0 APs (médias) e 27,1 APs (grandes), frente a 704,6 e 653,3 do Método por Pontos, como evidenciado na Figura 19.

Tabela 20 – Análise de *timeouts* (execuções que atingiram 600 segundos)

Método	Timeouts	Percentual	Tempo Médio (s)	Desvio Padrão
Por Regiões	23	15,5%	173,02	214,31
Por Pontos	113	76,4%	508,82	187,12

A Tabela 20 analisa a convergência dos métodos dentro do limite de tempo estabelecido, e a Figura 20 ilustra o tempo médio por categoria. O Método de Cobertura de Regiões demonstrou maior eficiência computacional nas categorias pequenas e médias. Apenas 15,5% das execuções atingiram o tempo limite, comparado a 76,4% do Método por Pontos. Em instâncias pequenas e médias, o tempo médio por Regiões é substancialmente menor (46,93 s e 77,94 s,

Figura 20 – Tempo computacional médio por categoria de tamanho



Fonte: Autoria própria, 2026.

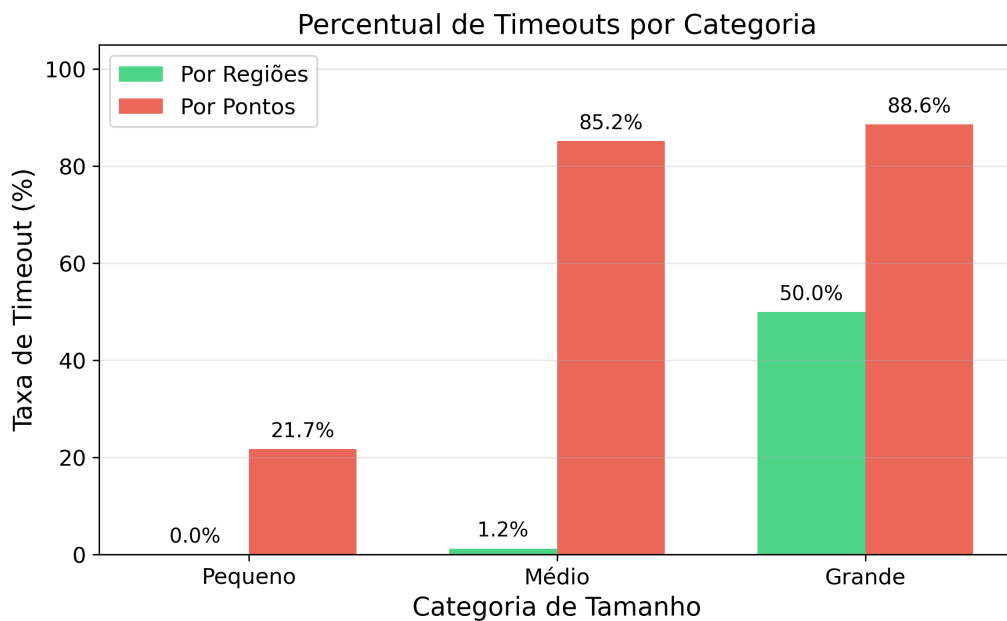
respectivamente), como pode ser verificado na Figura 20. Em instâncias grandes, ambos os métodos apresentam tempos médios elevados (413,96 s vs 558,91 s), refletindo a maior dificuldade computacional nessa faixa, onde a taxa de *timeout* é significativa para ambos (50,0% e 88,6%, respectivamente), como demonstra a Figura 21.

A Tabela 21 detalha a distribuição de *timeouts* por categoria, e a Figura 21 oferece uma visualização direta dessas proporções. Nota-se que nas categorias pequenas e médias o Método por Regiões raramente atinge o *timeout* (0,0% e 1,2%), enquanto o Método por Pontos atinge em proporções muito maiores (21,7% e 85,2%). Na categoria grande, ambos os métodos apresentam taxas elevadas de *timeout*, sendo 50,0% para Regiões e 88,6% para Pontos, refletindo a maior complexidade computacional dessas instâncias.

Tabela 21 – Percentual de *timeouts* por categoria de tamanho.

Categoria	Timeouts	
	Por Regiões	Por Pontos
Pequenas	0,0%	21,7%
Médias	1,2%	85,2%
Grandes	50,0%	88,6%

Para compreender quais características das instâncias influenciam o desempenho dos métodos, foi realizada análise de correlação de Pearson, apresentada na Tabela 22. Os resultados revelam que o número de APs no Método de Cobertura de Regiões está fortemente correlacionado com pontos de alta demanda ( $r=0,758$ ), indicando que a estratégia se adapta à densidade

Figura 21 – Percentual de execuções que atingiram o limite de *timeout* por categoria

Fonte: Autoria própria, 2026.

de demanda. O Método por Pontos não apresenta correlação significativa ( $r=-0,044$ ), sugerindo comportamento menos previsível. Instâncias com mais pontos de alta demanda tendem a aumentar o tempo computacional de ambos os métodos, com correlação positiva moderada para o Método por Regiões ( $r=0,601$ ) e fraca para o Método por Pontos ( $r=0,290$ ).

Tabela 22 – Correlação entre pontos de alta demanda e métricas de desempenho

Métrica	Correlação com Pontos de Alta Demanda
APs – Método por Regiões	0,758 (forte positiva)
APs – Método por Pontos	-0,044 (nula)
Tempo – Método por Regiões	0,601 (moderada positiva)
Tempo – Método por Pontos	0,290 (moderada positiva)

#### 4.5.2 Melhores e Piores Casos

As Tabelas 23 e 24 apresentam as 10 instâncias com maior vantagem do Método por Regiões, sob dois critérios: maior diferença absoluta e maior redução percentual, respectivamente. Os tempos são definidos nas últimas colunas, evidenciando os *timeouts* quando necessário.

Observa-se que, em instâncias de grande porte, o Método de Cobertura de Regiões consegue reduções superiores a **98%** no número de APs, evidenciando a superioridade da abordagem por regiões nesses cenários. Os resultados experimentais indicam que o Método de Cobertura de Regiões apresenta melhor desempenho em termos de qualidade de solução, produzindo, em média, configurações com uma redução de até **97%** no número de pontos de

Tabela 23 – Top 10 instâncias com maior diferença absoluta a favor do Método por Regiões.

Instância	APs Regiões	APs Pontos	Diferença	Tempo Regiões (s)	Tempo Pontos (s)
$3fe_630_{pl}lace_{mi}_pprimary_sschool_{gf}f_02$	31	2053	2022	366,59	timeout
$secondary_{itype}_{11}850_{gr}ound_{fl}oor_01$	32	1862	1830	573,72	timeout
$1fe_210_{pl}lace_{mi}_pprimary_sschool$	23	1696	1673	430,91	timeout
$1fe_240_{pl}lace_{mi}_pprimary_sschool$	19	1692	1673	513,93	timeout
$3fe_630_{pl}lace_{mi}_pprimary_sschool_{ff}f_62m2$	27	1666	1639	204,28	timeout
$3fe_630_{pl}lace_{mi}_pprimary_sschool_{ff}f_55m2$	27	1666	1639	200,94	timeout
$2fe_180_{pl}lace_{inf}ant_sschool$	19	1542	1523	550,73	timeout
$Ha_{GC}1202_{gt}4$	21	1486	1465	139,83	timeout
$Ha_{GL}0401_{gt}4$	19	1438	1419	197,07	timeout
$secondary_{itype}_{11}200_{mus}ic_sports_{gf}$	26	1412	1386	258,70	timeout

Tabela 24 – Top 10 instâncias com maior redução percentual a favor do Método por Regiões.

Instância	APs Regiões	APs Pontos	Redução (%)	Tempo Regiões (s)	Tempo Pontos (s)
$1fe_240_{pl}lace_{mi}_pprimary_sschool$	19	1692	98,88	513,93	timeout
$Ha_{FE}0901_{gt}7$	14	1209	98,84	187,59	timeout
$Ha_{GT}0602_{gt}2$	9	765	98,82	39,38	timeout
$Ha_{LZ}1101_{gt}2$	14	1143	98,78	69,31	timeout
$2fe_180_{pl}lace_{inf}ant_sschool$	19	1542	98,77	550,73	timeout
$p1_{gt}5$	12	944	98,73	30,09	timeout
$p2_{gt}3$	13	1014	98,72	37,93	timeout
$Ha_{DE}1110_{gt}6$	11	857	98,72	36,68	timeout
$p4_{gt}3$	17	1313	98,71	148,54	timeout
$Ha_{GL}0401_{gt}4$	19	1438	98,68	197,07	timeout

acesso quando comparado às abordagens baseadas em cobertura por pontos. Essa vantagem se mantém consistente ao longo das diferentes categorias de tamanho das instâncias analisadas, sendo mais evidente nos cenários de médio e grande porte. Nessas categorias, o método proposto demonstra maior eficiência na obtenção de soluções viáveis com menor quantidade de APs.

Do ponto de vista computacional, o Método de Cobertura de Regiões apresenta menor incidência de *timeouts*, com um fator de redução de aproximadamente  $4,9\times$ , além de menor tempo médio de resolução nas instâncias pequenas e médias. Esses resultados sugerem uma melhor escalabilidade do método nessas faixas de tamanho.

Adicionalmente, verifica-se uma correlação positiva forte entre a presença de pontos de alta demanda e o número de APs ativados pelo Método de Cobertura de Regiões ( $r = 0,758$ ), indicando um comportamento mais previsível da formulação em relação às características da demanda. Em cenários reais de grande porte, como ambientes educacionais com milhares de pontos de demanda, o método apresenta potencial para reduzir o número de pontos de acesso em mais de 98%, o que pode representar ganhos relevantes em termos de custo de infraestrutura.

Dessa forma, os resultados obtidos corroboram a adequação da abordagem baseada na divisão em regiões para a resolução exata do APPP, especialmente em instâncias de médio e grande porte, nas quais a qualidade da solução e a eficiência computacional assumem papel relevante.

## 5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

A presente dissertação cumpriu seu objetivo fundamental de investigar e propor soluções robustas para o Problema de Posicionamento de Pontos de Acesso (APPP) em ambientes internos, utilizando uma abordagem dual que integrou a flexibilidade das hiper-heurísticas com o rigor dos métodos exatos. Ao longo deste trabalho, o APPP foi tratado como um problema combinatório complexo que envolve restrições de capacidade de *throughput*, interferência e requisitos técnicos das novas gerações de redes sem fio.

A investigação sobre métodos heurísticos demonstrou que a escalabilidade foi extremamente relevante ao comparar às abordagens hiper-heurísticas com a meta-heurística ILS-RVND, bem como uma abordagem de Programação Genética com o BRKA. Os experimentos demonstraram que, embora o *Iterated Local Search* (ILS-RVND) (RUFINO A.; SILVA, 2016) apresente excelente desempenho em instâncias pequenas, sua eficiência decai fortemente em cenários de maior porte (instâncias  $100 \times 100$ ).

A hiper-heurística online mostrou-se a única abordagem capaz de produzir soluções viáveis para todas as instâncias  $100 \times 100$ , nas quais o ILS-RVND e o BRKGA não encontraram soluções dentro do limite de tempo. Ao contrário do BRKGA (GONÇALVES; RESENDE, 2011), que enfrentou dificuldades severas com as penalizações de inviabilidade, a HH-on conseguiu navegar no espaço de busca de heurísticas para selecionar dinamicamente operadores de baixo nível, como o *AllDryAP()* e o *AllClosestMoveAP()*, convertendo soluções inviáveis em configurações produtivas. Estatisticamente, a relevância da HH-on foi validada pelo teste de Wilcoxon, apresentando *p*-valores significativos ( $p < 0.05$ ) em todas as instâncias de alta complexidade.

A abordagem de métodos exatos permitiu uma modelagem mais realista do problema. A comparação entre a formulação baseada em pontos e a formulação baseada em regiões forneceu resultados contundentes. O Método de Cobertura de Regiões reduziu o número de APs necessários em aproximadamente 97,1% em relação ao Modelo de Cobertura por Pontos. Isso demonstra que a discretização excessiva de restrições de cobertura pode se tornar inviável para ambientes de grande porte, devido ao aumento massivo de restrições. A abordagem de Cobertura de Regiões apresentou  $4,9 \times$  menos ocorrências de *timeout*, resolvendo instâncias complexas em uma fração do tempo exigido pelo modelo tradicional.

Essas descobertas, fundamentadas no uso do *solver* CPLEX e em modelos de propagação via *ray-tracing*, confirmam que o planejamento por zonas funcionais é um caminho viável para minimizar o orçamento de implantações corporativas reais (OUSTRY et al., 2022).

Olhando para o futuro a curto prazo, a operação *Multi-Link* (MLO) do Wi-Fi 7 e a utilização da banda de 6 GHz (Wi-Fi 6E) reforçam a necessidade de modelos que priorizem a

consistência da latência em detrimento apenas do *throughput* de pico (MOZAFFARIAHRAR; THEOLEYRE; MENTH, 2022).

Para a continuidade desta linha de pesquisa, uma possível evolução é o uso de *Deep Reinforcement Learning* para substituir o motor evolutivo da hiper-heurística *online* por agentes de aprendizagem por reforço profundo, visando uma seleção de heurísticas ainda mais adaptativa ao contexto espacial. Novas heurísticas podem ser construídas, bem como uma abordagem de combinação de heurísticas de baixo nível.

Além disso, abordagens de sustentabilidade e *Green Wi-Fi* podem ser integradas a funções cujo objetivo visam a minimização do consumo energético da infraestrutura, explorando recursos como o *Target Wake Time* (TWT), com o intuito de agendar a comunicação entre clientes e APs, reduzindo colisões e custos com tempo ocioso.

Por fim, esta dissertação consolida a ideia de que a otimização de redes sem fio em ambientes internos modernos é fortemente ligada à automação inteligente. A união entre hiper-heurísticas escaláveis e modelos exatos focados em coberturas de pontos ou regiões oferece uma metodologia complementar para os desafios de escalabilidade e conectividade do futuro.

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- ABDEL-BASSET, M.; ABDEL-FATAH, L.; SANGAIAH, A. K. Metaheuristic algorithms: A comprehensive review. In: *Computational Intelligence for Multimedia Big Data on the Cloud with Engineering Applications*. Elsevier, 2018. p. 185–231. Disponível em: <<https://doi.org/10.1016/b978-0-12-813314-9.00010-4>>. Citado na página 18.
- AKRAM, M. R. et al. Proposed aps distribution optimization algorithm: Indoor coverage solution. *Journal of Physics: Conference Series*, IOP Publishing, v. 1804, n. 1, p. 012134, fev. 2021. ISSN 1742-6596. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1088/1742-6596/1804/1/012134>>. Citado na página 30.
- ANDERSEN, J.; RAPPAPORT, T.; YOSHIDA, S. Propagation measurements and models for wireless communications channels. *IEEE Communications Magazine*, Institute of Electrical and Electronics Engineers (IEEE), v. 33, n. 1, p. 42–49, 1995. ISSN 0163-6804. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1109/35.339880>>. Citado 2 vezes nas páginas 28 e 87.
- ANDRONE, C.; PALADE, T. Radio coverage and performance analysis for local area networks. In: *2010 9th International Symposium on Electronics and Telecommunications*. IEEE, 2010. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1109/isetc.2010.5679347>>. Citado na página 46.
- ARROYO, J. E. C.; MARQUES, T. B. Heurísticas grasp aplicado ao problema de alocação de antenas de transmissão. *XXXVIII Simpósio Brasileiro de Pesquisa Operacional*, set. 2006. Citado na página 30.
- BABAEI, H.; KARIMPOUR, J.; HADIDI, A. A survey of approaches for university course timetabling problem. *Computers & Industrial Engineering*, Elsevier BV, v. 86, p. 43–59, ago. 2015. Disponível em: <<https://doi.org/10.1016/j.cie.2014.11.010>>. Citado na página 17.
- BURKE, E. K. et al. Hyper-heuristics: a survey of the state of the art. *Journal of the Operational Research Society*, Informa UK Limited, v. 64, n. 12, p. 1695–1724, dez. 2013. Disponível em: <<https://doi.org/10.1057/jors.2013.71>>. Citado 2 vezes nas páginas 20 e 21.
- CISCO. *Cisco Catalyst 9162 Series Access Points Data Sheet*. [S.l.], 2023. 14 p. Disponível em: <<https://www.cisco.com/c/en/us/products/collateral/wireless/catalyst-9100ax-access-points/cat-9162-series-access-points-ds.html>>. Citado na página 71.
- CORNUEJOLS, G. Valid inequalities for mixed integer linear programs. *Mathematical Programming*, Springer, v. 112, n. 1, p. 3–44, 2008. Citado na página 25.
- COWLING, P. I.; KENDALL, G.; SOUBEIGA, E. A hyperheuristic approach to scheduling a sales summit. In: *Selected Papers from the Third International Conference on Practice and Theory of Automated Timetabling III*. Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag, 2000. (PATAT '00), p. 176–190. ISBN 3540424210. Citado na página 20.
- DAHAL, K. P.; ALDRIDGE, C. J.; GALLOWAY, S. J. Evolutionary hybrid approaches for generation scheduling in power systems. *European Journal of Operational Research*, Elsevier BV, v. 177, n. 3, p. 2050–2068, mar. 2007. ISSN 0377-2217. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1016/j.ejor.2005.12.018>>. Citado na página 14.

DALIRI, A. et al. World hyper-heuristic: A novel reinforcement learning approach for dynamic exploration and exploitation. *Expert Systems with Applications*, Elsevier BV, v. 244, p. 122931, jun. 2024. ISSN 0957-4174. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1016/j.eswa.2023.122931>>. Citado na página 20.

FARKAS, K.; HUSZÁK, A. Optimization of wi-fi access point placement for indoor localization. *Journal IIT (Informatics & IT Today)*, 2013. Citado na página 30.

FISHER, H.; THOMPSON, G. Probabilistic learning combinations of local job-shop scheduling rules. In: MUTH, J.; THOMPSON, G. (Ed.). *Industrial Scheduling*. [S.l.]: Prentice-Hall, Englewood Cliffs, 1963. p. 225–251. Citado na página 20.

FUCHS, H.; KEDEM, Z. M.; NAYLOR, B. F. On visible surface generation by a priori tree structures. In: *Proceedings of the 7th annual conference on Computer graphics and interactive techniques - SIGGRAPH '80*. ACM Press, 1980. (SIGGRAPH '80). Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1145/800250.807481>>. Citado na página 44.

GLOVER, F. Future paths for integer programming and links to artificial intelligence. *Computers & Operations Research*, Elsevier BV, v. 13, n. 5, p. 533–549, jan. 1986. Disponível em: <[https://doi.org/10.1016/0305-0548\(86\)90048-1](https://doi.org/10.1016/0305-0548(86)90048-1)>. Citado na página 18.

GONÇALVES, J. F.; RESENDE, M. G. C. Biased random-key genetic algorithms for combinatorial optimization. *J. Heuristics*, Springer Science and Business Media LLC, v. 17, n. 5, p. 487–525, out. 2011. Citado 2 vezes nas páginas 45 e 79.

Gurobi Optimization, LLC. *Gurobi Optimizer Reference Manual*. 2023. <<https://www.gurobi.com>>. Acesso em: 04 fev. 2026. Citado na página 25.

HERAS, L.-P. de las et al. Cvc-fp and sgt: a new database for structural floor plan analysis and its groundtruthing tool. *International Journal on Document Analysis and Recognition*, 2015. Citado na página 72.

HERTZ, A. Finding a feasible course schedule using tabu search. *Discrete Applied Mathematics*, Elsevier BV, v. 35, n. 3, p. 255–270, mar. 1992. Disponível em: <[https://doi.org/10.1016/0166-218x\(92\)90248-9](https://doi.org/10.1016/0166-218x(92)90248-9)>. Citado na página 17.

HERTZ, A.; WIDMER, M. Guidelines for the use of meta-heuristics in combinatorial optimization. *European Journal of Operational Research*, Elsevier BV, v. 151, n. 2, p. 247–252, dez. 2003. Disponível em: <[https://doi.org/10.1016/s0377-2217\(02\)00823-8](https://doi.org/10.1016/s0377-2217(02)00823-8)>. Citado na página 17.

HOLLAND, J. H. *Adaptation in Natural and Artificial Systems*. The MIT Press, 1992. Disponível em: <<https://doi.org/10.7551/mitpress/1090.001.0001>>. Citado na página 19.

IBM. *IBM ILOG CPLEX Optimization Studio*. [S.l.], 2022. Versão 22.1.1. Licença acadêmica obtida pelo programa IBM Academic Initiative. Disponível em: <<https://www.ibm.com/docs/en/icos/22.1.1>>. Citado 2 vezes nas páginas 25 e 74.

International Telecommunication Union (ITU). *PROPAGATION DATA AND PREDICTION MODELS FOR THE PLANNING OF INDOOR RADIOCOMMUNICATION SYSTEMS AND RADIO LOCAL AREA NETWORKS IN THE FREQUENCY RANGE 900 MHz TO 100 GHz*. [S.l.], 1997. Acesso em: 2026-01-27. Disponível em: <[https://www.itu.int/dms\\_pubrec/itu-r/rec/p/R-REC-P.1238-0-199705-S!!PDF-E.pdf](https://www.itu.int/dms_pubrec/itu-r/rec/p/R-REC-P.1238-0-199705-S!!PDF-E.pdf)>. Citado na página 88.

- KAMENETSKY, M.; UNBEHAUN, M. Coverage planning for outdoor wireless lan systems. In: *2002 International Zurich Seminar on Broadband Communications Access - Transmission - Networking (Cat. No.02TH8599)*. IEEE, 2002. (IZSBC-02). Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1109/izsbc.2002.991793>>. Citado 3 vezes nas páginas 14, 29 e 31.
- KARIMA, F. A.; SHIDDIQI, A. M. Optimization of access point positioning on wi-fi networks using the k-means clustering method. *IPTEK The Journal for Technology and Science*, Lembaga Penelitian dan Pengabdian kepada Masyarakat ITS, v. 33, n. 1, p. 13, maio 2022. ISSN 0853-4098. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.12962/j20882033.v33i1.12402>>. Citado na página 30.
- KATOCH, S.; CHAUHAN, S. S.; KUMAR, V. A review on genetic algorithm: past, present, and future. *Multimedia Tools and Applications*, Springer Science and Business Media LLC, v. 80, n. 5, p. 8091–8126, out. 2020. Disponível em: <<https://doi.org/10.1007/s11042-020-10139-6>>. Citado na página 20.
- KHOROV, E. et al. A tutorial on IEEE 802.11ax high efficiency WLANs. *IEEE Communications Surveys & Tutorials*, IEEE, v. 21, n. 1, p. 197–216, 2019. Citado 2 vezes nas páginas 13 e 57.
- LEE, J. W. H.; LAI, A. K. Y. FDTD analysis of indoor radio propagation. In: *Proceedings of the IEEE Antennas and Propagation Society International Symposium*. [S.l.]: IEEE, 1998. p. 1664–1667. Citado na página 94.
- LU, J.-L. et al. Indoor wlan planning with a qos constraint based on a markovian performance evaluation model. In: *2006 IEEE International Conference on Wireless and Mobile Computing, Networking and Communications*. IEEE, 2006. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1109/wimob.2006.1696372>>. Citado na página 29.
- MAKHORIN, A. *GLPK (GNU Linear Programming Kit)*. 2012. <<https://www.gnu.org/software/glpk/>>. Acesso em: fev. 2026. Citado na página 25.
- MEGIDDO, N.; TAMIR, A. On the complexity of locating linear facilities in the plane. *Operations Research Letters*, Elsevier BV, v. 1, n. 5, p. 194–197, nov. 1982. Citado na página 14.
- MICHALEWICZ, Z.; SCHOENAUER, M. Evolutionary algorithms for constrained parameter optimization problems. *Evolutionary Computation*, MIT Press - Journals, v. 4, n. 1, p. 1–32, mar. 1996. Disponível em: <<https://doi.org/10.1162/evco.1996.4.1.1>>. Citado na página 19.
- MOZAFFARIAHRAR, E.; THEOLEYRE, F.; MENTH, M. A survey of Wi-Fi 6: Technologies, advances, and challenges. *Future Internet*, MDPI, v. 14, n. 10, p. 293, 2022. Citado 3 vezes nas páginas 13, 57 e 80.
- NAKPRASIT, K.; PHONGCHAROENPANICH, C. Investigation of received signal strength of ieee 802.11n wlan in coverage of nakhon ratchasima rajabhat university. In: *2018 15th International Conference on Electrical Engineering/Electronics, Computer, Telecommunications and Information Technology (ECTI-CON)*. IEEE, 2018. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1109/ecticon.2018.8620018>>. Citado na página 46.
- NEMHAUSER, G. L.; WOLSEY, L. A. *Integer and Combinatorial Optimization*. New York: Wiley-Interscience, 1988. ISBN 978-0-471-82819-8. Citado 2 vezes nas páginas 24 e 25.

OCHOA, G. et al. Hyflex: A benchmark framework for cross-domain heuristic search. In: \_\_\_\_\_. *Evolutionary Computation in Combinatorial Optimization*. Springer Berlin Heidelberg, 2012. p. 136–147. ISBN 9783642291241. Disponível em: <[http://dx.doi.org/10.1007/978-3-642-29124-1\\_12](http://dx.doi.org/10.1007/978-3-642-29124-1_12)>. Citado na página 22.

OLGUN, B.; KOÇ, Ç.; ALTIPARMAK, F. A hyper heuristic for the green vehicle routing problem with simultaneous pickup and delivery. *Comput. Ind. Eng.*, Elsevier BV, v. 153, n. 107010, p. 107010, mar. 2021. Citado na página 14.

OUSTRY, A. et al. Optimal deployment of indoor wireless local area networks. *Networks*, Wiley, v. 81, n. 1, p. 23–50, jul. 2022. ISSN 1097-0037. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1002/net.22116>>. Citado 3 vezes nas páginas 26, 31 e 79.

PEARL, J. *Heuristics*. New York, NY: Addison Wesley Longman Publishing, 1984. (The Addison-Wesley series in artificial intelligence). Citado na página 16.

QIU, S. et al. Joint access point placement and power-channel-resource-unit assignment for 802.11ax-based dense wifi with qos requirements. In: *IEEE INFOCOM 2020 - IEEE Conference on Computer Communications*. [S.l.: s.n.], 2020. p. 2569–2578. Citado 2 vezes nas páginas 26 e 31.

REMLEY, K. A.; WEISSHAAR, A.; ANDERSON, H. R. A comparative study of Ray Tracing and FDTD for indoor propagation modeling. In: *Proceedings of the IEEE 48th Vehicular Technology Conference (VTC '98)*. [S.l.]: IEEE, 1998. p. 865–869. Citado 2 vezes nas páginas 29 e 94.

ROY, P.; CHOWDHURY, C. A region-wise indoor localization system based on unsupervised learning and ant colony optimization technique. *Applied Soft Computing*, Elsevier BV, v. 157, p. 111509, maio 2024. ISSN 1568-4946. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1016/j.asoc.2024.111509>>. Citado na página 30.

RUFINO A.; SILVA, T. G. Meta-heurística ils para o problema de posicionamento automático de pontos de acesso em ambientes internos. *XLVIII Simpósio Brasileiro de Pesquisa Operacional*, set. 2016. Citado 12 vezes nas páginas 14, 30, 31, 32, 33, 46, 47, 48, 51, 55, 56 e 79.

SCHAUBACH, K.; DAVIS, N.; RAPPAPORT, T. A ray tracing method for predicting path loss and delay spread in microcellular environments. In: *[1992 Proceedings] Vehicular Technology Society 42nd VTS Conference - Frontiers of Technology*. IEEE, 1992. p. 932–935. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1109/VETEC.1992.245274>>. Citado 2 vezes nas páginas 29 e 91.

SHANG, S.; WANG, L. Overview of wifi fingerprinting-based indoor positioning. *IET Communications*, Institution of Engineering and Technology (IET), v. 16, n. 7, p. 725–733, abr. 2022. ISSN 1751-8636. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1049/cmu2.12386>>. Citado na página 30.

SHAPIRO, S. S.; WILK, M. B. An analysis of variance test for normality (complete samples)†. *Biometrika*, v. 52, n. 3-4, p. 591–611, 12 1965. ISSN 0006-3444. Disponível em: <<https://doi.org/10.1093/biomet/52.3-4.591>>. Citado na página 52.

SOUZA, M. J. F. *Inteligência Computacional para Otimização: metaheurísticas*. [S.l.]: Departamento de Computação, Universidade Federal de Ouro Preto, Ouro Preto, Minas Gerais, 2022. Disponível em: <<http://www.decom.ufop.br/prof/marcone/Disciplinas/>>

InteligenciaComputacional/InteligenciaComputacional.pdf>. Citado 3 vezes nas páginas 16, 17 e 18.

TELECOMMUNICATIONS, C. *COST 231 Action 231: Digital mobile radio towards future generation systems: Final report*. [S.l.]: Publications Office of the European Union, 1999. Citado 2 vezes nas páginas 28 e 90.

TOSO, R.; RESENDE, M. A c++application programming interface for biased random-key genetic algorithms. *Optimization Methods and Software*, Informa UK Limited, v. 30, n. 1, p. 81–93, mar. 2014. ISSN 1029-4937. Citado na página 46.

VANHATUPA, T.; HANNIKAINEN, M.; HAMALAINEN, T. D. Genetic algorithm to optimize node placement and configuration for wlan planning. In: *2007 4th International Symposium on Wireless Communication Systems*. IEEE, 2007. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1109/iswcs.2007.4392413>>. Citado 2 vezes nas páginas 30 e 31.

VIEIRA, S. T. et al. Wireless access point positioning optimization. In: *2019 International Conference on Software, Telecommunications and Computer Networks (SoftCOM)*. IEEE, 2019. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.23919/SOFTCOM.2019.8903880>>. Citado na página 30.

WOLPERT, D.; MACREADY, W. No free lunch theorems for optimization. *IEEE Transactions on Evolutionary Computation*, Institute of Electrical and Electronics Engineers (IEEE), v. 1, n. 1, p. 67–82, abr. 1997. ISSN 1089-778X. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1109/4235.585893>>. Citado na página 21.

WOLSEY, L. A. *Integer Programming*. New York: Wiley-Interscience, 1999. ISBN 978-0-471-28366-9. Citado 2 vezes nas páginas 23 e 24.

YEE, K. S. Numerical solution of initial boundary value problems involving Maxwell's equations in isotropic media. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, v. 14, n. 3, p. 302–307, 1966. Citado 2 vezes nas páginas 29 e 93.

## **Apêndices**

## APÊNDICE A – MODELO *ONE SLOPE*

O modelo **One Slope** é uma versão simplificada para a predição do comportamento do sinal em ambientes internos, considerando apenas a distância. A Equação 40 descreve o modelo.

$$PL(d) = PL_0 + 10 \cdot n \cdot \log_{10}(d) + \sigma \quad (40)$$

Onde:

- $PL(d)$ : Perda de percurso (dB) a uma distância  $d$  (metros);
- $d$ : Distância entre o transmissor (AP) e o emissor (ponto) em metros;
- $PL_0$ : Perda de referência (dB) no espaço livre a 1 metro (ex:  $PL_0 = 40$  dB para  $f = 5$  GHz);
- $n$ : Expoente de perda de percurso, que varia conforme o ambiente;
- $\sigma$ : Perdas adicionais de desvio padrão no percurso.

A Tabela 25 demonstra o Expoente de Perda de Percurso e desvio padrão.

Tabela 25 – Expoente de Perda de Percurso e desvio padrão medidos em diferentes edifícios.

Edifício	Frequência (MHz)	n	$\sigma$ (dB)
Lojas de varejo	914	2.2	8.7
Mercado	914	1.8	5.2
Escritório, partição rígida	1500	3.0	7.0
Escritório, partição leve	1900	2.6	14.1
Fábrica (teste em visada)	-	-	-
Têxtil/Químico	4000	2.1	7.0
Papel/Cereais	1300	1.8	6.0
Metalurgia	1300	1.6	5.8
Casa Suburbana	-	-	-
Rua interna	900	3.0	7.0
Fábrica Têxtil/Química (teste com obstruções)	4000	2.1	9.7
Fábrica de Metalurgia (teste com obstruções)	1300	3.3	6.8

FONTE: (ANDERSEN; RAPPAPORT; YOSHIDA, 1995).

## APÊNDICE B – MODELO ITU-R P.1238-1

A recomendação da ITU-R (*International Telecommunication Union- Radiocommunication sector*) para ambientes internos, o modelo **ITU-R P.1238-1**, considera a dependência da frequência e classifica ambientes em categorias, como residencial e comercial (International Telecommunication Union (ITU), 1997). A perda pela propagação formulada neste modelo é descrita pela Equação 41, considerando ambientes que possuem mais de um andar.

$$PL(d) = 20 \cdot \log_{10}(f) + n \cdot \log_{10}(d) + PL_f(k_f) - 28 \quad (41)$$

Além do  $PL(d)$  e o  $d$  já descritos anteriormente, temos:

- $f$ : Frequência do sinal, em MHz;
- $n$ : Coeficiente de atenuação de acordo com a distância;
- $k_f$ : Número de andares atravessados;
- $PL_f$ : Fator de atenuação por andar atravessado, em dB.

As Tabelas 26 e 27 expõem valores padrões dos fatores  $n$  e  $PL_f$ .

Tabela 26 – Coeficientes de perda de potência,  $n$ , para cálculo de perda de transmissão em ambientes internos

Frequência	Residencial	Escritório	Comercial
900 MHz	–	33	20
1.2-1.3 GHz	–	32	22
1.8-2.0 GHz	28	30	22
4 GHz	–	28	22
60 GHz	–	22	17

Tabela 27 – Fatores de perda por penetração em pisos,  $PL_f$  (dB), com  $n$  sendo o número de andares penetrados, para cálculo de perda de transmissão interna

<b>Frequência</b>	<b>Residencial</b>	<b>Escritório</b>	<b>Comercial</b>
900 MHz	–	9 (1 andar)	–
	–	19 (2 andares)	–
	–	24 (3 andares)	–
1.8-2.0 GHz	$4n$	$15 + 4(n - 1)$	$6 + 3(n - 1)$

## APÊNDICE C – MODELO COST 231: KEENAN-MOTLEY

O Modelo Keenan-Motley (TELECOMMUNICATIONS, 1999) considera mais elementos como parâmetros de entrada, e a expressão que define a perda de propagação é dada pela Equação 42.

$$PL(d) = PL_0 + 10 \cdot n \cdot \log(d) + \sum_{i=1}^N k_{f,i} \cdot L_{f,i} + \sum_{j=1}^M k_{w,j} \cdot PL_{w,j} \quad (42)$$

Onde, além de  $PL(d)$ ,  $PL_0$  e  $d$ , previamente descritos, temos:

- $PL_{w,j}$ : Perda de propagação, em dB, do sinal através da parede  $j$ ;
- $n$ : Expoente de perda de percurso;
- $k_{f,i}$ : Número de pisos do tipo  $i$  atravessados;
- $k_{w,j}$ : Número de paredes do tipo  $j$  atravessados;
- $N$ : Quantidade de pisos que o sinal atravessa;
- $M$ : Quantidade de paredes que o sinal atravessa.

## APÊNDICE D – MODELO DE *RAY-TRACING*

O método de *Ray-Tracing* é uma técnica computacional amplamente utilizada para prever a propagação de sinais em ambientes internos e externos. Baseado na Ótica Geométrica, o *Ray-Tracing* modela a propagação de ondas eletromagnéticas como raios que interagem com o ambiente por meio de reflexões, transmissões e difrações. Essa abordagem é particularmente útil para ambientes complexos, como escritórios, hospitais e fábricas, onde a presença de obstáculos influencia significativamente a propagação do sinal (SCHAUBACH; DAVIS; RAPPAPORT, 1992).

Neste modelo, considera-se que a energia eletromagnética é transmitida ao longo de raios que se propagam em linha reta, a menos que interajam com superfícies ou objetos. A propagação do sinal é composta por diferentes tipos de raios: os diretos, que representam a propagação em Linha de Visada (LoS) onde o sinal viaja diretamente do transmissor ao receptor; os refletidos, que ocorrem quando o sinal encontra superfícies como paredes ou tetos; os transmitidos, que representam a penetração do sinal através de obstáculos, a exemplo de janelas ou divisórias; e os difratados, que modelam a curvatura do sinal ao redor de bordas ou cantos.

A amplitude e o atraso de cada raio são calculados com base nas propriedades geométricas e elétricas do ambiente, como a localização e a permissividade dos materiais. A superposição de todos os raios que chegam ao receptor permite estimar a perda de percurso e o espalhamento temporal do canal (SCHAUBACH; DAVIS; RAPPAPORT, 1992).

Para a implementação do *Ray-Tracing* deve ser prevista a construção de um banco de dados detalhado do ambiente, incluindo a geometria e as propriedades dos materiais. Schaubach, Davis e Rappaport (1992) descrevem um método que utiliza o software AutoCAD™ para criar um banco de dados de edifícios, onde cada construção é modelada como um polígono convexo composto por painéis planos. Após esse processo, o banco de dados construído é utilizado por um programa de *Ray-Tracing* para simular a propagação do sinal.

O algoritmo de *Ray-Tracing* é executado de forma iterativa a partir da fonte transmissora, considerando, para cada ponto de recepção, o traçado de raios em múltiplas direções no ambiente. Durante esse processo, são modelados os fenômenos de reflexão, transmissão e difração que podem ocorrer ao longo do percurso de propagação. Para cada raio traçado, verifica-se a ocorrência de interseções com objetos presentes no ambiente. Quando uma interseção é identificada, o raio incidente é decomposto em componentes refletidos e transmitidos, os quais passam a ser rastreados recursivamente, respeitando os critérios físicos e geométricos do modelo. A perda de sinal associada a cada raio é então calculada com base na distância percorrida e nas propriedades eletromagnéticas dos materiais interceptados ao longo do trajeto. Por fim, o campo total no ponto de recepção é obtido por meio da superposição vetorial dos campos correspondentes a todos os

raios que atingem o receptor.

O cálculo de Perda de Percurso é realizado considerando a interação dos raios com o ambiente, incluindo reflexões, transmissões e difrações. No modelo de *Ray-Tracing*, múltiplos raios podem chegar ao receptor por caminhos diferentes. A perda total para um raio é dada pela soma das seguintes componentes:

#### Perda de Espaço Livre (FSPL, do inglês *Free Space Path Loss*)

$$PL_{\text{FSPL}} = 20 \cdot \log_{10}(d) + 20 \cdot \log_{10}(f) + 20 \cdot \log_{10}\left(\frac{4\pi}{c}\right)$$

Onde:

- $d$ : distância percorrida, em metros;
- $f$ : frequência do sinal, em MHz;
- $c$ : velocidade da luz, em m/s.

#### Perdas por Reflexão

$$PL_{\text{reflexão}} = -10 \cdot \log_{10}(|\Gamma|^2)$$

Onde:

- $\Gamma$ : coeficiente de reflexão, que depende das propriedades do material e do ângulo de incidência do raio.

#### Perdas por Transmissão

$$PL_{\text{transmissão}} = -10 \cdot \log_{10}(|T|^2)$$

Onde  $T$  é o coeficiente de transmissão, que também depende do material e do ângulo de incidência do raio.

#### Perdas por Difração

$$PL_{\text{difração}} = -10 \cdot \log_{10}(D)$$

Sendo  $D$  o coeficiente de difração, calculado com base na Teoria Uniforme da Difração (UTD).

A perda de percurso total para um raio é então obtida pela soma dessas componentes:

$$PL_{\text{total}} = PL_{\text{FSPL}} + \sum PL_{\text{reflexão}} + \sum PL_{\text{transmissão}} + \sum PL_{\text{difração}}$$

## APÊNDICE E – MODELO FDTD

O método FDTD (*Finite-Difference Time-Domain*), proposto originalmente por Yee (YEE, 1966), é uma técnica numérica determinística baseada na discretização direta das Equações de Maxwell no domínio do tempo e do espaço. Ao contrário dos modelos empíricos, o FDTD não depende de medições experimentais para calibração, sendo capaz de modelar com elevada fidelidade os fenômenos eletromagnéticos presentes em ambientes complexos, como reflexão, refração, difração e absorção.

Neste método, o ambiente é dividido em uma grade tridimensional de células, conhecida como grade de Yee, na qual os campos elétrico ( $\mathbf{E}$ ) e magnético ( $\mathbf{H}$ ) são calculados de forma intercalada no espaço e no tempo, seguindo um esquema de avanço temporal explícito. As Equações de Maxwell na forma diferencial que regem o método são representadas nas Equações 43 e 44.

$$\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = -\frac{1}{\mu} \nabla \times \mathbf{E} \quad (43)$$

$$\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \frac{1}{\varepsilon} (\nabla \times \mathbf{H} - \mathbf{J}) \quad (44)$$

Onde:

- $\mathbf{E}$ : vetor campo elétrico (V/m);
- $\mathbf{H}$ : vetor campo magnético (A/m);
- $\mu$ : permeabilidade magnética do meio (H/m);
- $\varepsilon$ : permissividade elétrica do meio (F/m);
- $\mathbf{J}$ : densidade de corrente elétrica (A/m<sup>2</sup>).

A perda de percurso obtida pelo método FDTD é calculada a partir da relação entre a potência transmitida  $P_t$  e a potência recebida  $P_r$  em cada ponto do ambiente, como demonstra a Equação 45.

$$PL = 10 \cdot \log_{10} \left( \frac{P_t}{P_r} \right) \quad (45)$$

Uma avaliação comparativa entre o *Ray Tracing* e o FDTD aplicados à modelagem de propagação em ambientes internos foi realizada por (REMLEY; WEISSHAAR; ANDERSON,

1998). Os autores investigaram a acurácia do *Ray Tracing* em função do tamanho dos elementos dispersores (obstáculos), utilizando o FDTD tridimensional completo como referência de validação. Os resultados demonstraram que, quando magnitude e fase dos raios são corretamente considerados, o *Ray Tracing* descreve com precisão satisfatória a intensidade do sinal espalhado, mesmo quando o tamanho do dispersor é uma fração do comprimento de onda. Os autores concluem, no entanto, que o FDTD é computacionalmente intensivo e geralmente não é prático para modelagem específica por local ou domínios computacionais de grande escala, podendo ser utilizado principalmente como padrão de verificação e validação de outras técnicas de modelagem.

Uma variante de menor custo computacional é o método 2D-FDTD Modificado, proposto por (LEE; LAI, 1998), que reduz significativamente os requisitos de memória em relação ao FDTD tridimensional completo. Nessa abordagem, a simulação é realizada em duas dimensões com a adição de um fator de correção para compensar o comportamento de decaimento de potência característico de fontes internas em ambientes reais. Os autores demonstraram que o método requer cerca de 800 vezes menos memória do que o 3D-FDTD para um ambiente com separação de 3 metros entre teto e piso operando a 1,8 GHz, mantendo boa concordância com medições experimentais.

## APÊNDICE F – RESULTADOS EXPERIMENTAIS ENTRE OS MÉTODOS DE OTIMIZAÇÃO EXATA

A Tabela 28 apresenta os resultados completos dos experimentos realizados com os métodos de otimização exata, comparando as abordagens de otimização por regiões e por pontos para todas as instâncias testadas. As colunas **APs Reg.** e **APs Pts.** indicam o número de pontos de acesso encontrados pelas abordagens de otimização por regiões e por pontos, respectivamente, sendo que os valores em negrito destacam a solução que utilizou o menor número de APs entre as duas abordagens. As colunas **Tempo Reg.** e **Tempo Pts.** reportam os tempos de execução em segundos para cada método, nos quais valores que não possuíram *timeout*. As demais colunas descrevem características das instâncias: **Alta dem.** refere-se ao número de pontos de alta demanda, **Pts livres** indica a quantidade total de pontos disponíveis para cobertura para instalação de APs, e **Pts obst.** representa o número de pontos de obstáculos (anteparos) presentes no ambiente após a discretização.

Tabela 28 – Resultados experimentais completos para todas as instâncias testadas.

Instância	APs Reg.	APs Pts.	Tempo Reg.	Tempo Pts.	Alta dem.	Pts livres	Pts obst.
101003_sec_t1_1200_sf	<b>16</b>	18	70.82	<i>timeout</i>	39	659	9298
10_gt_9	<b>8</b>	<b>8</b>	30.89	94.24	223	197	448
1_01_002_sec_t1_1200_ff	<b>20</b>	790	50.14	<i>timeout</i>	143	700	9153
1_03_002_Seco1_1200_Music_Sports_First_Floor	<b>19</b>	841	32.15	<i>timeout</i>	132	709	9155
1_gt_14	<b>4</b>	<b>4</b>	0.41	0.27	28	29	63
1fe_210_pjmi	<b>23</b>	1696	430.91	<i>timeout</i>	460	1236	8300
1fe_240_pjmi	<b>19</b>	1692	513.93	<i>timeout</i>	462	1230	8304
2-01-001_prim_t2_420_26	<b>12</b>	14	64.48	<i>timeout</i>	406	252	9338
2_01_002_prim_t2_420_26_001	<b>13</b>	<b>13</b>	21.15	57.29	171	491	9334
2_01_003_sec_t2_1200_sf	<b>16</b>	<b>16</b>	153.98	358.14	51	921	9024
2_02_001_prim_t2_420_26	<b>13</b>	<b>13</b>	55.68	166.00	408	251	9337
2_02_002_prim_t2_420_26	<b>12</b>	<b>12</b>	183.48	518.24	171	383	9442
2_gt_16	<b>7</b>	<b>7</b>	0.57	1.85	75	71	253
2fe_180_pis	<b>19</b>	1542	550.73	<i>timeout</i>	446	1096	8454
3_gt_12	<b>8</b>	<b>8</b>	0.52	1.69	99	69	312
3fe_630_pjmi_ff_62m2	<b>27</b>	1666	204.28	<i>timeout</i>	122	1544	8330
3fe_630_pjmi_ff_with_55m2_cls	<b>27</b>	1666	200.94	<i>timeout</i>	125	1541	8330
3fe_630_pjmi_gf_002	<b>31</b>	2053	366.59	<i>timeout</i>	643	1410	7943
4_gt_7	<b>5</b>	<b>5</b>	0.50	0.51	73	39	148
5_gt_9	<b>6</b>	<b>6</b>	1.32	4.25	98	82	314
6_gt_6	<b>12</b>	23	17.31	<i>timeout</i>	245	234	641

Continua na próxima página

Tabela 28 – continuação da página anterior

Instância	APs	APs	Tempo	Tempo	Alta	Pts	Pts
	Reg.	Pts.	Reg.	Pts.	dem.	livres	obst.
7_gt_6	6	6	89.86	284.15	196	115	309
8_gt_7	6	6	1.36	0.77	67	78	159
9_gt_5	13	20	23.70	<i>timeout</i>	311	190	831
IIa_A01001_gt_3	11	667	32.45	<i>timeout</i>	481	186	542
IIa_AP3301_gt_5	17	891	456.36	<i>timeout</i>	545	405	1108
IIa_AP3401_gt_5	15	944	145.93	<i>timeout</i>	597	347	1188
IIa_AP3601_gt_4	14	906	34.44	<i>timeout</i>	509	397	1164
IIa_BA0710_gt_3	16	1148	227.06	<i>timeout</i>	530	618	1057
IIa_BK0701_gt_6	8	8	53.45	167.83	422	131	399
IIa_BK0703_gt_5	9	9	117.78	352.78	212	240	508
IIa_BN0802_gt_2	11	11	112.88	319.99	378	374	788
IIa_BN0803_gt_3	13	787	28.69	<i>timeout</i>	353	434	641
IIa_BN0820_gt_5	14	732	19.91	<i>timeout</i>	381	376	783
IIa_BS0601_gt_2	19	1021	98.39	<i>timeout</i>	687	334	1763
IIa_CA0701_gt_6	13	812	26.64	<i>timeout</i>	433	379	784
IIa_CN0603_gt_5	13	832	22.40	<i>timeout</i>	435	397	848
IIa_CS0803_gt_8	13	834	39.75	<i>timeout</i>	470	364	730
IIa_DE1110_gt_6	11	857	36.68	<i>timeout</i>	474	383	883
IIa_DL0701_gt_6	6	6	148.77	440.21	142	269	395
IIa_FE0901_gt_7	14	1209	187.59	<i>timeout</i>	609	600	937
IIa_GC0801_gt_10	14	902	55.57	<i>timeout</i>	493	409	988
IIa_GC0802_gt_2	16	967	50.61	<i>timeout</i>	529	438	1148
IIa_GC1202_gt_4	21	1486	139.83	<i>timeout</i>	327	1159	2622
IIa_GL0401_gt_4	19	1438	197.06	<i>timeout</i>	538	900	1337
IIa_GT0501_gt_2	16	797	42.27	<i>timeout</i>	477	320	1303
IIa_GT0602_gt_2	9	765	39.38	<i>timeout</i>	313	452	355
IIa_GY0410_gt_3	19	1130	46.42	<i>timeout</i>	667	463	850
IIa_GZ0501_gt_2	14	627	14.52	<i>timeout</i>	300	327	549
IIa_GZ0520_gt_4	14	14	7.83	22.70	300	318	558
IIa_LE0803_gt_3	14	993	102.42	<i>timeout</i>	323	670	807
IIa_LI0801_gt_3	12	746	28.28	<i>timeout</i>	438	308	762
IIa_LZ1101_gt_2	14	1143	69.31	<i>timeout</i>	425	718	989
IIa_MN0601_gt_3	17	878	42.14	<i>timeout</i>	366	550	1184
IIa_MN0605_gt_2	21	64	<i>timeout</i>	<i>timeout</i>	511	426	1639
IIa_MN0610_gt_3	16	940	32.70	<i>timeout</i>	490	450	1160
IIa_NS0701_gt_5	9	554	13.50	<i>timeout</i>	395	159	287
IIa_OO0401_gt_6	13	790	22.85	<i>timeout</i>	351	439	506
IIa_SL0801_gt_2	17	1215	81.12	<i>timeout</i>	678	537	1080
IIa_SR1101_gt_8	15	1075	236.86	<i>timeout</i>	626	449	899
IIa_SR1102_gt_5	15	1032	76.14	<i>timeout</i>	599	433	942
IIa_TB0401_gt_5	9	9	139.03	433.10	494	149	907
IIa_TC0401_gt_5	14	816	25.74	<i>timeout</i>	247	569	547
IIa_TD0810_gt_6	16	840	54.24	<i>timeout</i>	471	369	1140

Continua na próxima página

Tabela 28 – continuação da página anterior

Instância	APs	APs	Tempo	Tempo	Alta	Pts	Pts
	Reg.	Pts.	Reg.	Pts.	dem.	livres	obst.
Ila_TZ0601_gt_2	18	1151	175.34	timeout	551	600	1537
Iib_CS0801_gt_5	8	8	130.85	390.46	317	249	565
Iib_DD0601_gt_5	9	9	10.41	32.56	448	139	325
Iib_FZ0901_gt_2	16	991	42.46	timeout	462	529	384
Iib_GY0502_gt_2	16	776	33.92	timeout	328	456	797
Iib_MN0702_gt_7	8	558	12.60	timeout	235	323	256
Iic_BI0901_gt_2	10	10	97.13	301.25	256	159	557
Iic_RE0701_gt_2	10	571	66.96	timeout	258	313	353
Iic_UO0701_gt_2	10	10	153.32	470.36	492	184	657
Iid_AD0801_gt_2	16	791	48.61	timeout	284	533	431
Iid_AE0602_gt_3	17	1080	61.32	timeout	442	638	1120
Iid_BA0702_gt_3	15	785	22.71	timeout	214	571	1028
Iid_CT0401_gt_3	8	8	159.03	495.40	392	149	590
Iid_GI0601_gt_5	14	681	19.17	timeout	144	537	354
Iid_HT0601_gt_6	10	634	18.67	timeout	223	414	665
Iid_LA0401_gt_5	10	10	47.36	139.22	197	285	1023
Iid_OZ0501_gt_3	14	730	171.16	timeout	302	444	993
Iid_PL0720_gt_5	13	673	17.45	timeout	295	378	487
Iid_PN0603_gt_6	9	9	12.52	38.98	423	151	604
Iid_VO0701_gt_8	15	849	27.09	timeout	317	532	763
Ia_AP2022_som_gt_9	12	730	31.41	timeout	362	368	1046
Ia_BN0601_som_gt_7	14	744	29.00	timeout	460	284	713
Ia_DE1101_som_gt_6	11	831	31.89	timeout	385	446	909
Ia_DS0801_som_gt_14	13	812	35.54	timeout	537	275	826
Ia_GO0601_som_gt_8	13	825	25.27	timeout	445	380	771
Ia_GY0401_som_gt_9	18	1061	41.72	timeout	728	333	952
Ia_JN0701_som_gt_8	9	9	124.55	381.61	449	187	524
Ia_LS0701_som_gt_5	16	856	40.22	timeout	241	615	930
Ia_MR0601_som_gt_6	13	828	46.31	timeout	464	364	723
Ia_TD0801_som_gt_5	17	840	51.14	timeout	456	384	1184
Ib_AE0601_som_gt_5	14	744	24.82	timeout	304	440	1308
Ib_BN1701_som_gt_7	7	7	12.45	39.08	286	131	663
Ib_CT0601_som_gt_3	12	621	13.49	timeout	78	543	555
Ib_CU1001_som_gt_3	15	46	31.79	timeout	244	565	872
Ib_GY0301_som_gt_10	7	8	80.28	timeout	420	165	439
Ib_JR0801_som_gt_4	22	1272	65.59	timeout	563	709	2472
Ib_LD0601_som_gt_5	8	8	92.51	281.60	353	202	303
Ib_LT0702_som_gt_5	13	768	52.44	timeout	549	219	1080
Ib_PR0901_som_gt_3	9	9	164.55	476.76	324	320	322
Ib_RI0501_som_gt_5	15	740	35.91	timeout	386	354	988
Ic_AA1001_som_gt_5	9	9	113.96	328.31	218	334	636
Ic_CA0501_som_gt_3	14	14	191.95	533.88	558	422	1764
Ic_CI1001_som_gt_6	5	7	77.87	timeout	240	117	345

Continua na próxima página

Tabela 28 – continuação da página anterior

Instância	APs		Tempo		Alta dem.	Pts livres	Pts obst.
	Reg.	Pts.	Reg.	Pts.			
Ic_DE0901_som_gt_6	18	24	144.60	timeout	335	388	1317
Ic_JN0702_som_gt_3	13	658	14.67	timeout	366	292	706
Ic_KI0501_som_gt_3	7	7	3.25	10.18	256	138	476
Ic_MT0601_som_gt_4	9	386	8.37	timeout	219	167	342
Ic_MU0703_som_gt_8	8	8	61.85	190.92	361	170	294
Ic_RD0602_som_gt_4	14	572	19.12	timeout	250	328	682
Ic_RE0503_som_gt_7	5	5	24.88	78.60	200	117	229
fingerblock_1200_gf	30	1158	timeout	timeout	418	1012	8566
image001_gt_11	43	290	timeout	timeout	2354	1785	5866
image002_gt_7	30	119	timeout	timeout	672	2173	4781
image003_gt_3	31	139	timeout	timeout	1911	920	4971
image005_gt_4	38	38	timeout	timeout	2432	1826	4712
image006_gt_2	31	104	timeout	timeout	1557	1235	4834
image007_gt_2	36	36	timeout	timeout	1671	2463	5181
image008_gt_3	30	124	timeout	timeout	981	1824	4821
image014_gt_2	39	1193	timeout	timeout	2099	2013	6096
image021_gt_2	40	555	timeout	timeout	1892	2318	5105
image022_gt_2	32	54	timeout	timeout	1220	1595	4987
image023_gt_2	40	40	timeout	timeout	2240	1970	5105
image024_gt_2	29	54	timeout	timeout	1208	1624	4794
image025_gt_2	38	632	timeout	timeout	1354	2835	5126
image026_gt_2	31	107	timeout	timeout	1514	1288	4824
image027_gt_2	39	587	timeout	timeout	1538	2651	5126
image028_gt_2	30	160	timeout	timeout	1571	1321	4827
image029_gt_3	39	402	timeout	timeout	1622	2543	5150
image030_gt_2	29	117	timeout	timeout	1201	1608	4993
p1_gt_5	12	944	30.09	timeout	325	619	496
p2_gt_3	13	1014	37.93	timeout	341	673	537
p3_gt_3	20	1234	83.16	timeout	882	352	794
p4_gt_3	17	1313	148.54	timeout	953	360	807
sec_type_1_1120_gf	34	1020	timeout	timeout	424	903	8669
sec_type_1_1200_ms_gf	26	1412	258.70	timeout	436	991	8569
sec_type_1_1200_ms_sf	19	942	48.03	timeout	33	919	9044
sec_type_1_1200_prac_ff_002	22	48	33.04	timeout	156	668	9172
sec_type_1_1200_prac_gf_004	32	1141	490.88	timeout	436	990	8570
sec_type_1_1200_prac_sf	16	16	36.32	92.42	29	659	9308
sec_type_1_1850_ff_001	26	1344	552.76	timeout	189	1156	8651
sec_type_1_1850_gf_001	32	1862	timeout	timeout	465	1397	8134
sec_type_1_1850_sf	23	1228	541.38	timeout	104	1124	8768
sec_type_3_600_sf_001	15	649	153.76	timeout	17	776	9203
superblock_1200_gf	27	1143	timeout	timeout	452	839	8705

## **ENTREGA DA VERSÃO FINAL DE DISSERTAÇÃO**

Eu, PROF. DR. THIAGO GOUVEIA, autorizo o aluno(a) CALEBE OLIVEIRA DE FIGUEIRÊDO a entregar a versão final da dissertação de mestrado, à secretaria do PPGTI, que foi por mim analisada e está de acordo com os apontamentos feitos pelos membros da banca de apresentação do referido aluno.

---

Prof. Dr. Thiago Gouveia  
Orientador

João Pessoa, 11 de Janeiro de 2026.