



INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA DA PARAÍBA
CURSO SUPERIOR DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

DIÊGO MATEUS SOUSA SILVA

**ÁREAS, UMA ABORDAGEM TEÓRICA COM
DEMONSTRAÇÕES A PARTIR DA DEFINIÇÃO DA ÁREA
DE UMA REGIÃO TRIANGULAR**

CAMPINA GRANDE – PB

2026

DIÊGO MATEUS SOUSA SILVA

**ÁREAS, UMA ABORDAGEM TEÓRICA COM DEMONSTRAÇÕES A
PARTIR DA DEFINIÇÃO DA ÁREA DE UMA REGIÃO TRIANGULAR**

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Curso Superior de Licenciatura em Matemática do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia da Paraíba (IFPB), como requisito parcial para a obtenção do título de Licenciado em Matemática.

Orientador: Prof. Me. Weidson do A. Luna

CAMPINA GRANDE – PB

2026

Catálogo na fonte:

Ficha catalográfica elaborada por Gustavo César Nogueira da Costa - CRB 15/479

S586a Silva, Diêgo Mateus Sousa.

Áreas, uma abordagem teórica com demonstrações a partir da definição da área de uma região triangular / Diêgo Mateus Sousa Silva. - Campina Grande, 2026.

43 f. : il.

Trabalho de Conclusão de Curso (Curso de Licenciatura em Matemática.) - Instituto Federal da Paraíba, 2026.

Orientador: Prof. Me. Weidson do A. Luna.

1. Matemática. 2. Ensino de matemática. 3. Área de figuras planas. 4. Matemática - triângulos I. Luna, Weidson do A.. II. Título.

CDU 514

DIÊGO MATEUS SOUSA SILVA

**ÁREAS, UMA ABORDAGEM TEÓRICA COM DEMONSTRAÇÕES A
PARTIR DA DEFINIÇÃO DA ÁREA DE UM TRIÂNGULO**

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Curso Superior de Licenciatura em Matemática do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia da Paraíba (IFPB), como requisito parcial para a obtenção do título de Licenciado em Matemática.

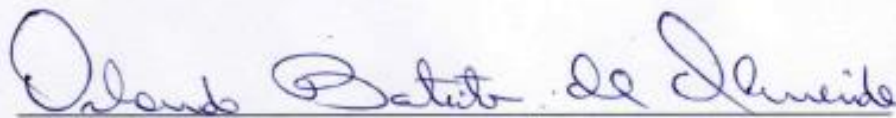
Orientador: Prof. Me. Weidson do A. Luna.

Aprovado em: _____ / _____ / _____


BANCA EXAMINADORA



**Prof. Me. Weidson do Amaral Luna – IFPB.
(Orientador)**



**Prof. Me. Orlando Batista de Almeida – IFPB.
(Membro da Banca)**



**Prof. Dr. Jefferson Dagmar Pessoa Brandão – IFPB.
(Membro da Banca)**

“Dedico este trabalho à Deus, à minha família, Mayara Cantalice da Silva e as minhas filhas, Maysa Rute Cantalice Sousa e Raquel Cantalice Sousa Silva, e a todos que, de alguma forma, colaboraram para a realização deste projeto.”.

AGRADECIMENTOS

Ao meu Deus que me guia e me fortalece para que eu alcance os meus objetivos.

Aos meus pais que sempre me apoiaram em meus objetivos, especialmente nos estudos, e me ensinaram valores como respeito e perseverança.

À minha esposa, Mayara Cantalice da Silva, e minhas filhas, Maysa Rute Cantalice Sousa e Raquel Cantalice Sousa Silva, que sempre me inspiraram, me acompanharam e foram minha maior motivação ao longo desta jornada.

Ao meu orientador, Professor Me. Weidson do Amaral Luna, pela disponibilidade, dedicação e pelas valiosas orientações que contribuíram para o desenvolvimento deste trabalho.

Aos professores do curso de licenciatura em matemática do Instituto Federal da Paraíba – IFPB, campus Campina Grande, que compartilharam seus conhecimentos e contribuíram de forma significativa para minha formação acadêmica e pessoal.

Aos meus colegas de turma, com quem compartilhei aprendizados, desafios e momentos que tornaram essa trajetória mais memorável e gratificante.

À banca examinadora, pela disponibilidade, atenção e pelas valiosas contribuições que aperfeiçoaram este trabalho.

À Instituição de ensino IFPB, pela oferta do curso, pelo ensino de qualidade, pelo suporte oferecido e pelas oportunidades de aprendizado proporcionadas ao longo da minha formação.

À CAPES, pelas bolsas recebidas por meio do programa PIBID, que possibilitaram a continuidade e o desenvolvimento dos meus estudos.

*“Bem aventurado o homem que acha
sabedoria e o homem que adquire
conhecimento”.*

(Provérbios 3:13)

RESUMO

Este trabalho trata-se de um manual de consulta para Professores de matemática e para alunos do curso de Licenciatura em matemática. Nele constam as definições formais de: *polígono*, *quadriláteros notáveis*, *circunferência* e de *círculo*. Ele apresenta, ainda, a demonstração de uma propriedade importante dos triângulos que é o fato do produto da medida de um de seus lados pela medida da altura relativa a este lado ser constante, ou seja, que este produto independe da escolha do lado do triângulo. A metade desse produto constante será definida neste trabalho como a área de um triângulo qualquer. Nosso objetivo é demonstrar as fórmulas das áreas dos quadriláteros notáveis, os quais são: *quadrado*, *retângulo*, *paralelogramo*, *losango*, *trapézio*, e a fórmula da área do círculo, tratados aqui como teoremas, a partir da definição da área de um triângulo. Contudo, este TCC pode ser considerado uma proposta de ensino do conteúdo áreas, uma vez que foi empregado todo um raciocínio-lógico nas demonstrações.

Palavras-chave: Área, Triângulo, Quadriláteros Notáveis, Círculo e Demonstração.

ABSTRACT

This work is a reference manual for mathematics teachers and students of the undergraduate course in mathematics. It contains the formal definitions of: polygon, notable quadrilaterals, circumference and circle. It also presents the demonstration of an important property of triangles: the fact that the product of the measure of one of its sides by the measure of the height relative to this side is constant, that is, that this product is independent of the choice of the side of the triangle. Half of this constant product will be defined in this work as the area of any triangle. Our objective is to demonstrate the formulas for the areas of notable quadrilaterals, which are: square, rectangle, parallelogram, rhombus, trapezoid, and the formula for the area of a circle, treated here as theorems, based on the definition of the area of a triangle. However, this TCC can be considered a proposal for teaching the content of areas, since all logical reasoning was used in the demonstrations.

Keywords: Keywords: Area, Triangle, Notable, Quadrilaterals, Circle, Proof.

SUMÁRIO

1. INTRODUÇÃO	10
1.1. Contextualização	10
1.2. Justificativa	11
1.3. Objetivos	11
1.4. Metodologia	12
1.5. Público Alvo	12
1.6. Conhecimentos Prévios	12
1.7. Estrutura dos Capítulos Subsequentes	12
2. POLÍGONOS CONVEXOS E CÍRCULO	13
3. ÁREAS	22
4. CONSIDERAÇÕES FINAIS	40
REFERÊNCIAS	42

1. INTRODUÇÃO

Apresentaremos a seguir os aspectos iniciais relacionados a este trabalho, abordando, na sequência, os seguintes tópicos: a *contextualização*; a *justificativa*, os *objetivos*; a *metodologia*; o *público alvo* ao qual está direcionado; os *conhecimentos prévios* para o desenvolvimento desta proposta e a *estruturação* dos capítulos subsequentes.

1.1. CONTEXTUALIZAÇÃO

A seguir, serão apresentados, em tópicos, alguns resultados de estudos realizados sobre os benefícios de se fazer demonstrações de teoremas em sala de aula:

1. A demonstração é a característica que diferencia a Matemática das outras ciências e a caracteriza como um conhecimento abstrato que supera os dados empíricos que dão sustentação às outras áreas do conhecimento como a Física, a Química e a Biologia, [4];
2. Entre as várias funções aludidas no tocante às demonstrações, as principais, são, [4]:
 - i) **Verificação** - convencimento próprio e dos outros a respeito da veracidade de uma afirmação;
 - ii) **Explicação** - compreensão do por que uma afirmação é verdadeira;
 - iii) **Descoberta** - de novas teorias, conjecturas ou resultados a partir da tentativa de se demonstrar uma propriedade;
 - iv) **Comunicação** - negociação do significado de objetos matemáticos;
 - v) **Desafio Intelectual** - satisfação pessoal pelo êxito na demonstração de um teorema;
 - vi) **Sistematização** - organização de resultados num sistema dedutivo de axiomas, conceitos e teoremas.
3. A matemática é uma linguagem universal que expressa ideias complexas, desenvolve o pensamento crítico e resolve problemas em diversas áreas do conhecimento. Nesse contexto, as demonstrações matemáticas são fundamentais

para construir um entendimento profundo dos conceitos, permitindo que os estudantes transcendam a simples aplicação de regras, [5];

4. As demonstrações possibilitam aos alunos compreenderem não apenas o 'como', mas também o “porquê” dos procedimentos e fórmulas, [5].

1.2. JUSTIFICATIVA

Duas foram às motivações que nos levaram a elaborar este trabalho:

- 1^a) Comentários feitos pelo autor João Lucas Barbosa, na página 192 da sétima edição de seu livro de Geometria Euclidiana Plana, em que o referido autor diz que é possível demonstrar que o produto da medida de um lado de um triângulo qualquer pela altura correspondente a este lado não depende da escolha do lado do triângulo. Em seguida, o referido autor orienta definir metade desse produto como sendo a área de um triângulo e, a partir desta definição, demonstrar as fórmulas das áreas dos quadriláteros notáveis e a fórmula da área do círculo;
- 2^a) Após a criação e implantação da BNCC se tornou muito difícil encontrar nos livros didáticos, de matemática do ensino básico, definições matemáticas formais, teoremas e, principalmente, demonstrações de teoremas, impossibilitando ao professor um estudo mais aprofundado dos conteúdos ministrados por eles em sala de aula.

1.3. OBJETIVOS

O objetivo deste trabalho é demonstrar às fórmulas das áreas dos quadriláteros notáveis e a fórmula da área do círculo, tratados aqui como teoremas, a partir da definição da área de um triângulo, resgatando, desta forma, o ensino de matemática por meio de teoremas e demonstrações, tornando este material um manual de consulta para professores de matemática e para alunos do curso de Licenciatura em Matemática e, paralelamente, apresentar uma proposta de ensino do conteúdo áreas, uma vez que foi empregado todo um raciocínio-lógico nas demonstrações dos Teoremas.

1.4. METODOLOGIA

Para a construção deste material foi realizada uma pesquisa bibliográfica que permitiu dar todo o embasamento teórico ao presente trabalho, assim como direcionar o trajeto do processo de investigação e dos resultados obtidos.

1.5. PÚBLICO-ALVO

O presente trabalho é voltado aos professores de matemática do ensino básico e aos alunos de graduação em Licenciatura em Matemática, como um manual de consulta acerca do conteúdo de áreas e, ao mesmo tempo, como uma proposta de ensino do conteúdo citado.

1.6. CONHECIMENTOS PRÉVIOS

Admitiremos que o leitor tenha adquirido, por meio da sua intuição, do seu cotidiano, da sua formação e de sua experiência em sala de aula, conhecimentos básicos de: Álgebra e Geometria Euclidiana Plana.

1.7. ESTRUTURA DOS CAPÍTULOS SUBSEQUENTES

O segundo Capítulo – ***POLÍGONOS CONVEXOS E CIRCUNFERÊNCIA*** – Apresenta algumas definições importantes relacionadas a polígonos, uma vez que estes serão nosso objeto de estudo no Capítulo 3, que é o desenvolvimento deste trabalho.

O terceiro Capítulo – ***ÁREAS*** – Aborda uma importante propriedade dos triângulos que é o fato de que o produto da medida de um de seus lados pela altura relativa a este lado é constante, independente da escolha do lado. Na sequência, metade desse número é definido como sendo a área do triângulo. Por fim, são demonstradas as demais fórmulas das áreas dos quadriláteros notáveis, os quais são: *quadrado, retângulo, paralelogramo, losango e trapézio*, além da fórmula da área do círculo, todas elas a partir da definição da área do triângulo.

No quarto – ***CONSIDERAÇÕES FINAIS*** – Concluimos que é perfeitamente possível demonstrar as fórmulas do cálculo da área dos quadriláteros notáveis e a fórmula do cálculo da área do círculo a partir da fórmula do cálculo da área de um triângulo, quebrando o paradigma dos livros didáticos de matemática, em que essas fórmulas sempre partem sempre da área do quadrado.

2. POLÍGONOS CONVEXOS E CÍRCULO

Na introdução deste trabalho, foi dito que admitiremos que o leitor tenha um conhecimento básico de Álgebra e Geometria Euclidiana Plana, porém achamos importante apresentar, neste Capítulo, algumas definições importantes relacionadas a polígonos e a circunferência, uma vez que estes serão nosso objeto de estudo no Capítulo 3, que é o desenvolvimento, propriamente dito, do trabalho.

Enfatizamos que para elaboração deste Capítulo foram consultadas as referências: [1], [2] e [3].

Definição 2.1. (Polígono) Um *polígono* é uma figura formada por uma sequência de pontos $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$, $n \in \mathbb{N}$ e $n \geq 3$, do plano, chamados de *vértices*, e pelos segmentos $A_1A_2, A_2A_3, A_3A_4, A_4A_5, \dots, A_{n-1}A_n, A_nA_1$, chamados de *lados*, em que as seguintes três condições são satisfeitas:

- Cada vértice é extremidade de exatamente dois lados;
- Dois lados com uma extremidade em comum não estão contidos numa mesma reta;
- Os lados se intersectam somente em suas extremidades.

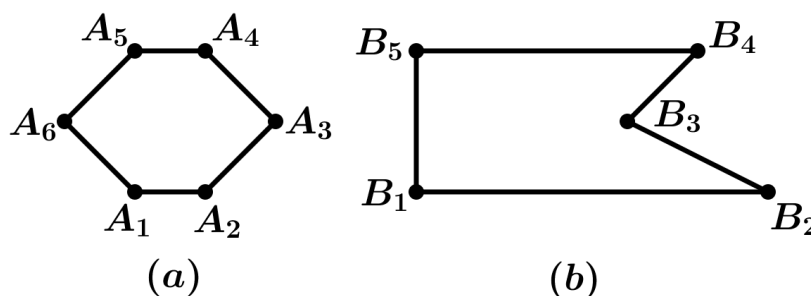


Figura 2.1: Polígonos.

Obs. 2.2.:

- Um polígono de vértices A_1, A_2, \dots, A_n , $n \in \mathbb{N}$ e $n \geq 3$, será representado por $A_1A_2A_3 \dots A_n$. Ele tem n lados, n vértices e n ângulos internos.

- Dois vértices pertencentes a um mesmo lado de um polígono são ditos consecutivos.
- De acordo com a **Definição 2.1**, a **Figura 2.2** não é um polígono.

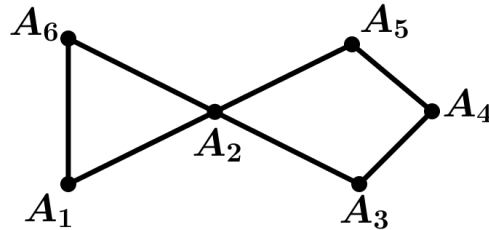


Figura 2.2: Não Representa um Polígono.

Definição 2.3. (Diagonal de um Polígono) Um segmento ligando vértices não consecutivos de um polígono é chamado de diagonal do polígono.

Definição 2.4. (Perímetro) A soma dos comprimentos de todos os lados de um polígono é chamada de perímetro.

Definição 2.5. (Ponto Interno e Ponto Externo de um Polígono) Dados, num mesmo plano, um polígono e um ponto não pertencente ao mesmo, conduzindo uma semirreta com origem neste ponto e que não passe por nenhum dos vértices desse polígono, mas o intersecte, tem-se:

- Se o número de pontos de interseção da semirreta traçada com o polígono for ímpar, então o ponto é dito *interno ao polígono*.
- Se o número de pontos de interseção da semirreta traçada com o polígono for par, então o ponto é dito *externo ao polígono*.

Definição 2.6. (Interior e Exterior de um Polígono) O conjunto formado por todos os pontos internos de um polígono é denominado de *interior do polígono* e o conjunto formado por todos os pontos externos de um polígono é denominado de *exterior do polígono*.

Definição 2.7. (Superfície Poligonal) A reunião de um polígono com o seu interior é denominada de *região poligonal* ou *superfície poligonal*.

Definição 2.8. (Polígono Convexo) Um polígono é dito convexo se está sempre contido em

um dos semiplanos determinados pelas retas que contêm os seus lados.

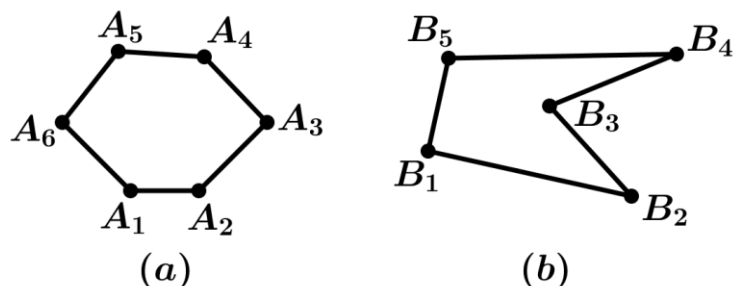


Figura 2.3: Polígono Convexo (a) e Polígono Não Convexo (b).

De acordo com seu número de lados, os *polígonos convexos* recebem nomes especiais. Vejamos alguns desses nomes na **Tabela 1** abaixo.

Tabela 1			
Nº de Lados	Nome do Polígono Convexo	Nº de Lados	Nome do Polígono Convexo
3	Triângulo	9	Eneágono
4	Quadrilátero	10	Decágono
5	Pentágono	11	Undecágono
6	Hexágono	12	Dodecágono
7	Heptágono	15	Pentadecágono
8	Octógono	20	Icoságono

Definição 2.9. (Ângulos: Internos e Externos de um Polígono) Se $A_1A_2A_3 \dots A_n$, $n \in \mathbb{N}$ e $n \geq 3$, é um polígono convexo, os seus ângulos:

$$A_n\hat{A}_1A_2, A_1\hat{A}_2A_3, A_2\hat{A}_3A_4, A_3\hat{A}_4A_5, \dots, A_{n-1}\hat{A}_nA_1,$$

contidos na superfície poligonal, são denominados *ângulos internos* ou simplesmente de *ângulos do polígono*. Os suplementos de cada um desses ângulos, obtidos pelo prolongamento de um dos lados de cada um desses ângulos, são chamados de *ângulos externos* do polígono convexo.

Definição 2.10. (Polígono Regular) Um polígono convexo cujos lados possuem comprimentos iguais e cujos ângulos internos possuem as mesmas medidas é chamado de polígono regular.

Chamamos a atenção do leitor para o fato de que na **Tabela 1** estão evidenciados que um *triângulo* e um *quadrilátero* são *polígonos convexos* que possuem três e quatro lados, respectivamente. Nesta perspectiva, iremos apresentar, a seguir, a classificação dos triângulos de acordo com os seus lados e também de acordo com seus ângulos e, na sequência, a definição dos principais quadriláteros.

Definição 2.11. (Triângulo: Equilátero, Isósceles e Escaleno) Um triângulo é dito:

- a) *Equilátero* se possui três lados de medidas iguais;
- b) *Isósceles* se possui pelo menos dois lados de medidas iguais, estes lados são chamados de *laterais* e o terceiro lado é chamado de *base*;
- c) *Escaleno* se possui três lados com medidas diferentes.

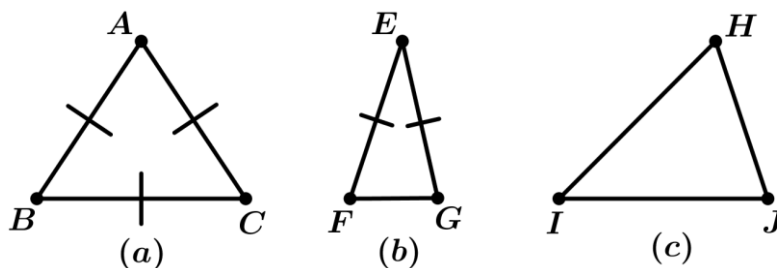


Figura 2.4: Triângulo Equilátero (a), Triângulo Isósceles (b) e Triângulo Escaleno (c).

Definição 2.12. (Triângulo: Acutângulo, Retângulo e Obtusângulo) Um triângulo é dito:

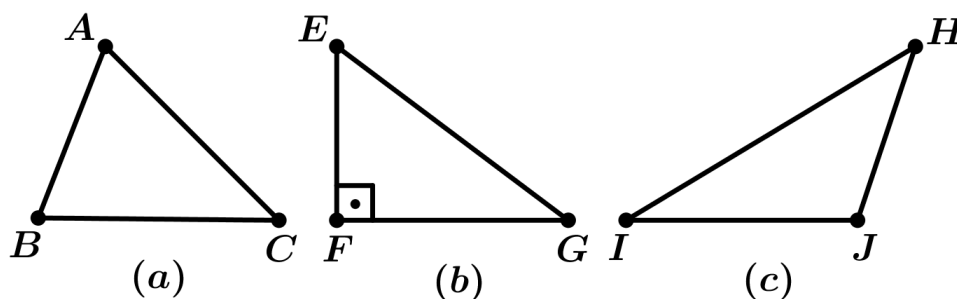


Figura 2.5: Triângulo: Acutângulo (a), Retângulo (b) e Obtusângulo (c).

- a) *Acutângulo* se todos os seus três ângulos internos são agudos, ou seja, têm medidas maiores 0° e menores do que 90° .
- b) *Retângulo* se possui um ângulo interno de 90° ;

c) *Obtusângulo* se possui um ângulo interno obtuso, ou seja, com medida maior que 90° e menor do que 180° .

Definição 2.13. Fixando um ângulo interno de um triângulo, o lado desse triângulo que não corresponde a nenhum dos dois lados que formam o ângulo fixado é dito oposto a este. Diz-se também que o ângulo fixado é oposto ao lado do triângulo que não o forma.

De acordo com a **Definição 2.13**, num triângulo ABC os seus ângulos internos $B\hat{A}C$ ou \hat{A} , $A\hat{B}C$ ou \hat{B} , $A\hat{C}B$ ou \hat{C} e os seus lados BC , AC e AB são ditos, respectivamente, opostos.

Chamamos a atenção do leitor para o fato de que a relação “*ângulo e lado oposto*” é usada exclusivamente em *triângulos*.

Definição 2.14. (Hipotenusa, Cateto e Cateto Adjacente) Num triângulo retângulo o lado oposto ao ângulo reto é denominado de *hipotenusa*, os outros dois lados que formam o ângulo reto são denominados *catetos* e o cateto que é lado de um ângulo agudo é denominado de cateto adjacente a este ângulo.

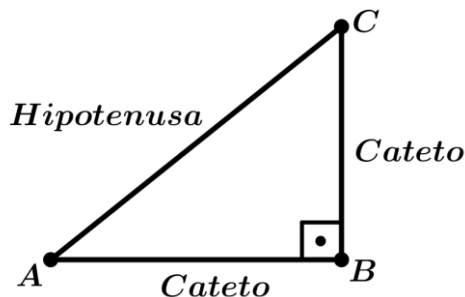


Figura 2.6: Hipotenusa e Catetos de um Triângulo Retângulo.

Definição 2.15. (Mediana, Bissetriz e Altura de um Triângulo) Seja ABC um triângulo e seja D um ponto da reta determinada pelos pontos B e C . O segmento AD chama-se *mediana* do triângulo, relativamente ao lado BC , se D for o ponto médio de BC . O segmento AD chama-se *bissetriz* do ângulo \hat{A} se a semirreta S_{AD} divide o ângulo $B\hat{A}C$ em dois ângulos congruentes, isto é, se $C\hat{A}D = B\hat{A}D$. O segmento AD chama-se *altura* do triângulo, relativamente ao lado BC , se AD for perpendicular à reta determinada pelos pontos B e C .

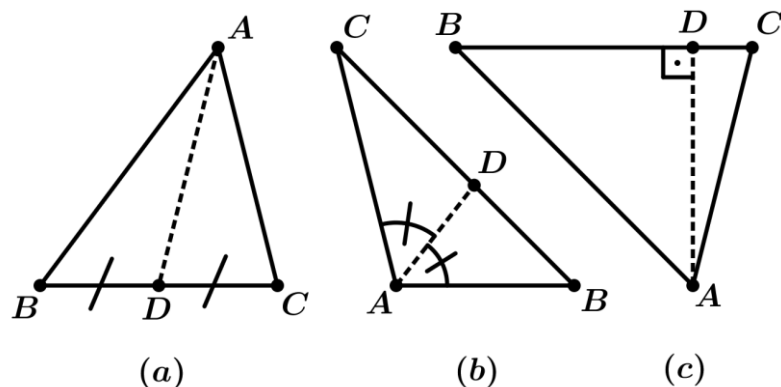


Figura 2.7: Mediana (a), Bissetriz (b) e Altura (c).

A seguir, iremos apresentar a definição dos *quadriláteros notáveis*, os quais são: *Quadrado*, *Retângulo*, *Paralelogramo*, *Trapézio* e *Losango*.

Definição 2.16. Num quadrilátero convexo $ABCD$, tem-se:

- a) Os lados AB e CD são ditos opostos se $AB \cap CD = \emptyset$, ou seja, se os segmentos AB e CD não se intersectam.
- b) Os lados AB e CD são ditos paralelos se a reta determinada pelos pontos A e B é paralela à reta determinada pelos pontos C e D .
- c) Dois de seus ângulos internos são ditos opostos se os lados que formam um desses ângulos são ambos distintos dos lados que formam o outro.

Na **Definição 2.16**, chamamos a atenção do leitor para o fato de que as relações “*lados opostos*” e “*ângulos opostos*” são usadas, exclusivamente, em *quadriláteros convexos*.

Definição 2.17. (Quadrado) Um quadrado é um quadrilátero convexo que possui todos os seus ângulos internos retos e cujos lados tem medidas iguais.

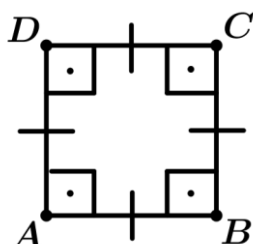


Figura 2.8: Quadrado.

Definição 2.18. (Retângulo) Um retângulo é um quadrilátero convexo que possui todos os seus ângulos internos retos.

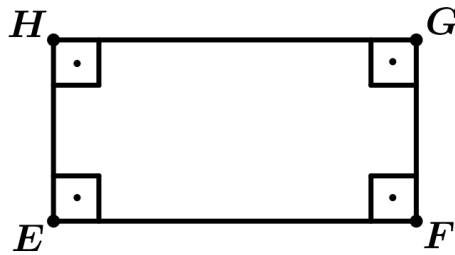


Figura 2.9: Retângulo.

Definição 2.19. (Paralelogramo) Um paralelogramo é um quadrilátero convexo cujos lados opostos são paralelos.

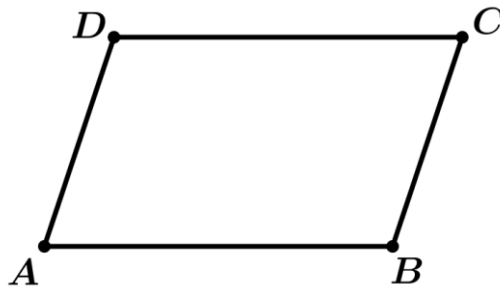


Figura 2.10: Paralelogramo.

Definição 2.20. (Trapézio) Um trapézio é um quadrilátero convexo que possui exatamente dois lados opostos paralelos. Os lados paralelos são chamados de *bases* e os outros dois são chamados de *laterais*. Quando trapézio possui dois ângulos internos retos ele é denominado de *trapézio retângulo*. Quando as laterais de um trapézio possuem medidas iguais ele é dito *isósceles*.

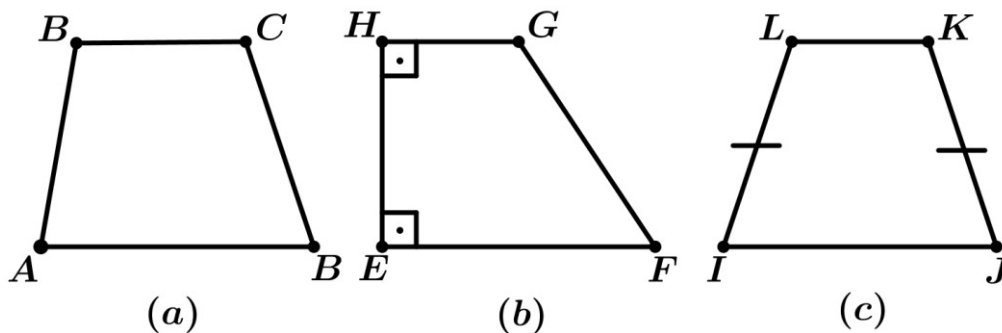


Figura 2.11: Trapézio (a), Trapézio Retângulo (b) e Trapézio Isósceles (c).

Definição 2.21. (Losango) Um losango é um quadrilátero convexo cujos lados possuem medidas iguais.

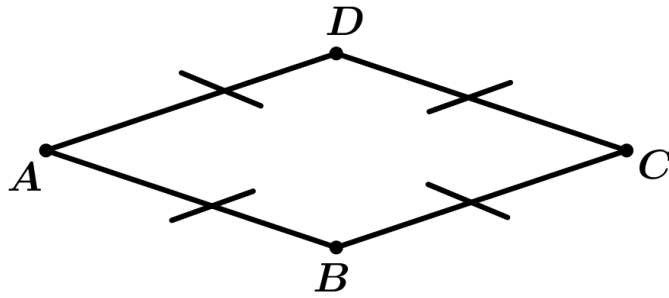


Figura 2.12: Losango.

A seguir, será apresentada a definição de circunferência e de alguns de seus elementos e, na sequência, será apresentado a definição de círculo.

Definição 2.22. (Circunferência) Seja O um ponto do plano e r um número real positivo. Chama-se de circunferência de centro O e raio r ao conjunto constituído por todos os pontos P , do plano, tais que $\overline{OP} = r$.

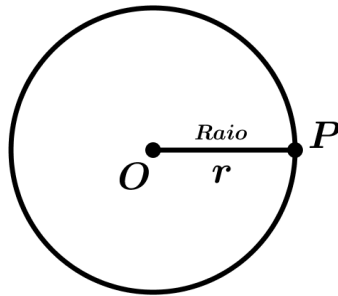


Figura 2.13: Circunferência.

Definição 2.23. (Círculo, Corda e Diâmetro) Sendo O o centro de uma circunferência Γ , pertencente a um plano μ , de raio r , chama-se de:

- a) *Círculo* ao conjunto constituído de todos os pontos A , do plano μ , tais que $\overline{OA} \leq r$;

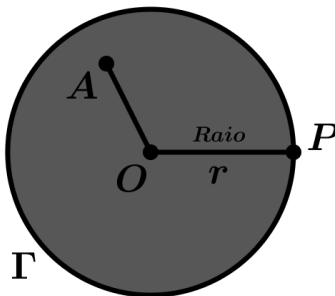


Figura 2.14: Círculo.

b) *Corda* a todo segmento que liga dois pontos quaisquer de Γ ;

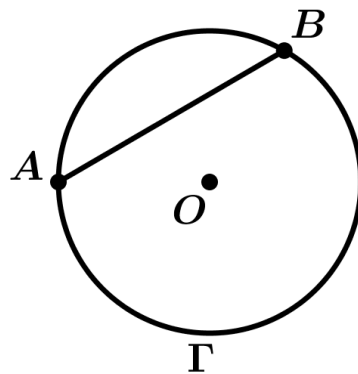


Figura 2.15: Corda.

c) *Diâmetro* a toda corda que passa pelo centro O de Γ .

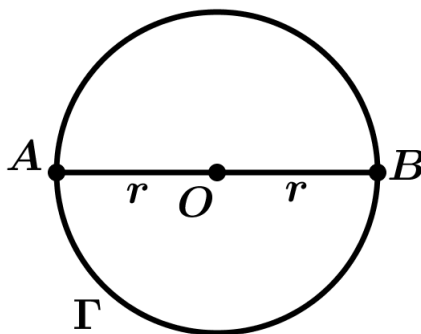


Figura 2.16: Diâmetro.

3. ÁREAS

Iniciaremos este capítulo apresentando, por meio de um Teorema, uma importante propriedade que é o fato de que num triângulo o produto da medida de um de seus lados pela altura relativa a este lado ser constante, independente da escolha do lado do triângulo. Faremos a demonstração dessa importante propriedade e, logo em seguida, metade desse produto será definido como sendo um número real positivo chamado de área do triângulo. Na sequência, a partir desta definição, apresentaremos, em forma de teoremas, as fórmulas para o cálculo da área de um: *triângulo equilátero*, *hexágono*, *quadrado*, *retângulo*, *paralelogramo*, *trapézio*, *losango* e *círculo*, bem como as respectivas demonstrações desses teoremas, partindo sempre da definição da área de um triângulo. Na construção deste capítulo foram consultadas as referências: [1], [2] e [3].

Teorema 3.1. Se ABC é um triângulo qualquer tal que: $\overline{AB} = c$, $\overline{AC} = b$, $\overline{BC} = a$, a altura deste triângulo relativa ao vértice A mede h_A , a altura deste triângulo relativa ao vértice B mede h_B e a altura deste triângulo relativa ao vértice C mede h_C , então:

$$a \cdot h_A = b \cdot h_B = c \cdot h_C.$$

Demonstração. Considere um triângulo ABC qualquer tal que $\overline{AB} = c$, $\overline{AC} = b$, $\overline{BC} = a$. Seja AD a altura deste triângulo com relação ao vértice A , seja BE a altura deste triângulo com relação ao vértice B e seja CF a altura deste triângulo com relação ao vértice C , em que D pertence à reta determinada pelos pontos B e C , em que E pertence à reta determinada pelos pontos A e C , em que F pertence à reta determinada pelos pontos A e B . Façamos a seguinte consideração: $\overline{AD} = h_A$, $\overline{BE} = h_B$ e $\overline{CF} = h_C$. Iremos dividir a demonstração em três casos:

1º Caso: O Triângulo ABC é Acutângulo

Aplicando a definição da razão trigonométrica *seno* nos triângulos retângulos ABD e BCF , temos:

$$\text{sen } \hat{B} = \frac{h_A}{c} \quad \text{e} \quad \text{sen } \hat{B} = \frac{h_C}{a}.$$

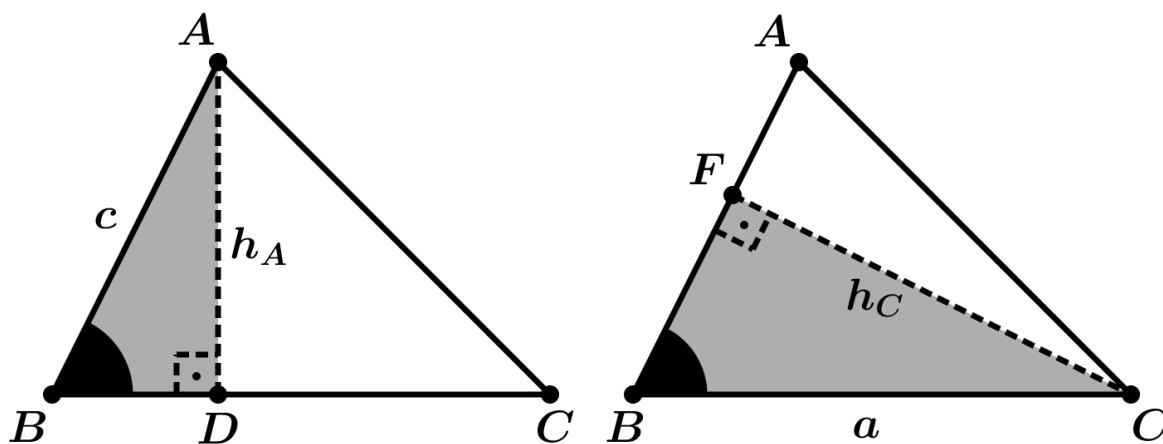


Figura 3.1: Esquema Geométrico da Demonstração.

Assim:

$$h_A = c \cdot \text{sen } \hat{B} \quad \text{e} \quad h_C = a \cdot \text{sen } \hat{B}. \quad (3.1)$$

Multiplicando a primeira igualdade (3.1) por a e a sua segunda igualdade por c , obtemos:

$$a \cdot h_A = a \cdot c \cdot \text{sen } \hat{B} \quad \text{e} \quad c \cdot h_C = a \cdot c \cdot \text{sen } \hat{B}. \quad (3.2)$$

Logo, de (3.2), segue que:

$$a \cdot h_A = c \cdot h_C. \quad (3.3)$$

Agora, aplicando a definição da razão trigonométrica *seno* nos triângulos retângulos ABE e ACF , temos:

$$\text{sen } \hat{A} = \frac{h_B}{c} \quad \text{e} \quad \text{sen } \hat{A} = \frac{h_C}{b}.$$

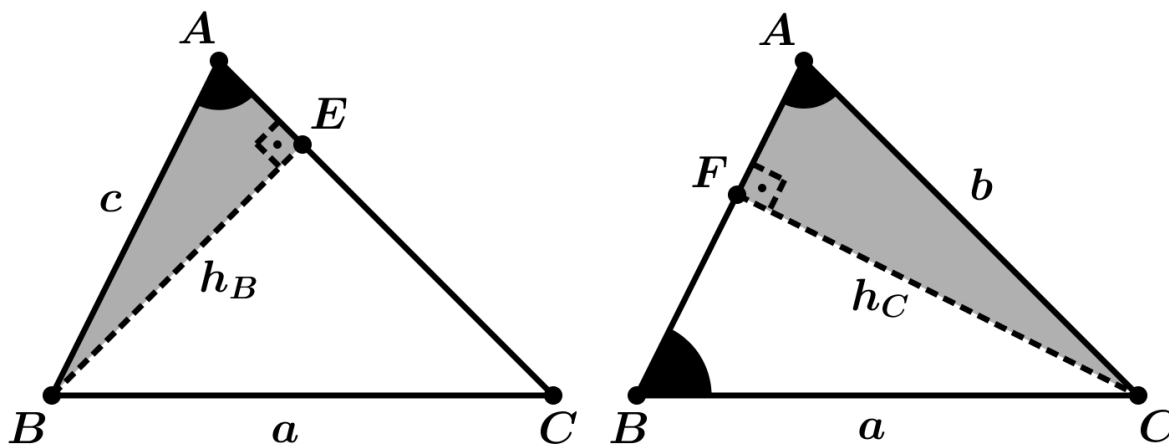


Figura 3.2: Esquema Geométrico da Demonstração.

Assim:

$$h_B = c \cdot \text{sen } \hat{A} \quad \text{e} \quad h_C = b \cdot \text{sen } \hat{A}. \quad (3.4)$$

Multiplicando a primeira igualdade (3.4) por b e a sua segunda igualdade por c , obtemos:

$$b \cdot h_B = b \cdot c \cdot \text{sen } \hat{A} \quad \text{e} \quad c \cdot h_C = b \cdot c \cdot \text{sen } \hat{A}. \quad (3.5)$$

Logo, de (3.5), segue que:

$$b \cdot h_B = c \cdot h_C. \quad (3.6)$$

Portanto, de (3.3) e (3.6), concluímos que:

$$a \cdot h_A = b \cdot h_B = c \cdot h_C.$$

Ou seja, o produto da medida de um lado de um triângulo qualquer pela altura correspondente a este lado não depende da escolha do lado desse triângulo.

2º Caso: O Triângulo ABC é Retângulo

Inicialmente, note que, neste caso, $\overline{AB} = c = h_B$ e $\overline{AC} = b = h_C$. Daí, aplicando a definição da razão trigonométrica *seno* nos triângulos retângulos ABD e ABC, temos:

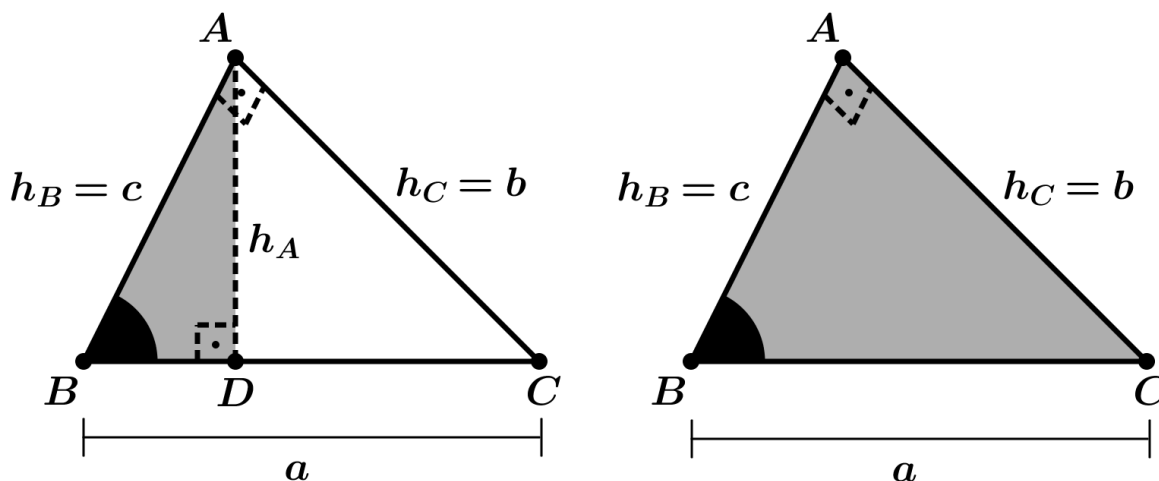


Figura 3.3: Esquema Geométrico da Demonstração.

$$\text{sen } \hat{B} = \frac{h_A}{c} \quad \text{e} \quad \text{sen } \hat{B} = \frac{h_C}{a}.$$

Assim:

$$h_A = c \cdot \text{sen } \hat{B} \quad \text{e} \quad h_C = a \cdot \text{sen } \hat{B}. \quad (3.7)$$

Multiplicando a primeira igualdade (3.7) por a e a sua segunda igualdade por c , obtemos:

$$a \cdot h_A = a \cdot c \cdot \text{sen } \hat{B} \quad \text{e} \quad c \cdot h_C = a \cdot c \cdot \text{sen } \hat{B}. \quad (3.8)$$

Logo, de (3.8), segue que:

$$a \cdot h_A = c \cdot h_C. \quad (3.9)$$

Agora, aplicando a definição da razão trigonométrica *seno* nos triângulos retângulos ACD e ABC , temos:

$$\text{sen } \hat{C} = \frac{h_A}{b} \quad \text{e} \quad \text{sen } \hat{C} = \frac{h_B}{a}.$$

Assim:

$$h_A = b \cdot \text{sen } \hat{C} \quad \text{e} \quad h_B = a \cdot \text{sen } \hat{C}. \quad (3.10)$$

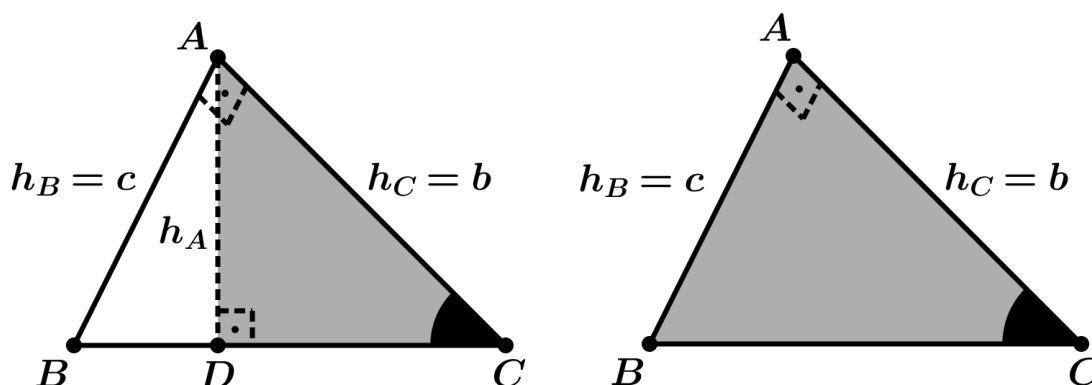


Figura 3.4: Esquema Geométrico da Demonstração.

Multiplicando a primeira igualdade (3.10) por a e a sua segunda igualdade por b , obtemos:

$$a \cdot h_A = a \cdot b \cdot \text{sen } \hat{C} \quad \text{e} \quad b \cdot h_B = a \cdot b \cdot \text{sen } \hat{C}. \quad (3.11)$$

Logo, de (3.11), segue que:

$$a \cdot h_A = b \cdot h_B. \quad (3.12)$$

Portanto, de (3.9) e (3.12), concluímos que:

$$a \cdot h_A = b \cdot h_B = c \cdot h_C.$$

Ou seja, o produto da medida de um lado de um triângulo qualquer pela altura correspondente a este lado não depende da escolha do lado desse triângulo.

3º Caso: O Triângulo ABC é Obtusângulo

Aplicando a definição da razão trigonométrica *seno* nos triângulos retângulos ACD e BCE , temos:

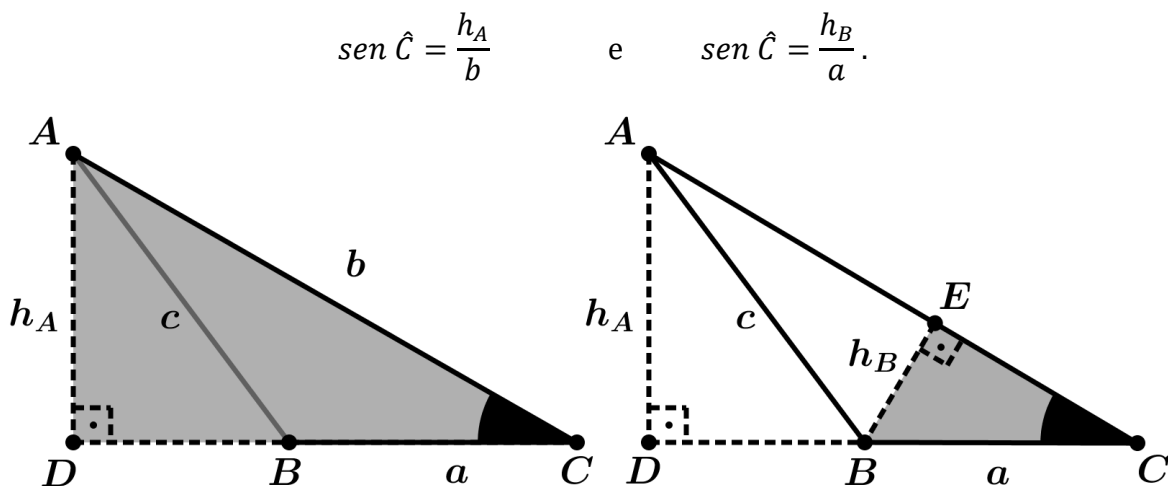


Figura 3.5: Esquema Geométrico da Demonstração.

Assim:

$$h_A = b \cdot \text{sen } \hat{C} \quad \text{e} \quad h_B = a \cdot \text{sen } \hat{C}. \quad (3.13)$$

Multiplicando a primeira igualdade (3.13) por a e a sua segunda igualdade por b , obtemos:

$$a \cdot h_A = a \cdot b \cdot \text{sen } \hat{C} \quad \text{e} \quad b \cdot h_B = a \cdot b \cdot \text{sen } \hat{C}. \quad (3.14)$$

Logo, de (3.14), segue que:

$$a \cdot h_A = b \cdot h_B. \quad (3.15)$$

Agora, aplicando a definição da razão trigonométrica *seno* nos triângulos retângulos ACF e ABE , temos:

$$\text{sen } \hat{A} = \frac{h_C}{b} \quad \text{e} \quad \text{sen } \hat{A} = \frac{h_B}{c}.$$

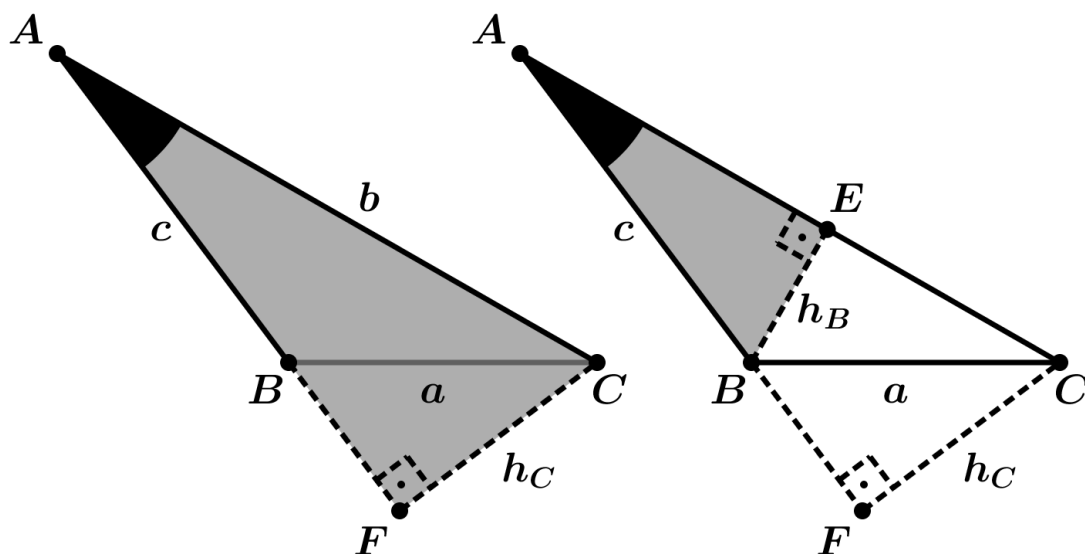


Figura 3.6: Esquema Geométrico da Demonstração.

Assim:

$$h_C = b \cdot \text{sen } \hat{A} \quad \text{e} \quad h_B = c \cdot \text{sen } \hat{A}. \quad (3.16)$$

Multiplicando a primeira igualdade (3.16) por c e a sua segunda igualdade por b , obtemos:

$$c \cdot h_C = b \cdot c \cdot \text{sen } \hat{A} \quad \text{e} \quad b \cdot h_B = b \cdot c \cdot \text{sen } \hat{A}. \quad (3.17)$$

Logo, de (3.17), segue que:

$$b \cdot h_B = c \cdot h_C. \quad (3.18)$$

Portanto, de (3.15) e (3.18), concluímos que:

$$a \cdot h_A = b \cdot h_B = c \cdot h_C.$$

Ou seja, o produto da medida de um lado de um triângulo qualquer pela altura correspondente a este lado não depende da escolha do lado desse triângulo. ■

Axioma 3.2. *A toda região poligonal corresponde um número real maior do que zero, chamado de área dessa região.*

Axioma 3.3. *Se uma região poligonal é a união de duas ou mais regiões poligonais que duas a duas não tenham pontos interiores em comum, então sua área é a soma das áreas daquelas regiões.*

Axioma 3.4. *Regiões poligonais limitadas por polígonos congruentes têm áreas iguais.*

É claro que todo polígono convexo determina uma região poligonal. Nós iremos tomar a liberdade de usar expressões do tipo “a área de um quadrado” quando queremos dizer realmente “a área da região poligonal cuja fronteira é um quadrado”. Em geral falaremos de “área de um dado polígono”, quando queremos de fato nos referir à área da região cuja fronteira é aquele polígono.

Antes de continuarmos, chamamos a atenção do leitor para o fato de que, neste trabalho, usaremos a seguinte notação:

- $S_{\text{Triân.}}(ABC)$ para indicar a área de um triângulo ABC ;
- $S_{\text{Hex.}}(ABCDEF)$ para indicar a área de um hexágono $ABCDEF$;
- $S_{\text{Quad.}}(ABCD)$ para indicar a área de um quadrado $ABCD$;

- $S_{Ret. (ABCD)}$ para indicar a área de um retângulo $ABCD$;
- $S_{Paral. (ABCD)}$ para indicar a área de um paralelogramo $ABCD$;
- $S_{Losan. (ABCD)}$ para indicar a área de um losango $ABCD$;
- $S_{Trap. (ABCD)}$ para indicar a área de um trapézio $ABCD$;
- $S_{Cír. (O, r)}$ para indicar a área de um círculo de centro O e raio r ;
- " = " para representar a congruência de polígonos.

Definição 3.5. (Área da Região Triangular) Metade do produto da medida de qualquer lado de um triângulo pela altura correspondente a este lado é denominado de área da região delimitada por este triângulo, ou área da região triangular.

Chamamos a atenção do leitor para o fato de que tomaremos a liberdade de dizer “área do polígono” para nos referir à área da região delimitada pelo polígono.

Proposição 3.6. Se ABC é um triângulo equilátero cujos lados medem l unidades de comprimento, então, a sua área, denotada por $S_{Triân. (ABC)}$, é igual a:

$$S_{Triân. (ABC)} = \frac{l^2 \cdot \sqrt{3}}{4}.$$

Demonstração. Seja ABC um triângulo equilátero cujos lados medem l . Seja AD , $D \in BC$, a altura desse triângulo relativa ao vértice A , cuja medida denotaremos por h , ou seja, $\overline{AD} = h$. Por Teorema da Geometria Euclidiana Plana, sabemos que num triângulo equilátero a altura relativa a um lado de um triângulo também é mediana relativa a este lado. Assim:

$$\overline{BD} = \frac{\overline{BC}}{2} = \frac{l}{2}.$$

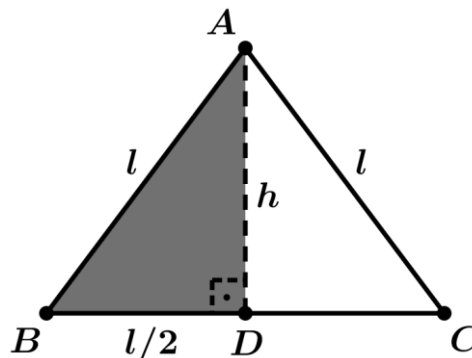


Figura 3.7: Triângulo Equilátero.

Por conseguinte, aplicando o **Teorema de Pitágoras** no triângulo retângulo ABD , reto em \widehat{D} , temos:

$$l^2 = \left(\frac{l}{2}\right)^2 + h^2.$$

Logo:

$$h^2 = l^2 - \left(\frac{l}{2}\right)^2.$$

Ou ainda:

$$h^2 = \frac{3 \cdot l^2}{4}.$$

Como $h > 0$, concluímos que:

$$h = \frac{l \cdot \sqrt{3}}{2}.$$

Então, pela **Definição 3.5**, a área do triângulo equilátero ABC , denotada por $S_{\text{Triân. (ABC)}}$, é igual a:

$$S_{\text{Triân. (ABC)}} = \frac{\overline{BC} \cdot \overline{AD}}{2} = \frac{l \cdot \left(\frac{l \cdot \sqrt{3}}{2}\right)}{2}.$$

Logo:

$$S_{\text{Triân. (ABC)}} = \frac{l^2 \cdot \sqrt{3}}{4}.$$

■

Proposição 3.7. *Se $ABCDEF$ é um hexágono regular cujos lados medem l unidades de comprimento, então, a sua área, denotada por $S_{\text{Hex. (ABCDEF)}}$, é igual a:*

$$S_{\text{Hex. (ABCDEF)}} = 6 \cdot \left(\frac{l^2 \cdot \sqrt{3}}{4}\right) = \frac{3 \cdot l^2 \cdot \sqrt{3}}{2}.$$

Demonstração. Seja $ABCDEF$ um hexágono regular cujos lados medem l unidades de comprimento e cujo centro da circunferência que o circunscreve seja O . Da Geometria Euclidiana Plana, sabemos que todo hexágono regular é formado por seis triângulos equiláteros congruentes, a saber:

$$OAB = OBC = OCD = ODE = OEF = OFA.$$

Assim, do **Axioma 3.4**, temos:

$$S_{Trig. (OAB)} = S_{Triân. (OBC)} = S_{Triân. (OCD)} = S_{Triân. (ODE)} = S_{Triân. (OEF)} = S_{Triân. (OFA)} \cdot$$

Então, do **Axioma 3.3**, segue que:

$$S_{Hex. (ABCDEF)} = 6 \cdot [S_{Triân. (OAB)}]. \quad (3.19)$$

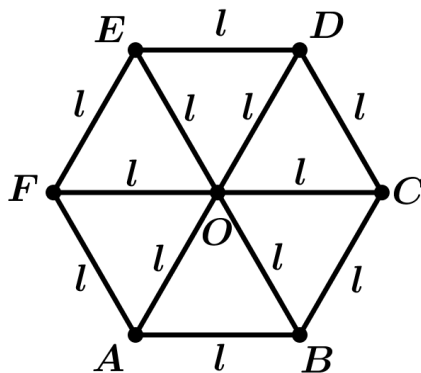


Figura 3.8: Hexágono Regular.

Como OAB é um triângulo equilátero, da **Proposição 3.6**, temos:

$$S_{Triân. (OAB)} = \frac{l^2 \cdot \sqrt{3}}{4}. \quad (3.20)$$

Logo, substituindo (3.20) em (3.19), concluímos que:

$$S_{Hex. (ABCDEF)} = 6 \cdot \frac{l^2 \cdot \sqrt{3}}{4}.$$

■

Proposição 3.8. Se $ABCD$ é um quadrado cuja medida lateral mede l unidades de comprimento, então, sua área, denotada por $S_{Quad. (ABCD)}$, é igual a:

$$S_{Quad. (ABCD)} = l \cdot l = l^2.$$

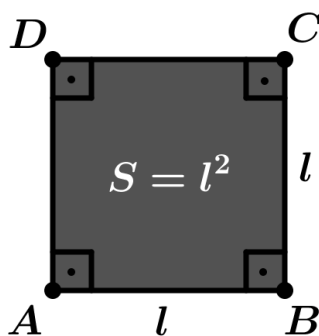


Figura 3.9: Área do Quadrado.

Demonstração. Seja $ABCD$ um quadrado cujos lados medem l unidades de comprimento. Tracemos a diagonal AC . Comparando os triângulos retângulos ABC e ADC , pela definição de quadrado, temos:

$$\overline{AB} = \overline{CD} = \overline{BC} = \overline{AD} = l \quad \text{e} \quad \hat{B} = \hat{D} = 90^\circ.$$

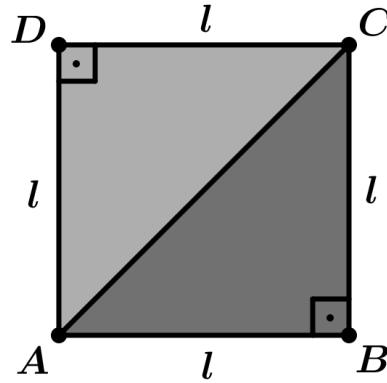


Figura 3.10: Triângulos Congruentes ($ABC = ADC$).

Assim, pelo 1º caso de congruência de triângulos, L.A.L, temos:

$$ABC = ADC.$$

Com isso, pelo *Axioma 3.4*, temos:

$$S_{\text{Triân.}}(ABC) = S_{\text{Triân.}}(ACD). \quad (3.21)$$

Pelo *Axioma 3.3*, sabemos que:

$$S_{\text{Quad.}}(ABCD) = S_{\text{Triân.}}(ABC) + S_{\text{Triân.}}(ACD). \quad (3.22)$$

Então, substituindo (3.21) em (3.22), obtemos:

$$S_{\text{Quad.}}(ABCD) = 2 \cdot S_{\text{Triân.}}(ABC). \quad (3.23)$$

Pela *Definição 3.5*, sabemos que:

$$S_{\text{Triân.}}(ABC) = \frac{\overline{AB} \cdot \overline{BC}}{2} = \frac{l \cdot l}{2} = \frac{l^2}{2}. \quad (3.24)$$

Logo, substituindo (3.24) em (3.23), concluímos que:

$$S_{\text{Quad.}}(ABCD) = 2 \cdot S_{\text{Triân.}}(ABC) = 2 \cdot \left(\frac{l^2}{2}\right).$$

Portanto:

$$S_{\text{Quad.}}(ABCD) = l^2.$$

■

Proposição 3.9. Se $ABCD$ é um retângulo tal que $\overline{AB} = a$ e $\overline{BC} = b$, então, a sua área, denotada por $S_{Ret. (ABCD)}$, é igual a:

$$S_{Ret. (ABCD)} = a \cdot b.$$

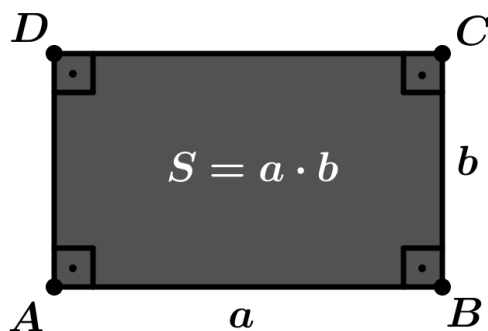


Figura 3.11: Área do Retângulo.

Demonstração. Seja $ABCD$ um retângulo tal que $\overline{AB} = a$ e $\overline{BC} = b$. Tracemos a diagonal AC . Comparando os triângulos retângulos ABC e CDA , temos:

- $AB = CD$ (Por Teorema da Geometria Euclidiana Plana);
- $\hat{B} = \hat{D} = 90^\circ$ (Por definição de retângulo);
- $BC = AD$ (Por Teorema da Geometria Euclidiana Plana).

Assim, pelo 1º caso de congruência de triângulos, L.A.L, temos:

$$ABC = CDA.$$

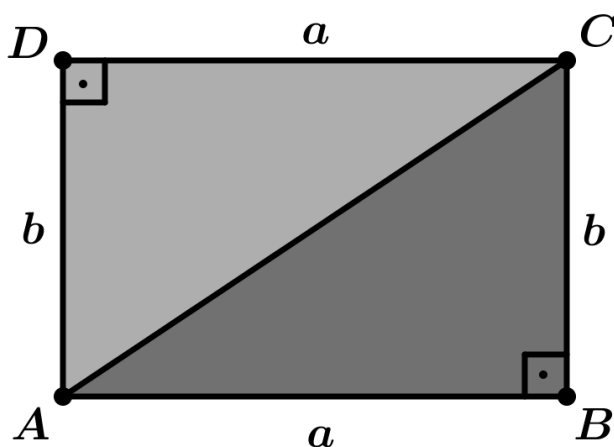


Figura 3.12: Triângulos Congruentes ($ABC = CDA$).

Com isso, pelo **Axioma 3.4**, temos:

$$S_{Triân. (ABC)} = S_{Triân. (CDA)}. \tag{3.25}$$

Pelo *Axioma 4.3*, sabemos que:

$$S_{Ret. (ABCD)} = S_{Triân. (ABC)} + S_{Triân. (CDA)}. \quad (3.26)$$

Então, substituindo (3.25) em (3.26), obtemos:

$$S_{Ret. (ABCD)} = 2 \cdot S_{Triân. (ABC)}. \quad (3.27)$$

Pela *Definição 3.5*, sabemos que:

$$S_{Triân. (ABC)} = \frac{\overline{AB} \cdot \overline{BC}}{2} = \frac{a \cdot b}{2}. \quad (3.28)$$

Logo, substituindo (3.28) em (3.27), concluímos que:

$$S_{Ret. (ABCD)} = 2 \cdot S_{Triân. (ABC)} = 2 \cdot \left(\frac{a \cdot b}{2} \right).$$

Portanto:

$$S_{Ret. (ABCD)} = a \cdot b.$$

■

Proposição 3.10. Se $ABCD$ é um paralelogramo tal que $\overline{CD} = b$ e h é a medida de sua altura relativa à base AB , então, a sua área, denotada por $S_{Paral. (ABCD)}$, é igual a:

$$S_{Paral. (ABCD)} = b \cdot h.$$

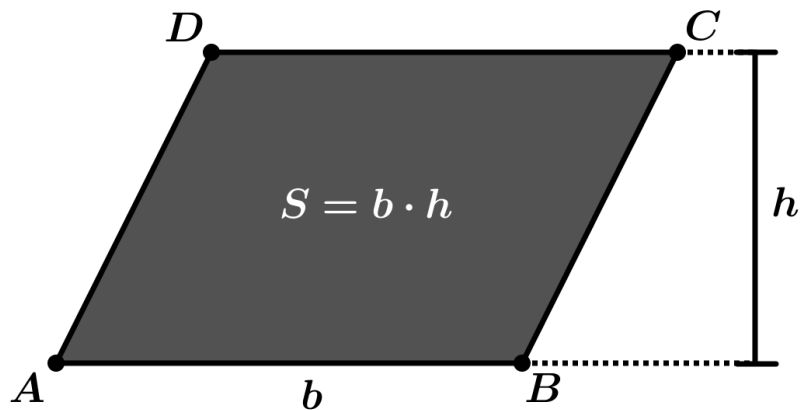


Figura 3.13: Área do Paralelogramo.

Demonstração. Seja $ABCD$ paralelogramo tal que $\overline{AB} = \overline{CD} = b$ e cuja medida de sua altura relativa à base AB seja h . Tracemos a diagonal AC . Comparando os triângulos ABC e CDA , temos:

- $AB = CD$ (Por Teorema da Geometria Euclidiana Plana);

- $\hat{B}AC = \hat{A}CD$ (São ângulos alternos internos congruentes);
- $AC = AC$ (Mesmo segmento).

Assim, pelo 1º caso de congruência de triângulos, L.A.L, temos:

$$ABC = CDA.$$

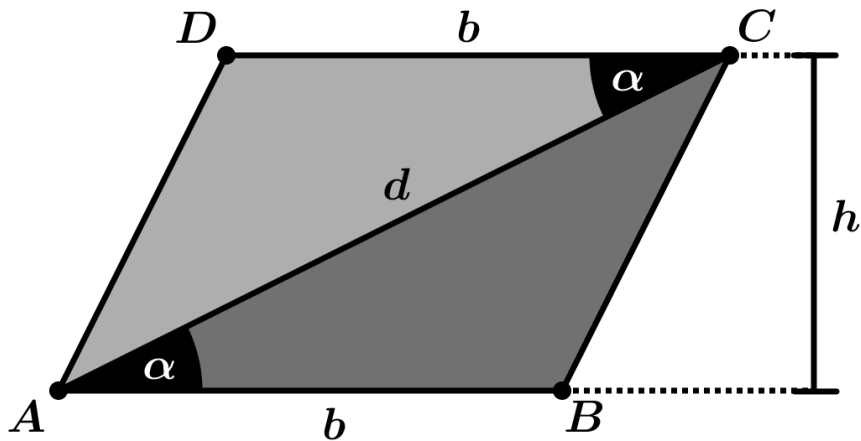


Figura 3.14: Triângulos Congruentes ($ABC = CDA$).

Com isso, pelo *Axioma 3.4*, temos:

$$S_{Triân. (ABC)} = S_{Triân. (CDA)}. \quad (3.29)$$

Pelo *Axioma 3.3*, sabemos que:

$$S_{Paral. (ABCD)} = S_{Triân. (ABC)} + S_{Triân. (CDA)}. \quad (3.30)$$

Então, substituindo (3.29) em (3.30), obtemos:

$$S_{Paral. (ABCD)} = 2 \cdot S_{Triân. (ABC)}. \quad (3.31)$$

Pela *Definição 3.5*, sabemos que:

$$S_{Triân. (ABC)} = \frac{\overline{AB} \cdot \overline{BC}}{2} = \frac{b \cdot h}{2}. \quad (3.32)$$

Logo, substituindo (3.32) em (3.31), concluímos que:

$$S_{Paral. (ABCD)} = 2 \cdot S_{Triân. (ABC)} = 2 \cdot \left(\frac{b \cdot h}{2} \right).$$

Portanto:

$$S_{Paral. (ABCD)} = b \cdot h.$$

■

Proposição 3.11. *A área de um trapézio é metade do produto do comprimento de sua altura pela soma dos comprimentos de suas bases.*

Demonstração. Seja $ABCD$ um trapézio, cujas bases são os lados paralelos AB e CD , e seja h a medida de sua altura. Façamos a seguinte consideração:

- $\overline{AB} = b_1$;
- $\overline{CD} = b_2$.

Denotando a área do trapézio $ABCD$ por $A_{Trap. (ABCD)}$, devemos provar que:

$$A_{Trap. (ABCD)} = \frac{(b_1 + b_2) \cdot h}{2}.$$

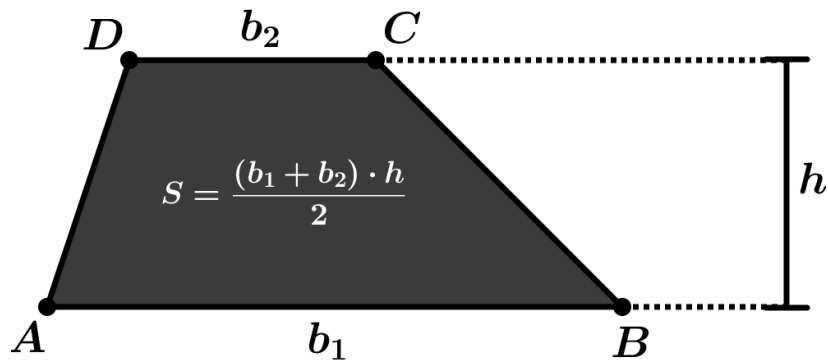


Figura 3.15: Área de um Trapézio.

Para isso, tracemos a diagonal AC . Com isso, o trapézio $ABCD$ fica dividido em dois triângulos, a saber: ABC e ACD . Estes triângulos possuem a mesma altura h , conforme Figura 3.13. Assim, denotando a área do triângulo ABC por $S_{Triân. (ABC)}$ e a área do triângulo ACD por $S_{Triân. (ACD)}$, pelo **Axioma 3.3**, temos:

$$S_{Trap. (ABCD)} = S_{Triân. (ABC)} + S_{Triân. (ACD)}. \quad (3.33)$$

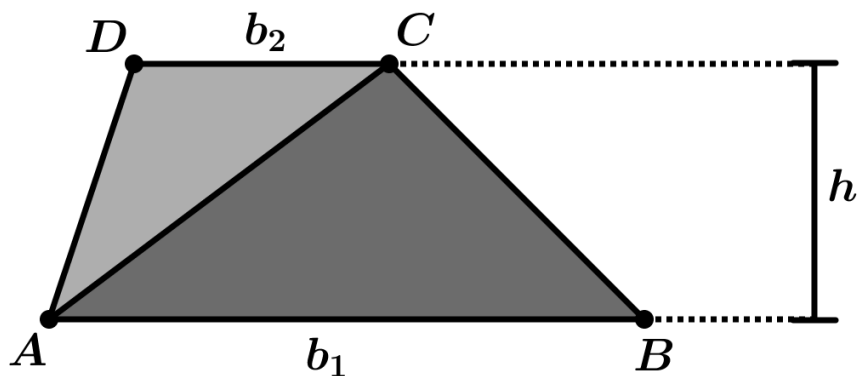


Figura 3.16: Decomposição do Trapézio em Dois Triângulos.

Pela **Definição 3.5**, temos:

$$S_{\text{Triân. } (ABC)} = \frac{b_1 \cdot h}{2} \quad \text{e} \quad S_{\text{Triân. } (ACD)} = \frac{b_2 \cdot h}{2}. \quad (3.34)$$

Por conseguinte, substituindo (3.34) em (3.33), obtemos:

$$S_{\text{Trap. } (ABCD)} = \frac{b_1 \cdot h}{2} + \frac{b_2 \cdot h}{2}. \quad (3.35)$$

Logo, colocando h em evidência em (3.35), concluímos que:

$$S_{\text{Trap. } (ABCD)} = \frac{(b_1 + b_2) \cdot h}{2}.$$

■

Proposição 3.12. *A área de um losango é metade do produto dos comprimentos de suas diagonais.*

Demonstração. Seja $ABCD$ um losango. Tracemos as suas diagonais AC e BD . Façamos as seguintes considerações:

- $\overline{AC} = d_1$;
- $\overline{BD} = d_2$.

Denotando a área do losango $ABCD$ por $S_{\text{Losan. } (ABCD)}$, devemos provar que:

$$S_{\text{Losan. } (ABCD)} = \frac{d_1 \cdot d_2}{2}.$$

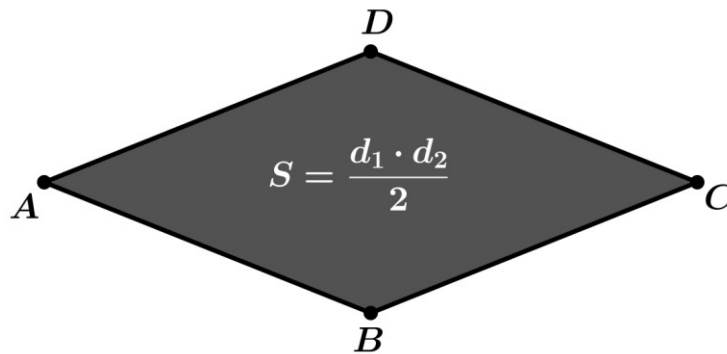


Figura 3.17: Área do Losango.

Por Teorema da Geometria Euclidiana Plana, sabemos que estas diagonais se intersectam em seus pontos médios, digamos M e são perpendiculares. Assim:

$$\overline{BM} = \overline{MD} = \frac{\overline{BD}}{2} = \frac{d_2}{2}.$$

Com isso, o losango $ABCD$ fica decomposto de dois triângulos, a saber: ABC e ACD . Daí, pelo **Axioma 3.3**, temos:

$$S_{\text{Losag. } (ABCD)} = S_{\text{Triân. } (ABC)} + S_{\text{Triân. } (ACD)}. \quad (3.36)$$

Pela **Definição 3.5**, temos:

$$S_{\text{Triân. } (ABC)} = \frac{\overline{AC} \cdot \overline{BM}}{2} = \frac{d_1 \cdot \left(\frac{d_2}{2}\right)}{2} \quad \text{e} \quad S_{\text{Triân. } (ACD)} = \frac{\overline{AC} \cdot \overline{MD}}{2} = \frac{d_1 \cdot \left(\frac{d_2}{2}\right)}{2}. \quad (3.37)$$

Por conseguinte, substituindo (3.36) em (3.37), obtemos:

$$S_{\text{Losag. } (ABCD)} = \frac{d_1 \cdot d_2}{4} + \frac{d_1 \cdot d_2}{4}. \quad (3.38)$$

Logo:

$$S_{\text{Losag. } (ABCD)} = 2 \cdot \left(\frac{d_1 \cdot d_2}{4}\right).$$

Portanto:

$$A_{\text{Losan. } (ABCD)} = \frac{d_1 \cdot d_2}{2}.$$

■

Observação 3.13. Antes de abordar o Teorema que trata da fórmula do cálculo da área de um círculo, chamamos a atenção do leitor para o fato que iremos admitir que o leitor tenha conhecimento de que a razão entre o comprimento de uma circunferência e do seu diâmetro é constante e igual a π , independente da medida do raio da circunferência escolhida, ou seja, se considerarmos duas circunferências quaisquer, digamos $\Gamma'(O', R')$ e $\Gamma''(O'', R'')$, e sendo C' e C'' o comprimento dessas duas circunferências, respectivamente, então:

$$\frac{C'}{2 \cdot R'} = \frac{C''}{2 \cdot R''} = \pi.$$

Teorema 3.14. Dado uma circunferência Γ de centro O e raio R , a área de um círculo, delimitado por $\Gamma(O, R)$, denotada por $S_{\Gamma(O, R)}$, é igual a:

$$S_{\Gamma(O, R)} = \pi \cdot R^2.$$

Demonstração I. Considere uma circunferência Γ de centro O e raio R . Nela, inscreva um polígono regular $A_1A_2A_3 \cdots A_n$ de n lados, conforme *Figura 3.18*. Note que, à medida que aumentamos o número de lados n do polígono regular as regiões:

$OA_1A_2, OA_2A_3, \dots, OA_{n-1}A_n, OA_nA_1$, se aproximam indefinidamente de serem triângulos isósceles, pelo caso L.L.L de congruência de triângulos, congruentes entre si e que possuem alturas correspondem ao raio R da circunferência Γ , Assim, pelo **Axioma 3.3**, temos:

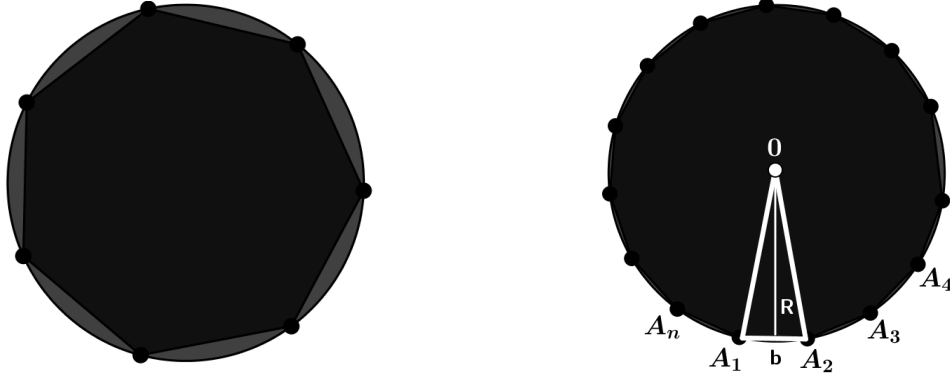


Figura 3.18: Área do Círculo.

$$S_{\Gamma(O,R)} = S_{\text{Triân. } (OA_1A_2)} + S_{\text{Triân. } (OA_2A_3)} + \dots + S_{\text{Triân. } (OA_{n-1}A_n)} + S_{\text{Triân. } (OA_nA_1)}.$$

Daí, pela **Definição 3.5**, temos:

$$S_{\Gamma(O,R)} = \frac{\overline{A_1A_2} \cdot R}{2} + \frac{\overline{A_2A_3} \cdot R}{2} + \dots + \frac{\overline{A_{n-1}A_n} \cdot R}{2} + \frac{\overline{A_nA_1} \cdot R}{2}. \quad (3.39)$$

Como, por hipótese o polígono $A_1A_2A_3 \dots A_n$ é regular, sabemos que:

$$\underbrace{\overline{A_1A_2} = \overline{A_2A_3} = \dots = \overline{A_{n-1}A_n} = \overline{A_nA_1}}_{n \text{ segmentos congruentes}} = b. \quad (3.40)$$

Substituindo (3.40) em (3.39), obtemos:

$$(3.99) \quad S_{\Gamma(O,R)} = n \cdot \left(\frac{b \cdot R}{2} \right) = (n \cdot b) \cdot \frac{R}{2}. \quad (3.41)$$

Agora, note que, na situação descrita, tem-se:

$$n \cdot b \cong C = 2 \cdot \pi \cdot R. \quad (3.42)$$

Logo, substituindo (3.42) em (3.41), concluímos que:

$$S_{\Gamma(O,R)} = (2 \cdot \pi \cdot R) \cdot \frac{R}{2}.$$

Portanto:

$$S_{\Gamma(O,R)} = \pi \cdot R^2. \quad \blacksquare$$

Demonstração II. Seja Γ uma circunferência de centro O e raio R . Da **Observação. 3.13**, sabemos que o comprimento C de Γ é igual a: $C = 2 \cdot \pi \cdot R$. Tracemos infinitas

circunferências, todas com centro em O e raios menores do que R . Daí, abrindo cada uma dessas circunferências, ou seja, “desdobrando-as”, de tal forma que cada uma delas se torne um segmento de reta, e empilhando-as na ordem decrescente de tamanho, de cima para baixo, em que o ponto de partida é o centro O de Γ e a última circunferência a ser “desdobrando” é Γ , note que, formam-se inúmeros triângulos semelhantes, uma vez que os pontos $O, A_1, A_3, \dots, A_{n+1}$ estão alinhados, assim como estão alinhados os pontos O, A_2, A_4, \dots, A_n , pela **Observação. 3.13**. O maior triângulo tem altura R e medida da base $C = 2 \cdot \pi \cdot R$, conforme *Figura 3.19*. E mais, a área desse triângulo, denotada por $A_{Triân. (OA_{n+1}A_n)}$, é equivalente a área do círculo delimitado por Γ , denotanda por $S_{\Gamma(O,R)}$, ou seja:

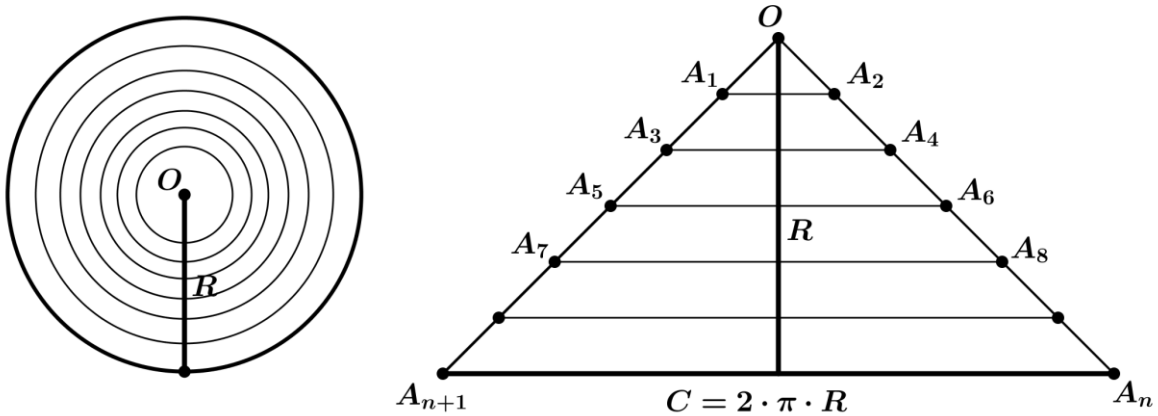


Figura 3.19: Áreas Equivalentes.

$$S_{\Gamma(O,R)} = S_{Triân. (OA_{n+1}A_n)}.$$

Assim, pela **Definição 3.5**, temos:

$$S_{\Gamma(O,R)} = S_{Triân. (OA_{n+1}A_n)} = \frac{(2 \cdot \pi \cdot R) \cdot R}{2}.$$

Portanto:

$$S_{\Gamma(O,R)} = \pi \cdot R^2.$$

■

5. CONSIDERAÇÕES FINAIS

Evidenciamos que o novo formato dos livros de matemática adotados no país para o ensino básico, aparentemente não só compromete a qualidade do ensino do ponto de vista do aluno, como também prejudica o professor, pois a teoria abordada nesses livros passou a ser mínima, levando o professor a ter e a ensinar um conhecimento superficial dos conteúdos matemáticos, o que pode tornar nocivo para a educação, pelo fato do professor não possuir uma fonte de consulta para preparar melhor as suas aulas e que o permita se aprofundar nos conteúdos estudados.

Pesquisas tem apontado que as demonstrações matemáticas constituem um alicerce indispensável na construção do conhecimento matemático e desempenham um papel vital no desenvolvimento de habilidades cognitivas superiores entre os estudantes. Ao fortalecer a compreensão profunda dos conceitos, elas promovem competências essenciais, aplicáveis não apenas ao campo da matemática, mas também em diversas trajetórias acadêmicas e profissionais, [4] e [5].

Ainda segundo essa pesquisa, ao se envolverem com demonstrações, os estudantes desenvolvem habilidades de raciocínio dedutivo, aprendem a estabelecer relações entre premissas e conclusões e fortalecem sua capacidade de análise e síntese. Essas competências não se restringem à matemática, mas estendem-se a outras áreas do conhecimento, sendo essenciais na formação de cidadãos críticos e autônomos, [4] e [5].


Diante de todo o exposto, enfatizamos que os objetivos propostos foram todos atingidos, uma vez que demonstramos as fórmulas das áreas dos quadriláteros notáveis e a fórmula da área do círculo, todas essas a partir da fórmula da área do triângulo, tratada neste trabalho como uma definição. Ressaltamos que essa definição foi apresentada como um resultado de uma importante propriedade dos triângulos que é o fato do produto da medida de um de seus lados pela medida da altura relativa a este lado ser constante, ou seja, que este produto independe da escolha do lado do triângulo.

Destacamos que o que diferencia esta proposta dos modelos adotados nos livros didáticos, de matemática do ensino básico do nosso país, é o fato de: Quebrarmos o paradigma dos antigos livros didáticos de matemática, em que as demonstrações das fórmulas das áreas dos polígonos e da fórmula da área do círculo partem sempre da área de um quadrado. Neste trabalho, o nosso ponto de partida para realizar essas demonstrações foi, em todos os casos, a fórmula do cálculo da área uma região triangular; apresentarmos formalismo

em toda parte teórica abordada, no entanto, priorizando uma linguagem de fácil compreensão por parte do leitor; Usamos todo um raciocínio lógico nas demonstrações dos teoremas; Termos evitado pular etapas nas demonstrações matemáticas para não “quebrar” a fluidez do texto por parte do leitor; Termos inserido um número significativo de figuras para que o leitor possa visualizar, por meio de imagens, aquilo que está escrito no texto. Com isso, este trabalho pode ser considerado um Produto Educacional de Apoio Didático.

REFERÊNCIAS

- [1] BARBOSA, J. L. M.; *Geometria Euclidiana Plana*, Coleção do Professor de Matemática, Ed. SBM, Rio de Janeiro - RJ, 7ª Edição, 2004.
- [2] DOLCE, O.; POMPEO, J. N.; *Fundamentos de Matemática Elementar, Geometria Plana*, Vol. 9, Ed. Atual, São Paulo - SP, 7ª Edição, 1993.
- [3] NETO, A. C. M.; *Tópicos de Matemática Elementar, Geometria Euclidiana Plana*, Vol. 2, Coleção do Professor de Matemática, Ed. SBM, Rio de Janeiro - RJ, 2ª Edição, 2013.
- [4] SILVA, Jhone Caldeira; MARRA JUNIOR, Edson Donizeti. Demonstrações matemáticas no Ensino Médio: o que pensam e sentem os estudantes. *UNIÓN – Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, Año XVI, n. 59, p. 204–226, ago. 2020. ISSN 1815-0640. Disponível em: <http://www.fisem.org/www/index.php>.
- [5] SILVA, Marcos Ranieri da; REI FILHO, Carlos Gonçalves do; TORRES, José Cícero Ferreira. Demonstrações matemáticas no ensino básico: por que e como usá-las. *Revista Ibero-Americana de Humanidades, Ciências e Educação (REASE)*, São Paulo, v. 10, n. 10, p. 2634–2645, out. 2024. DOI: <https://doi.org/10.51891/rease.v10i10.16108>.

	INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA DA PARAÍBA
	Campus Campina Grande - Código INEP: 25137409
	R. Tranquílino Coelho Lemos, 671, Dinamérica, CEP 58432-300, Campina Grande (PB)
	CNPJ: 10.783.898/0003-37 - Telefone: (83) 2102.6200

Documento Digitalizado Ostensivo (Público)

TCC versão final

Assunto:	TCC versão final
Assinado por:	Diego Mateus
Tipo do Documento:	Dissertação
Situação:	Finalizado
Nível de Acesso:	Ostensivo (Público)
Tipo do Conferência:	Cópia Simples

Documento assinado eletronicamente por:

- **Diego Mateus Sousa Silva, DISCENTE (202211230017) DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA - CAMPINA GRANDE**, em 08/06/2026 19:10:45.

Este documento foi armazenado no SUAP em 08/06/2026. Para comprovar sua integridade, faça a leitura do QRCode ao lado ou acesse <https://suap.ifpb.edu.br/verificar-documento-externo/> e forneça os dados abaixo:

Código Verificador: 1882932

Código de Autenticação: 078c15ef89

