



**INSTITUTO FEDERAL DA PARAÍBA
CAMPUS CAJAZEIRAS
CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA**

FRANCISCA ARAÚJO BARBOSA

**UMA ANÁLISE GEOMÉTRICA DAS OBRAS DE MAURITS
CORNELIS ESCHER (1898-1972)**

CAJAZEIRAS

2026

FRANCISCA ARAÚJO BARBOSA

UMA ANÁLISE GEOMÉTRICA DAS OBRAS DE MAURITS CORNELIS
ESCHER (1898-1972)

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao
Curso de Licenciatura em Matemática do Insti-
tuto Federal da Paraíba, como requisito parcial à
obtenção do título de Licenciado em Matemática.

Orientador(a): Prof. Dr. William de
Souza Santos.

Cajazeiras
2026

FRANCISCA ARAÚJO BARBOSA

UMA ANÁLISE GEOMÉTRICA DAS OBRAS DE MAURITS CORNELIS
ESCHER (1898-1972)

Monografia apresentada ao programa de **Curso de Licenciatura em Matemática** do **Instituto Federal da Paraíba**, como requisito à obtenção do título de **Licenciado em Matemática**.

Data de aprovação: 20/07/2026

Banca Examinadora:

Documento assinado digitalmente
 **WILLIAM DE SOUZA SANTOS**
Data: 20/07/2026 19:52:29-0300
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

Prof. Dr. William de Souza Santos
Instituto Federal da Paraíba - IFPB

Documento assinado digitalmente
 **ANTONIO EUDES FERREIRA**
Data: 20/07/2026 19:45:29-0300
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

Prof. Me. Antonio Eudes Ferreira
Instituto Federal da Paraíba - IFPB

Documento assinado digitalmente
 **LEILYANNE SILVA DE MORAIS**
Data: 20/07/2026 19:50:32-0300
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

Prof(a). M(a). Leilyanne Silva de Moraes
Instituto Federal da Paraíba - IFPB

IFPB / Campus Cajazeiras
Coordenação de Biblioteca
Biblioteca Prof. Ribamar da Silva
Catalogação na fonte: Cícero Luciano Félix CRB-15/750

B238a Barbosa, Francisca Araújo.
 Uma análise geométrica das obras de Maurits Cornelis Escher
 (1898-1972) / Francisca Araújo Barbosa.– 2026.

 70f. : il.

 Trabalho de Conclusão de Curso (Licenciatura em Matemática) -
 Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia da Paraíba,
 Cajazeiras, 2026.

 Orientador(a): Prof. Dr. William de Souza Santos.

 1. Maurits Cornelis Escher. 2. Geometria. 3. Ensino de
 matemática. 4. GeoGebra. I. Instituto Federal de Educação, Ciência e
 Tecnologia da Paraíba. II. Título.

IFPB/CZ

CDU: 514(043.2)

Dedico este trabalho aos meus pais, que sempre se sacrificaram tanto por mim e me apoiaram durante toda essa jornada tonando possível que eu chegasse até aqui. Dedico-o também ao meu afilhado, Otávio, por ser uma fonte de alegria e motivação em minha vida.

AGRADECIMENTOS

Agradeço, primeiramente, a Deus, por me conceder saúde, paciência, força, sabedoria e persistência ao longo dessa jornada, sempre guiando meus passos e tornando possível a realização deste trabalho, além de me conceder o discernimento para trilhar os caminhos certos e, assim, almejar o sonho de me formar.

À minha família, por me apoiar em todos os momentos da minha vida, pelo amor, incentivo e confiança depositados em mim. Especialmente aos meus pais, Rosa Francisca Araújo de Sousa e Zacarias Vieira Barbosa, por serem a minha base e porto seguro nos momentos bons e ruins, além de se dedicarem tanto para que eu realizasse todos os meus sonhos.

À minha irmã, Emilly, pelo companheirismo, carinho e por nunca hesitar em me defender e apoiar na busca pelos meus objetivos e sonhos. Ao meu afilhado, Otávio, que, desde que nasceu, vem me trazendo alegrias e sempre renovando minhas forças nos momentos difíceis, deixo meus sinceros carinhos e gratidão, meu pequeno menino.

Ao meu orientador, Prof. Dr. William de Sousa Santos, que contribuiu de modo significativo para a minha jornada acadêmica, desde antes de se tornar meu orientador neste trabalho. Agradeço imensamente por ter me orientado até a concretização deste tema e pelas valiosas contribuições ao longo do desenvolvimento desta pesquisa e de todo o percurso acadêmico que vivi na instituição. Sua dedicação e seus conhecimentos se tornaram uma excelente inspiração.

Aos professores que compõem o curso de Licenciatura em Matemática do Instituto Federal da Paraíba – Campus Cajazeiras, pelos ensinamentos compartilhados, que contribuíram para a minha jornada como discente e profissional. Em especial, ao professor Me. João Paulo de Araujo Souza, por todos os conselhos e pela dedicação ao ensino, além de ter sido uma inspiração durante minha formação, e ao professor Dr. Rodiney Marcelo Braga, pela oportunidade de participar da produção de capítulos de livros e por todos os conselhos e conversas que contribuíram para minha jornada acadêmica.

Aos meus amigos e colegas de curso, agradeço pelos nossos momentos de estudo e descontração, os quais tornaram este percurso mais tranquilo e repleto de momentos em que compartilhamos desafios, conquistas, risadas e aprendizados que levarei para toda a minha vida. Em especial, a Anna Lara, Mariana Angelo, Dalton Rodrigues, Anderson Gabriel, Rita Gadelha e Geovanny Emídio, pelo apoio e incentivo. Vocês foram muito especiais para mim neste momento, e agradeço por tê-los ao meu lado.

Por fim, agradeço a todos que, de forma direta ou indireta, colaboraram com meu percurso acadêmico. Deixo, assim, os meus mais sinceros agradecimentos.

*“Os padrões do matemático, como os do pintor
ou do poeta, devem ser belos.”*

G. H. Hardy.

RESUMO

A relação entre Arte e Matemática evidencia-se ao longo da história por meio da presença de conceitos matemáticos, especialmente os geométricos, em diferentes manifestações artísticas. Nesse contexto, as obras de Maurits Cornelis Escher (1898-1972) destacam-se pela utilização de transformações geométricas, simetrias e tesselações, configurando-se como um importante recurso para o ensino da Geometria. Diante disso, este trabalho tem a finalidade de analisar os conceitos geométricos presentes em obras selecionadas de Escher e investigar suas potencialidades para o ensino dessa área da matemática. Especificamente, busca identificar os conceitos e as transformações geométricas presentes nas obras analisadas, bem como reconstruir, por meio do software GeoGebra, elementos geométricos dessas obras artísticas, evidenciando propriedades matemáticas presentes nas obras. Para cumprir o que foi proposto, a caracterização desta pesquisa é dada por qualitativa, e possuindo um caráter exploratório, fundamentada em estudos sobre Geometria, Arte e Educação Matemática. A análise das obras do autor permitiu identificar a frequente utilização das transformações isométricas, como translações, rotações, reflexões e tesselações. As reconstruções realizadas no GeoGebra possibilitaram compreender e visualizar as propriedades geométricas presentes nas composições de Escher, demonstrando o potencial do software como ferramenta de apoio ao ensino. Conclui-se que a integração entre Arte e Geometria, além de tecnologias digitais, favorece a aprendizagem dos conceitos geométricos, tornando-os elementos basilares no processo de ensino, contextualizando a aprendizagem e dando acessibilidade a diversas maneiras visuais, além de contribuir para o desenvolvimento do raciocínio espacial e da percepção matemática dos estudantes.

Palavras-chave: Maurits Cornelis Escher; Geometria; Ensino da Geometria; GeoGebra.

ABSTRACT

The relationship between Art and Mathematics has been evident throughout history through the presence of mathematical concepts, especially geometric ones, in different artistic manifestations. In this context, the works of Maurits Cornelis Escher (1898–1972) stand out for their use of geometric transformations, symmetries, and tessellations, making them an important resource for teaching Geometry. Therefore, this study aims to analyze the geometric concepts present in selected works by Escher and investigate their potential for teaching this branch of Mathematics. Specifically, it seeks to identify the geometric concepts and transformations found in the analyzed artworks, as well as to reconstruct geometric elements of these works using the GeoGebra software, highlighting the mathematical properties embedded in the artistic compositions. To achieve these objectives, this research adopts a qualitative and exploratory approach, based on studies in Geometry, Art, and Mathematics Education. The analysis of Escher's works revealed the frequent use of isometric transformations, such as translations, rotations, reflections, and tessellations. The reconstructions carried out in GeoGebra made it possible to understand and visualize the geometric properties present in Escher's compositions, demonstrating the software's potential as a supporting tool for Geometry teaching. It is concluded that the integration of Art, Geometry, and digital technologies promotes the learning of geometric concepts by making them fundamental elements in the teaching process, contextualizing learning, providing access to multiple visual representations, and contributing to the development of students' spatial reasoning and mathematical perception.

Keywords: Maurits Cornelis Escher; Geometry; Geometry Teaching; GeoGebra.

LISTA DE FIGURAS

Figura 2.1 – Segmento dividido em média e extrema razão	20
Figura 2.2 – <i>O Sacramento da Última Ceia</i> (1955), de Salvador Dalí	21
Figura 2.3 – <i>O Homem Vitruviano</i> de Leonardo da Vinci	22
Figura 2.4 – <i>Emblema logotipo poético de cultura Afro-Brasileira – n.º 8</i> (1976), de Rubem Valentim.	24
Figura 2.5 – Maurits Cornelis Escher	25
Figura 2.6 – Rotação horária e anti-horária do ângulo θ	28
Figura 2.7 – Movimento de rotação	28
Figura 2.8 – Ordem de simetria de rotação do quadrado	29
Figura 2.9 – Reflexão do ponto A em torno da reta r	31
Figura 2.10–Reflexão do ponto A em torno do ponto P	31
Figura 2.11–Reflexão em relação a uma reta	32
Figura 2.12–Reflexão em relação a um ponto	32
Figura 2.13–Translação definida pelo $\vec{v}$	33
Figura 2.14–Translação de Figura	33
Figura 2.15–A obra <i>Trindade</i> , de Masaccio	37
Figura 2.16–Um cubo em Perspectiva Cônica com um ponto de fuga	38
Figura 2.17–Esquema projetivo em a <i>Última Ceia</i> de Leonardo Da Vinci	38
Figura 2.18–A <i>Escola de Atenas</i> de Raffaello Sanzio	38
Figura 2.19–Um cubo em Perspectiva Cônica com dois pontos de fuga	39
Figura 2.20–Perspectiva com dois pontos de fuga	39
Figura 2.21–Um cubo em Perspectiva Cônica com três pontos de fuga	40
Figura 2.22– <i>Ascending and Descending</i> M. C. Escher, 1960	40
Figura 3.1 – <i>Systematic Study</i>	42
Figura 3.2 – Recriação no GeoGebra da obra <i>Systematic Study</i>	43
Figura 3.3 – Figura demonstrativa feita no Canva	43
Figura 3.4 – Recriação no GeoGebra da obra <i>Systematic Study</i>	44
Figura 3.5 – Recriação no GeoGebra da obra <i>Systematic Study</i>	45
Figura 3.6 – Recriação no GeoGebra da obra <i>Systematic Study</i>	45
Figura 3.7 – Recriação no GeoGebra da obra <i>Systematic Study</i>	46
Figura 3.8 – Recriação no GeoGebra da obra <i>Systematic Study</i>	47
Figura 3.9 – Recriação no GeoGebra da obra <i>Systematic Study</i>	47
Figura 3.10–Recriação no GeoGebra da obra <i>Systematic Study</i>	47
Figura 3.11–Recriação no GeoGebra da obra <i>Systematic Study</i>	48
Figura 3.12–Recriação no GeoGebra da obra <i>Systematic Study</i>	48
Figura 3.13–Recriação no GeoGebra da obra <i>Systematic Study</i>	48

Figura 3.14– <i>Dwarves</i>	49
Figura 3.15–Recriação no GeoGebra da obra <i>Dwarves</i>	49
Figura 3.16–Figura demonstrativa feita no Canva	50
Figura 3.17–Recriação no GeoGebra da obra <i>Dwarves</i>	50
Figura 3.18–Recriação no GeoGebra da obra <i>Dwarves</i>	51
Figura 3.19–Recriação no GeoGebra da obra <i>Dwarves</i>	52
Figura 3.20–Recriação no GeoGebra da obra <i>Dwarves</i>	52
Figura 3.21–Recriação no GeoGebra da obra <i>Dwarves</i>	53
Figura 3.22–Recriação no GeoGebra da obra <i>Dwarves</i>	53
Figura 3.23–Recriação no GeoGebra da obra <i>Dwarves</i>	54
Figura 3.24–Recriação no GeoGebra da obra <i>Dwarves</i>	54
Figura 3.25–Recriação no GeoGebra da obra <i>Dwarves</i>	54
Figura 3.26–Recriação no GeoGebra da obra <i>Dwarves</i>	55
Figura 3.27– <i>Symmetry Watercolor 70 Butterfly</i>	55
Figura 3.28–Recriação no GeoGebra da obra <i>Symmetry Watercolor 70 Butterfly</i> . .	56
Figura 3.29–Figura demonstrativa feita no Canva	57
Figura 3.30–Recriação no GeoGebra da obra <i>Symmetry Watercolor 70 Butterfly</i> . .	57
Figura 3.31–Recriação no GeoGebra da obra <i>Symmetry Watercolor 70 Butterfly</i> . .	58
Figura 3.32–Recriação no GeoGebra da obra <i>Symmetry Watercolor 70 Butterfly</i> . .	58
Figura 3.33–Recriação no GeoGebra da obra <i>Symmetry Watercolor 70 Butterfly</i> . .	59
Figura 3.34–Recriação no GeoGebra da obra <i>Symmetry Watercolor 70 Butterfly</i> . .	60
Figura 3.35–Recriação no GeoGebra da obra <i>Symmetry Watercolor 70 Butterfly</i> . .	60
Figura 3.36–Recriação no GeoGebra da obra <i>Symmetry Watercolor 70 Butterfly</i> . .	60
Figura 3.37–Recriação no GeoGebra da obra <i>Symmetry Watercolor 70 Butterfly</i> . .	61
Figura 3.38–Criação própria	62
Figura 3.39–Criação própria	62
Figura 3.40–Criação própria	63
Figura 3.41–Criação própria	63
Figura 3.42–Criação própria	64
Figura 3.43–Criação própria	64
Figura 3.44–Criação própria	65
Figura 3.45–Criação própria	65
Figura 3.46–Criação própria	65
Figura 3.47–Criação própria	66

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	14
1.1	Definição do Problema	16
1.2	Objetivo Geral	16
1.2.1	Objetivos Específicos	16
1.3	Aspectos Metodológicos	16
2	FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA	18
2.1	Relações entre a Geometria e a Arte	18
2.2	Artistas e as suas obras de artes	21
2.2.1	Um pouco sobre Maurits Cornelis Escher	25
2.3	Transformações Geométricas	26
2.3.1	Simetria Rotacional	27
2.3.2	Simetria de Reflexão	30
2.3.3	Simetria de Translação	32
2.4	Pavimentação de superfícies	34
2.5	Projeções Perspectivas	36
3	DISCUSSÃO E RESULTADOS	42
3.1	Systematic Study (1936)	42
3.2	Dwarves (1938)	49
3.3	Symmetry Watercolor 70 Butterfly (1948)	55
3.4	Aplicando os conceitos em uma obra autoral	61
4	CONSIDERAÇÕES FINAIS	67
	REFERÊNCIAS	69

1 INTRODUÇÃO

O ensino de matemática sempre possuiu ligações com o cotidiano, entretanto, a maior parte dos estudantes apresentam questionamentos de onde irá ser usado os conteúdos vistos nessa disciplina e qual a importância de contemplarmos esses conceitos. Com base nesses questionamentos, um modo de responder aos mesmos é através da Geometria que é vista com facilidade em diversas áreas e de forma concreta ou até mesmo dinâmica. Porém, quando são abordados esses conteúdos geométricos, em grande maioria, falta conectá-los com situações reais e conseqüentemente com o dia-a-dia perseverando suas limitações ao teórico. Nesse contexto, Zago e Flores (2010) ressaltam que os conceitos geométricos abordados no contexto escolar são excessivamente teóricos, distanciando-se de situações práticas e de um ensino significativo para os alunos, assim, criando um cenário favorável para uma possível desmotivação e conseqüentemente limitações no processo de aprendizagem.

Bicudo e Garnica (2001 apud Resende e Mesquita (2013)) apontam que o ensino de matemática não deve se limitar apenas a teorias, mas, deve se adaptar e criar novas técnicas no decorrer do tempo e de acordo com as mudanças e necessidades da atualidade. Desse modo, o olhar acerca da Geometria não deve se restringir apenas às fórmulas, e sim, relacionar esta disciplina a conceitos que possuam relações significativas, como visualização de figuras, inserção de eixos e simetrias e outros conceitos geométricos, favorecendo uma compreensão mais concreta e visual dos conceitos. Destacando o uso imagético, Filho (2013b) evidencia que as imagens podem ser um potenciador no ensino-aprendizagem da Geometria em Matemática, contudo, elas não são tão abordadas no contexto educacional, predominando, muitas vezes, apenas a linguagem verbal. Nesse sentido, a Geometria é um objeto de estudo que vai além do teórico, e sim uma área que se faz necessário a utilização de recursos visuais juntamente com a composição escrita.

Na atualidade, estamos vivenciando uma era de avanços tecnológicos, logo, torna-se necessário que a educação acompanhe esse ritmo, de modo que alunos e professores precisam constantemente se habituar a esta realidade, portanto, estes recursos tecnológicos podem contribuir de modo efetivo no ensino de Geometria por meio de softwares que possibilitam a visualização e construção de figuras geométricas. De acordo com Modesto (2015), diversos autores têm buscado inovar no ensino, alcançando a eficiência dos alunos nos dias atuais, por meio de abordagens que promovem motivação e melhoria no processo de aprendizagem. Dessa maneira, esses recursos contribuem para compreensão mais significativa dos conteúdos.

No entanto, mesmo a matemática sendo uma das áreas mais presentes no nosso cotidiano, a maioria dos alunos possuem dificuldades em relacionar os assuntos vistos no contexto escolar com as situações do dia-a-dia, especialmente no ensino e aprendizagem de Geometria. Mesmo a Geometria sendo um dos objetos de estudo que está bem relacionado a aspectos que envolvem a visualização, ainda persistem barreiras em relacioná-la e compreendê-la. Alguns pontos que se deve apontar é a falta de interesse por parte do alunado e um foco excessivo no ensino teórico.

Nascimento (2019) aponta que um dos possíveis motivos para o desinteresse dos estudantes com os conteúdos de Geometria se deve a falta de metodologias significativas, que pudessem gerar motivação por parte dos alunos em querer investigar e aprofundar os estudos. Além disso, ressalta-se que muitos profissionais não possuem aptidão com os assuntos de Geometria, limitando-se somente ao básico das fórmulas e ao tradicional ensino no quadro branco, desse modo, criando limitações metodológicas para esta disciplina que está interligada às formas visuais, conceitos e propriedades. Nesse contexto, essas problemáticas contribuem para o baixo desempenho dos alunos, não somente aos conteúdos atribuídos em geometria, mais para uma rejeição total da disciplina de matemática que particularmente uma grande maioria encara como se fosse um “bicho de sete cabeças”. Além disso, quando a aprendizagem não é significativa, dificulta o processo dos estudantes em atribuir possibilidades de aplicar os conceitos em outras áreas ou na prática diária.

Nesse sentido, é necessário mencionar como o uso da arte pode auxiliar para o ensino e aprendizagem de Geometria, além de contribuir de modo simultâneo com a reaproximação entre as disciplinas no meio escolar. Segundo Ferreira (2013), a articulação entre Matemática e Arte, possibilita que os conteúdos matemáticos possuam uma contextualização em um ambiente artístico, tornando a aprendizagem mais significativa e despertando interesse dos estudantes acerca da compreensão dos conceitos. Um exemplo é como as obras artísticas auxiliam para a visualização de formas, composições visuais, representações e transformações geométricas, proporcionando uma abordagem mais visual e significativa da Geometria.

Além desse contexto, ressalta a tradição do Litema, cultura preservada pelas mulheres do povo Sotho em alguns povoados. Essa tradição consiste na decoração das paredes das casas com barro, esterco e tintas naturais, incorporando, atualmente, também o uso de tintas comerciais. Os desenhos são elaborados com os dedos e ferramentas simples, contudo o uso da matemática está vinculado aos padrões geométricos formados e pelas composições que evidenciam os princípios de simetria. Diante disso, esse tipo de tradição demonstra que os conceitos matemáticos podem ser identificados em práticas artísticas culturais, destacando o potencial da arte como um riquíssimo recurso didático para o ensino da Geometria.

O uso do *software* Geogebra como recurso didático, aliado às recriações das obras de Escher, favorece a compreensão das transformações geométricas de forma visual e dinâmica. Conforme afirma Araújo (2023), o GeoGebra é uma ferramenta que proporciona facilidade de manuseio, dispondo ao estudante maior autonomia e contribuindo para o desenvolvimento do pensamento crítico. Além disso, as tesselações presentes nas obras de Escher permitem identificar as isometrias, como rotações, reflexões e translações. Associado a esse contexto, o GeoGebra possibilita que os estudantes construam, manipulem e verifiquem essas transformações de maneira dinâmica, explorando esses conceitos geométricos de transformações e estimulando a criatividade durante esse processo de aprendizagem.

1.1 DEFINIÇÃO DO PROBLEMA

Como as obras de Escher podem ser utilizadas para mediar a aprendizagem de conhecimentos geométricos?

1.2 OBJETIVO GERAL

Analisar os conceitos geométricos presentes em obras selecionadas de Maurits Cornelis Escher e como elas podem ser utilizadas para o ensino das transformações geométricas.

1.2.1 Objetivos Específicos

Identificar como a matemática é utilizada na elaboração de obras de arte;

Identificar os conceitos e as transformações geométricas presentes nas obras selecionadas de Maurits Cornelis Escher;

Reconstruir, por meio do software GeoGebra, elementos geométricos das obras analisadas, evidenciando as propriedades das isometrias e das tesselações presentes em suas composições.

1.3 ASPECTOS METODOLÓGICOS

Esta pesquisa possui uma abordagem qualitativa, a qual permitirá a análise das obras de Maurits Cornelis Escher voltados à Geometria. Conforme Gil (1999), a pesquisa qualitativa possui um caráter subjetivo em relação ao objeto de estudo, fundamentando-se na dinâmica e abordagem do problema investigado, tendo como objetivo descrever e interpretar fenômenos em toda a sua complexidade. De maneira complementar, Mayring (2002) compreende a pesquisa qualitativa como possuindo um caráter flexível e não padronizado, adaptando-se às particularidades dos objeto investigado. Além disso, destaca-

se pelo seu caráter comunicativo, processual e reflexivo, permitindo a análise das práticas, impactos e implicações desse recurso no contexto educacional.

Além disso, o estudo possui caráter essencialmente exploratório. Segundo Gil (1999, p. 27), esse tipo de pesquisa tem como principal finalidade “desenvolver, esclarecer e modificar conceitos e idéias, tendo em vista a formulação de problemas mais precisos ou hipóteses pesquisáveis para estudos posteriores”. Nesse contexto, este estudo busca analisar as obras de Escher como recurso para a compreensão de conceitos geométricos e sua aplicação no contexto educacional, considerando suas contribuições para o processo de ensino e aprendizagem da matemática.

2 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

Quando se trata de Geometria e arte, é importante mencionar as transformações geométricas, pois existe uma amplitude de possibilidades de estabelecer suas relações com o meio artístico, a partir de sua presença na natureza e em obras existentes em museus, mostrando a beleza e a harmonia entre essas áreas. Destaca-se o uso dos diferentes tipos de simetria em obras de arte como um potencializador de motivação para os estudantes. Dentre os artistas que exploram essas relações, temos Paul Cézanne (1839–1906), que, em seus trabalhos utilizou formas geométricas para a composição das suas obras, estas formas estão centralizadas em cones, cilindros e esferas. Outro artista que utilizou apenas o uso de formas geométricas, particularmente em quadriláteros, é o pintor holandês Piet Mondrian (1872-1944). Ademais, destaca-se o objeto de estudo deste trabalho, Maurits Cornelis Escher, cujas obras evidenciam diversas transformações geométricas. Desse modo, seus trabalhos podem ser utilizados como recursos didáticos quando estão sendo trabalhados conteúdos de simetria, translação, rotação, entre outros.

2.1 RELAÇÕES ENTRE A GEOMETRIA E A ARTE

A Geometria e a arte estabelecem uma relação que pode ser observada em diversos períodos históricos e manifestações artísticas. Desde as pinturas rupestres e as primeiras construções arquitetônicas até as produções contemporâneas, conceitos geométricos, com destaque para a proporção, a simetria, a perspectiva, os padrões geométricos e as transformações no plano, têm sido empregados tanto para organizar espacialmente as composições quanto para produzir efeitos estéticos e expressivos. Dessa forma, embora arte e matemática constituam campos distintos do conhecimento, ambas estabelecem um diálogo contínuo, evidenciando que conceitos geométricos também podem constituir importantes recursos para a criação artística. Nessa perspectiva, as próximas seções apresentam algumas dessas relações de forma concreta, abordando o uso da Geometria na Arte, a Razão Áurea e artistas cujas produções exploram esses conceitos, com ênfase nas obras de Escher.

2.1.0.1 Uso da Geometria na arte

Sabe-se que a relação entre Geometria e Arte não é um fenômeno recente, mas acompanha o desenvolvimento das civilizações, de maneira a evidenciar que o conhecimento geométrico não esteve vinculado apenas à resolução de problemas práticos, mas também à necessidade humana de organizar formas e produzir representações visualmente equilibradas. Conforme destaca (Boyer, 2010, p. 5), “o desenvolvimento da Geometria pode também ter sido estimulado por necessidades práticas de construção e demarcação de terras, ou por sentimentos estéticos em relação a configurações e ordem.”

Essa aproximação entre Geometria e Arte permaneceu ao longo da história, sendo observada em diferentes períodos nos quais se destacavam as manifestações artísticas. Ferreira, Oliveira e Lima (2024) destacam que a utilização de princípios matemáticos na produção artística evidencia a estreita relação entre essas duas áreas do conhecimento. Nesse sentido, Nascimento (2017, *apud* Ferreira, Oliveira e Lima (2024)) afirma:

Ao longo do tempo, vários foram os artistas que utilizaram de princípios matemáticos para dar vida a obras de arte, assim como em vários outros elementos através da história o que demonstra a relação pertinente entre essas duas áreas do conhecimento (Nascimento, 2017, p. 20 *apud* (Ferreira; Oliveira; Lima, 2024, p. 2)).

A utilização de conceitos matemáticos, especialmente geométricos, na arte não se restringe ao processo de elaboração de obras, mas também interfere na forma como elas são compreendidas. Nessa perspectiva, os estudos de Ferreira, Oliveira e Lima (2024) dialogam com Berro (2008), uma vez que ambos evidenciam a Geometria como um elemento fundamental da linguagem artística.

Essa relação manifesta-se de maneiras diferentes na arquitetura e na pintura, áreas em que conceitos como simetria, proporção e harmonia são objetos basilares para a construção das composições de obras artísticas. A utilização desses princípios evidencia que a matemática não se limita apenas a cálculos e demonstrações, mas também oferece instrumentos para a organização do espaço, das formas e das relações com elementos visuais. Como observam Ferreira, Oliveira e Lima (2024), a presença desses conceitos ao longo da história reforça o caráter interdisciplinar existente na Geometria e arte, aspecto que possibilita compreender como diferentes artistas recorreram ao conhecimento matemático para produzir obras visualmente equilibradas.

Haja vista a utilização da matemática na produção de obras artísticas, (Berro, 2008, p. 42) aprofunda essa discussão ao afirmar que “a imagem de uma obra de arte existe em algum lugar entre percepções: entre aquilo que o artista imaginou e aquilo que traduziu na sua obra; entre aquilo que vemos e sentimos e aquilo que falamos dela.” Essa perspectiva dialoga com as discussões feitas por Ferreira, Oliveira e Lima (2024) ao evidenciar que os princípios geométricos presentes nas produções artísticas não apenas orientam sua elaboração, mas também favorecem uma interpretação mais ampla da linguagem visual presente na obra.

As discussões apresentadas demonstram que a Geometria desempenha papel fundamental na organização e na interpretação das produções artísticas, evidenciando sua contribuição para a construção da linguagem visual. Entre os diversos conceitos

matemáticos empregados ao longo da história da arte, destaca-se a Razão Áurea, cuja influência será discutida na seção seguinte e que, assim como outros princípios geométricos, auxilia na compreensão das relações entre matemática e arte.

2.1.0.2 Razão áurea

Entre os conceitos geométricos que mais se destacaram na relação entre a matemática e a arte, encontra-se a razão áurea. Ao longo de toda a história, essa proporção despertou o interesse de matemáticos, artistas e arquitetos, sendo frequentemente associada ao equilíbrio e à harmonia das formas. Segundo Livio (2006), a primeira definição clara daquilo que ficou posteriormente conhecido como razão áurea foi apresentada por Euclides, por volta de 300 a.C., em sua obra *Os Elementos*.

Ao explicar esse conceito, (Livio, 2006, p. 14) reproduz as palavras de Euclides ao afirmar que: “Diz-se que uma linha reta é cortada na razão extrema e média quando, assim como a linha toda está para o maior segmento, o maior segmento está para o menor.” A partir dessa definição, compreende-se que um segmento é dividido de maneira que a razão entre o comprimento total e sua maior parte seja igual à razão entre a maior e a menor parte, conforme representado na Figura 2.1.

Figura 2.1 – Segmento dividido em média e extrema razão



Fonte: Elaboração própria

Dessa forma, a divisão de um segmento em extrema e média razão pode ser descrita pela seguinte relação:

$$\frac{AB}{AC} = \frac{AC}{CB} = \phi$$

em que ϕ é a constante associada à razão áurea, cujo valor é $\frac{1+\sqrt{5}}{2} \simeq 1,618$.

Segundo Livio (2006), essa proporção pode ser observada tanto em fenômenos naturais quanto em produções humanas, incluindo as obras de arte. Como exemplo, o autor destaca a pintura *O Sacramento da Última Ceia*, de Salvador Dalí, cujas dimensões apresentam uma relação próxima à razão áurea. Dessa forma, esse conceito constitui um dos diversos exemplos da presença da Geometria na arte, demonstrando que relações matemáticas podem contribuir para a organização de composições artísticas. Essa relação pode ser observada na Figura 2.2.

Figura 2.2 – *O Sacramento da Última Ceia* (1955), de Salvador Dalí



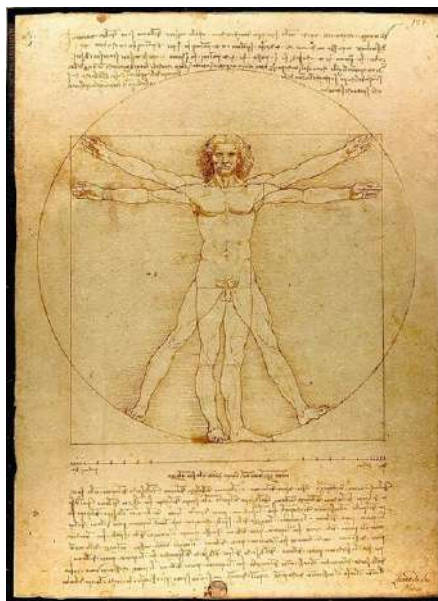
Fonte: Acervo do Nacional Gallery of Art

2.2 ARTISTAS E AS SUAS OBRAS DE ARTES

A utilização de conceitos geométricos nas produções artísticas pode ser observada nas obras de diferentes artistas, que recorreram à Geometria como elemento de organização, composição e expressão visual. Embora inseridos em contextos históricos distintos, Leonardo da Vinci, Rubem Valentim e Maurits Cornelis Escher evidenciam, por meio de suas obras, diferentes possibilidades de aproximação entre arte e matemática.

Entre os artistas que evidenciam essa aproximação, destaca-se Leonardo da Vinci (1452–1519), um dos principais representantes do Renascimento. Seus estudos sobre perspectiva, anatomia e proporcionalidade contribuíram para a construção de representações mais precisas do corpo humano e do espaço, proporcionando à obra *Homem Vitruviano* (c. 1480) o título de referência na relação entre arte e matemática.

Figura 2.3 – *O Homem Vitruviano* de Leonardo da Vinci



Fonte: Historia das Artes

Embora sua produção seja quase sempre associada à razão áurea, Livio (2006) ressalta que essa interpretação deve ser analisada com cautela, uma vez que as proporções as quais foram utilizadas por Leonardo estavam fortemente fundamentadas nas concepções de Vitrúvio e nos estudos de Luca Pacioli sobre proporcionalidade. Ainda assim, sua obra evidencia como princípios geométricos podem contribuir para a busca pelo equilíbrio e pela harmonia das composições artísticas.

A valorização da relação entre a Geometria e a arte não se limita ao período renascentista, marcado pelo desenvolvimento de obras fundamentadas na perspectiva, tema que será abordado em uma das seções seguintes desta fundamentação teórica. No século XIX, destaca-se Paul Cézanne (1839–1906), cuja produção artística propôs uma nova maneira de interpretar a natureza, buscando representar suas formas a partir de sólidos geométricos. Conforme afirma Filho (2013a, p. 66), “executando um estilo de arte que representa a natureza, Cézanne utiliza em suas composições figuras como o cone, o cilindro e a esfera”. Dessa forma, contribui-se para a mudança na forma de compreender a pintura, uma vez que a Geometria deixa de atuar apenas como um recurso na representação e perspectiva do espaço e passa a constituir a estrutura das formas retratadas.

Entre os artistas que estabelecem uma ponte entre Geometria e arte, também destaca-se, na arte moderna, Piet Mondrian (1872-1944), que passou a utilizá-la como fundamento da própria composição artística. Em sua produção artística, a Geometria deixa de desempenhar apenas uma função organizadora da composição e passa a constituir a própria linguagem visual das obras. De forma direta, as linhas horizontais e verticais,

as formas retangulares e as cores primárias são empregadas pelo artista na busca pelo equilíbrio, pela ordem e pela harmonia. Ao refletir sobre seu processo criativo, o próprio Mondrian afirma:

Excluí cada vez mais de minhas pinturas as linhas curvas, até que finalmente minhas composições consistiriam unicamente em linhas horizontais e verticais, que formam cruces, cada uma separada e destacada da outra. Observando o mar, o céu e as estrelas busquei definir a função plástica através de uma multiplicidade de verticais e horizontais que se cruzavam. Impressionado pela imensidão da natureza, tratava de expressar sua expansão, calma e unidade. Ao mesmo tempo, estava completamente convencido que a expressão visível da natureza é ao mesmo tempo sua limitação; as linhas verticais e horizontais são a expressão de forças opostas; isto existe em todas as partes e tudo o que domina sua ação recíproca constitui a vida. Reconheci que o equilíbrio de qualquer aspecto da natureza reside na equivalência dos elementos que se opõem (Mondrian, 1957, *apud* (Filho, 2009, p. 77)).

A reflexão apresentada pelo artista evidencia que a organização geométrica de suas composições resulta de uma concepção artística bem fundamentada e na busca de um equilíbrio entre os elementos opostos. Dessa maneira, a Geometria deixa de ser apenas um recurso técnico de representação e passa a constituir o princípio organizador da linguagem visual, aproximando conceitos matemáticos da criação artística.

Em um contexto de diversidade cultural, Rubem Valentim (1922–1991) estabeleceu uma relação especial entre Geometria e cultura brasileira. Em obras como *Emblema logotipo poético de cultura Afro-Brasileira – nº 8* (1976), o artista reorganiza símbolos das religiões de matriz africana em composições estruturadas por linhas, triângulos, quadrados, círculos e diferentes eixos de simetria. Dessa forma, a Figura 2.4 ilustra um exemplo da aplicação de formas geométricas na composição artística.

Figura 2.4 – *Emblema logotipo poético de cultura Afro-Brasileira – n.º 8* (1976), de Rubem Valentim.



Fonte: (Valentim, 1976), Acervo do MASP

Conforme destacam Ramos e Costa (2024), muitos desses signos possuem natureza originalmente geométrica e são reinterpretados pelo artista por meio de uma organização detalhada das formas, o que possibilita a exploração de diversos conceitos geométricos presentes na Educação Básica. Dessa maneira, a Geometria deixa de exercer apenas uma função estética e passa também a expressar aspectos históricos, culturais e identitários.

Entretanto, é na produção de Maurits Cornelis Escher (1898–1972) que a relação entre arte e Geometria se manifesta de forma mais intensa. O artista, reconhecido mundialmente por suas gravuras, xilogravuras e litografias, dedicou parte de sua produção à exploração de padrões geométricos, tesselações e ilusões visuais, de forma que essas características despertam o interesse de pesquisadores tanto da arte quanto da matemática. Alves (2014, p. 13) afirma que:

Admirar as obras de Escher é uma experiência única e inesquecível, pois elas desafiam o seu cérebro, provocando no espectador uma vontade enorme de saber como são feitos os desenhos. Para alguns, suas obras nasceram com um passe de mágica, mas não, o que elas têm como bases são refinados e complexos conceitos de Geometria (Alves, 2014, p. 13).

Dessa forma, as pesquisas desenvolvidas por Alves (2014), Mendes (2015) e Schunemann, Santos e Battisti (2019) convergem ao demonstrar que Escher, em suas obras, utilizou conceitos matemáticos de forma intuitiva, mesmo sem possuir formação específica em matemática. Inicialmente interessado pela arquitetura, o artista passou a dedicar-se às artes gráficas após a influência de Samuel Jessurun de Mesquita, de quem aprendeu

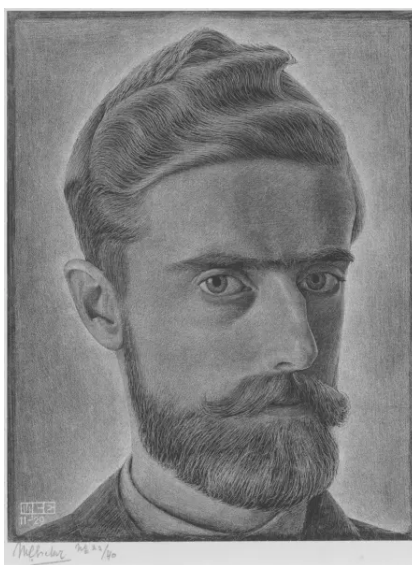
as técnicas de xilogravura e litografia (Mendes, 2015). Posteriormente, as visitas feitas por Escher ao Palácio de Alhambra despertaram seu interesse pelas divisões regulares do plano, conhecidas como tesselações, característica que marcaria definitivamente sua produção artística (Alves, 2014).

Para além das tesselações, as gravuras de Escher também apresentam uma ampla variedade de transformações geométricas. Segundo Alves (2014), é possível identificar em suas obras as translações, rotações e reflexões empregadas na construção de padrões que permitem preservar distâncias e produzir efeitos visuais complexos. Nesse sentido, as autoras Schunemann, Santos e Battisti (2019) acrescentam que essas transformações, denominadas isometrias, caracterizam-se como ferramentas importantes para a compreensão da Geometria plana, permitindo que os conceitos matemáticos sejam explorados de maneira intuitiva. Assim, as obras de Escher apresentam significativo potencial didático, especialmente quando se trata do ensino das transformações geométricas, aspecto que justifica a escolha do objeto central desta pesquisa.

2.2.1 Um pouco sobre Maurits Cornelis Escher

Um pouco sobre a vida de Maurits Cornelis Escher, ou, como é conhecido popularmente, como Escher, foi um grande artista gráfico, nascido no dia 17 de junho de 1898, em Leeuwarden, nos Países Baixos. Ele era filho de um engenheiro hidráulico, assim, cresceu imerso em um ambiente que proporcionava contato com a Matemática e a Ciência, o que posteriormente impactou seus trabalhos artísticos. Nesse sentido, Escher tornou-se uma referência na arte e na Geometria até os dias atuais, por suas obras serem constituídas por conceitos geométricos, perspectivas e ilusões de ótica.

Figura 2.5 – Maurits Cornelis Escher



Fonte: M. C. Escher Company (2026)

Segundo Silva (2018), durante o período de 1919 a 1922, na Holanda, Escher estudou na Escola de Arquitetura e Artes Decorativas de Haarlem. Contudo, mesmo após se formar em Arquitetura, ele não possuía interesse em permanecer nessa área. Devido a isso, Escher inclinou seus estudos às artes gráficas e decorativas, tendo o apoio de seu professor, Samuel Jessurun de Mesquita, inclusive o apoio total de seus pais, que contribuíram até mesmo financeiramente com esse interesse dele. Mesmo após seu casamento com Jetta, em 1924, com quem teve três filhos.

Após terminar seus estudos, Escher, com o intuito de conhecer o mundo, viajou para diversos países, como Espanha, Itália, entre outros. Como afirma Mendes (2015), “as passagens por todos esses lugares, experimentando diferentes culturas, influenciaram a mente criativa de Escher, em especial a visita ao complexo de Alhambra, em Granada, na Espanha, onde foi apresentado à arte geométrica muçulmana aplicada nos azulejos”. Foi justamente essa viagem que despertou seu interesse pelas tesselações, tornando-se uma fonte de inspiração para suas futuras obras. Com esse contato e, com o decorrer dos anos, passou a desenvolver padrões geométricos cada vez mais complexos, deixando de lado as figuras abstratas e substituindo-as por representações de animais e outros seres extraordinários, de modo que se encaixavam perfeitamente no plano.

No ano de 1968, foi criada a *M.C. Escher Foundation*¹, pelo próprio artista, com o intuito de preservar suas obras. Além disso, como afirma Pio (2023), a fundação tinha também o objetivo de divulgar e publicar livros, além de realizar exposições sobre o artista. De acordo com a *M.C. Escher Foundation*, Maurits produziu 448 obras, divididas em litografias, xilogravuras e gravuras em madeira, além de mais de 2.000 esboços e desenhos. O site divide essas obras em diversas categorias, como Construções Impossíveis, Simetria, Impressões de Transformação, entre outras.

Escher, mesmo com sua saúde debilitada, de modo a limitar seus trabalhos, produziu obras até o final de sua vida. Ele faleceu aos 73 anos de idade, no dia 27 de março de 1972, em Laren, na Holanda, deixando um legado artístico incrível, que inspira e intriga as pessoas até hoje. Seu trabalho tornou-se uma referência para tratar a Arte junto com a Matemática, tornando a aprendizagem mais significativa, além de despertar a criatividade e a curiosidade dos estudantes.

2.3 TRANSFORMAÇÕES GEOMÉTRICAS

Ao abordar as transformações geométricas na Matemática, observa-se que elas são classificadas como isométricas e não isométricas. As isométricas são definidas pelas que preservam a distância entre os pontos de uma figura, de modo a manter os ângulos,

¹ Para mais informações sobre a Fundação de M.C. Escher, acessar o link: <https://mcescher.com/>

os comprimentos dos seguimentos e a forma geométrica. Partindo desse conceito, as isométricas são constituída pelas translações, rotações e reflexões, que, em sua essência, preservam a distância entre pontos, desse modo, preservando ângulos, comprimento dos seguimentos e as formas geométricas.

Em contrapartida, as transformações não isométricas são aquelas que não preservam todas as propriedades métricas da figura original, como a área, perímetro, as distâncias entre pontos, os ângulos e, conseqüentemente, suas medidas. Entretanto, elas podem manter determinadas características, como a forma, em alguns casos, estando relacionadas à alteração do tamanho da figura. Um dos principais exemplos desse tipo de transformação é a homotetia, que consiste na ampliação ou na redução de uma figura, porém preservando suas proporções sem alterações. Nas palavras de Luz (2007, p. 108), “Por esse motivo, as propriedades das figuras transformadas por uma homotetia se mantêm inalteradas, com exceção do tamanho da figura”.

Este estudo terá como foco as transformações que, em sua composição, preservam a distância entre pontos, ou seja, as isométricas. No decorrer do capítulo, serão vistas essas definições com base nos autores Pulino e Menezes (2020), sobre as simetrias, denominadas simetria rotacional, reflexiva e translacional.

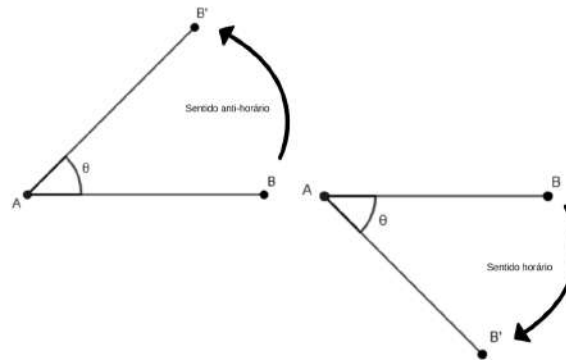
2.3.1 Simetria Rotacional

Antes de abordar os conceitos de simetria de rotação, vale destacar as propriedades da rotação, as quais preservam as dimensões, de modo a alterar apenas sua orientação em relação ao plano. Essa transformação tem como base girar qualquer figura em torno de um ponto fixo, conhecido como centro de rotação, além de estabelecer um determinado ângulo e sentido de rotação, no caso, os sentidos anti-horário e horário. Segue, a seguir, uma definição formal:

Considere no plano um ponto fixo O , um ponto P e um ângulo θ . A *rotação* com centro no ponto O de ângulo θ , tanto no sentido horário quanto no sentido anti-horário, leva o ponto P em um ponto P' através de um arco de circunferência, de modo que os comprimentos dos segmentos OP e OP' sejam iguais, isto é, $\overline{OP} = \overline{OP'}$ (Pulino; Menezes, 2020, p. 67).

Assim, ao realizar a rotação de qualquer figura ou ponto com um determinado ângulo e sentido de rotação, a distância entre o ponto e o centro de rotação é conservada. Logo, a figura resultante é igual à figura original, preservando suas medidas.

Figura 2.6 – Rotação horária e anti-horária do ângulo θ

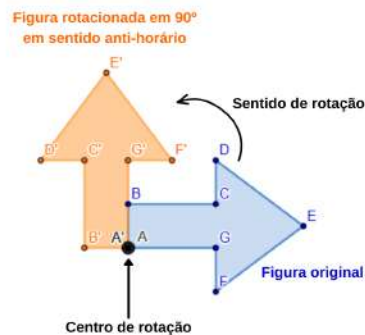


Adaptada de Pulino e Menezes (2020, p. 67)

Com base nisso, para que a rotação seja representada, são necessários três elementos essenciais: o centro de rotação fixo, o ângulo de rotação e o sentido de movimento, que se divide em horário e anti-horário.

Nesse sentido, a simetria rotacional é conhecida pela característica de o objeto ou figura ser girado em torno de um ponto fixo, mantendo a mesma aparência enquanto completa uma volta inteira de 360° .

Figura 2.7 – Movimento de rotação



Fonte: Elaboração própria

Pulino e Menezes (2020) define esta simetria da seguinte maneira:

Uma figura possui *simetria de rotação* se permanece inalterada (igual à figura original, ocupando o mesmo lugar geométrico no plano) quando realizamos uma rotação em torno de um ponto fixo (centro de rotação) de um ângulo menor do que 360° . Caso a figura retorne a sua posição original somente com uma rotação de 360° , dizemos que a figura não possui simetria de rotação (Pulino; Menezes, 2020, p. 100).

Vale ressaltar que nem toda forma possui simetria rotacional; uma figura só vai possuir essa simetria se, ao ser girada por um ângulo inferior a 360° , ao completar o giro, coincidir exatamente com sua posição original. Isso é visto por meio da ordem de simetria de rotação; com base na definição de Pulino e Menezes (2020), temos:

*A ordem de simetria de rotação é o número de rotações de um mesmo ângulo (nas quais a figura permanece inalterada) que devemos relizar até que a figura retorne a sua posição original, isto é, durante uma volta completa de 360° . Esse ângulo é denominado *ângulo de simetria de rotação* (Pulino; Menezes, 2020, p. 100).*

Assim, é válido dizer que a ordem da simetria de rotação corresponde ao número de posições distintas que a figura assume ao completar a volta de 360° , incluindo a própria rotação de 360° , o que leva a figura a coincidir consigo mesma ao completar o giro em torno do centro. Um modo de verificar se o polígono regular está neste parâmetro é por meio da divisão de 360° pelo menor ângulo de rotação θ , assim, a ordem n é dada da seguinte maneira:

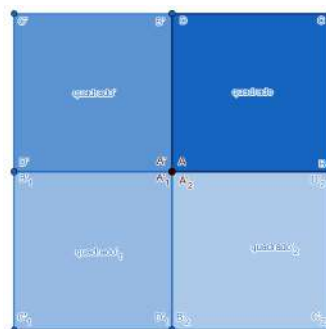
$$n = \frac{360^\circ}{\theta}$$

Logo, a fórmula é válida no momento em que θ representa o menor ângulo de rotação que faz a figura coincidir consigo mesma. Como exemplo, para o quadrado regular, que possui como menor ângulo de rotação 90° , obtemos o seguinte:

$$n = \frac{360^\circ}{90^\circ} = 4$$

Obtém-se que o quadrado possui ordem 4, com os ângulos de 90° , 180° , 270° e 360° para retornar à posição inicial. Sendo assim, isso indica que ele possui quatro posições coincidentes, conforme indicado na Figura 2.8 que tem o ponto **A** como centro de rotação.

Figura 2.8 – Ordem de simetria de rotação do quadrado



Fonte: Elaboração própria

Nesse sentido, a ordem da simetria rotacional indica a quantidade de repetições angulares da figura em torno de um ponto fixo central, sendo de suma importância para analisar padrões geométricos.

2.3.2 Simetria de Reflexão

A simetria reflexiva pode ser descrita como a divisão de uma figura em relação a uma reta central, que em ambos os lados devem ser iguais. Nas palavras de Mendes (2015, p. 13): “Simetrias axiais ou em relação a retas são aquelas onde pontos, objetos ou partes de objetos são a imagem espelhada um do outro em relação à reta dada, chamada eixo de simetria”.

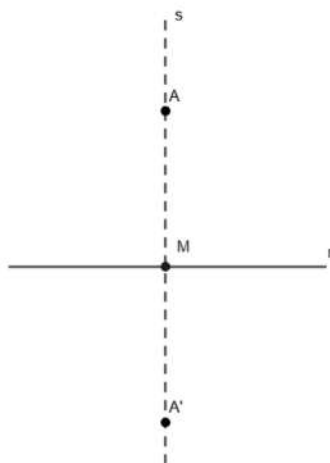
Pela definição de Pulino e Menezes (2020, p. 78), vem-se:

Dizemos que uma figura possui simetria de reflexão se existe pelo menos uma reta (eixo de simetria) que divide essa figura em duas partes, de modo que cada uma das partes seja a reflexão da outra em relação a essa reta. Dizemos que uma figura tem simetria bilateral se ela possui um único eixo de simetria (Pulino; Menezes, 2020, p. 78).

Ressalta-se que a transformação geométrica de reflexão é dividida em reflexão em relação a uma reta, também denominada reflexão axial, e reflexão em relação a um ponto, denominada como simetria central. Por definição, em relação à reta, temos:

Considere no plano uma reta r e um ponto A que não pertence à reta r . Definimos a reflexão do ponto A em torno da reta r . Para isso, traçamos uma reta s passando pelo ponto A e que seja perpendicular à reta r . Em seguida, escolhemos o ponto A' pertencente à reta s de modo que a reta r seja mediatriz do segmento AA' (Pulino; Menezes, 2020, p. 64).

Figura 2.9 – Reflexão do ponto A em torno da reta r

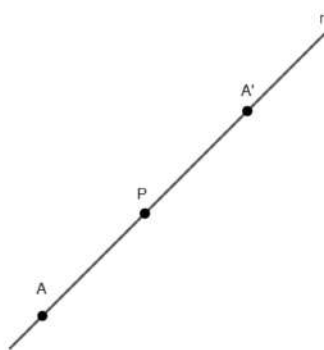


Fonte: Adaptada de Pulino e Menezes (2020)

Em relação a reflexão em relação a um ponto, vem-se :

Considere no plano um ponto A e um ponto P. Definimos a reflexão do ponto A em torno do ponto P. Para isso, traçamos a reta r passando pelo ponto A e pelo ponto P. Em seguida, escolhemos o ponto A' pertencente a reta r de modo que o comprimento do segmento PA' seja igual ao comprimento do segmento AP (Pulino; Menezes, 2020, p. 63).

Figura 2.10 – Reflexão do ponto A em torno do ponto P

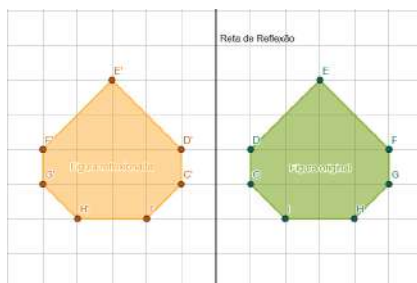


Fonte: Adaptada de Pulino e Menezes (2020)

Assim, a reflexão em torno de uma reta ou de um ponto tem a característica de criar uma figura espelhada. Desse modo, cada ponto original e seu correspondente refletido possuem a propriedade de manter distância constante em relação à reta de simetria. Ademais, quando a reflexão ocorre em torno de uma reta, forma-se um ângulo

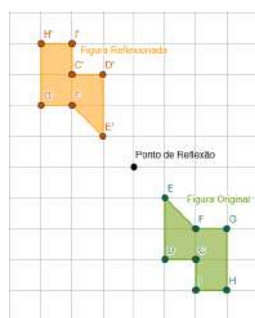
perpendicular, ou seja, um ângulo de 90° . Como afirma Pio (2023, p. 39), “[...] O que ocorre nesse tipo de transformação é apenas a inversão da imagem, como se a figura original estivesse se observando em um espelho.”

Figura 2.11 – Reflexão em relação a uma reta



Fonte: Elaboração própria

Figura 2.12 – Reflexão em relação a um ponto



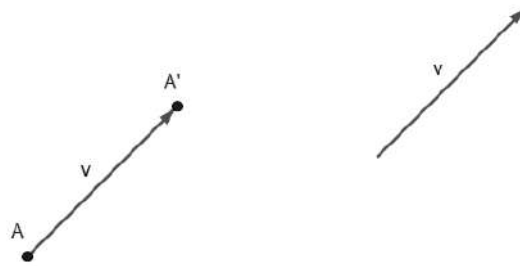
Fonte: Elaboração própria

Dessa forma, a simetria de reflexão, como mostrada nas figuras acima, preserva as propriedades das medidas, como distâncias, ângulos e perímetros, de sua forma original, de modo a modificar apenas a orientação no plano, seja em relação a uma reta ou a um ponto.

2.3.3 Simetria de Translação

Antes de abordarmos a simetria de translação, vale ressaltar as definições de translação. Pela definição de Pulino e Menezes (2020): “Considere no plano um vetor $\vec{v}$ e um ponto A. A *translação* do ponto A definida pelo vetor $\vec{v}$, é o ponto A' na extremidade do $\vec{v}$ considerando o vetor $\vec{v}$ com origem no ponto A” (Pulino; Menezes, 2020, p. 62).

Vale ressaltar que o segmento AA' conserva o mesmo comprimento do vetor $\vec{v}$. A figura abaixo representa a definição de Pulino e Menezes; entretanto, nela o vetor $\vec{v}$ é representado pela letra v.

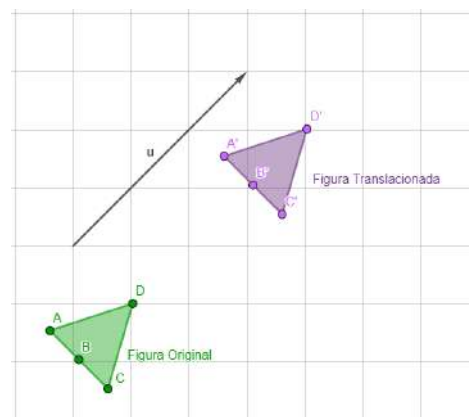
Figura 2.13 – Translação definida pelo $\vec{v}$ 

Fonte: Adaptada de Pulino e Menezes (2020)

Ao abordar a simetria de translação, resalta-se sua característica de transladar os pontos de uma figura na mesma direção, conservando suas distâncias; por isso, ela é associada a um vetor. Nas palavras de Mendes (2015, p. 14): “Transladar um objeto significa movê-lo, sem girá-lo ou refleti-lo. A simetria translacional é uma correspondência entre pontos no plano de tal modo que a diferença entre eles é sempre um vetor fixo.”

Pela definição de Pulino e Menezes (2020), temos o seguinte: “Dizemos que uma figura tem simetria de translação quando, ao sofrer uma translação de uma distância fixa, em uma determinada direção, a figura resultante é idêntica à original” (Pulino; Menezes, 2020, p. 83).

De acordo com Pio (2023), ao abordar a translação, é necessário associá-la ao conceito de vetor, palavra derivada do Latim “vehere”, que tem como significado: transportar. Nesse sentido, o conceito de vetor é, de fato muito importante para a construção desta transformação geométrica, visto que é responsável pela direção e pela distância do deslocamento das figuras.

Figura 2.14 – Translação de Figura

Fonte: Elaboração própria

2.4 PAVIMENTAÇÃO DE SUPERFÍCIES

A pavimentação de superfícies, também conhecida como tesselação, é uma técnica que consiste no recobrimento completo de uma superfície plana por meio de um padrão de figuras geométricas, de modo que não haja sobreposição de figuras nem espaços vazios entre elas. Em outras palavras, a tesselação é formada pela repetição organizada de figuras que se encaixam perfeitamente, cobrindo totalmente o plano de maneira contínua.

Conforme Atalay (2009), nem todo polígono regular é capaz de pavimentar o plano. As possibilidades são limitadas e apenas o triângulo equilátero, o quadrado e o hexágono regular possuem essa propriedade. A demonstração desse resultado é apresentada por Mendes (2015) da seguinte forma:

Considerando que a soma dos ângulos internos de um polígono é dada por $S_i = 180^\circ \cdot (n - 2)$, em que n representa o número de lados do polígono, segue que cada ângulo interno é dado por $a_i = \frac{180^\circ \cdot (n-2)}{n}$.

Em uma tesselação regular, todos os polígonos são congruentes e se encontram da mesma maneira em cada vértice, isto é, em cada ponto onde seus lados se encontram. Assim, a soma de todos os ângulos deste vértice equivale a 360° . Admitindo que l polígonos se encontrem em um mesmo vértice, obtém-se a seguinte relação:

$$\begin{aligned} 360^\circ &= l \cdot \frac{180^\circ \cdot (n-2)}{n} \\ 2 &= l \cdot \frac{(n-2)}{n} \\ 2n &= l \cdot (n-2) \\ l &= \frac{2n}{n-2} \end{aligned} \tag{1}$$

Como n representa o número de lados de um polígono, tem-se que $n \in \mathbb{N}$ e $n \geq 3$. Ademais, para que uma pavimentação do plano seja possível, é necessário que pelo menos três polígonos compartilhem o mesmo vértice, como pode ser observado isso nos seguintes casos:

- Para $l = 1 \Rightarrow \frac{2n}{n-2} = 1$. Resolvendo a equação, obtém-se $n = -2$. (Não satisfaz)
- Para $l = 2 \Rightarrow \frac{2n}{n-2} = 2$. Resolvendo a equação, obtém-se $0 = -4$. (Contradição)

Dessa forma, obtém-se a seguinte desigualdade:

$$\frac{2n}{n-2} \geq 3$$

Resolvendo a inequação, obtém-se:

$$\frac{2n}{n-2} \geq 3$$

$$2n \geq 3(n-2)$$

$$2n \geq 3n - 6$$

$$-n \geq -6$$

$$n \leq 6$$

Portanto, os únicos valores naturais possíveis para n são 3, 4, 5 e 6. Substituindo esses valores na equação (1), obtêm-se os seguintes resultados:

- $n = 3 \Rightarrow l = 6$.
- $n = 4 \Rightarrow l = 4$.
- $n = 5 \Rightarrow l = \frac{10}{3}$, não satisfaz.
- $n = 6 \Rightarrow l = 3$.

Desse modo, conclui-se que apenas os polígonos regulares de três, quatro e seis lados, isto é, o triângulo equilátero, o quadrado e o hexágono regular, satisfazem as condições necessárias para a pavimentação regular do plano. Isso ocorre porque seus ângulos internos permitem que a soma dos ângulos em torno de cada vértice seja exatamente igual a 360° .

As tesselações não estão presentes somente na Matemática, mas também em diversos contextos, como na arquitetura, na arte, no design e até mesmo na natureza. Segundo Atalay (2009), muito antes de os matemáticos estudarem esse padrão, a própria natureza já o utilizava. Um exemplo são as abelhas, que constroem suas colmeias por meio de uma pavimentação formada por hexágonos, de modo que esse processo é instintivo para elas.

Na Antiguidade, as tesselações foram utilizadas como elementos decorativos em diversas comunidades. Essa técnica também ficou conhecida como mosaico. De acordo com Silva (2024), os mosaicos correspondem à pavimentação do plano, em que as figuras,

denominadas como ladrilhos, se encaixam perfeitamente, cobrindo toda a superfície sem deixar lacunas. Segundo Barbosa (1993 *apud* Silva (2024)), a prática dos mosaicos está presente desde a Antiguidade, como evidencia o autor:

Os mosaicos são conhecidos desde os tempos antigos. Estiveram presentes nas civilizações assíria, babilônica, persa, egípcia, grega, chinesa e outras, empregados em padrões que não raro permaneceram até os dias atuais. Muitos mosaicos encontrados em pisos, tetos e painéis de parede, de templos ou palácios, atestam a íntima relação entre determinados padrões e a arte da decoração. (...) O objetivo do artífice era e é encontrar um certo tipo de simetria ornamental com o emprego de figuras relativamente simples, cuja repetição e interação formem um todo harmonioso e estético (Barbosa, 1993, *apud* (Silva, 2024, p. 15)).

Um dos marcos mais importantes para este trabalho, é os mosaicos do Palácio da Alhambra, construídos entre os séculos XII e XIV, compostos por uma variedade de padrões geométricos. Esses mosaicos despertaram novamente o interesse de Maurits Cornelis Escher, de modo a influenciar suas investigações acerca das tesselações. Segundo Tjabbes (2011, p. 89), “[...] ele descobriu os azulejos mouros no Alhambra (em Granada, na Espanha) e os azulejos decorativos etruscos em Ravello (na Itália). Eles o inspiraram tanto que Escher os copiou, muitas vezes em parceria com a esposa, Jetta.”

Com esse contato, Escher passou a explorar a transformação de figuras geométricas em representações figurativas, como aves, peixes e outros animais, preservando as propriedades necessárias para pavimentar o plano. Por mais que suas obras abordam conceitos geométricos, o artista não possuía formação em Matemática, mas desenvolveu esse tipo de técnica por meio de um processo de experimentação. Como destaca Tjabbes (2011, p. 89), “Escher não era um matemático: descobriu esses sistemas experimentando novas variações, constantemente.”

2.5 PROJEÇÕES PERSPECTIVAS

As projeções em perspectivas são um recurso fundamental na arte, quando artistas buscam representar objetos em uma perspectiva tridimensional em um plano bidimensional, de modo semelhante à forma como o olho humano percebe o espaço. De acordo com Atalay (2009), ao abordar a Geometria projetiva, que é um ramo da matemática direcionado às regras da perspectiva, deve-se ressaltar que esse termo surgiu no período da Renascença, justamente um período marcado por diversos artistas que utilizaram esse artifício. Entre eles, destacam-se como alguns dos primeiros Masaccio (1401–1428) e Masolino (1383–1447), e posteriormente na Alta Renascença que ocorreu entre 1495 e 1520, o artista Leonardo da Vinci. Nesse sentido, Canotilho (2005, *apud* Gonçalves (2013)), aponta que a perspectiva, inicialmente, foi utilizada como uma técnica apenas pelos artistas, com ênfase pelos

renascentistas, e posteriormente em ciência; na atualidade, é designada como a Geometria projetiva.

Figura 2.15 – A obra *Trindade*, de Masaccio



Fonte: HAV320142 (2014)

Para alcançar esse efeito de profundidade nas projeções em perspectiva, os raios partem de um único ponto de observação, também conhecido como centro de projeção, e se direcionam para um plano de projeção. Esse efeito traz a sensação de que objetos distantes aparentam ser menores e que suas retas paralelas, quando se afastam do observador, parecem encontrar-se em um ou mais pontos de fuga. Em uma visão matemática, defini-se esse sistema projetivo como Sistema de Projeção Central (ou cônica).

A projeção cônica é realizada quando cada ponto do objeto é interligado ao centro de projeção por retas projetantes. Logo, é gerada por um sistema cônico de projeções e caracteriza-se pela presença de pontos de fuga, de modo que sua classificação varia de acordo com a quantidade desses pontos. Segundo Gonçalves (2013, p. 82), “todas as linhas horizontais e verticais são mantidas, e as linhas que estão em planos perpendiculares ao plano imagem convergem para o ponto de fuga, na linha de fuga (horizonte).”

Para exemplificar essa projeção centralizada, utiliza-se o cubo, uma vez que sua visualização é mais simplista, pois se baseia em como se deseja visualizar esse objeto. De acordo com Silva (2018, p. 37), “para desenhar um cubo em perspectiva, as retas que passam pelo vértice do objeto devem convergir para um ponto chamado ponto de fuga na linha do horizonte.” Além disso, a linha do horizonte pode estar localizada acima ou abaixo do objeto.

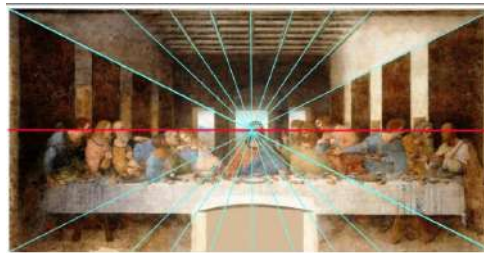
Figura 2.16 – Um cubo em Perspectiva Cônica com um ponto de fuga



Fonte: Adaptada de Gonçalves (2013)

De acordo com Gonçalves (2013), na era renascentista, o uso da perspectiva cônica com um ponto de fuga consagrou diversos artistas, em destaque Leonardo da Vinci e Raffaello Sanzio, que revolucionaram o uso dessa técnica. As obras mais citadas que utilizam essa perspectiva são *A Última Ceia* e *A Escola de Atenas*. Nas Figuras 2.17 e 2.18, retiradas do texto de Gonçalves (2013), é possível observar as retas horizontais e o ponto de fuga.

Figura 2.17 – Esquema projetivo em a *Última Ceia* de Leonardo Da Vinci



Fonte: (Gonçalves (2013, p. 28)

Figura 2.18 – *A Escola de Atenas* de Raffaello Sanzio

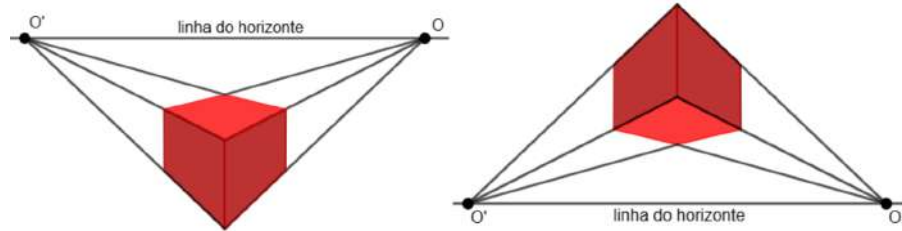


Fonte: (Gonçalves (2013, p. 83)

Partindo para a perspectiva de dois pontos de fuga, observa-se que essa não era conhecida no período renascentista. Ela é representada pela projeção das linhas visuais

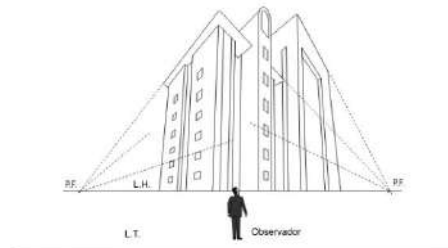
captadas simultaneamente pela nossa visão. Essa perspectiva é frequentemente observada em edificações, representando a esquina ou a quina de algum objeto.

Figura 2.19 – Um cubo em Perspectiva Cônica com dois pontos de fuga



Fonte: Adaptada de Gonçalves (2013)

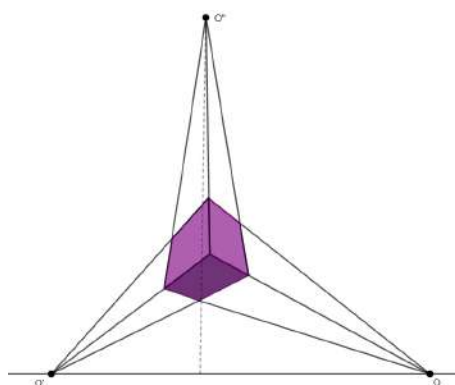
Figura 2.20 – Perspectiva com dois pontos de fuga



Fonte: Mangá Design (2013)

A perspectiva com três pontos de fuga, também conhecida como perspectiva aérea, conforme explica Atalay (2009), contribui para a percepção de profundidade e altura. Nesse método, o terceiro ponto de fuga é determinado por um vetor normal traçado a partir do centro da base do cubo. Na representação da Figura 2.21, a visão do observador é a de um objeto flutuando acima dele, enquanto ele está no solo. “Notemos que este terceiro ponto aparece fora da linha de fuga, e para ele convergem as retas das arestas verticais do cubo” Gonçalves (2013, p. 85).

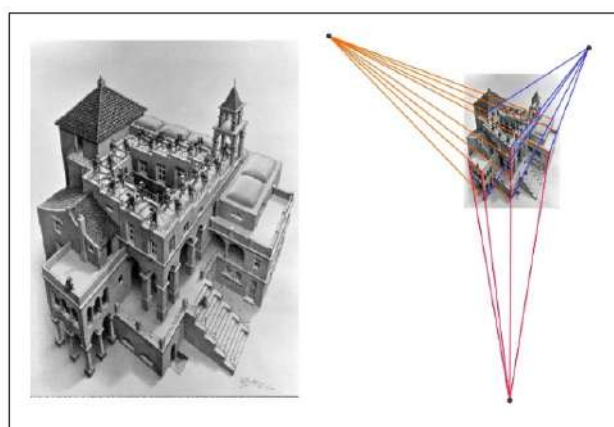
Figura 2.21 – Um cubo em Perspectiva Cônica com três pontos de fuga



Fonte: Adaptada de Gonçalves (2013)

Conforme Canotilho (2005, *apud* Gonçalves (2013)), esta perspectiva é pouco empregada tanto nas representações técnicas quanto artísticas. Ainda assim, artistas como Maurits Cornelis Escher, recorrem a esse recurso na criação de suas composições fantásticas e efeitos visuais incomuns.

Figura 2.22 – *Ascending and Descending* M. C. Escher, 1960



Fonte: Gonçalves (2013, p. 83)

Desse modo, essas obras de Escher, que possuem a manipulação de múltiplos pontos de vista, contribuem para ilusões ópticas, proporcionando a visão de cenários impossíveis. Um exemplo de obra que apresenta essa ilusão ótica a partir de perspectiva é a obra *Cascata* (1961), que nos leva a questionar por onde o percurso d'água se inicia e finaliza.

Nesse sentido, para que seja alcançada a composição de um desenho ou de uma representação técnica, faz-se necessário que o indivíduo saiba identificar os pontos de

fuga, conseqüentemente, para conseguir projetar uma imagem tridimensional em um plano bidimensional com maior realismo, de acordo com a visão do observador.

3 DISCUSSÃO E RESULTADOS

Este capítulo, expõe a recriação a partir do *software* Geogebra, das obras de arte *Systematic Study* (1936), *Dwarves* (1938) e *Symmetry Watercolor 70 Butterfly* (1948), produzidas pelo artista holandês Maurits Cornelis Escher. A reconstrução destas obras se deu a partir das transformações geométricas, especificamente das isométricas, que abordam os conceitos de translação, rotação e reflexão, de modo, que estes conceitos matemáticos estão presentes na composição das tesselações utilizadas pelo artista. Ademais, o capítulo também consta com uma criação própria utilizando como base os mesmos conceitos do artista Escher.

3.1 SYSTEMATIC STUDY (1936)

Figura 3.1 – *Systematic Study*

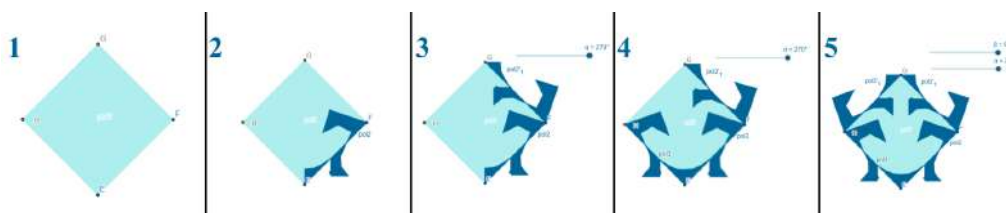


Fonte: Escher (1936)

Analizando de modo individual cada obra recriada no GeoGebra, começando por a obra *Systematic Study* (1936), a obra foi feita no ano de 1936 e aborda uma fase importante para Escher, onde este buscava aprofundar-se nos estudos relacionados ao conceito da divisão regular do plano após uma viagem com sua esposa Jetta à Alhambra, localizada na Espanha, onde estudou esse padrões geométricos dos mosaicos islâmicos que evitavam espaços vazios. Esse conceito lhe fascinava desde do início de sua carreira, além de serem conhecidos como pavimentação ou tesselações.

Vale ressaltar que a criação de qualquer figura abstrata parte de regras que são vistas no decorrer dos passo a passo das criações a seguir. Partindo para recriação passo a passo da tesselação da obra de arte *Systematic Study* (1936) no GeoGebra:

Figura 3.2 – Recriação no GeoGebra da obra *Systematic Study*



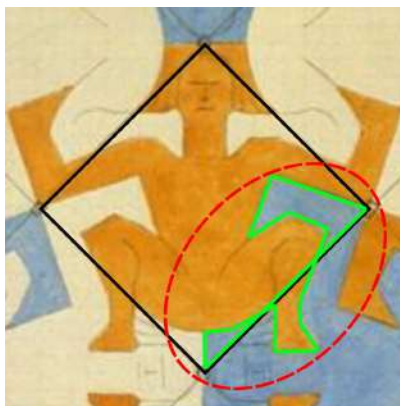
Fonte: Elaboração própria

Entre os quadros 1 até 5 da Figura 3.2, vem-se os seguintes passos: ¹

Passo 1 - Construção do quadrado: Inicialmente foi construído um quadrado utilizando a ferramenta “*Polígono Regular*” do GeoGebra, definindo-o com quatro vértices **E**, **F**, **G** e **H**, como representado no quadro 1 da Figura 3.2.

Passo 2 - Construção do primeiro polígono auxiliar *pol2*: A partir do segmento $\overline{EF}$ do quadrado, com a ferramenta “*Polígono*”, iniciando no ponto **E** até o ponto **F** construindo uma figura abstrata semelhante ao que está na obra *Systematic Study* como está destacado abaixo na Figura 3.3, ademais para a conclusão deste passo, retornando ao ponto **E** para fechar este polígono, nomeado com *pol2*.

Figura 3.3 – Figura demonstrativa feita no Canva



Fonte: Elaboração própria

Passo 3 - Rotação do polígono *pol2*: Tendo como base os conceitos da transformação geométrica de rotação, com a ferramenta “*Girar em torno de um ponto*” selecione o polígono *pol2* e o ponto **F** como o centro de rotação, aplicando uma rotação de 270° no sentido anti-horário, assim obtendo o polígono *pol2'*.

¹ Quadros de 1 até 5: <https://www.geogebra.org/m/qme7qmhs>

Passo 4 - Construção do segundo polígono auxiliar *pol3*: De modo análogo ao *pol2* vem-se o *pol3*, com o segmento $\overline{EH}$ do quadrado e com a ferramenta “*Polígono*”, iniciando no ponto *E* até o ponto *H*, para recriar a outra figura semelhante a da obra em questão e retornando ao ponto inicial *E* para fechar este polígono, nomeado com *pol3*.

Passo 5 - Rotação do polígono *pol3*: Repetindo o mesmo processo do *pol2* no *pol3*, a partir da transformação geométrica de rotação, com a ferramenta “*Girar em torno de um ponto*” selecione o polígono *pol3* e o ponto *H* como o centro de rotação, aplicando uma rotação de 90° no sentido anti-horário, assim obtendo o polígono *pol3'*.

Figura 3.4 – Recriação no GeoGebra da obra *Systematic Study*



Fonte: Elaboração própria

O quadros 6 até 10 da Figura 3.4, vem-se os seguintes passos: ²

Passo 6 - Construção da figura base da tesselação: Com a ferramenta “*polígono*” e o auxílio dos pontos feitos nos polígonos *pol2*, *pol2'*, *pol3* e *pol3'*, é construído a figura da base da tesselação e nomeada como figura “**peessoa1**”, isto é visto no quadro número 6.

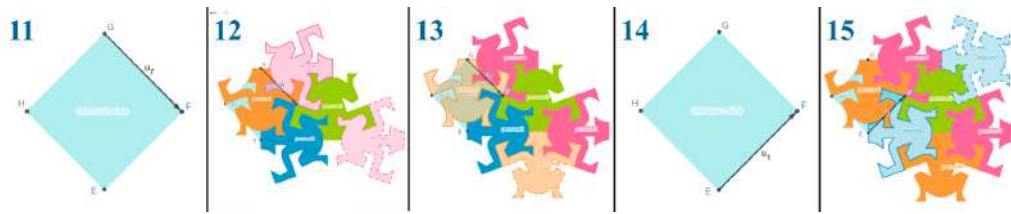
Os quadros 7 até o 10 da Figura 3.4, vemos a aplicação do conceito de rotação em torno de um ponto, também conhecido como simetria rotacional.

Passo 7 - Aplicação da simetria rotacional no polígono *peessoa1*: A partir da seleção da ferramenta “*Girar em torno de um ponto*” selecionando o polígono **peessoa1** e o ponto *F* como centro da rotação, aplica-se uma rotação de 90° graus no sentido anti-horário, obtendo o polígono **peessoa2**.

Passo 8 - Repete-se a aplicação da simetria rotacional no polígono *peessoa1*: De modo análogo, repete-se o processo anterior com a ferramenta “*Girar em torno de um ponto*” no polígono **peessoa1** mudando os ângulos de rotação para 180° e 270° no mesmo sentido anti-horário, obtendo os polígonos **peessoa3** e **peessoa4**.

² Quadros de 6 até 10: <https://www.geogebra.org/m/kvxer8zz>

Figura 3.5 – Recriação no GeoGebra da obra *Systematic Study*



Fonte: Elaboração própria

Figura 3.6 – Recriação no GeoGebra da obra *Systematic Study*



Fonte: Elaboração própria

Os passo a passo das Figuras 3.5 e 3.6 estão relacionados a transformação geométrica de simetria de translação, onde irá ser detalhados a seguir:³

Passo 9 - Construção do vetor $\vec{u}_7$ para a translação: Com o polígono quadrado, é construído o vetor $\vec{u}_7$ com origem no ponto **G** e extremidade em **F**, visto no quadro 14.

Passo 10 - Transladação dos polígonos *pessoa1* e *pessoa4*: Este passo visto nos quadros 12 e 13 esta focado na transladação dos polígonos **pessoa1** e **pessoa4**, usando a direção do vetor $\vec{u}_7$. A partir do comando: $=Transladar(Objeto, Vetor)$, na forma: $=Transladar(pessoa1, 2*u_{7})$ e $=Transladar(pessoa4, 2*u_{7})$, assim, originando os polígonos **pessoa5** e **pessoa6**.

E feito a multiplicação do vetor por 2, uma vez que já existe um polígono nessa direção. Ademais este processo é repetido da seguinte maneira:

Passo 11 - Construção do vetor $\vec{u}_1$ para a translação: No quadro 14, é visto a construção do vetor $\vec{u}_1$ com origem no ponto **E** e extremidade em **F**.

Passo 12 - Transladação do polígono *pessoa2*: Este passo visto nos quadros 15 com a transladação do polígono **pessoa2**, usando a direção do vetor $\vec{u}_1$. A partir do

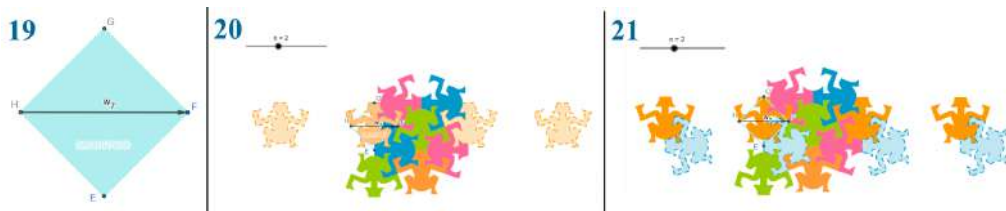
³ Quadros de 11 até 18: <https://www.geogebra.org/m/negjxzs>

comando: $=Transladar(Objeto, Vetor)$, na forma: $=Transladar(pessoa2, 2*u_{\{1\}})$, assim, originando o polígono **pessoa7**.

Passo 13 - Construção do vetor $\vec{v}_8$ para a translação: No quadro 16, é visto a construção do vetor $\vec{v}_8$ com origem no ponto **F** e extremidade em **E**.

Passo 14 - Transladação do polígono *pessoa3*: Este passo visto nos quadros 17 com a transladação do polígono **pessoa3**, usando a direção do vetor $\vec{v}_8$. A partir do comando: $=Transladar(Objeto, Vetor)$, na forma: $=Transladar(pessoa3, 2*v_{\{8\}})$, assim, originando o polígono **pessoa8**.

Figura 3.7 – Recriação no GeoGebra da obra *Systematic Study*



Fonte: Elaboração própria

Passo 15 - Criação do controle deslizante: É inserido um controle deslizante nomeado como "**n**", Com o seu valor mínimo: 1, valor máximo: 5 e incremento: 1.

Na **Figura 4.7**, irá ser feito o procedimento da expansão horizontal da tesselação.⁴

Passo 16 - Construção do vetor $\vec{w}_7$ para a translação horizontal: No quadro 19, é visto a construção do vetor $\vec{w}_7$ com origem no ponto **H** e extremidade em **F**.

Passo 17 - Expansão horizontal da tesselação através da simetria transladação: Com a utilização do comando " $=Sequência(Expressão, Variável, Valor Inicial, Valor Final)$ ". Na expressão, utilizou-se a função de translação, permitindo a escolha do objeto e do vetor. Considerando o vetor $\vec{w}_7$, de direção horizontal, e o objeto *pessoa1*, obteve-se a seguinte construção: $=Sequência(Transladar(pessoa1, 2*k*w_{\{7\}}), k, -n, n)$, como vista no quadro nº 20.

Passo 18 - Expansão horizontal da tesselação através da simetria transladação: De modo análogo ao passo anterior, repete-se o processo com os demais polígonos.

⁴ Quadros de 19 até 27: <https://www.geogebra.org/m/uvywh7xp>

Figura 3.8 – Recriação no GeoGebra da obra *Systematic Study*



Fonte: Elaboração própria

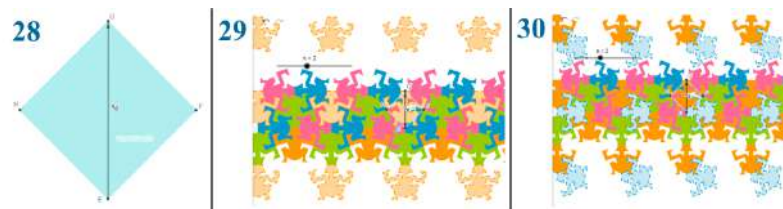
Figura 3.9 – Recriação no GeoGebra da obra *Systematic Study*



Fonte: Elaboração própria

como visto nas Figuras 3.8 e 3.9, Desse modo, gerando uma lista denominada do l1 até o l8.:

Figura 3.10 – Recriação no GeoGebra da obra *Systematic Study*



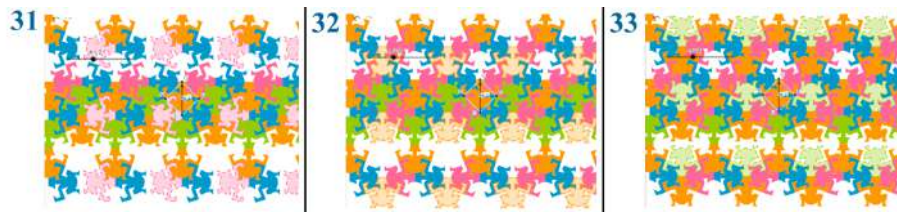
Fonte: Elaboração própria

Passo 19 - Construção do vetor $\vec{u}_8$ para a translação vertical: No quadro 28, é visto a construção do vetor $\vec{u}_8$ com origem no ponto **E** e extremidade em **G**.⁵

Passo 20 - Expansão vertical da tesselação através da simetria translacional: Com a utilização do comando "*=Sequência(Expressão, Variável, Valor Inicial, Valor Final)*". Na expressão, utilizou-se a função de translação, permitindo a escolha do objeto e do vetor. Considerando o vetor $\vec{u}_8$, de direção vertical, e o objeto sendo as listas, neste caso l1, obteve-se a seguinte construção: "*=Sequência(Transladar(l1, 2*k*u_{8}), k, -n, n)*", como vista no quadro nº 29.

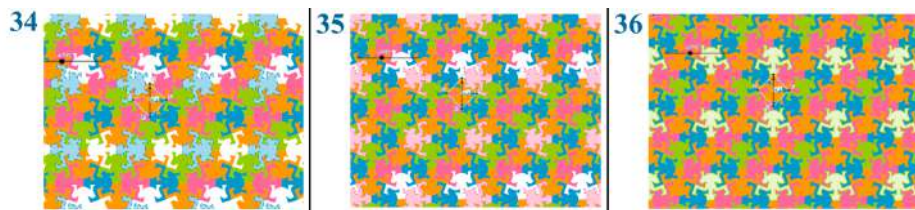
⁵ Quadros de 28 até 36: <https://www.geogebra.org/m/sbdnnuuj>

Figura 3.11 – Recriação no GeoGebra da obra *Systematic Study*



Fonte: Elaboração própria

Figura 3.12 – Recriação no GeoGebra da obra *Systematic Study*

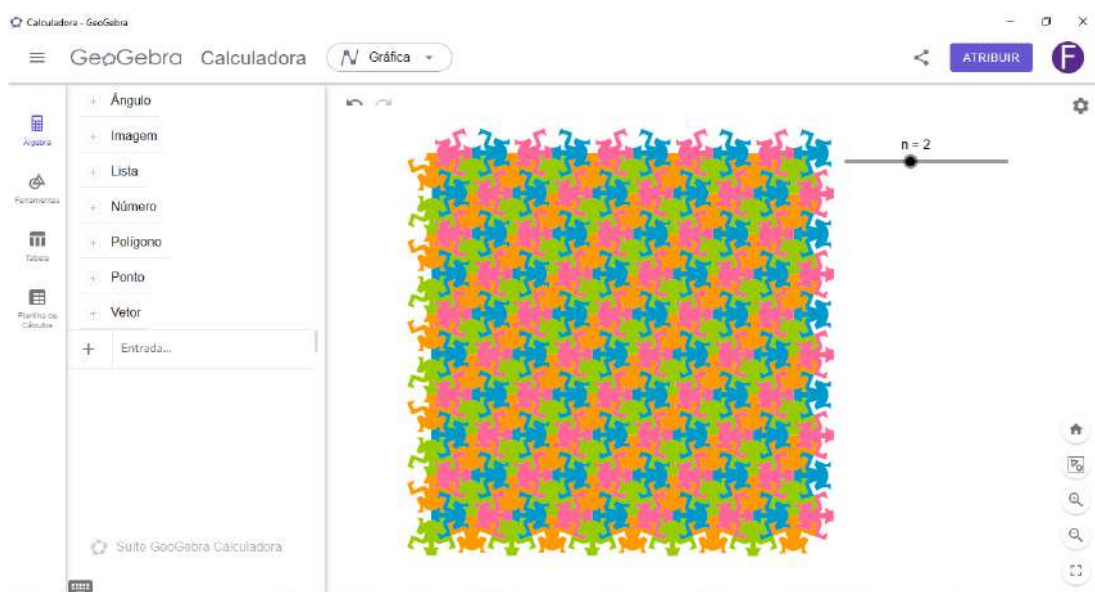


Fonte: Elaboração própria

Passo 21 - Expansão vertical da tesselação através da simetria translação: De modo análogo ao passo anterior, repete-se o processo com os demais polígonos, como é visto nas Figuras 3.11 e 3.12.

Na Figura 3.13 a seguir mostra a finalização da tesselação da obra *Systematic Study* (1936) no GeoGebra.⁶

Figura 3.13 – Recriação no GeoGebra da obra *Systematic Study*

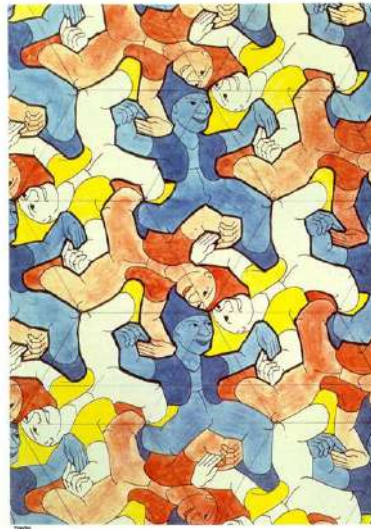


Fonte: Elaboração própria

⁶ Obra finalizada: <https://www.geogebra.org/m/rzzwyem4>

3.2 DWARVES (1938)

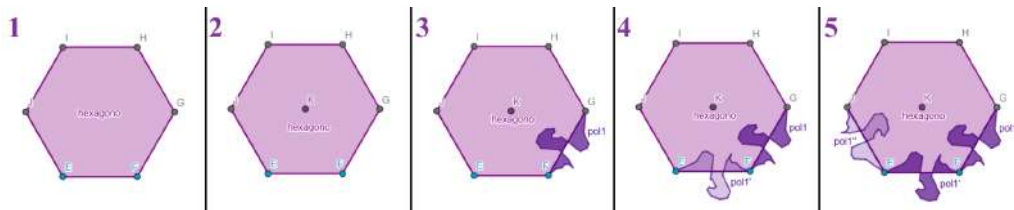
Figura 3.14 – *Dwarves*



Fonte: Escher (1938)

Na obra de arte *Dwarves* feita no ano de 1938, retrata em sua composições anões ou duendes, logo, também sendo uma obra que está na categoria de tesselação. A sua coloração esta baseada em tons azuis, amarelos e vermelhos, que remetem as cores primarias. A seguir vamos ver esta recriação em no GeoGebra.

Figura 3.15 – Recriação no GeoGebra da obra *Dwarves*



Fonte: Elaboração própria

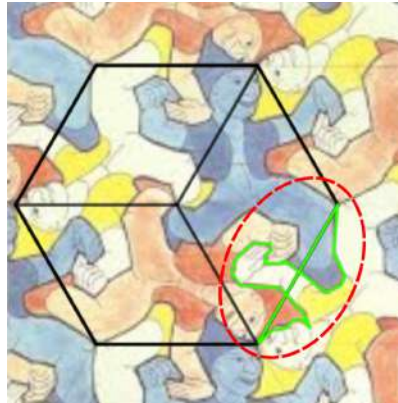
Passo 1 - Construção do hexágono: Selecionado a ferramenta “*Polígono Regular*”, definindo-o com seis vértices *E*, *F*, *G*, *H*, *I* e *J*, como representado no quadro 1 da Figura 3.15.⁷

Passo 2 - Definindo o ponto central: Utilizando o comando de “*PontoMédio(Ponto, Ponto)*”, aplica este comando com os pontos *G* e *J* representado no quadro 2 da Figura 3.15.

⁷ Quadros de 1 até 10: <https://www.geogebra.org/m/gg4yvjj4e>

Passo 3 - Construção do primeiro polígono auxiliar *pol1*: A partir do segmento $\overline{FG}$ do hexágono, com a ferramenta “*Polígono*”, iniciando no ponto **F** até o ponto **G** construindo uma figura abstrata semelhante ao que está na obra de arte *Dwarves* como está destacado abaixo na Figura 3.16, ademais para a conclusão deste passo, retornando ao ponto **F** para fechar este polígono, nomeado com *pol1*.

Figura 3.16 – Figura demonstrativa feita no Canva

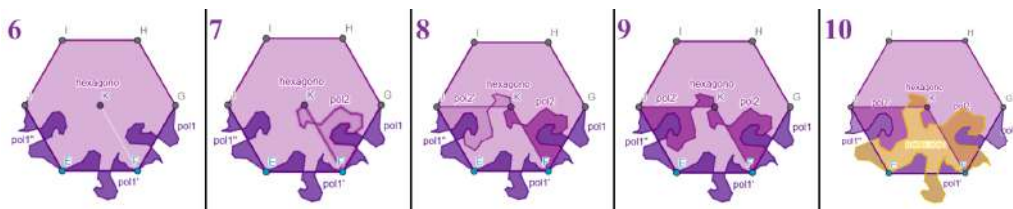


Fonte: Elaboração própria

Passo 4 - Rotação do polígono *pol1*: Tendo como base os conceitos da transformação geométrica de rotação, com a ferramenta “*Girar em torno de um ponto*” selecione o polígono *pol1* e o ponto **F** como o centro de rotação, aplicando uma rotação de 120° no sentido anti-horário, assim obtendo o polígono *pol1'*.

Passo 5 - Repete o processo de rotação: Novamente com a ferramenta “*Girar em torno de um ponto*” selecione o polígono *pol1'* e o ponto **E** como o centro de rotação, aplicando uma rotação de 120° no sentido anti-horário, assim obtendo o polígono *pol1''*.

Figura 3.17 – Recriação no GeoGebra da obra *Dwarves*



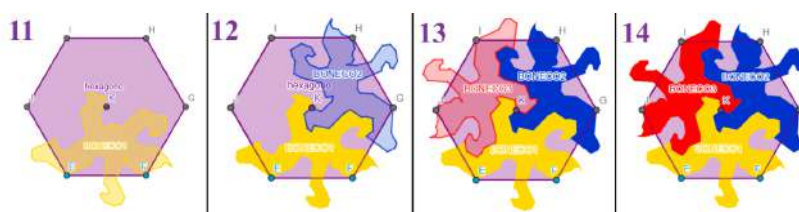
Fonte: Elaboração própria

Passo 6 - Construção do segundo polígono auxiliar *pol2*: De modo análogo ao *pol1* vem-se o *pol2*, com o segmento $\overline{KF}$ do hexágono e com a ferramenta “*Polígono*”, iniciando no ponto **F** até o ponto **K**, para recriar a outra figura semelhante a da obra e retornando ao ponto inicial **F** para fechar este polígono, nomeado com *pol2*.

Passo 7 - Rotação do polígono *pol2*: Como feito no passo 4, repetimos o mesmo processo no *pol2*, a partir da transformação geométrica de rotação, com a ferramenta “*Girar em torno de um ponto*” selecione o polígono *pol2* e o ponto central **K** como o centro de rotação, aplicando uma rotação de 120° no sentido horário, assim obtendo o polígono *pol2'*.

Passo 8 - Construção da figura base da tesselação: Com a ferramenta “*polígono*” e o auxílio dos pontos feitos nos polígonos *pol1*, *pol1'*, *pol1''*, *pol2* e *pol2'*, é construído a figura da base da tesselação e nomeada como figura “**BONECO1**”, isto é visto no quadro número 10.

Figura 3.18 – Recriação no GeoGebra da obra *Dwarves*



Fonte: Elaboração própria

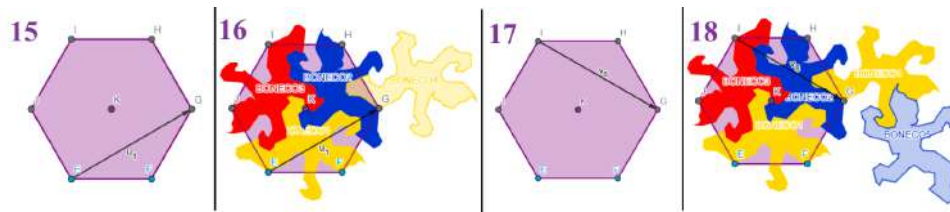
Entre os quadros 11 até o 14 da Figura 3.18, vemos a aplicação do conceito de rotação simetria rotacional.⁸

Passo 9 - Aplicação da simetria rotacional no polígono *BONECO1*: A partir da seleção da ferramenta “*Girar em torno de um ponto*” selecionando o polígono **BONECO1** e o ponto **K** como centro da rotação, aplica-se uma rotação de 120° graus no sentido anti-horário, obtendo o polígono **BONECO2**, representado no quadro 12.

Passo 10 - Repete-se a aplicação da simetria rotacional no polígono *BONECO1*: De modo análogo, repete-se o processo anterior com a ferramenta “*Girar em torno de um ponto*” no polígono **BONECO1**, com o mesmo ponto, mudando apenas o ângulo de rotação para 240° no mesmo sentido anti-horário, obtendo o polígono **BONECO3**, representado no quadro 13.

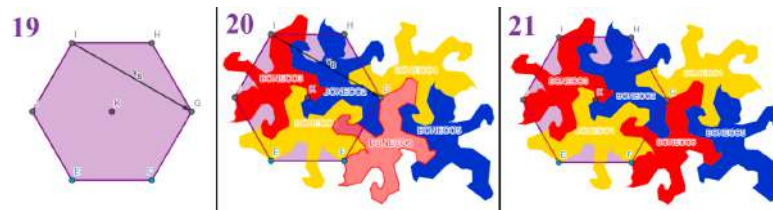
⁸ Quadros de 11 até 14: <https://www.geogebra.org/m/wr6bnm2q>

Figura 3.19 – Recriação no GeoGebra da obra *Dwarves*



Fonte: Elaboração própria

Figura 3.20 – Recriação no GeoGebra da obra *Dwarves*



Fonte: Elaboração própria

Os passo a passo das Figuras 3.19 e a 3.20 estão relacionados a transformação geométrica de simetria de translação, onde irá ser detalhados a seguir: ⁹

Passo 11 - Construção do vetor $\vec{u}_1$ para a translação: Com o polígono hexagono, é construído o vetor $\vec{u}_1$ com origem no ponto **E** e extremidade em **G**, visto no quadro 15.

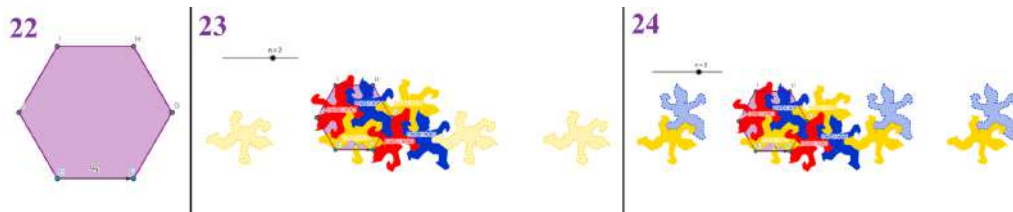
Passo 12 - Transladação dos polígonos *BONECO1*: Este passo visto nos quadros 16 esta focado na transladação do polígono **BONECO1**, usando a direção do vetor $\vec{u}_1$. A partir do comando: $=Transladar(Objeto, Vetor)$, na forma: $=Transladar(BONECO1, u_{\{1\}})$, assim, originando o polígono **BONECO4**.

Passo 13 - Construção do vetor $\vec{v}_8$ para a translação: No quadro 14, é visto a construção do vetor $\vec{v}_8$ com origem no ponto **I** e extremidade em **G**.

Passo 14 - Transladação dos polígonos *BONECO2* e *BONECO3*: Este passo visto nos quadros 18 e 20 esta focado na transladação dos polígonos **BONECO2** e **BONECO3**, usando a direção do vetor $\vec{v}_8$. A partir do comando: $=Transladar(Objeto, Vetor)$, na forma: $=Transladar(BONECO2, v_{\{8\}})$ e $=Transladar(BONECO3, v_{\{8\}})$, assim, originando os polígonos **BONECO5** e **BONECO6**.

⁹ Quadros de 15 até 21: <https://www.geogebra.org/m/tm8skxvq>

Figura 3.21 – Recriação no GeoGebra da obra *Dwarves*



Fonte: Elaboração própria

Passo 15 - Criação do controle deslizante: É inserido um controle deslizante nomeado como "n", Com o seu valor mínimo: 1, valor máximo: 3 e incremento: 1.¹⁰

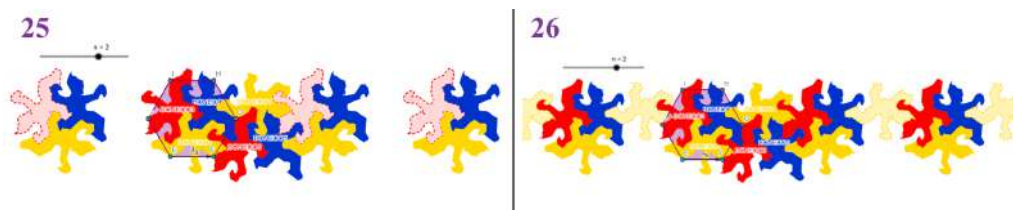
Na Figura 3.21, irá ser feito o procedimento da expansão horizontal da tesselação.

Passo 16 - Construção do vetor $\vec{u}_g$ para a translação horizontal: No quadro 22, é visto a construção do vetor $\vec{u}_g$ com origem no ponto *J* e extremidade em *G*.

Passo 17 - Expansão horizontal da tesselação através da simetria transladação: utilizando o comando "*=Sequência(Expressão, Variável, Valor Inicial, Valor Final)*". com a função de translação, permitindo a escolha do objeto e do vetor. Considerando o vetor $\vec{u}_g$, de direção horizontal, e o objeto *BONECO1*, obteve-se a seguinte construção: *=Sequência(Transladar(BONECO1, 3*k*u_{9}), k, -n, n)*, como vista no quadro nº 23.

Passo 18 - Expansão horizontal da tesselação através da simetria transladação: De modo análogo ao passo anterior, repete-se o processo com os demais polígonos.

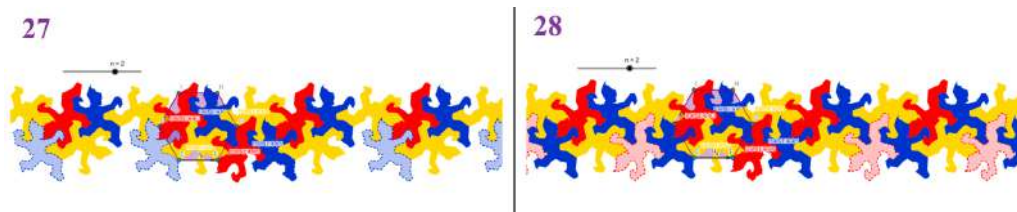
Figura 3.22 – Recriação no GeoGebra da obra *Dwarves*



Fonte: Elaboração própria

¹⁰ Quadros de 22 até 28: <https://www.geogebra.org/m/gkg36enf>

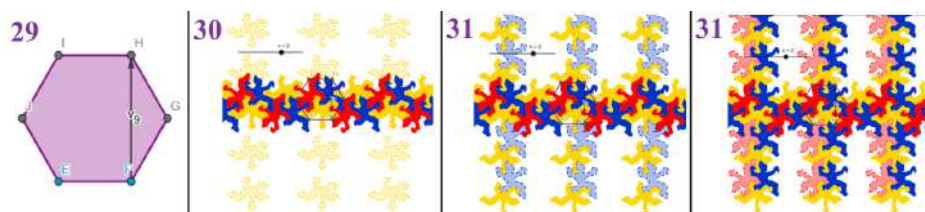
Figura 3.23 – Recriação no GeoGebra da obra *Dwarves*



Fonte: Elaboração própria

como visto nas Figuras 3.22 e 3.23, Desse modo, gerando uma lista denominada do l1 até o l6.:

Figura 3.24 – Recriação no GeoGebra da obra *Dwarves*

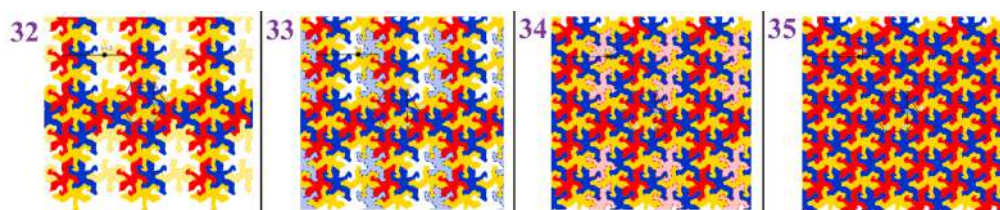


Fonte: Elaboração própria

Passo 19 - Construção do vetor $\vec{v}_9$ para a translação vertical: No quadro 28, é visto a construção do vetor $\vec{v}_9$ com origem no ponto **F** e extremidade em **H**.¹¹

Passo 20 - Expansão vertical da tesselação através da simetria transladação: Com a utilização do comando "*=Sequência(Expressão, Variável, Valor Inicial, Valor Final)*". Na expressão, utilizou-se a função de translação, permitindo a escolha do objeto e do vetor. Considerando o vetor $\vec{v}_9$, de direção vertical, e o objeto sendo as listas, neste caso l1, obteve-se a seguinte construção: "*=Sequência(Transladar(l1, k*v_{9}), k, -n, n)*", como vista no quadro n° 30.

Figura 3.25 – Recriação no GeoGebra da obra *Dwarves*



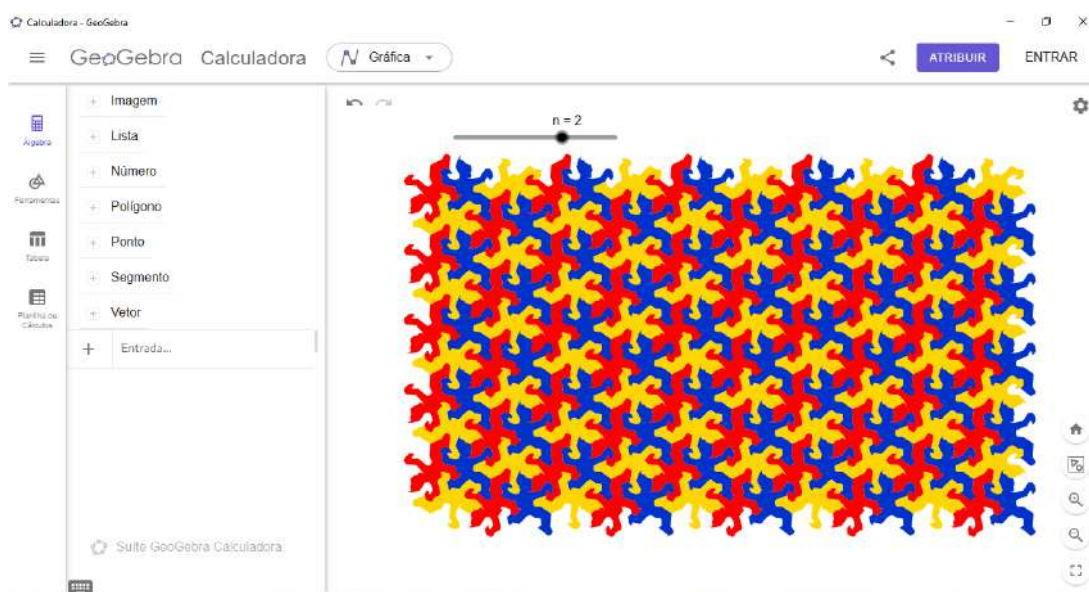
Fonte: Elaboração própria

¹¹ Quadros de 29 até 35: <https://www.geogebra.org/m/tpmngct4>

Passo 21 - Expansão vertical da tesselação através da simetria transladação: De modo análogo ao passo anterior, repete-se o processo com os demais polígonos, como é visto na Figura 3.25.

Na Figura 3.26 a seguir mostra a finalização da tesselação da obra *Dwarves* (1938) no GeoGebra.¹²

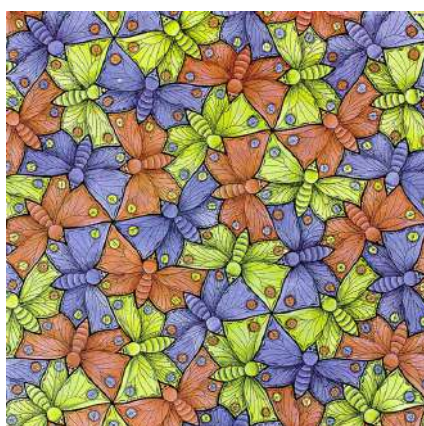
Figura 3.26 – Recriação no GeoGebra da obra *Dwarves*



Fonte: Elaboração própria

3.3 SYMMETRY WATERCOLOR 70 BUTTERFLY (1948)

Figura 3.27 – *Symmetry Watercolor 70 Butterfly*

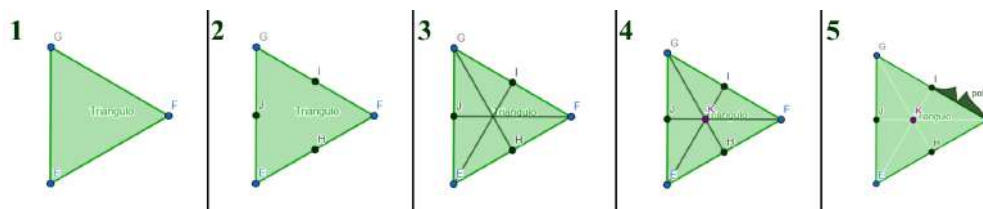


Fonte: Escher (1948)

¹² Obra finalizada: <https://www.geogebra.org/m/dbx9ftke>

A obra de arte *Symmetry Watercolor 70 Butterfly* foi feita em 1949, e como no próprio nome da obra diz, é uma composição artística de borboletas simétricas, coloridas nas cores primárias: amarelo, azul e vermelho. Como características das tesselações, elas se encaixam perfeitamente. A seguir vamos ver esta recriação passo a passo no GeoGebra.

Figura 3.28 – Recriação no GeoGebra da obra *Symmetry Watercolor 70 Butterfly*



Fonte: Elaboração própria

Entre os quadros 1 até 5 da Figura 3.28, vem-se os seguintes passos: ¹³

Passo 1 - Construção do triângulo: Selecionado a ferramenta “*Polígono Regular*”, definindo-o com três vértices **E**, **F** e **G**, como representado no quadro 1 da Figura 3.28.

Passo 2 - Definindo os pontos médios dos segmentos $\overline{EF}$, $\overline{FG}$ e $\overline{GE}$ do triângulo: Utilizando o comando de “*PontoMédio(Ponto, Ponto)*”, aplica este comando com os pontos dos segmentos $\overline{EF}$, $\overline{FG}$ e $\overline{GE}$ representado no quadro 2 da **Figura 4.16**.

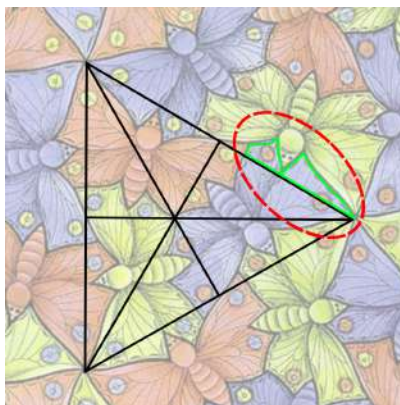
Passo 3 - Construção das medianas do triângulo: A partir dos pontos médios criados no passo anterior e os vertices do seu lado oposto, vêm os seguintes seguimentos $\overline{EI}$, $\overline{FJ}$ e $\overline{GH}$.

Passo 4 - Definir o Baricentro: A partir das medianas feitas no passo anterior é possível definir o baricentro deste triângulo, ou seja o ponto central **K**, um ponto importante para os proximos passos que envolvem a simetria rotacional.

Passo 5 - Construção do primeiro polígono auxiliar *pol1*: A partir do segmento $\overline{FI}$ do triângulo, com a ferramenta “*Polígono*”, iniciando no ponto **F** até o ponto médio **I** do segmento $\overline{FG}$ construindo uma figura abstrata semelhante ao que está na obra de arte *Symmetry Watercolor 70 Butterfly* como está destacado abaixo na Figura 3.29, ademais para a conclusão deste passo, retornando ao ponto **F** para fechar este polígono, nomeado com *pol1*.

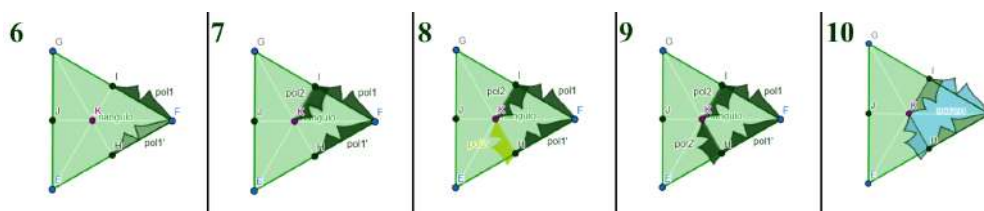
¹³ Quadros de 1 até 10: <https://www.geogebra.org/m/autjq5y4>

Figura 3.29 – Figura demonstrativa feita no Canva



Fonte: Elaboração própria

Figura 3.30 – Recriação no GeoGebra da obra *Symmetry Watercolor 70 Butterfly*



Fonte: Elaboração própria

O quadros 6 até 10 da Figura 3.30, vem-se os seguintes passos:

Passo 6 - Rotação do polígono *pol1*: Tendo como base os conceitos da transformação geométrica de rotação, com a ferramenta “*Girar em torno de um ponto*” selecione o polígono *pol1* e o ponto *F* como o centro de rotação, aplicando uma rotação de 60° no sentido anti-horário, assim obtendo o polígono *pol1'*.

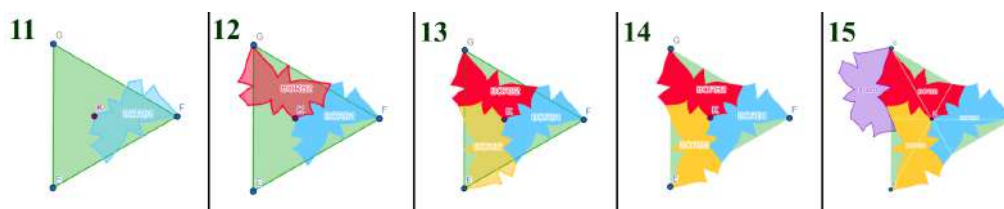
Passo 7 - Construção do segundo polígono auxiliar *pol2*: De modo análogo ao *pol1* vem-se o *pol2*, com o segmento $\overline{KI}$ do triângulo e com a ferramenta “*Polígono*”, iniciando no ponto *K* até o ponto *I*, para recriar a outra figura semelhante a da obra em questão e retornando ao ponto inicial *K* para fechar este polígono, nomeado com *pol3*.

Passo 8 - Rotação do polígono *pol2*: Repetindo o mesmo processo do *pol2* no *pol3*, a partir da transformação geométrica de rotação, com a ferramenta “*Girar em torno de um ponto*” selecione o polígono *pol3* e o ponto central do baricentro *K* como o centro de rotação, aplicando uma rotação de 120° no sentido horário, assim obtendo o polígono *pol2'*.

Passo 9 - Construção da figura base da tesselação: Com a ferramenta

“polígono” e o auxílio dos pontos feitos nos polígonos $pol1$, $pol1'$, $pol2$ e $pol2'$, é construído a figura da base da tesselação e nomeada como figura “**BORB1**”, isto é visto no quadro número 10.

Figura 3.31 – Recriação no GeoGebra da obra *Symmetry Watercolor 70 Butterfly*



Fonte: Elaboração própria

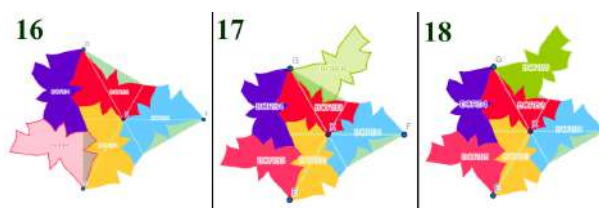
Os quadros 12 até o 15 da Figura 3.31, vemos a aplicação do conceito de rotação em torno de um ponto, também conhecido como simetria rotacional.¹⁴

Passo 10 - Aplicação da simetria rotacional no polígono *BORB1*: A partir da seleção da ferramenta “*Girar em torno de um ponto*” selecionando o polígono **BORB1** e o ponto **K** como centro da rotação, aplica-se uma rotação de 120° graus no sentido anti-horário, obtendo o polígono **BORB2**, representado no quadro 12.

Passo 11 - Repete-se a aplicação da simetria rotacional no polígono *BORB1*: De modo análogo, repete-se o processo anterior com a ferramenta “*Girar em torno de um ponto*” no polígono **BORB1**, com o mesmo ponto, mudando apenas o ângulo de rotação para 240° no mesmo sentido anti-horário, obtendo o polígono **BORB3**, representado no quadro 13.

Passo 12 - Aplicação da simetria rotacional no polígono *BORB2*: A partir da seleção da ferramenta “*Girar em torno de um ponto*” selecionando o polígono **BORB2** e o ponto **G** como centro da rotação, aplica-se uma rotação de 60° graus no sentido horário, obtendo o polígono **BORB4**, representado no quadro 15.

Figura 3.32 – Recriação no GeoGebra da obra *Symmetry Watercolor 70 Butterfly*



Fonte: Elaboração própria

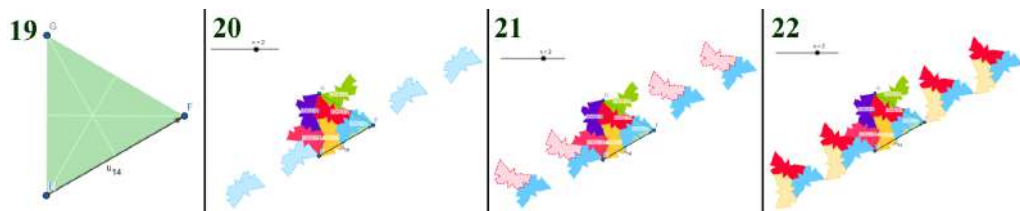
¹⁴ Quadros de 11 até 18: <https://www.geogebra.org/m/xtkjb78b>

Ainda com a simetria de rotação, Os quadros 16 até o 20 da Figura 3.32, vemos a aplicação da rotação em torno de um ponto.

Passo 13 - Aplicação da simetria rotacional no polígono *BORB3*: A partir da seleção da ferramenta “*Girar em torno de um ponto*” selecionando o polígono **BORB3** e o ponto **E** como centro da rotação, aplica-se uma rotação de 60º graus no sentido anti-horário, obtendo o polígono **BORB5**, representado no quadro 16.

Passo 14 - Aplicação da simetria rotacional no polígono *BORB2*: A partir da seleção da ferramenta “*Girar em torno de um ponto*” selecionando o polígono **BORB2** e o ponto **G** como centro da rotação, aplica-se uma rotação de 60º graus no sentido anti-horário, obtendo o polígono **BORB6**, representado no quadro 17.

Figura 3.33 – Recriação no GeoGebra da obra *Symmetry Watercolor 70 Butterfly*



Fonte: Elaboração própria

Passo 15 - Criação do controle deslizante: É inserido um controle deslizante nomeado como "**n**", Com o seu valor mínimo: 1, valor máximo: 3 e incremento: 1.¹⁵

Na Figura 3.33, irá ser feito o procedimento da expansão na direção do vetor que esta no quadro 19 da tesselação.

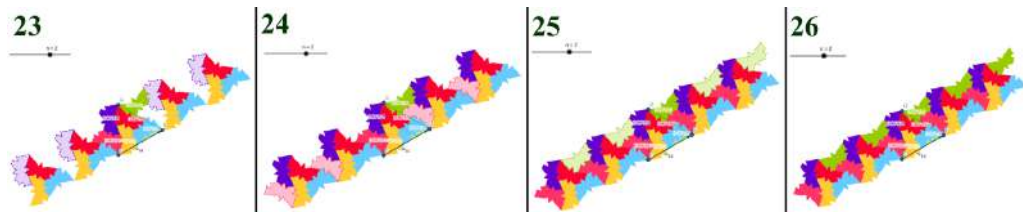
Passo 16 - Construção do vetor $\overrightarrow{u_{14}}$ para a translação: No quadro 19, é visto a construção do vetor $\overrightarrow{u_{14}}$ com origem no ponto **E** e extremidade em **F**.

Passo 17 - Expansão da tesselação através da simetria transladação: Com a utilização do comando "*=Sequência(Expressão, Variável, Valor Inicial, Valor Final)*". Na expressão, utilizou-se a função de translação, permitindo a escolha do objeto e do vetor. Considerando o vetor $\overrightarrow{u_{14}}$ e o objeto **BORB1**, obteve-se a seguinte construção: *=Sequência(Transladar(BORB1, $k \cdot \overrightarrow{u_{14}}$), k, -n, n)*, como vista no quadro nº 20.

Passo 18 - Expansão da tesselação através da simetria transladação: De modo análogo ao passo anterior, repete-se o processo com os demais polígonos.

¹⁵ Quadros de 19 até 26: <https://www.geogebra.org/m/ngtzbkeq>

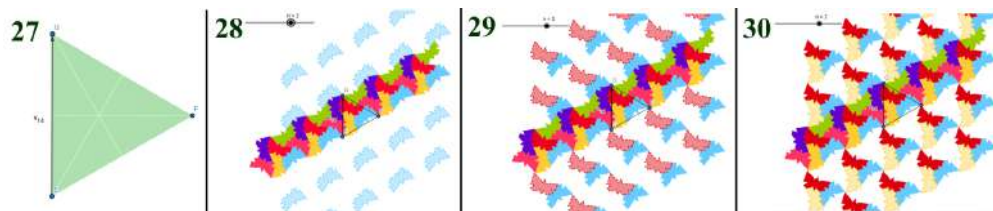
Figura 3.34 – Recriação no GeoGebra da obra *Symmetry Watercolor 70 Butterfly*



Fonte: Elaboração própria

como visto na Figura 3.34, Desse modo, gerando uma lista denominada do l1 até o l6.:

Figura 3.35 – Recriação no GeoGebra da obra *Symmetry Watercolor 70 Butterfly*

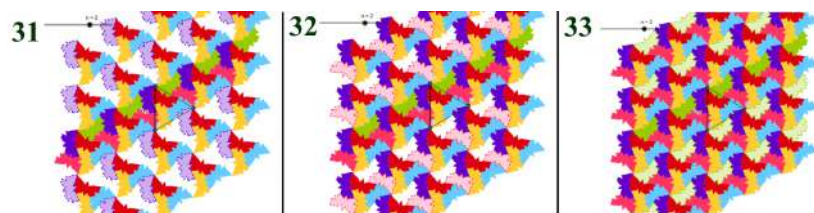


Fonte: Elaboração própria

Passo 19 - Construção do vetor $\vec{V}_{14}$ para a translação vertical: No quadro 27, é visto a construção do vetor $\vec{V}_{14}$ com origem no ponto E e extremidade em G .¹⁶

Passo 20 - Expansão vertical da tesselação através da simetria transladação: Com a utilização do comando " $=Sequência(Expressão, Variável, Valor Inicial, Valor Final)$ ". Na expressão, utilizou-se a função de translação, permitindo a escolha do objeto e do vetor. Considerando o vetor $\vec{V}_{14}$, de direção vertical, e o objeto sendo as listas, neste caso l1, obteve-se a seguinte construção: " $=Sequência(Transladar(l1, *k*V_{14}), k, -n, n)$ ", como vista no quadro nº 28.

Figura 3.36 – Recriação no GeoGebra da obra *Symmetry Watercolor 70 Butterfly*



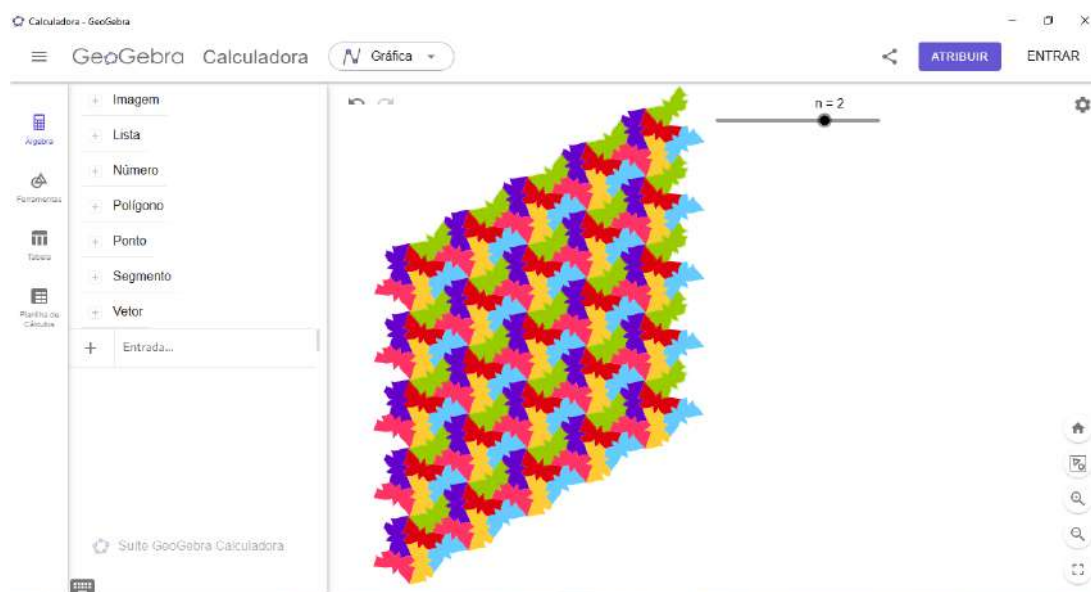
Fonte: Elaboração própria

¹⁶ Quadros de 27 até 33: <https://www.geogebra.org/m/sgmm6jz8>

Passo 21 - Expansão vertical da tesselação através da simetria translação: De modo análogo ao passo anterior, repete-se o processo com os demais polígonos, como é visto na Figura 3.36.

Na Figura 3.37 a seguir mostra a finalização da tesselação da obra *Symmetry Watercolor 70 Butterfly* (1948) no GeoGebra.¹⁷

Figura 3.37 – Recriação no GeoGebra da obra *Symmetry Watercolor 70 Butterfly*



Fonte: Elaboração própria

3.4 APLICANDO OS CONCEITOS EM UMA OBRA AUTORAL

Diante das três recriações, realizadas no GeoGebra, das obras *Systematic Study* (1936), *Dwarves* (1938) e *Symmetry Watercolor 70 Butterfly* (1948), de M. C. Escher, apresentadas nas seções anteriores esta seção é dedicada à uma elaboração autoral fundamentada com a base nos conceitos utilizados em suas recriações, logo, sendo estudados ao longo desta pesquisa. Dessa forma, essa produção tem como objetivo aplicar os conhecimentos adquiridos, evidenciando o potencial dos princípios geométricos e compositivos analisados nas obras do artista.

¹⁷ Obra finalizada: <https://www.geogebra.org/m/snrufujv>

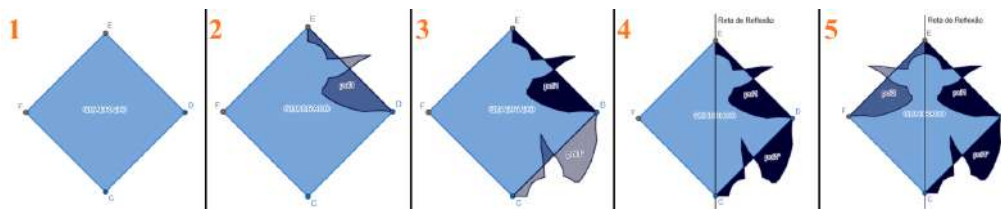
Figura 3.38 – Criação própria



Fonte: Elaboração própria

Para a construção desta composição, optou-se por incorporar, de algum forma, todas as transformações isométricas (rotação, reflexão e translação). Contudo, para evitar a repetição dos procedimentos apresentados nas seções anteriores, serão evidenciadas apenas as construções e transformação utilizadas, uma vez que essas etapas de construção desta composição tem o seu passo a passo análogos aos empregados na recriação da obra *Systematic Study* (1936). Como exceção, do passo número 5, por possuir a transformação de reflexão, procedimento que não foi feito nas recriações das obras apresentadas anteriormente.

Figura 3.39 – Criação própria



Fonte: Elaboração própria

Passo 1: Construção do quadrado.¹⁸

Passo 2: Construção do primeiro polígono auxiliar *pol1*.

Passo 3: Rotação do polígono *pol1* com o ponto *D* como o centro de rotação, e uma rotação de 90° no sentido anti-horário, adquirindo o polígono *pol1'*.

Passo 4: Construção da reta de reflexão, tendo como base os pontos *C* e *E*, um segmento é construído para ser utilizado como a reta de reflexão.

¹⁸ Quadros de 1 até 8: <https://www.geogebra.org/m/wtg59ngr>

Passo 5: Reflexão do polígono *pol1* utilizando a ferramenta “*Reflexão em Relação a uma Reta*”, seleciona o *pol1* e a reta de reflexão, obtendo o polígono *pol2*.

Figura 3.40 – Criação própria



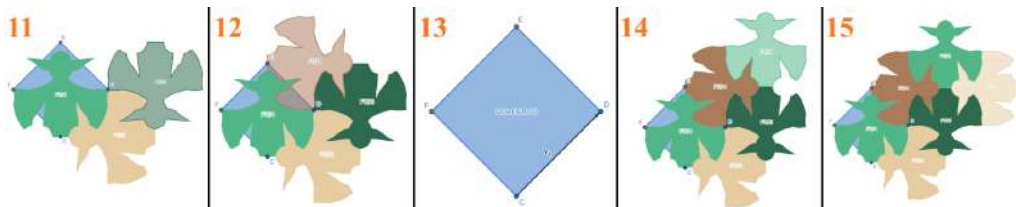
Fonte: Elaboração própria

Passo 6: Rotação do polígono *pol2* com o ponto **F** como o centro de rotação, e uma rotação de 90° no sentido horário, adquirindo o polígono *pol2'*, neste caso, também poderia ser obtido pela reflexão do polígono *pol1'*.

Passo 7: Construção da figura base da tesselação nomeada como *FIG1*

Passo 8: Aplicação da simetria rotacional no polígono *FIG1*, obtendo o *FIG2*.¹⁹

Figura 3.41 – Criação própria



Fonte: Elaboração própria

Passo 9: No quadro 11 e 12, repete-se a simetria rotacional no polígono *FIG1*, adquirindo os polígonos *FIG3* e *FIG4*.

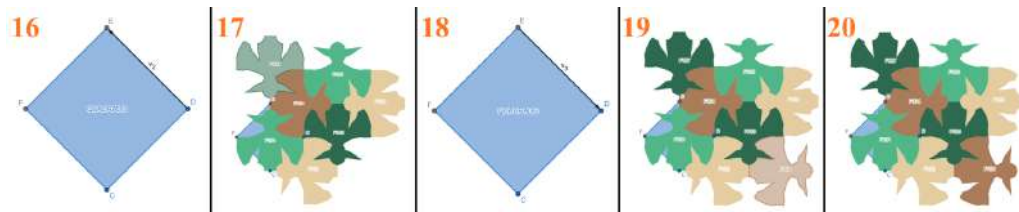
Entre os quadros 13 até 20, está relacionado a simetria de translação, como visto detalhadamente nos passos 9 até 14 da recriação da *Systematic Study*.

Passo 10: Construção do vetor $\vec{v}_1$ para a translação.

Passo 11: Transladação dos polígonos *FIG1* e *FIG2* utilizando o vetor $\vec{v}_1$, adquirindo os o polígonos *FIG5* e *FIG6*.

¹⁹ Quadros de 9 até 12: <https://www.geogebra.org/m/tf7ks4xy>

Figura 3.42 – Criação própria



Fonte: Elaboração própria

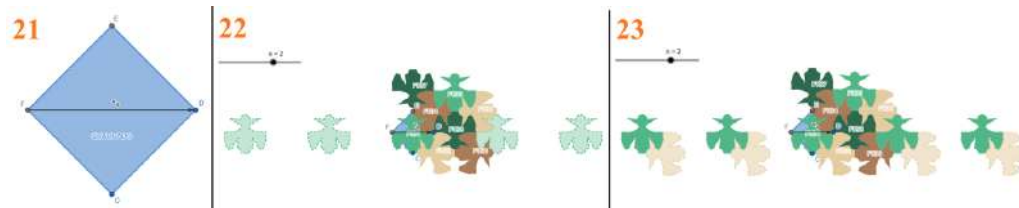
Passo 12: Construção do vetor $\vec{v}_2$ para a translação.²⁰

Passo 13: Transladação do polígono *FIG3* utilizando o vetor $\vec{v}_2$, adquirindo o o polígono *FIG7*.

Passo 14: Construção do vetor $\vec{v}_3$ para a translação.

Passo 15: Transladação do polígono *FIG4* utilizando o vetor $\vec{v}_3$, adquirindo o o polígono *FIG8*.

Figura 3.43 – Criação própria



Fonte: Elaboração própria

Passo 16: Criação do controle deslizante nomeado como "**n**", Com o seu valor mínimo: 1, valor máximo: 3 e incremento: 1.²¹

Iniciando o procedimento da expansão horizontal da tesselação.

Passo 17: Construção do vetor $\vec{v}_4$ para a translação horizontal.

Passo 18: Expansão horizontal da tesselação através da simetria translação, pelo comando "**=Sequência(Expressão, Variável, Valor Inicial, Valor Final)**".

²⁰ Quadros de 13 até 20: <https://www.geogebra.org/m/bhjww5bf>

²¹ Quadros de 21 até 29: <https://www.geogebra.org/m/bfpdrus7>

Figura 3.44 – Criação própria



Fonte: Elaboração própria

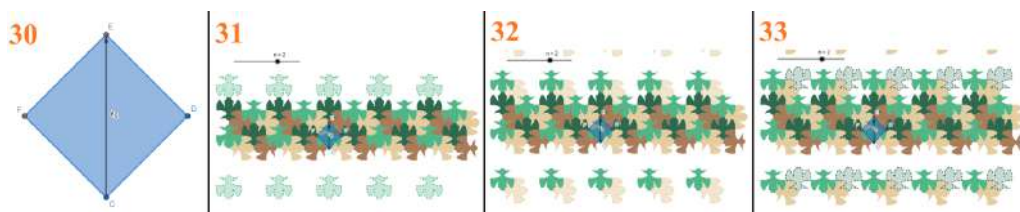
Figura 3.45 – Criação própria



Fonte: Elaboração própria

Passo 19: as figuras xx e xx, são construídas De modo análogo ao passo 18 pela Expansão horizontal da tesselação através da simetria transladação, obtendo uma lista de polígonos.

Figura 3.46 – Criação própria



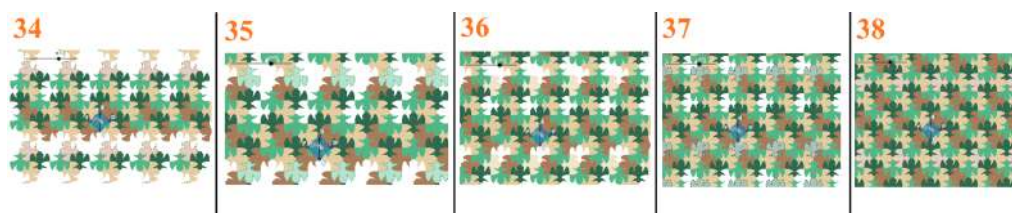
Fonte: Elaboração própria

Passo 20: Construção do vetor $\vec{v}_5$ para a translação vertical. ²²

Passo 21: Expansão vertical da tesselação através da simetria transladação, pelo comando "*Sequência(Expressão, Variável, Valor Inicial, Valor Final)*" na lista criada, com o vetor $\vec{v}_5$.

²² Quadros de 30 até 38: <https://www.geogebra.org/m/w5vgkcve>

Figura 3.47 – Criação própria



Fonte: Elaboração própria

Passo 22: A Figura 3.47, é construída de modo análogo ao passo 21, através da Expansão vertical, implicando nos conceitos de simetria transladação.²³

Portanto, com a conclusão das recriações das três obras de Escher no *software* GeoGebra, além do desenvolvimento da composição autoral neste trabalho, possibilitou evidenciar as transformações isométricas na construção das tesselações. Ademais, o uso do *software* mostrou-se um recurso adequado para representar essas transformações, possibilitando a visualização. Evidenciando que a própria elaboração demonstrou que os conceitos empregados por Escher podem ser utilizados na criação de novas tesselações por meio do GeoGebra, além de reforçar as transformações utilizadas na constituição das obras do artista.

No capítulo seguinte são apresentadas as considerações finais da pesquisa, de modo a retornar os objetivos propostos e discutir suas contribuições acerca dos resultados obtidos.

²³ Obra finalizada: <https://www.geogebra.org/m/mum6v8vp>

4 CONSIDERAÇÕES FINAIS

A presente pesquisa teve como objetivo analisar os conceitos geométricos presentes em obras selecionadas de Maurits Cornelis Escher e discutir como essas obras artísticas podem ser utilizadas no ensino de Geometria. A partir da fundamentação teórica, das análises realizadas e das reconstruções desenvolvidas no *software* GeoGebra, possibilitou alcançar o objetivo proposto, evidenciando que as obras do artista que envolvem tesselação estabelecem um recurso didático capaz de promover a aproximação entre a Geometria e a Arte.

Com base nas análises das obras, foi possível identificar diversos conceitos geométricos nas obras selecionadas, especialmente as transformações isométricas de rotação, reflexão e translação, as quais contribuem para a construção das tesselações que caracterizam algumas obras de Escher. Esses fundamentos geométricos atrelados às obras artísticas de Escher, demonstram que as composições do artista possuem uma estrutura baseada em princípios matemáticos, embora Escher não possuísse formação acadêmica nessa área Matemática.

A reconstrução das obras selecionadas, por meio do *software* GeoGebra possibilitou retratar e visualizar, de forma dinâmica, as transformações geométricas utilizadas nas obras artísticas de Escher. As quais, que em uma observação superficial das obras, podem acabar passando despercebidas ou até mesmo ficando invisíveis se não forem analisadas com atenção. Entretanto, com o processo de recriação no GeoGebra, tornam-se evidente as combinações entre as rotações, reflexões e translações responsáveis pela construção das tesselações presentes nas composições analisadas. Além de contribuir para a compreensão das propriedades geométricas, as recriações desenvolvidas revelaram que os mesmos princípios servem para as criações autorais, logo, ampliando a exploração da Geometria através da Arte.

Os resultados obtidos ao longo desta pesquisa permitiram responder à questão norteadora, de como as obras de Escher podem ser utilizadas para mediar a aprendizagem de conhecimentos geométricos. Por meio das obras verificou-se que elas constituem um excelente recurso didático, pois favorecem a compreensão de modo visual e prático dos conceitos de Geometria, especialmente as transformações isométricas e as tesselações, propondo que os estudantes observem, analisem, reconstruam e criem suas próprias composições utilizando os conceitos através do *software* GeoGebra. Com isso, a aprendizagem deixa de ser restrita a abordagem tradicional e parte a envolver os estudantes a protagonizarem esse processo de investigação e criação, assim tornando a aprendizagem desses conceitos

geométricos mais significativa, visual e participativa.

Além das reconstruções apresentadas no capítulo de Discussão e Resultado, a elaboração autoral possibilita que os conceitos estudados possam ser utilizados para produzir novas tesselações, de modo que desenvolvam sua criatividade no momento de construí-las. Desse modo, os docentes podem propor atividades em que os estudantes analisem e reconstruam as obras de Escher no GeoGebra e, posteriormente, propor que os alunos realizem suas composições autorais, aplicando os conceitos das transformações geométricas. Essa abordagem potencializa o protagonismo dos estudantes, estimulando a criatividade e aplicação dos conceitos de modo significativo por meio da Arte e da Matemática.

Dessa maneira, espera-se que esta pesquisa, que conecta Arte e a Matemática, contribua para ampliar a utilização dessa articulação no ensino de Geometria, de modo que ofereça aos professores atividades significativas que combine os conceitos matemáticos, obras de arte e as tecnologias digitais. Apesar de existirem possíveis limitações na construção das tesselações no GeoGebra, como possíveis perdas de arquivos devido a utilização de muitas ferramentas e o tamanho do arquivo gerado, essa condição não torna inviável a reprodução das construções propostas.

Como perspectiva para pesquisas futuras, sugere-se a ampliação deste estudo por meio da aplicação das atividades em sala de aula, objetivando investigar como o uso do GeoGebra juntamente com as obras de Escher podem contribuir para a aprendizagem dos conceitos de transformações geométricas. Além disso, sugere-se uma análise dedicada às perspectivas projetivas, tema no qual Escher foi um dos poucos que abordou a perspectiva com três pontos de fuga. Tais sugestões podem enriquecer o potencial didático dessas metodologias e contribuir para uma Geometria mais significativa.

REFERÊNCIAS

ALVES, Claudia Maria Fiuza. **O estudo da simetria através da arte de Maurits Cornelis Escher**. 76 p. Dissertação (Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT)) — Instituto de Matemática Pura e Aplicada, Rio de Janeiro, 2014. Acesso em: 4 jul. 2026. Disponível em: <https://sca.profmato-sbm.org.br/busca_tcc_det.php?id=290&id1=882>https://sca.profmato-sbm.org.br/busca_tcc_det.php?id=290id1=882.

ARAÚJO, Fernando Silva de. **Tecnologias na Educação Matemática: o uso do GeoGebra como ferramenta pedagógica no ensino de Geometria Espacial no Ensino Médio**. Dissertação (Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT)) — Universidade Estadual do Maranhão, São Luís, 2023. Disponível em: <<https://repositorio.uema.br/handle/123456789/3178>><https://repositorio.uema.br/handle/123456789/3178>.

ATALAY, Bülent. **A Matemática e a Mona Lisa: a confluência da arte com a ciência**. 2. ed. São Paulo: Publicações Mercurio Novo Tempo, 2009.

BERRO, Roberto Tadeu. **Relações entre arte e matemática: um estudo da obra de Maurits Cornelis Escher**. Dissertação (Dissertação (Mestrado em Educação)) — Universidade São Francisco, Itatiba, SP, 2008. Disponível em: <<https://www.usf.edu.br/galeria/getImage/385/14342978124314310.pdf>><https://www.usf.edu.br/galeria/getImage/385/14342978124314310.pdf>.

BOYER, Carl B. **História da Matemática**. 3. ed. São Paulo: Blucher, 2010. ISBN 9788521205135.

ESCHER, Maurits Cornelis. **Systematic Study**. 1936. Imagem disponível no WikiArt. Acesso em: 15 jun. 2026. Disponível em: <<https://www.wikiart.org/en/m-c-escher/systematic-study>><https://www.wikiart.org/en/m-c-escher/systematic-study>.

ESCHER, Maurits Cornelis. **Dwarves**. 1938. Imagem disponível no WikiArt. Acesso em: 15 jun. 2026. Disponível em: <<https://www.wikiart.org/en/m-c-escher/dwarves>><https://www.wikiart.org/en/m-c-escher/dwarves>.

ESCHER, Maurits Cornelis. **Symmetry Watercolor 70 Butterfly**. 1948. Imagem disponível no WikiArt. Acesso em: 15 jun. 2026. Disponível em: <<https://www.wikiart.org/en/m-c-escher/symmetry-watercolor-70-butterfly>><https://www.wikiart.org/en/m-c-escher/symmetry-watercolor-70-butterfly>.

FERREIRA, Bruno Belém; OLIVEIRA, Wellington Farias de; LIMA, Eusom Passos. Revisão de estudos sobre a relação entre geometria e artes. **RECIMA21 - Revista Científica Multidisciplinar**, v. 5, n. 4, p. 1–13, 2024. Disponível em: <<https://recima21.com.br/recima21/article/view/5058/3514>><https://recima21.com.br/recima21/article/view/5058/3514>.

FILHO, Dirceu Zaleski. **Matemática na arte e na vida**. 168 p. Dissertação (Dissertação (Mestrado em Educação, Arte e História da Cultura)) — Universidade Presbiteriana

Mackenzie, São Paulo, 2009. Disponível em: <<http://dspace.mackenzie.br/handle/10899/24867>><http://dspace.mackenzie.br/handle/10899/24867>.

FILHO, Dirceu Zaleski. **Matemática e Arte**. 1. ed. Belo Horizonte: Autêntica Editora, 2013. (Coleção Tendências em Educação Matemática). ISBN 9788582172049.

FILHO, Dirceu Zaleski. Matemática e arte: uma perspectiva necessária. In: SOCIEDADE BRASILEIRA DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA. **Anais do XI Encontro Nacional de Educação Matemática**. Curitiba: Sociedade Brasileira de Educação Matemática, 2013. Disponível em: <https://www.sbembrasil.org.br/files/XIENEM/pdf/3184_1784_ID.pdf>https://www.sbembrasil.org.br/files/XIENEM/pdf/3184_1784_ID.pdf.

GIL, Antonio Carlos. **Métodos e técnicas de pesquisa social**. 5. ed. São Paulo: Atlas, 1999. 206 p.

GONÇALVES, Tiago da Silva. **Uma Introdução à Geometria Projetiva para o Ensino Fundamental**. 149 p. Dissertação (Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática)) — Universidade Federal do Rio Grande, Rio Grande, 2013. Acesso em: 1 jul. 2026. Disponível em: <<<http://repositorio.furg.br/handle/1/6550>>>.

HAV320142. **Masaccio e Rosso: diferentes formas de tratar o espaço**. 2014. Acesso em: 1 jul. 2026. Disponível em: <<https://hav320142.wordpress.com/2014/11/17/masaccio-e-rosso-diferentes-formas-de-tratar-o-espaco/>><https://hav320142.wordpress.com/2014/11/17/masaccio-e-rosso-diferentes-formas-de-tratar-o-espaco/>.

LIVIO, Mario. **Razão áurea: a história de Phi, um número surpreendente**. 7. ed. Rio de Janeiro: Record, 2006. ISBN 9788501066534.

LUZ, Vania de Andrade. **Um estudo sobre o Ensino de Transformações Geométricas: da reforma da Matemática Moderna aos dias atuais**. 197 p. Dissertação (Dissertação (Mestrado em Educação)) — Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2007. Acesso em: 20 jun. 2026. Disponível em: <<https://sapientia.pucsp.br/handle/handle/11129>><https://sapientia.pucsp.br/handle/handle/11129>.

M. C. Escher Company. **The Official M. C. Escher Website**. 2026. Acesso em: 23 jul. 2026. Disponível em: <<https://mcescher.com/>><https://mcescher.com/>.

Mangá Design. **Aula de reforço: perspectiva com 2 pontos de fuga**. 2013. Acesso em: 1 jul. 2026. Disponível em: <<https://mangadesignbr.blogspot.com/2013/05/aula-de-reforco-perspectiva-com-2.html>><https://mangadesignbr.blogspot.com/2013/05/aula-de-reforco-perspectiva-com-2.html>.

MAYRING, Philipp. **Einführung in die qualitative Sozialforschung: eine Anleitung zu qualitativem Denken**. 5. ed. Weinheim: Beltz, 2002. 170 p. ISBN 9783407252524.

MENDES, Carlos Renato Almeida. **O uso da arte de Maurits Cornelis Escher para ensinar geometria**. 37 p. Dissertação (Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT)) — Instituto de Matemática Pura e Aplicada, Rio de Janeiro, 2015. Acesso em: 4 jul. 2026. Disponível em: <https://sca.proformat-sbm.org.br/busca_tcc_det.php?id=257&id1=1716>https://sca.proformat-sbm.org.br/busca_tcc_det.php?id=257&id1=1716.

MODESTO, Camila de Fátima. **Matemática e arte: explorando a geometria dos fractais e as tesselações de Escher**. Dissertação (Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática)) — Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2015. Disponível em: <<https://repositorio.uel.br/handle/123456789/11200>><https://repositorio.uel.br/handle/123456789/11200>.

NASCIMENTO, Felipe Bomfim Cavalcante do. **Abordagem diagnóstica sobre as dificuldades do ensino de geometria: análise de uma sequência didática envolvendo polígonos e poliedros para alunos cegos**. Dissertação (Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática)) — Universidade Federal de Alagoas, Maceió, 2019. Disponível em: <<https://www.repositorio.ufal.br/handle/riufal/5240>><https://www.repositorio.ufal.br/handle/riufal/5240>.

PIO, Ana Carolina da Silva. Trabalho de Conclusão de Curso (Licenciatura em Matemática), **Geometria e Arte: O uso das Obras de Maurits Cornelis Escher no Ensino das Transformações Geométricas**. Anápolis: [s.n.], 2023. 106 p. Acesso em: 10 jun. 2026. Disponível em: <<https://repositorio.ueg.br/jspui/handle/123456789/7516>><https://repositorio.ueg.br/jspui/handle/123456789/7516>.

PULINO, Petronio; MENEZES, Sandra. **A Simetria na Ciência, na Natureza e na Arte**. 1. ed. [S.l.]: LF Editorial, 2020. 176 p. ISBN 978-65-5563-021-3.

RAMOS, Ramaira Jacira Fagundes; COSTA, Christine Sertã. Diálogos entre arte e geometria por meio das obras de rubem valentim. **Revemop**, v. 6, p. e2024015, 2024. Disponível em: <<https://periodicos.ufop.br/revemop/article/view/7168>><https://periodicos.ufop.br/revemop/article/view/7168>.

RESENDE, Giovane; MESQUITA, Maria da Gloria Bastos de Freitas. Principais dificuldades percebidas no processo ensino-aprendizagem de matemática em escolas do município de divinópolis (mg). **Educação Matemática Pesquisa: Revista do Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática**, São Paulo, v. 15, n. 1, 2013. Disponível em: <<https://revistas.pucsp.br/emp/article/view/9841>><https://revistas.pucsp.br/emp/article/view/9841>.

SCHUNEMANN, Edwarda; SANTOS, Caroline dos; BATTISTI, Isabel Koltermann. A arte matemática nas obras de escher: explorando conceitos da geometria. In: **Anais da II Conferência Nacional de Educação Matemática, I Encontro Nacional PIBID/-Residência Pedagógica/Matemática – FACCAT, VII Jornada Pedagógica de Matemática do Vale do Paranhana (JOPEMAT) e XXV Encontro Regional de Estudantes de Matemática do Sul (EREMATSUL)**. Taquara, RS: FACCAT, 2019. Acesso em: 4 jul. 2026. Disponível em: <<https://www2.faccat.br/portal/?q=node/4486>><https://www2.faccat.br/portal/?q=node/4486>.

SILVA, Fábio Ferreira da. **Geometria, Arte & Escher: uma experiência na educação básica**. 76 p. Dissertação (Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática – PROFMAT)) — Universidade Federal Rural de Pernambuco, Recife, 2024. Acesso em: 1 jul. 2026. Disponível em: <https://sca.profmatsbm.org.br/busca_tcc_det.php?id=171056222&id1=7499>https://sca.profmatsbm.org.br/busca_tcc_det.php?id=171056222&id1=7499.

SILVA, Lenise Júlia Fassini da. **Ensino de geometria projetiva e perspectiva: um olhar pelas fotografias**. 102 p. Dissertação (Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT)) — Universidade Federal do Espírito Santo, Vitória, 2018. Acesso em: 1 jul. 2026. Disponível em: <<https://repositorio.ufes.br/items/aea796ac-aff3-4396-8fa8-895f23c37f85>><https://repositorio.ufes.br/items/aea796ac-aff3-4396-8fa8-895f23c37f85>.

TJABBES, Pieter. **O Mundo Mágico de Escher**. 2011. Catálogo da exposição. Curador: Pieter Tjabbes. Disponível em: <<https://ccbbstg.blob.core.windows.net/site-prod/2021/07/Escher.pdf>><https://ccbbstg.blob.core.windows.net/site-prod/2021/07/Escher.pdf>.

VALENTIM, Rubem. **Emblema logotipo poético de cultura Afro-Brasileira – nº 8**. 1976. Acervo do Museu de Arte de São Paulo Assis Chateaubriand (MASP). Disponível em: <<https://masp.org.br/acervo/obra/emblema-logotipo-poetico-de-cultura-afro-brasileira-n0-8>><https://masp.org.br/acervo/obra/emblema-logotipo-poetico-de-cultura-afro-brasileira-n0-8>.

ZAGO, Hellen da Silva; FLORES, Cláudia Regina. Uma proposta para relacionar arte e educação matemática. **Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa**, v. 13, n. 3, p. 337–354, 2010. ISSN 1665-2436. Disponível em: <<https://repositorio.ufsc.br/handle/123456789/202525>><https://repositorio.ufsc.br/handle/123456789/202525>.