



INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA DA PARAÍBA
Curso Superior de Licenciatura em Física

JOÃO VICTOR NUNES DE SOUSA

METAMATERIAIS:
Uma abordagem dos fundamentos e aplicações

CAMPINA GRANDE-PB

2026

JOÃO VICTOR NUNES DE SOUSA

METAMATERIAIS:

Uma abordagem dos fundamentos e aplicações

Trabalho de conclusão de curso apresentado no Curso Superior de Licenciatura em Física do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia da Paraíba (IFPB), como requisito parcial para obtenção do título de Licenciatura em Física.

Orientador: Prof. Dr. Maxwell A. M. Nogueira.

CAMPINA GRANDE-PB

2026

Catálogo na fonte:
Ficha catalográfica elaborada por Gustavo César Nogueira da Costa - CRB 15/479

S725m Sousa, João Victor Nunes de.

Metamateriais: uma abordagem dos fundamentos e aplicações / João Victor Nunes de Sousa. - Campina Grande, 2026.
77 f. : il.

Trabalho de Conclusão de Curso (Curso Superior de Licenciatura em Física.) - Instituto Federal da Paraíba, 2026.

Orientador: Prof. Dr. Maxwell Aragão Marques Nogueira.

1. Física. 2. Permeabilidade magnética. 3. Eletromagnetismo 4. Equações de Maxwell 5. Materiais levógiros. I. Nogueira, Maxwell Aragão Marques. II. Título.

CDU 537

JOÃO VICTOR NUNES DE SOUSA

METAMATERIAIS:

Uma abordagem dos fundamentos e aplicações

Trabalho de conclusão de curso apresentado no Curso Superior de Licenciatura em Física do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia da Paraíba (IFPB), como requisito parcial para obtenção do título de Licenciatura em Física.

Aprovado em: 29/07/2026

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Maxwell A. M. Nogueira – orientador
Instituto Federal da Paraíba

Prof. Dr. Alex S. B. Queiroz
Instituto Federal da Paraíba

Prof. Dr. Francisco G. C. Filho
Instituto Federal da Paraíba

“Inteligência é a capacidade de se adaptar à mudança”
(HAWKING, 2018).

RESUMO

Este trabalho apresenta um estudo sobre os metamateriais, estruturas artificiais periódicas que exibem propriedades eletromagnéticas que não são encontradas na natureza. Primeiramente, revisita-se o eletromagnetismo clássico a partir das equações de Maxwell, analisando como a matéria interage com ondas eletromagnéticas por meio dos parâmetros constitutivos de permissividade elétrica ϵ e permeabilidade magnética μ . Em seguida, conforme proposto pelo físico Victor Veselago, em 1968, investiga-se teoricamente a inserção de valores simultaneamente negativos para ϵ e μ nas equações de Maxwell, o que dá origem aos chamados metamateriais de índice de refração negativo ou materiais de orientação levógira. A partir dessa previsão teórica, examinam-se as propriedades fundamentais como da reversão da lei de Snell-Descartes e do efeito Doppler invertido. A validação experimental dessa proposta só ocorreu por volta de 2000, com os trabalhos de Smith e seus colaboradores. Atualmente, o estudo estende-se a aplicações tais como capas de invisibilidade 2D, estruturas quirais, e metamateriais não lineares e fotônicos. Os metamateriais permitem um controle inédito de ondas eletromagnéticas, viabilizando superlentes, hiperlentes, sensores ultraprecisos e componentes fotônicos integrados, termologia e óptica quântica.

Palavras-chave: metamateriais; Eletromagnetismo clássico; índice de refração negativo; permissividade negativa; permeabilidade negativa.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1 - Representação esquemática da primeira medição terrestre da velocidade da luz foi feita por Fizeau em 1849.	9
Figura 2 - Representação esquemática do experimento de Foucault para a medição da velocidade da luz.	9
Figura 3 - refração e reflexão no plano de incidência xz	18
Figura 4 - Comportamento do Efeito Doppler em meios dextrógiro e levógiro. Em (a), ilustra-se o efeito em um meio dextrógiro; em (b), em um meio levógiro.	35
Figura 5 - Passagem de um raio através da fronteira entre dois meios. 1: Raio incidente; 2: Raio refletido para qualquer meio; 3: Raio refratado quando o segundo meio é levógiro; 4: Raio refratado quando o segundo meio é dextrógiro.	37
Figura 6 - Propagação da luz do ponto A ao ponto B através de uma interface plana entre dois meios com índices de refração n_1 e n_2	38
Figura 7 - Passagem de raios de luz através de uma placa de espessura d feita de uma substância de orientação levógira. Onde, A : Fonte de radiação; B : detector de radiação.	40
Figura 8 - Trajetórias de raios através de lentes feitas de substâncias com orientação levógira, situadas no vácuo.	41
Figura 9 - Diagrama dos parâmetros ϵ e μ no plano cartesiano.	42
Figura 10 - Projeto e curva de ressonância de um ressonador de anel aberto de cobre individual para a construção de um <i>CMM 1D</i>	51
Figura 11 - Os sistemas (a) virtual e (b) físico.	54
Figura 12 - A grade transformada no sistema físico com limite interno de camuflagem especificado. Para (a) a grade transfinita e (b) a grade quase-conforme. Os mapas de cores mostram o perfil de n_2	55
Figura 13 - (a) Padrão do campo elétrico com a capa localizada dentro do retângulo, (b) Padrão do campo elétrico quando apenas o objeto está presente, sem a capa.	56
Figura 14 - Propagação do pacote de ondas gaussiano: incidência, reflexão com camuflagem e reflexão sem camuflagem.	58
Figura 15 - Representação esquemática da estrutura do metamaterial quiral e a sua vista superior.	60
Figura 16 - Resposta quiral da estrutura plasmônica: espectros de transmissão para polarizações RCP e LCP e espectro de dicroísmo circular.	62

Figura 17 - Resposta quiral da estrutura plasmônica: distribuição do campo elétrico.	63
Figura 18 - (a) Modelo de sistema linear (b) Modelo de sistema não linear.	66
Figura 19 - (a) membrana preenchida com prata; (b) nanofios de prata em uma membrana de alumina; (c) imagem microscópica da parede lateral da membrana..	69
Figura 20 - Refletância em função do ângulo de incidência e ângulos de Brewster medidos.	71
Figura 21 - Número de publicações sobre metamateriais por ano (2001–2023)	73

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	8
2	ONDAS ELETROMAGNÉTICAS	11
2.1	As equações de Maxwell	11
2.2	Equação de onda	12
2.3	Propagação de Ondas Eletromagnéticas no Vácuo e em Meios Materiais	15
2.4	Índice de Refração	17
2.5	Propagação e Interação de Ondas Eletromagnéticas em Interfaces	18
2.6	Lei de Snell-Descartes	23
2.7	Vetor de Poynting	23
3	MATERIAIS COM ϵ E μ NEGATIVOS	27
3.1	Uma breve história dos metamateriais	27
3.2	Introdução aos materiais com ϵ e μ negativos	27
3.3	Propagação de ondas em materiais com dupla negatividade $\epsilon < 0$ e $\mu < 0$	33
3.4	Efeito Doppler em meio levógiro	35
3.5	A Refração na interface entre meios dextrógiros e levógiros	36
3.6	Valores possíveis de ϵ e μ	42
4	O ESTADO DA ARTE DOS METAMATERIAIS	50
4.1	O primeiro metamaterial com índice de refração negativo	50
4.2	Possibilidade de “capa da invisibilidade”	52
4.3	Metamateriais quirais	59
4.4	Metamateriais não lineares	65
4.5	Metamateriais fotônicos	69
4.6	Crescimento da Pesquisa em Metamateriais	72
5	CONCLUSÕES	74

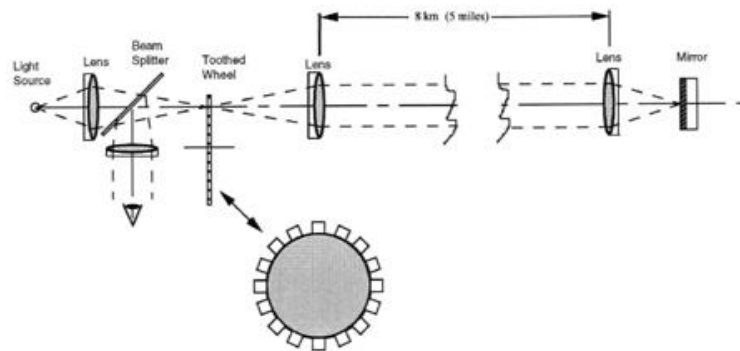
1 INTRODUÇÃO

Até meados do século XIX, os estudos envolvendo a eletricidade e magnetismo eram tratados de forma independentes, ou seja, até essa época acreditava-se que fenômenos elétricos e magnéticos não se relacionavam. Contudo, em 1820, o dinamarquês Hans Christian Oersted (1777-1851) realizou experimentos que mostraram que correntes elétricas produzem campos magnéticos. Já em 1831 o físico e químico britânico Michael Faraday (1791-1867) descobriu que campos magnéticos variáveis com o tempo produzem campos elétricos. Tal descoberta representou a primeira grande unificação da Física, passando a integrar dois fenômenos até então considerados independentes em uma única área do conhecimento, chamada de eletromagnetismo (NUSSENZVEIG, 1997).

Baseando-se nos trabalhos de Oersted, Faraday, Wilhelm Weber, Rudolf Kohlrausch e Ampère, o físico e matemático escocês James Clerk Maxwell (1831-1879), em seu trabalho publicado em 1862 formulou as quatro equações que descrevem o eletromagnetismo clássico. Além disso, unificou a óptica ao eletromagnetismo, domínios que, até então, eram tratados como campos independentes do conhecimento; mostrando que a luz era uma onda eletromagnética (NUSSENZVEIG, 1997).

No século XIX, o valor da velocidade da luz representada pela letra c já era conhecido. O físico francês Hippolyte Fizeau (1819-1896) realizou, a primeira medição terrestre da velocidade da luz. O experimento consistia em um feixe de luz direcionado a um espelho parcialmente refletor, que passava através das aberturas de uma roda dentada giratória. A luz refletida por um espelho distante, localizado a aproximadamente 8 km, retornava à roda; ao ajustar a velocidade de rotação, Fizeau observava o momento em que a luz, ao retornar, era bloqueada por um dente ou passava pelo próximo vão. Essa configuração permitiu-lhe calcular a velocidade da luz em aproximadamente 315.000 km/s, valor que é notavelmente próximo à 299.792.458 m/s. A Fig. 1 ilustra o arranjo experimental utilizado por Fizeau.

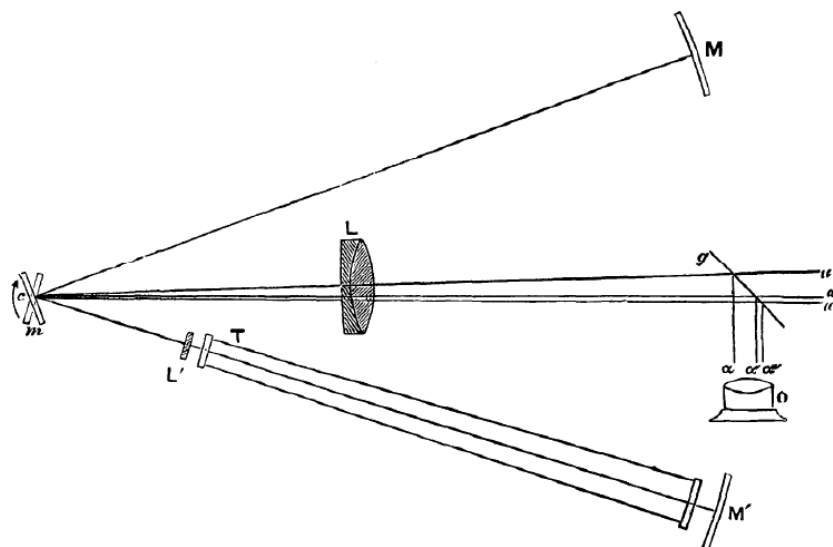
Figura 1 - Representação esquemática da primeira medição terrestre da velocidade da luz foi feita por Fizeau em 1849.



Fonte: WALKER (2008)

Já o físico e astrônomo francês Léon Foucault (1819-1868), realizou um experimento inovador utilizando um espelho rotativo. Nesse método, um feixe de luz incidia sobre o espelho em rotação, que o refletia em direção a um espelho fixo localizado a uma distância conhecida, e ao retornar ao espelho rotativo, este já havia sofrido um pequeno deslocamento angular durante o tempo de ida e volta da luz. Medindo esse deslocamento, Foucault determinou a velocidade da luz com precisão muito superior à obtida por Fizeau. O arranjo experimental empregado por Foucault está representado na Fig. 2.

Figura 2 - Representação esquemática do experimento de Foucault para a medição da velocidade da luz.



Fonte: PRIVAT DESCHANEL (1873).

Além desses experimentos, observações astronômicas baseadas na análise dos satélites de Júpiter também contribuíram para a determinação da velocidade da luz. Maxwell, através de suas equações, deduziu um valor para a velocidade da luz. Porém, somente após a sua chegada à Londres, quando nomeado professor no King's College, ele verificou os valores numéricos (NUSSENZVEIG, 1997).

Maxwell, em um trabalho de 1862, menciona:

A velocidade das ondas transversais em nosso meio hipotético, calculada a partir dos experimentos eletromagnéticos dos Srs. Kohlrausch e Weber, concorda tão exatamente com a velocidade da luz, calculada pelos experimentos óticos do Sr. Fizeau, que é difícil evitar a inferência de que a luz consiste nas ondulações transversais do mesmo meio que é a causa dos fenômenos elétricos e magnéticos. (MAXWELL, 1862).

A citação de Maxwell consolida a unificação entre óptica e eletromagnetismo, ao identificar a luz como uma onda eletromagnética. Essa conclusão estabeleceu que a propagação da luz é determinada pelos parâmetros ε (permissividade elétrica) e μ (permeabilidade magnética).

2 ONDAS ELETROMAGNÉTICAS

Nascido na Escócia, o físico e matemático James Clerk Maxwell (1831-1879) estudou na universidade de Cambridge, onde obteve uma formação matemática excepcional. Desde cedo, estimulado pelas observações de Faraday, Maxwell procurava formular equações que descrevessem as suas ideias (NUSSENZVEIG, 1997).

Ao estudarmos fenômenos elétricos e magnéticos, tem-se um conjunto básico de equações que os descrevem. Maxwell, no entanto, reconheceu que existia uma lacuna muito importante nessas descrições, que não explicavam, por exemplo, como a variação de um campo elétrico poderia influenciar um campo magnético e vice-versa.

Maxwell identificou uma limitação fundamental da lei de Ampère original, sua incapacidade de tratar adequadamente campos elétricos variáveis no tempo. Diante disso, Maxwell introduziu o termo da corrente de deslocamento na lei de Ampère, permitindo a descrição completa do então eletromagnetismo.

2.1 As equações de Maxwell

Em 1865, Maxwell deu sua maior contribuição para a história da Física ao unificar os fenômenos elétricos e magnéticos em um conjunto de quatro equações diferenciais, posteriormente denominadas “Equações de Maxwell” para o eletromagnetismo. Essas equações foram fundamentais para o desenvolvimento da física moderna. Essa foi a primeira unificação da história da física, e ficou conhecida como teoria eletromagnética (HAWKING, 1988).

O conjunto das equações de Maxwell no vácuo são:

- i. lei de Gauss para o campo elétrico:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho \quad (1)$$

- ii. lei de Ampère-Maxwell:

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \quad (2)$$

iii. lei de Faraday da indução:

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (3)$$

iv. lei de Gauss para o campo magnético:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \quad (4)$$

Onde $\vec{E}$ é o campo elétrico; $\vec{D}$ é o deslocamento elétrico, que incorpora a resposta do meio; $\vec{H}$ é o campo magnético; $\vec{B}$ é a indução magnética; ρ é a densidade de carga e $\vec{j}$ é a densidade de corrente.

Essas quatro equações, a equação da força de Lorentz eq. (5), e a segunda lei do movimento de Newton $\vec{F} = m\vec{a}$, fornecem uma descrição completa do movimento de partículas eletricamente carregadas (JACKSON, 1962).

$$\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}). \quad (5)$$

A eq. (5) representa a equação da força de Lorentz, que descreve a força total sobre uma partícula de carga q movendo-se com velocidade $\vec{v}$ na presença de campos elétrico e magnético. O termo $q\vec{E}$ representa a força elétrica, paralela ao campo; o termo $q(\vec{v} \times \vec{B})$ é a força magnética, perpendicular à velocidade e ao campo, responsável por curvar a trajetória da partícula sem alterar sua energia.

2.2 Equação de onda

Maxwell, previu a existência de ondas eletromagnéticas demonstrando que uma variação no campo elétrico induz um campo magnético variável e, da mesma forma, uma variação no campo magnético induz um campo elétrico variável. Esse processo gera uma onda que se auto-propaga pelo espaço. Ao calcular a velocidade dessa onda eletromagnética, com base nas constantes fundamentais do eletromagnetismo, Maxwell encontrou um valor que correspondia exatamente à

velocidade da luz medida experimentalmente. Isso o levou a concluir que a luz é, de fato, uma onda eletromagnética, unificando a óptica ao eletromagnetismo (REITZ, 1982).

O conceito de onda é, por natureza, algo intrinsecamente vago. Onda é uma perturbação de um meio contínuo que se propaga com uma forma fixa e em velocidade constante (GRIFFITHS, 2011). Porém, é possível acrescentar alguns qualificadores, tais como: em um meio absoritivo, a onda perde intensidade conforme se propaga; em um meio dispersivo, ondas de diferentes frequências se propagam com velocidades distintas; em duas ou três dimensões, conforme a onda se espalha, sua amplitude diminui; e, ondas estacionárias, por definição, não se propagam.

A partir da Lei de Ampère-Maxwell (2), demonstra-se abaixo que as ondas eletromagnéticas são consequências das equações de Maxwell. Inicialmente, calcula-se o rotacional em ambos os membros de (2):

$$\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{\nabla} \times \vec{J} + \vec{\nabla} \times \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}. \quad (6)$$

Segundo a lei de Ohm, a densidade de corrente elétrica $\vec{J}$ é proporcional ao campo elétrico $\vec{E}$ em um material com condutividade σ ; ou seja,

$$\vec{J} = \sigma \vec{E}. \quad (7)$$

É possível definir uma relação direta para materiais isotrópicos, dada pela relação entre o vetor deslocamento elétrico $\vec{D}$ e o campo elétrico $\vec{E}$:

$$\vec{D} = \epsilon \vec{E}. \quad (8)$$

Supondo que a permissividade elétrica ϵ e a condutividade elétrica σ sejam constantes, substituindo as eq. (7) e (8) na eq. (6), obtém-se:

$$\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \vec{H} = \sigma \vec{\nabla} \times \vec{E} + \epsilon \frac{\partial}{\partial t} \vec{\nabla} \times \vec{E}. \quad (9)$$

Usando a eq. (3) eliminamos $\vec{\nabla} \times \vec{E}$ da eq. (9) e obtém-se:

$$\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \vec{H} = -\sigma \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} - \varepsilon \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2}. \quad (10)$$

Em materiais magnéticos lineares, a relação entre $\vec{B}$ e $\vec{H}$ é dada por $\vec{B} = \mu \vec{H}$; logo, a partir da eq. (9), obtém-se então:

$$\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \vec{H} = -\sigma \mu \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} - \varepsilon \mu \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2}. \quad (11)$$

Mas,

$$\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{H}) - \nabla^2 \vec{H}. \quad (12)$$

Sabemos que $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$; como $\vec{B} = \mu \vec{H}$, e μ é uma constante, $\vec{\nabla} \cdot \vec{H} = 0$. Assim, obtém-se:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{H} = \vec{\nabla} \cdot \frac{\vec{B}}{\mu} = 0; \quad (13)$$

assim, o termo $\vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{H})$ é anulado da equação (12), o que leva a:

$$\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \vec{H} = -\nabla^2 \vec{H}. \quad (14)$$

Portanto, a eq. (11) assume a seguinte forma:

$$-\nabla^2 \vec{H} = -\sigma \mu \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} - \varepsilon \mu \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2}. \quad (15)$$

Multiplicando por -1 ambos os membros da equação, temos o seguinte resultado para a equação de onda do vetor intensidade magnética:

$$\nabla^2 \vec{H} = \sigma \mu \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} + \varepsilon \mu \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2}. \quad (16)$$

Tomando o rotacional da eq. (3), obtemos uma equação análoga para o campo elétrico:

$$\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \vec{E} = -\vec{\nabla} \times \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}; \quad (17)$$

substituindo as (7) e (8) em (2), obtemos:

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu\sigma\vec{E} + \mu\varepsilon\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}, \quad (18)$$

Em que, consideramos σ , μ e ε constantes. Para eliminar o campo magnético, derivamos ambos os membros de (18) em relação ao tempo e aplicamos eq. (3):

$$\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \vec{E} = -\mu\sigma\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} - \mu\varepsilon\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}. \quad (19)$$

Limitando a aplicação da equação a um meio sem cargas livres (ou seja, de forma que $\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = 0$) resulta que o divergente de $\vec{E}$ também é nulo. Aplicando o rotacional do rotacional de um vetor na eq. (19), obtemos a equação de onda do vetor campo elétrico:

$$\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \vec{E} = \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{E}) - \nabla^2 \vec{E} = -\mu\sigma\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} - \mu\varepsilon\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} \quad (20)$$

$$\Rightarrow \nabla^2 \vec{E} = \mu\varepsilon\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} + \mu\sigma\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}. \quad (21)$$

Obtêm-se, assim, duas equações diferenciais parciais, (16) e (21), que descrevem a propagação dos campos eletromagnéticos no meio considerado. Ambas apresentam termos de segunda derivada temporal e um termo de primeira derivada temporal associado à condutividade σ do meio, responsável por efeitos dissipativos ou de atenuação.

2.3 Propagação de Ondas Eletromagnéticas no Vácuo e em Meios Materiais

Com base nas (16) e (21), podemos chegar em dois casos particulares para a propagação de onda. O primeiro caso relaciona-se à propagação de ondas no vácuo. Considerando que o vácuo é um isolante elétrico perfeito ($\sigma = 0$) (NUSSENZVEIG, 1997), as eq. (16) e (21) assumem a seguinte forma:

$$\nabla^2 \vec{E} = \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}, \quad (22)$$

$$\nabla^2 \vec{H} = \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2}. \quad (23)$$

Estas equações nos indicam que $\vec{E}$ e $\vec{H}$ comportam-se como ondas tridimensionais. Podemos comparar a equação geral clássica de um campo $\vec{u}(r, t)$ que se propaga com velocidade v ,

$$\nabla^2 \vec{u} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial t^2}, \quad (24)$$

A partir das eq. (22) e (23), infere-se que o termo $\varepsilon_0 \mu_0$ desempenha o mesmo papel de $\frac{1}{v^2}$ na equação de onda. Dessa forma, obtêm-se à seguinte equação:

$$v = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}}, \quad (25)$$

que representa a velocidade da onda no vácuo. Substituindo os valores experimentais conhecidos para ε e μ , obtemos:

$$c = \frac{1}{\sqrt{(8,854 \times 10^{-12})(4\pi \times 10^{-7})}} \approx 2,997 \times 10^8 m/s, \quad (26)$$

Onde $\varepsilon_0 \approx 8,854 \times 10^{-12} F/m$ e $\mu_0 \approx 4\pi \times 10^{-7} H/m$, e c corresponde exatamente à velocidade da luz no vácuo. Assim, as equações de Maxwell preveem que a luz se propaga no vácuo com uma velocidade $c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}}$, ou seja, o fato de os campos elétrico e magnético serem soluções da equação de onda evidencia que a luz tem comportamento ondulatório.

Para o caso da propagação de ondas eletromagnéticas em meios dielétricos, os respectivos valores de permissividade elétrica e permeabilidade magnética, dados por ε e μ , dependem do meio considerado. Assim, as eq. (22) e (23) assumem a seguinte forma:

$$\nabla^2 \vec{E} = \varepsilon \mu \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}, \quad (27)$$

$$\nabla^2 \vec{H} = \varepsilon \mu \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2}. \quad (28)$$

Comparando (27) e (28) com (24), chegamos à equação da velocidade de propagação da onda eletromagnética em um meio material dielétrico:

$$v = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon \mu}}. \quad (29)$$

Dessa forma, a velocidade com que essa onda se propaga depende diretamente das propriedades elétricas e magnéticas do meio em questão.

2.4 Índice de Refração

O índice de refração n de um meio é uma grandeza física que define como a luz se propaga neste meio em relação ao vácuo (NUSSENZVEIG, 1998). O índice de refração é definido como:

$$n = \frac{c}{v}, \quad (30)$$

O que leva a:

$$n = \frac{\frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}}}{\frac{1}{\sqrt{\varepsilon \mu}}} = \sqrt{\frac{\varepsilon \mu}{\varepsilon_0 \mu_0}}. \quad (31)$$

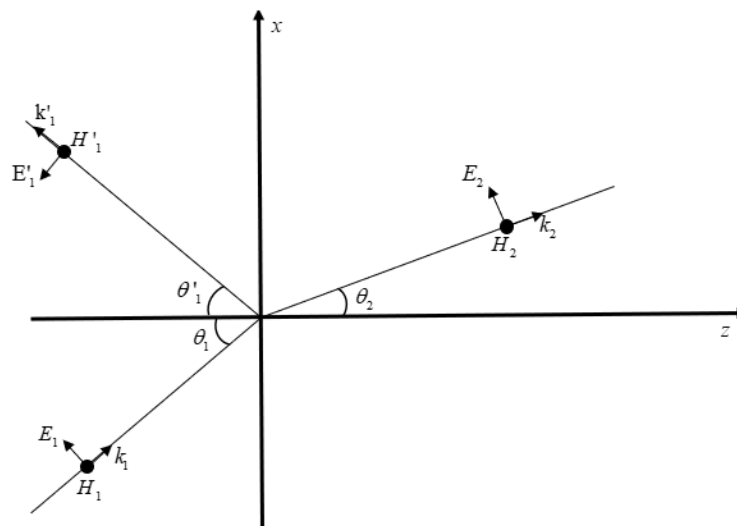
Na equação (31), pode-se ver como o índice de refração está intrinsicamente ligado à permissividade elétrica e à permeabilidade magnética do meio. Um aumento

na permissividade elétrica significa que o meio interage mais forte com o campo elétrico da onda eletromagnética, o que leva ao aumento do índice de refração; devido a redução da velocidade de propagação da luz no material. Analogamente, com o aumento da permeabilidade magnética, a velocidade da luz diminui, elevando o índice de refração. Dessa forma, o índice de refração reflete as características fundamentais dos materiais na interação com a luz (NUSSENZVEIG, 1998).

2.5 Propagação e Interação de Ondas Eletromagnéticas em Interfaces

Quando uma onda plana incide obliquamente em uma interface dielétrica plana, pode-se aplicar duas leis bastante conhecidas: a lei de Snell-Descartes e a lei da reflexão (REITZ, 1982). Tal caso é ilustrado na Fig. 3, onde tem-se dois meios isotrópicos com índices de refração n_1 e n_2 diferentes, e com densidade de carga nula ($\sigma = 0$). Nota-se que um raio incidente sobre o plano xz dá origem a dois novos raios: o raio refletido, que corresponde à parcela da luz que retorna ao meio de origem; e o raio refratado, que representa a parcela da luz que passa para o outro meio (REITZ, 1982).

Figura 3 - refração e reflexão no plano de incidência xz .



Fonte: autoria própria (2026).

Na Fig. 3, tem-se as orientações dos vetores $\vec{H}$, $\vec{E}$ e $\vec{k}$, que representam, respectivamente, a intensidade magnética, o campo elétrico e o vetor de

propagação. Os vetores $\vec{H}$, conforme representados na figura, são perpendiculares ao plano xz , e orientados no sentido positivo do eixo y .

Os campos elétricos das ondas incidente, refletida e refratada podem ser descritos da seguinte forma:

$$\vec{E}_1 = \hat{E}_{1p} e^{i(\vec{k}_1 \cdot \vec{r} - \omega t)}, \quad (32)$$

$$\vec{E}'_1 = \hat{E}'_{1p} e^{i(\vec{k}'_1 \cdot \vec{r} - \omega t)}, \quad (33)$$

$$\vec{E}_2 = \hat{E}_{2p} e^{i(\vec{k}_2 \cdot \vec{r} - \omega t)}. \quad (34)$$

A condição de contorno para um campo elétrico na interface entre dois meios dielétricos pode ser obtida através da Lei de Faraday eq. (3). Considerando $\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0$, obtém-se:

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = 0. \quad (35)$$

Aplicando o teorema de Stokes em (35), obtemos que:

$$\int_S (\vec{\nabla} \times \vec{E}) \cdot d\vec{a} = \oint_{\partial S} \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0. \quad (36)$$

Como $\vec{\nabla} \times \vec{E} = 0$ em todos os pontos do espaço, tem-se que:

$$\oint_{\partial S} \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0. \quad (37)$$

Como o caminho fechado é retangular, com lados iguais L na direção x , e altura $h \rightarrow 0$ ao longo de z , tem-se que:

$$\oint_{\partial S} \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_{-L/2}^{L/2} E_x^{(1)}(z = +h/2) dx + \int_{h/2}^{-h/2} E_z(x = L/2) dz \quad (38)$$

$$+ \int_{L/2}^{-L/2} E_x^{(2)}(z = -h/2) dx + \int_{-h/2}^{h/2} E_z(x = -L/2) dz = 0.$$

Como o limite $h \rightarrow 0$, as integrais que estão em dz se anulam. As integrais em dx ficam sobre a interface ($z = 0$):

$$\int_{-L/2}^{L/2} E_{x1}(0^+) dx + \int_{L/2}^{-L/2} E_{x2}(0^-) dx = 0. \quad (39)$$

Mudando os limites da segunda integral, obtemos:

$$\int_{-L/2}^{L/2} E_{x1}(0^+) dx = - \int_{-L/2}^{L/2} E_{x2}(0^-) dx. \quad (40)$$

Logo, tem-se que:

$$\begin{aligned} \int_{-L/2}^{L/2} [E_{x1}(0^+) - E_{x2}(0^-)] dx &= 0 \\ \Rightarrow E_{x1}(0^+) &= E_{x2}(0^-). \end{aligned} \quad (41)$$

Ou seja, a integral se anula para qualquer L , e, portanto, concluímos que o integrando deve ser nulo. Generalizando para qualquer direção tangencial t , chegamos no seguinte resultado:

$$\vec{E}_{t1} = \vec{E}_{t2}. \quad (42)$$

Dessa forma, tem-se que:

$$\hat{n} \times (\vec{E}_2 - \vec{E}_1) = 0. \quad (43)$$

Onde $\hat{n}$ é o vetor unitário normal à interface (ou seja, perpendicular à superfície de separação entre os dois meios), orientado do meio 1 para o meio 2. A eq. (43) expressa a continuidade das componentes tangenciais do campo elétrico

através da interface; uma das condições de contorno fundamentais do eletromagnetismo, que decorre diretamente da lei de Faraday. Isso nos diz que, na região de fronteira ($z = 0$), a soma da onda incidente com a refletida deve ser igual a onda refratada:

$$\hat{E}_{1p} e^{i(\vec{k}_1 \cdot \vec{r} - \omega t)} + \hat{E}'_{1p} e^{i(\vec{k}'_1 \cdot \vec{r} - \omega t)} = \hat{E}_{2p} e^{i(\vec{k}_2 \cdot \vec{r} - \omega t)}. \quad (44)$$

De acordo com a equação (44), na incidência oblíqua as ondas refletida e refratada têm mesma frequência que a da onda incidente. Além disso, as fases são iguais em todos os pontos da interface (REITZ, 1982):

$$\vec{k}_1 \cdot \vec{r} = \vec{k}'_1 \cdot \vec{r} = \vec{k}_2 \cdot \vec{r}; \quad (45)$$

Esta expressão tem três consequências relevantes. Inicialmente, vamos utilizar a seguinte identidade vetorial:

$$\hat{n} \times (\hat{n} \times \vec{r}) = (\hat{n} \cdot \vec{r}) \hat{n} - \vec{r}. \quad (46)$$

Em ambos os pontos na fronteira da interface, temos que $\hat{n} \cdot \vec{r} = 0$; logo,

$$\vec{r} = -\hat{n} \times (\hat{n} \times \vec{r}). \quad (47)$$

Substituindo a eq. (47) em (45), e aplicando a propriedade vetorial do produto misto, obtemos:

$$\vec{k}_1 \cdot \vec{r} = -\vec{k}_1 \cdot \hat{n} \times (\hat{n} \times \vec{r}) = -(\vec{k}_1 \times \hat{n}) \cdot (\hat{n} \times \vec{r}). \quad (48)$$

Procedendo da mesma forma para o outro membro da equação (45), obtemos:

$$(\vec{k}_1 \times \hat{n}) \cdot (\hat{n} \times \vec{r}) = (\vec{k}'_1 \times \hat{n}) \cdot (\hat{n} \times \vec{r}) = (\vec{k}_2 \times \hat{n}) \cdot (\hat{n} \times \vec{r}). \quad (49)$$

Considerando $\vec{r}$ um vetor arbitrário na interface, podemos afirmar que a eq. (45) é válida se, e somente se,

$$\vec{k}'_1 \times \hat{n} = \vec{k}_1 \times \hat{n} = \vec{k}_2 \times \hat{n}. \quad (50)$$

Isso nos diz que $\vec{k}'_1$ se localiza no plano de incidência, uma vez que a normal ao plano definido por $\vec{k}'_1$ e $\hat{n}$ é paralela à normal ao plano de incidência; do mesmo modo, $\vec{k}_2$ está no plano de incidência. Isto é, $\hat{n}$, $\vec{k}_1$, $\vec{k}'_1$ e $\vec{k}_2$ são todos coplanares (REITZ, 1982).

A partir de (50), obtemos as seguintes relações entre os vetores de propagação e os ângulos:

$$|\vec{k}_1 \times \hat{n}| = k_1 \sin \theta_1, \quad (51)$$

$$|\vec{k}'_1 \times \hat{n}| = k'_1 \sin \theta'_1, \quad (52)$$

$$|\vec{k}_2 \times \hat{n}| = k_2 \sin \theta_2. \quad (53)$$

O vetor de propagação $\vec{k}$ é definido como um vetor cuja direção indica o sentido de propagação da onda, cujo módulo $k = |\vec{k}| = 2\pi/\lambda$ está relacionado ao comprimento de onda λ , e cuja magnitude também pode ser expressa em termos da frequência angular ω e da velocidade de fase v do meio por $k = \omega/v$. Em uma interface plana entre dois meios, a continuidade das componentes tangenciais do campo elétrico e magnético impõe que a componente tangencial do vetor de propagação seja conservada, ou seja, $k_{1x} = k'_{1x} = k_{2x}$. Além disso, como a reflexão ocorre no mesmo meio da onda incidente, o módulo do vetor de propagação não se altera, pois ambos, onda incidente e refletida, propagam-se com a mesma frequência ω e no mesmo meio, caracterizado pela mesma velocidade de fase v_1 . Dessa forma, $|\vec{k}_1| = |\vec{k}'_1|$ e, portanto, o ângulo de incidência é igual ao ângulo de reflexão:

$$\theta'_1 = \theta_1. \quad (54)$$

2.6 Lei de Snell-Descartes

É possível igualar as eq. (51) e (53), a fim de buscar uma relação entre os índices de refração e os ângulos de incidência e refração:

$$k_1 \sin \theta_1 = k_2 \sin \theta_2; \quad (55)$$

consequentemente, o módulo do vetor de propagação da onda eletromagnética é dado por:

$$k^2 = \frac{n^2 \omega^2}{c^2}. \quad (56)$$

Substituindo (56) em (55), obtemos:

$$\frac{n_1 \omega}{c} \sin \theta_1 = \frac{n_2 \omega}{c} \sin \theta_2, \quad (57)$$

o que leva a:

$$n_1 \sin \theta_1 = n_2 \sin \theta_2. \quad (58)$$

A equação (58) é a Lei de Snell-Descartes, que descreve o fenômeno da refração: ao atravessar a fronteira entre dois meios com índices de refração distintos, o raio de luz tem sua trajetória alterada, aproximando-se da normal quando o segundo meio é mais refringente; e afastando-se da normal quando é menos refringente. Essa relação é fundamental para a óptica geométrica, pois permite prever o ângulo de propagação no segundo meio conhecendo-se as propriedades ópticas dos materiais e o ângulo de incidência.

2.7 Vetor de Poynting

As leis de conservação de energia e de momento aplicadas ao campo eletromagnético constituem resultados de grande importância (JACKSON, 1962).

Sabendo-se que a força magnética não realiza trabalho por ser sempre perpendicular à velocidade da partícula carregada, o trabalho infinitesimal realizado pelo campo eletromagnético sobre uma distribuição contínua de cargas e correntes reduz-se à contribuição do campo elétrico. Para uma carga puntual q sujeita a um campo elétrico $\vec{E}$, esse trabalho é dado por:

$$dW = q\vec{E} \cdot d\vec{r}. \quad (59)$$

Em um dado volume V , contendo uma distribuição contínua de carga e uma densidade de corrente $\vec{J}$, o trabalho total por unidade de tempo é dado por:

$$\frac{dW}{dt} = \int_V \vec{J} \cdot \vec{E} d^3x. \quad (60)$$

A integral (60) representa a conversão da energia eletromagnética em energia térmica ou mecânica. Uma taxa correspondente de variação da energia no campo eletromagnético dentro do volume V deve existir para que se garanta a conservação da energia. Dessa forma, a equação de conservação da energia eletromagnética se torna:

$$\int_V \vec{J} \cdot \vec{E} d^3x = -\frac{d}{dt} \int_V u d^3x, \quad (61)$$

onde, u representa a densidade de energia eletromagnética.

Para eliminar $\vec{J}$, utilizaremos a lei de Maxwell-Ampère, descrita pela seguinte equação:

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}. \quad (62)$$

Multiplicando-se escalarmente ambos os membros por $\vec{E}$, obtemos:

$$\vec{E} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{H}) = \vec{E} \cdot \left(\vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right); \quad (63)$$

Ou seja,

$$\vec{J} \cdot \vec{E} = \vec{E} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{H}) - \vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}. \quad (64)$$

Substituindo (64) em (61), obtemos:

$$\int_V \left(\vec{E} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{H}) - \vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right) d^3x = \frac{d}{dt} \int_V u d^3x. \quad (65)$$

Usaremos a seguinte identidade vetorial:

$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{E} \times \vec{H}) = \vec{H} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{E}) - \vec{E} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{H}). \quad (66)$$

Substituindo (3) em (66), temos que:

$$\vec{E} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{H}) = -\vec{\nabla} \cdot (\vec{E} \times \vec{H}) - \vec{H} \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}. \quad (67)$$

Substituindo (67) em (65), obtemos:

$$\int_V \left(-\vec{\nabla} \cdot (\vec{E} \times \vec{H}) - \vec{H} \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} - \vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right) d^3x = \frac{\partial}{\partial t} \int_V u d^3x \quad (68)$$

$$\int_V \left(\vec{\nabla} \cdot (\vec{E} \times \vec{H}) + \vec{H} \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} + \vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right) d^3x = -\frac{\partial}{\partial t} \int_V u d^3x.$$

Para prosseguir, devemos fazer duas suposições. A primeira não é fundamental e é feita apenas por simplicidade. Supomos que o meio macroscópico envolvido é linear em suas propriedades elétricas e magnéticas. Então, as duas derivadas temporais presentes na eq. (68) podem ser interpretadas,

respectivamente, como as derivadas temporais das densidades de energia eletrostática e magnética, conforme sugerido pela estrutura da eq. (69). Como segunda suposição, admitimos que a eq. (69) representa a densidade de energia eletromagnética total, mesmo para campos variáveis no tempo:

$$u = \frac{1}{2} (\vec{E} \cdot \vec{D} + \vec{B} \cdot \vec{H}). \quad (69)$$

Fazendo a derivada temporal de (69), encontramos:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{2} \left(\vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \vec{H} \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right). \quad (70)$$

Multiplicando (70) por 2, e comparando com a eq. (68), concluímos que:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \nabla \cdot \vec{S} = -\vec{J} \cdot \vec{E}, \quad (71)$$

que é a equação final do teorema de Poynting, expressa como uma equação de continuidade; $\vec{S}$ é o vetor de Poynting, que representa o fluxo de energia, e definido como:

$$\vec{S} = (\vec{E} \times \vec{H}). \quad (72)$$

Como apenas sua divergência aparece na equação de conservação, o vetor de Poynting não é completamente determinado. É possível somar a ele o rotacional de qualquer outro campo vetorial sem alterar a conservação da energia. Como essa abordagem matemática não afeta o seu sentido físico da equação, adotamos a forma mostrada na eq. (72) (JACKSON, 1962).

3 MATERIAIS COM ε E μ NEGATIVOS

3.1 Uma breve história dos metamateriais

Antes da década de 1960, era impensável encontrar materiais cujos valores de permissividade elétrica ε e de permeabilidade magnética μ fossem simultaneamente negativos. Porém, em 1968, o físico ucraniano Victor Veselago explorou as consequências físicas de materiais com essas propriedades, uma condição que contradizia o senso comum da época, baseado apenas em materiais disponíveis naturalmente. Em 1968 Veselago publicou um artigo intitulado "*The Electrodynamics of Substances with Simultaneously Negative Values of ε and μ* ".

Nesse trabalho, Veselago descreveu materiais que tinham ε e μ negativos, os chamados materiais com índice de refração negativo, também denominados materiais levógiros (do grego *levos*, esquerdo), nos quais os vetores campo elétrico, campo magnético, e o vetor de onda formam um triedro orientado à esquerda. No artigo, ficou estabelecida a previsão teórica de que esses materiais apresentariam fenômenos inusitados, tais como a reversão da lei de Snell, o efeito Doppler invertido e a radiação de Cherenkov oposta, inaugurando assim um novo campo da física (VESELAGO, 1968).

Após 30 anos, veio a concretização experimental de tais materiais. Por volta do ano 2000, David R. Smith, Sheldon Schultz e colaboradores da Universidade da Califórnia em San Diego (UCSD) conseguiram, pela primeira vez, baseados em trabalhos do físico John Pendry, projetar e construir um compósito que apresentava, simultaneamente, permissividade e permeabilidade efetivas negativas na faixa de micro-ondas. Esta conquista experimental, materializada em uma estrutura periódica composta por anéis ressoadores abertos (SRRs - *Split Ring Resonators*) e fios condutores contínuos, representou a validação definitiva das previsões de Veselago, demonstrando que os fenômenos por ele antecipados não eram meras abstrações matemáticas, mas sim efeitos físicos realizáveis (SMITH *et al.*, 2000).

3.2 Introdução aos materiais com ε e μ negativos

Dois parâmetros físicos exercem um papel essencial na caracterização da propagação de ondas eletromagnéticas no interior de meios materiais: a permissividade elétrica ε e a permeabilidade magnética μ . A importância dessas grandezas decorre diretamente da equação de dispersão, na qual figuram como os únicos parâmetros relacionados ao meio (VESELAGO, 1968). Com base nas equações de Maxwell, ao se separarem as contribuições de cargas e correntes ligadas das livres, introduz-se os vetores auxiliares $\vec{D}$ e $\vec{H}$, definidos como $\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$ e $\vec{H} = \vec{B}/\mu_0 - \vec{M}$. Para meios lineares, a polarização $\vec{P}$ e a magnetização $\vec{M}$ são proporcionais aos campos aplicados: $\vec{P} = \varepsilon_0 \chi_e \vec{E}$, $\vec{M} = \chi_m \vec{H}$. No caso geral de materiais anisotrópicos, a resposta do meio depende da direção, de modo que as relações constitutivas entre os campos podem ser escritas como:

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \varepsilon_{ij} \vec{E}, \quad (73)$$

$$\vec{B} = \mu_0 \mu_{ij} \vec{H}, \quad (74)$$

onde ε_{ij} e μ_{ij} são os tensores permissividade elétrica e permeabilidade magnética, respectivamente.

Quando se considera um meio material desprovido de fontes, ou seja, com densidade de carga elétrica nula ($\rho = 0$) e sem correntes elétricas ($J = 0$), as equações de Maxwell sofrem simplificações, uma vez que os termos associados a essas grandezas se anulam (VESELAGO, 1968).

Nessas condições, as soluções são mais simples, sendo as ondas monocromáticas um exemplo típico. Para meios sem fontes, tanto o campo elétrico quanto o campo magnético podem ser representados como ondas planas com a seguinte forma:

$$\vec{E}(r, t) = \vec{E}_0 e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)}, \quad (75)$$

$$\vec{H}(r, t) = \vec{H}_0 e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)}, \quad (76)$$

sendo $\vec{E}_0$ e $\vec{H}_0$ as amplitudes constantes, $\vec{k}$ o vetor de onda, e ω a frequência angular.

A partir das equações de Maxwell, e adotando soluções ondulatórias planas na forma $\vec{F} = \vec{F}_0 e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)}$, o operador rotacional aplicado a uma função exponencial complexa resulta na seguinte identidade:

$$\nabla \times (\vec{F}_0 e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}}) = i\vec{k} \times \vec{F}_0 e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}}. \quad (77)$$

Aplicando (77) para o campo $\vec{E}$, obtemos:

$$\nabla \times \vec{E} = i\vec{k} \times \vec{E}. \quad (78)$$

Substituindo (3) em (78), obtemos:

$$i\vec{k} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}. \quad (79)$$

Considerando que $\vec{B} = \mu \vec{H}$ e $\frac{\partial}{\partial t} = -i\omega$, obtemos:

$$i\vec{k} \times \vec{E} = -(-i\omega\mu\vec{H}). \quad (80)$$

Logo,

$$\vec{k} \times \vec{E} = \omega\mu\vec{H}, \quad (81)$$

onde, em meios isotrópicos ou no vácuo, μ é um escalar.

A equação mostra que o campo elétrico $\vec{E}$ e o campo magnético $\vec{H}$ são perpendiculares entre si e perpendiculares à direção de propagação $\vec{k}$. A relação entre suas amplitudes é determinada pela permeabilidade magnética μ do meio e pela frequência ω .

Analogamente, aplicamos o rotacional sobre o campo magnético $\vec{H}$, obtemos:

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} = i\vec{k} \times \vec{H}. \quad (82)$$

A partir da lei de Ampère-Maxwell, eq. (2), e considerando $J = 0$, encontramos:

$$i\vec{k} \times \vec{H} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}. \quad (83)$$

De (83), obtemos:

$$i\vec{k} \times \vec{H} = -i\omega\varepsilon\vec{E}. \quad (84)$$

Simplificando (84), encontramos:

$$\vec{k} \times \vec{H} = -\omega\varepsilon\vec{E}, \quad (85)$$

onde em meios isotrópicos ou no vácuo ε é um escalar. Com isso, a equação (81) representa a lei de Faraday e a equação (85) a lei de Ampère-Maxwell.

Substituindo (74) em (81) temos que, para meios anisotrópicos, substituímos o escalar μ pelo tensor μ_{ij} multiplicado por μ_0 , obtendo:

$$\vec{k} \times \vec{E} = \omega\mu_0\mu_{ij}\vec{H}, \quad (86)$$

substituindo (73) em (85) temos que, para meios anisotrópicos, substituímos o escalar ε pelo tensor ε_{ij} multiplicado por ε_0 , obtendo:

$$\vec{k} \times \vec{H} = -\omega\varepsilon_0\varepsilon_{ij}\vec{E}. \quad (87)$$

A eq. (86) representa a Lei de Faraday generalizada para meios anisotrópicos, enquanto a eq. (87) representa a Lei de Ampère-Maxwell generalizada. O aparecimento dos tensores ε_{ij} e μ_{ij} reflete a anisotropia do meio; o campo elétrico $\vec{E}$ em uma direção pode induzir um deslocamento elétrico $\vec{D}$ em outra direção, e o mesmo ocorre para o campo magnético $\vec{H}$ e a indução magnética $\vec{B}$.

Isolando $\vec{H}$ em (86), obtemos:

$$\vec{H} = \frac{1}{\omega\mu_0} (\mu^{-1})_{ij} (\vec{k} \times \vec{E}). \quad (88)$$

Substituindo $\vec{H}$ em (87), temos que:

$$\vec{k} \times \left(\frac{1}{\omega\mu_0} (\mu^{-1})_{ij} (\vec{k} \times \vec{E}) \right) = -\omega\varepsilon_0\varepsilon_{ij}\vec{E}. \quad (89)$$

Simplificando, obtemos:

$$\frac{1}{\omega\mu_0} (\mu^{-1})_{ij} [\vec{k} \times (\vec{k} \times \vec{E})] = -\omega\varepsilon_0\varepsilon_{ij}\vec{E}. \quad (90)$$

Substituindo a identidade vetorial $\vec{k} \times (\vec{k} \times \vec{E}) = (\vec{k} \cdot \vec{E})\vec{k} - k^2\vec{E}$ em (90), obtemos:

$$\frac{1}{\omega\mu_0} (\mu^{-1})_{ij} [(\vec{k} \cdot \vec{E})\vec{k} - k^2\vec{E}] = -\omega\varepsilon_0\varepsilon_{ij}\vec{E}. \quad (91)$$

Logo,

$$(\mu^{-1})_{ij} [(\vec{k} \cdot \vec{E})k_j - k^2 E_j] = -\omega^2\varepsilon_0\mu_0\varepsilon_{ij}E_j. \quad (92)$$

Considerando $\varepsilon_0\mu_0 = \frac{1}{c^2}$ em (92), temos que:

$$(\mu^{-1})_{ij} [k_i k_j E_j - k^2 \delta_{ij} E_j] = -\frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon_{ij} E_j. \quad (93)$$

Multiplicando ambos os lados por μ_{ij} :

$$[k_i k_j - k^2 \delta_{ij}] E_j = -\frac{\omega^2}{c^2} \mu_{ij} \varepsilon_{jk} E_k. \quad (94)$$

Para escrever (94) como um sistema linear homogêneo na forma matricial, agrupam-se todos os termos em E_k . Reorganizando a equação, obtemos:

$$\left(\frac{\omega^2}{c^2}\mu_{ij}\varepsilon_{jk} - k^2\delta_{ik} + k_ik_k\right)E_k = 0. \quad (95)$$

Para soluções não triviais, com $E_k \neq 0$, o determinante da matriz deve ser igual a zero:

$$\left|\frac{\omega^2}{c^2}\mu_{ij}\varepsilon_{jk} - k^2\delta_{ik} + k_ik_k\right| = 0. \quad (96)$$

A equação (96) apresenta a equação geral da dispersão, onde encontramos uma relação entre a frequência ω de uma onda monocromática e seu vetor de onda $\vec{k}$ levando em consideração as propriedades do material ε e μ (VESELAGO, 1968).

Em materiais isotrópicos, a equação (96) se reduz a uma forma mais simples. Neste caso, os tensores se simplificam; assim, temos que $\varepsilon_{jk} = \varepsilon\delta_{jk}$ e $\mu_{ij} = \mu\delta_{ij}$, permissividade elétrica e permeabilidade magnética, são escalares. Substituindo esses tensores em (96), nota-se que $\delta_{ij}\delta_{jk} = \delta_{ik}$, devido a regra de Kronecker. Assim, obtemos:

$$\left(\frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon\mu\delta_{ik} - k^2\delta_{ik} + k_ik_k\right)E_k = 0. \quad (97)$$

Podemos reescrever a equação matricial (97) para $\vec{E}$ da seguinte forma:

$$\left(\frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon\mu - k^2\right)\vec{E} + \vec{k}(\vec{k} \cdot \vec{E}) = 0. \quad (98)$$

Para o caso de ondas transversais, o campo elétrico é perpendicular à direção de propagação $\vec{k}$. Assim, o termo $\vec{k}(\vec{k} \cdot \vec{E})$ desaparece, pois $(\vec{k} \cdot \vec{E}) = 0$:

$$\left(\frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon\mu - k^2\right)\vec{E} = 0. \quad (99)$$

Para $\vec{E} \neq 0$, e considerando $n = \sqrt{\varepsilon\mu}$, a equação (99) toma a seguinte forma:

$$k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} n^2. \quad (100)$$

Agora temos a equação para dispersão da forma mais simples, em um meio isotrópico.

Da eq. (100) decorrem implicações físicas notáveis. Caso ε e μ sofram uma inversão simultânea de sinal, tornando-se ambos negativos, o valor de k^2 permanece inalterado. Essa constatação permite três diferentes formas de interpretação. A primeira hipótese sugere que a inversão simultânea dos sinais não produz qualquer efeito sobre as propriedades do meio, porém, essa visão desconsidera certos fenômenos físicos importantes. A segunda interpretação afirma que a existência simultânea de $\varepsilon < 0$ e $\mu < 0$ entraria em conflito com princípios fundamentais da natureza, o que explicaria por que esses materiais jamais haviam sido observados até então. Contudo, o fato de não terem sido encontrados na natureza não implicava, necessariamente, que fossem impossíveis de existir. Isso conduz à terceira possibilidade: materiais com ambos os parâmetros negativos exibem comportamentos radicalmente distintos dos observados em materiais comuns (VESELAGO, 1968). Conforme comentado anteriormente, tais substâncias somente viriam a ser artificialmente concebidas muitos anos depois, conforme será discutido adiante.

3.3 Propagação de ondas em materiais com dupla negatividade $\varepsilon < 0$ e $\mu < 0$

A fim de estabelecer as leis eletromagnéticas cuja determinação está diretamente vinculada aos sinais de ε e μ , faz-se necessário analisar as expressões nas quais esses parâmetros figuram de forma individualizada, e não somente como produto, tal como aparece em (96) e (100). As relações fundamentais neste contexto são as equações de Maxwell juntamente com as relações constitutivas.

Parte-se, respectivamente, da Lei de Faraday, Lei de Ampère-Maxwell, e das relações (73) e (74). Dessa forma, assumimos, que a solução para os campos elétrico e magnético é dada por uma onda plana monocromática que se propaga na direção z :

$$\vec{E}(r, t) = \vec{E}_0 e^{i(kz - \omega t)}, \quad (101)$$

$$\vec{H}(r, t) = \vec{H}_0 e^{i(kz - \omega t)}. \quad (102)$$

Para que se possa derivar as eq. (101) e (102), calcula-se o rotacional dos campos:

$$\nabla \times \vec{E} = i\vec{k} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}; \quad (103)$$

Como $\vec{B} = \mu\vec{H}$ e $\frac{\partial}{\partial t}\vec{H} = -i\omega\vec{H}$, temos que:

$$i\vec{k} \times \vec{E} = -(-i\omega\mu\vec{H}). \quad (104)$$

Logo,

$$\vec{k} \times \vec{E} = \omega\mu\vec{H}. \quad (105)$$

Analogamente para Lei de Ampère-Maxwell, temos que:

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} = i\vec{k} \times \vec{H} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}; \quad (106)$$

Como $\vec{D} = \varepsilon\vec{E}$ e $\frac{\partial}{\partial t}\vec{E} = -i\omega\vec{E}$, obtemos:

$$i\vec{k} \times \vec{H} = (-i\omega\varepsilon\vec{E}). \quad (107)$$

Logo,

$$\vec{k} \times \vec{H} = -\omega\varepsilon\vec{E}. \quad (108)$$

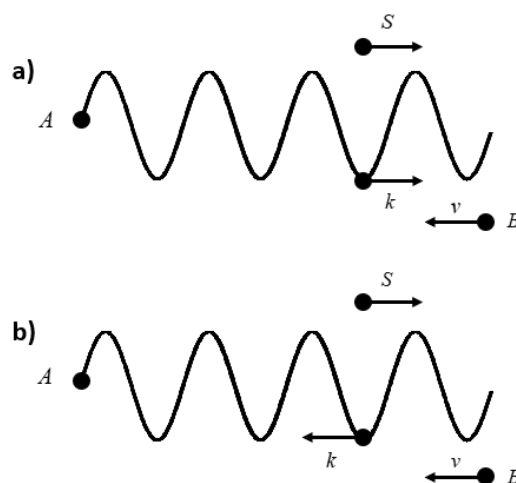
Analisando as equações (105) e (108), observamos que, quando $\varepsilon > 0$ e $\mu > 0$, os vetores $\vec{E}$, $\vec{H}$ e $\vec{k}$ formam um sistema orientado segundo a regra da mão direita, caracterizando o meio como dextrógiro. Por outro lado, para $\varepsilon < 0$ e $\mu < 0$, a

orientação passa a ser de um meio levógiro regra da mão esquerda, configurando assim um meio levógiro.

3.4 Efeito Doppler em meio levógiro

Em meios dextrógiros, o efeito Doppler se manifesta como um aumento da frequência quando a fonte se aproxima do receptor, e uma diminuição quando a fonte se afasta. Esse comportamento decorre das propriedades do meio, tais como o índice de refração positivo e o paralelismo entre os vetores de onda $\vec{k}$ (fase) e de Poynting $\vec{S}$ (energia). Por outro lado, em um meio levógiro, que apresenta índice de refração negativo e propriedades eletromagnéticas incomuns, o Efeito Doppler exibe um comportamento oposto. Nesses materiais, a direção de propagação da energia e a direção de propagação da fase da onda são antiparalelas, originando fenômenos contraintuitivos. Quando a fonte de radiação se aproxima do observador em um meio levógiro, a frequência detectada diminui; inversamente, quando há afastamento, ocorre um aumento da frequência observada.

Figura 4 - Comportamento do Efeito Doppler em meios dextrógiro e levógiro. Em (a), ilustra-se o efeito em um meio dextrógiro; em (b), em um meio levógiro.



Fonte: Autoria própria (2026).

Na Fig. 4, a fonte de radiação é identificada pela letra A , enquanto o detector é representado pela letra B . O vetor $\vec{k}$ indica a direção do vetor de onda e $\vec{v}$ a direção da velocidade da fonte.

O fluxo de energia transportada pela onda é dado pelo vetor de Poynting, conforme a eq. (72). Esta expressão indica que $\vec{S}$ sempre forma um conjunto dextrógiro juntamente com os vetores $\vec{E}$ e $\vec{H}$. Em meios dextrógiros, os vetores $\vec{S}$ e $\vec{k}$ possuem o mesmo sentido, enquanto que, em meios levógiros, os sentidos são opostos. Como o vetor de onda $\vec{k}$ tem o mesmo sentido da velocidade de fase, concluímos que meios levógiros apresentam a chamada velocidade de grupo negativa, fenômeno que ocorre especialmente em meios anisotrópicos ou na presença de dispersão espacial (VESELAGO, 1968).

Considerando que, nesses meios, a velocidade de fase é oposta ao fluxo de energia, nós observamos, em primeiro lugar, a ocorrência de um efeito Doppler reverso. Suponhamos um detector de radiação, imerso em um meio levógiro, que se move em relação a uma fonte que emite uma frequência ω_0 . Em seu movimento, o detector acompanha pontos da onda que correspondem a uma fase específica, conforme ilustrado na Fig. 4. A frequência detectada é menor do que ω_0 , em vez de maior, como ocorreria em um meio dextrogiro. Utilizando o parâmetro p , característico do meio em questão, é possível expressar a fórmula para o desvio Doppler da seguinte forma:

$$\omega = \omega_0 \left(1 - p \frac{\vec{v}}{\vec{u}} \right), \quad (109)$$

onde a velocidade $\vec{v}$ do detector é considerada positiva quando o mesmo está se afastando da fonte. A velocidade $\vec{u}$ do fluxo de energia é sempre considerada positiva.

3.5 A Refração na interface entre meios dextrógiros e levógiros

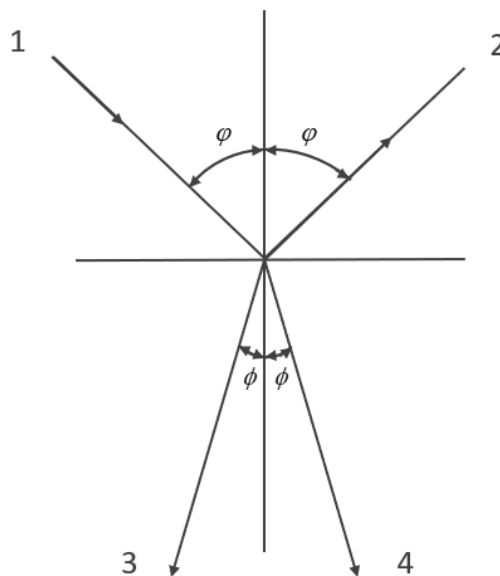
As condições de contorno para a passagem de um raio de luz de um meio para outro meio são:

$$\vec{E}_{t_1} = \vec{E}_{t_2}, \vec{H}_{t_1} = \vec{H}_{t_2}, \quad (110)$$

$$\varepsilon_1 \vec{E}_{n_1} = \varepsilon_2 \vec{E}_{n_2}, \mu_1 \vec{H}_{n_1} = \mu_2 \vec{H}_{n_2}. \quad (111)$$

Independentemente dos meios possuírem ou não a mesma orientação, as componentes x e y dos campos $\vec{E}$ e $\vec{H}$ no raio refratado mantêm suas direções. Já a componente z permanece na mesma direção apenas quando os dois meios têm a mesma orientação. Quando os meios têm orientações opostas, as componentes z invertem o sinal. Além disso, na transição para um meio com orientação dextrógira ou levógira distinta, os vetores $\vec{E}$ e $\vec{H}$ não apenas têm suas magnitudes alteradas devido à diferença nos valores de ε e μ , mas também sofrem uma reflexão em relação à interface entre os dois meios. O mesmo também ocorre com o vetor $\vec{k}$. O trajeto do raio refratado resultante de tais reflexões é apresentado na Fig. 5 (VESELAGO, 1968).

Figura 5 - Passagem de um raio através da fronteira entre dois meios. 1: Raio incidente; 2: Raio refletido para qualquer meio; 3: Raio refratado quando o segundo meio é levógira; 4: Raio refratado quando o segundo meio é dextrógira.



Fonte: Autoria própria (2026).

A antiparalelidade entre as velocidades de fase e de grupo afeta imediatamente a lei de Snell, como está ilustrado na Fig. 5. Para ε e μ positivos, o raio se propaga ao longo do caminho 1 – 4 através da interface entre dois meios. Se um dos meios tem ε e μ negativos, o raio se propaga ao longo do caminho 1 – 3. Essa propagação incomum do raio é uma consequência do sentido oposto dos

vetores, velocidade de fase $\vec{v}_{ph}$ e velocidade de grupo $\vec{v}_{gr}$ e da continuidade das componentes tangenciais do vetor de onda na interface entre os dois meios.

Define-se o eixo z como o eixo normal à interface entre os dois meios, ou seja, a reta perpendicular à superfície de separação. Como se pode observar na Fig. 5, quando o segundo meio é levógiro, o raio refratado se situa no lado oposto do eixo z em comparação com sua posição no caso em que o segundo meio é dextrógiro. Deve-se notar que a direção do raio refletido é sempre a mesma, independentemente das orientações dos dois meios. A lei usual que representa esse conceito é dada da seguinte forma:

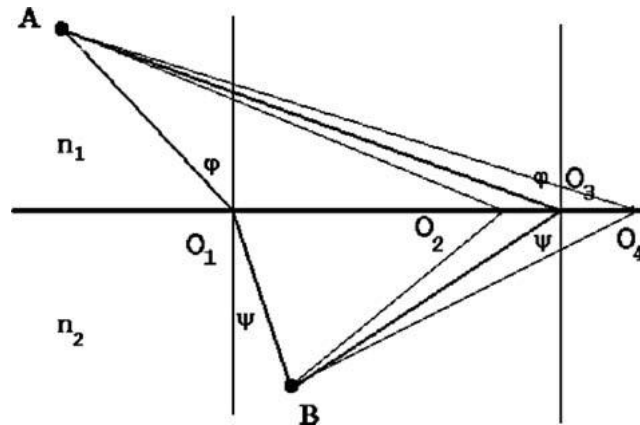
$$\frac{\sin \varphi}{\sin \phi} = n_{1,2} = \sqrt{\frac{\varepsilon_2 \mu_2}{\varepsilon_1 \mu_1}}. \quad (112)$$

Porém, se a orientação dextrógira ou levógira dos meios 1 e 2 forem diferentes, essa expressão deve ser formulada de maneira mais precisa. Então, a forma correta para (112) é dada por:

$$\frac{\sin \varphi}{\sin \phi} = n_{1,2} = \frac{p_2}{p_1} \sqrt{\frac{\varepsilon_2 \mu_2}{\varepsilon_1 \mu_1}}. \quad (113)$$

Aqui, p_1 e p_2 representam as orientações do primeiro e do segundo meio, com $p = +1$ para orientação dextrógira e $p = -1$ para orientação levógira. A partir da eq. (113), fica evidente que o índice de refração entre dois meios pode ser negativo se as orientações dos meios forem diferentes; particularmente, o índice de refração de um meio de orientação levógira em relação ao vácuo é negativo.

Figura 6 - Propagação da luz do ponto A ao ponto B através de uma interface plana entre dois meios com índices de refração n_1 e n_2 .



Fonte: VESELAGO *et al.* (2006).

Na Fig. 6, para $n = n_1/n_2 > 0$, a luz viaja ao longo de AO_1B . No caso de $n = n_1/n_2$, a luz viaja ao longo de AO_3B . Os caminhos AO_2B e AO_4B são caminhos virtuais que ilustram o princípio de Fermat.

A Fig. 6 ilustra os possíveis caminhos de um raio que cruza uma superfície plana entre dois meios com os índices de refração n_1 e n_2 . Se n_1 e n_2 são ambos positivos, o raio viaja ao longo de AO_1B , e os ângulos θ e φ satisfazem a lei de Snell $n_1 \sin \theta = n_2 \sin \varphi$. O comprimento de caminho óptico L é dado por:

$$L = n_1(AO_1) + n_2(O_1B). \quad (114)$$

A lei de Snell é válida se e somente se a variação do caminho óptico ∂L for zero:

$$\partial L = \partial\{n_1(AO_1) + n_2(O_1B)\} = 0. \quad (115)$$

Aqui, o comprimento L para AO_1B é mínimo e positivo.

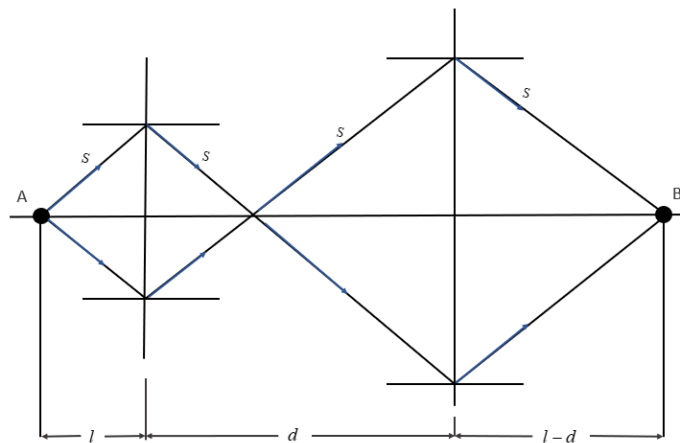
No caso em que n_1 e n_2 sejam negativos, a propagação do raio será a mesma que no caso anterior, mas, com uma diferença importante: no primeiro caso, o vetor de onda em ambos os meios está direcionado ao longo dos raios, com sentido de A para B ; e no segundo caso, está direcionado ao longo dos raios, com sentido de B para A . Neste caso, L é negativo; e máximo para AO_1B . Em ambos os casos, $n = n_2/n_1 > 0$.

A situação muda bastante se $n = n_2/n_1$ for negativo. Isso ocorre quando os dois meios têm orientações opostas: um deles é dextrógiro e o outro é levógiro. A luz, assim, se propagará ao longo do caminho AO_3B , de modo que:

$$\partial L = \partial\{n_1(AO_3) + n_2(O_3B)\} = 0. \quad (116)$$

A expressão (116) se modifica quando o meio levógiro apresenta um índice de refração negativo. Assim, a condição de extremo do caminho óptico, que está relacionada à variação total da fase da onda, que depende do índice de refração n , o qual define a velocidade de fase da luz, é válida. No entanto, nesse caso, não é possível garantir a princípio se o verdadeiro caminho da luz corresponde exatamente a um máximo ou a um mínimo do caminho óptico. O tipo de extremo depende da geometria e dos valores n_1 e n_2 . Além disso, o caminho real de A a B não é o mais curto em termos de tempo de propagação, ou seja, a formulação do princípio de Fermat com base no tempo de propagação não é, em geral, correta. A formulação correta é baseada no extremo do comprimento óptico: "O verdadeiro caminho de propagação da luz corresponde ao extremo local do comprimento óptico" (VESELAGO *et al.*, 2006).

Figura 7 - Passagem de raios de luz através de uma placa de espessura d feita de uma substância de orientação levógira. Onde, A : Fonte de radiação; B : detector de radiação.

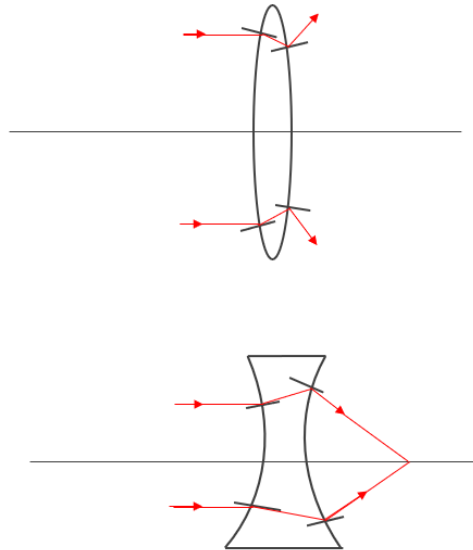


Fonte: Autoria própria (2026).

A Fig. 7 ilustra a passagem de raios de luz através de uma placa de espessura d composta por um material de orientação levógira (índice de refração negativo). A fonte de radiação A emite um feixe luminoso que incide sobre a placa. Ao atravessar o meio levógiro, o raio sofre refração negativa na primeira interface, propagando no interior do material com trajetória não usual. Ao atingir a segunda

interface (saída da placa), o raio é novamente refratado, emergindo em direção ao detector *B*.

Figura 8 - Trajetórias de raios através de lentes feitas de substâncias com orientação levógira, situadas no vácuo.

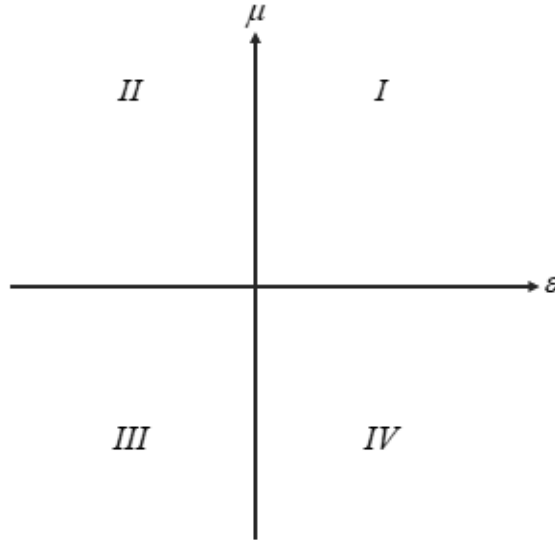


Fonte: Autoria própria (2026).

A Fig. 8 demonstra como os raios luminosos se comportam ao atravessar lentes fabricadas com materiais levógiros. Nessas circunstâncias, os papéis das lentes convexas e côncavas se invertem em relação ao que ocorre em meios dextrogiros: a lente convexa torna-se divergente, ao passo que a lente côncava passa a atuar como convergente.

3.6 Valores possíveis de ε e μ

Figura 9 - Diagrama dos parâmetros ε e μ no plano cartesiano.



Fonte: Autoria própria (2026).

A Fig. 9 mostra um sistema de coordenadas no qual os valores de ε e μ são marcados nos eixos. Inicialmente, consideramos o caso em que ε e μ são grandezas escalares e isotrópicas. Dessa forma, o primeiro quadrante do diagrama abrange a grande maioria dos dielétricos, nos quais ambos os parâmetros assumem valores positivos. O segundo quadrante, com $\varepsilon < 0$ e $\mu > 0$, é ocupado por plasmas, sejam eles na forma gasosa ou no estado sólido; por exemplo, semicondutores dopados. Em um plasma não submetido a campo magnético externo, a permissividade relativa ε pode ser determinada a partir da equação de movimento do elétron. Considere um elétron de massa m e carga e . Quando uma onda eletromagnética, cujo campo elétrico $\vec{E}$ oscila temporalmente como $e^{-i\omega t}$, incide sobre o material, os elétrons são deslocados de sua posição de equilíbrio. A força restauradora é desconsiderada, uma vez que, em um metal ideal, não existem “ligações elásticas” conectando os elétrons aos átomos. Nessas condições, a equação de movimento assume a seguinte forma:

$$m \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = e \vec{E}. \quad (117)$$

Como o campo é oscilante, a solução para a posição $\vec{r}$ também é oscilante:

$\vec{r} = \vec{r}_0 e^{-i\omega t}$. A aceleração é $\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = -\omega^2\vec{r}$. Substituindo essa aceleração em (117), obtemos:

$$\begin{aligned} m(-\omega^2\vec{r}) &= e\vec{E}, \\ \vec{r} &= -\frac{e}{m\omega^2}\vec{E}. \end{aligned} \tag{118}$$

O sinal negativo presente em (118) nos indica que o elétron se move em sentido oposto ao campo. O deslocamento dos elétrons cria um momento de dipolo elétrico $\vec{P} = e\vec{r}$; aqui, consideramos a carga e como negativa, mas para a densidade de polarização, usamos a carga do elétron. No cálculo da densidade de polarização $\vec{P}$, utiliza-se diretamente o valor da carga do elétron, incluindo seu sinal negativo, o que garantirá que o vetor polarização aponte na direção oposta ao campo elétrico aplicado, conforme será demonstrado a seguir. Se há N elétrons por unidade de volume, então temos:

$$\begin{aligned} \vec{P} &= Ne\vec{r} = Ne\left(-\frac{e}{m\omega^2}\vec{E}\right) \\ \vec{P} &= -\frac{Ne^2}{m\omega^2}\vec{E}. \end{aligned} \tag{119}$$

A relação fundamental entre o vetor deslocamento elétrico $\vec{D}$, o campo elétrico $\vec{E}$ e a polarização $\vec{P}$ é dada por:

$$\vec{D} = \vec{E} + 4\pi\vec{P}. \tag{120}$$

Substituindo (119) em (120), obtemos:

$$\vec{D} = \vec{E} + 4\pi\left(-\frac{Ne^2}{m\omega^2}\vec{E}\right). \tag{121}$$

Rearranjando a equação, obtemos:

$$\vec{D} = \left(1 - \frac{4\pi Ne^2}{m\omega^2}\right) \vec{E}. \quad (122)$$

A relação constitutiva para um meio linear é $\vec{D} = \epsilon(\omega) \vec{E}$. Portanto, a função dielétrica; permissividade relativa é dada por:

$$\epsilon(\omega) = 1 - \frac{4\pi Ne^2}{m\omega^2}. \quad (123)$$

A frequência de plasma é definida como:

$$\omega_0^2 = \frac{4\pi Ne^2}{m}. \quad (124)$$

Essa é a frequência natural na qual o "mar" de elétrons oscila coletivamente. Para chegar à expressão da permissividade elétrica $\epsilon(\omega)$ em um plasma sem campo magnético, parte-se da polarização $\vec{P}$ induzida pelo campo elétrico; o deslocamento dos elétrons gera uma polarização $\vec{P} = -\frac{Ne^2}{m\omega^2} \vec{E}$. Essa polarização, por sua vez, modifica o vetor deslocamento $\vec{D}$ elétrico por meio da relação $\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$. Como $\vec{D}$ também pode ser escrito como $\vec{D} = \epsilon_0 \epsilon(\omega) \vec{E}$, basta igualar as duas expressões e isolar $\epsilon(\omega)$. Ao fazer isso, obtém-se uma relação na qual a permissividade depende da frequência, tendo a forma:

$$\epsilon(\omega) = 1 - \frac{\omega_0^2}{\omega^2}, \quad (125)$$

$$\epsilon = 1 - \sum \frac{\omega_0^2}{\omega^2}. \quad (126)$$

Conforme a eq. (126), quando existem diversas espécies de portadores de carga, cada qual com sua própria densidade n_i , massa m_i e frequência de plasma ω_{0i} , a permissividade total é obtida somando as contribuições individuais. Nesse contexto, define-se $\omega_0^2 = 4\pi Ne^2/m$, onde N denota a concentração dos portadores, e a carga elementar e m a massa correspondente. O somatório se estende a todas as espécies de portadores presentes no material.

Pode-se observar facilmente que, em baixas frequências, o valor de ε torna-se negativo. Quando $\varepsilon < 0$ e $\mu > 0$ simultaneamente, o valor de n^2 presente em (100) se revela um número puramente imaginário, pois $n = \sqrt{\varepsilon\mu}$ resulta na raiz quadrada de um número negativo. Nessas condições, o meio não permite a propagação de ondas eletromagnéticas na forma de ondas viajantes; em vez disso, a onda incidente sofre reflexão total e o campo decai exponencialmente ao penetrar no meio (campo evanescente), fenômeno conhecido como efeito de pele (ou skin effect). Esse fenômeno é amplamente corroborado por evidências experimentais, como ocorre, por exemplo, na ionosfera terrestre (VESELAGO, 1968).

O terceiro quadrante da Fig. 9 corresponde à região onde ambos os parâmetros são negativos $\varepsilon < 0$ e $\mu < 0$. Nesse caso, o produto $\varepsilon\mu$ é positivo, de modo que o índice de refração $n = \sqrt{\varepsilon\mu}$ é um número real. No entanto, a raiz quadrada admite duas possibilidades: $n > 0$, convencional, ou $n < 0$, negativo. A escolha fisicamente correta é determinada pela condição de que a energia deve se propagar da fonte para o infinito, o que impõe que a velocidade de grupo seja positiva. Essa condição leva à seleção do índice de refração negativo, ou seja, $n < 0$.

Passamos agora à análise dos materiais anisotrópicos. Quando os meios são anisotrópicos, ε e μ assumem a forma de tensores, o que inviabiliza o uso direto de um diagrama como o da Fig. 9. Em certos materiais, entretanto, essa representação ainda é possível para ondas que se propagam ao longo de direções específicas. Os materiais girotrópicos despertam particular interesse nesse contexto. Materiais girotrópicos são meios anisotrópicos nos quais o tensor permissividade ε_{ik} , ou permeabilidade μ_{ik} , apresenta elementos não simétricos, geralmente com componentes diagonais iguais e componentes antissimétricas fora da diagonal; induzidas pela presença de um campo magnético externo estático ou por magnetização intrínseca do material. Nestas substâncias, o plano de polarização da luz sofre rotação ao se propagar através do meio, fenômeno conhecido como efeito Faraday, para ondas eletromagnéticas; ou rotação óptica na faixa óptica. Para esses meios, os tensores ε_{ik} e μ_{ik} apresentam as seguintes formas:

$$\varepsilon_{ik} = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 & i\varepsilon_2 & 0 \\ -i\varepsilon_2 & \varepsilon_1 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_3 \end{pmatrix}, \quad (127)$$

$$\mu_{ik} = \begin{pmatrix} \mu_1 & i\mu_2 & 0 \\ -i\mu_2 & \mu_1 & 0 \\ 0 & 0 & \mu_3 \end{pmatrix}. \quad (128)$$

Um exemplo bem conhecido de substância girotrópica é um plasma na presença de campo magnético, e caracterizado por um tensor ε_{ik} conforme a eq. (127), e um valor escalar de μ . Se uma onda plana transversal circularmente polarizada da forma $e^{i(kz-\omega t)}$ se propaga em tal plasma, com $k \parallel z \parallel \vec{H}_0$, então, n^2 é dado por:

$$n^2 = \mu(\varepsilon_1 \pm \varepsilon_2). \quad (129)$$

O sinal $\pm$ corresponde às duas direções de polarização da onda. Se $|\varepsilon_2| < |\varepsilon_1|$ e $\varepsilon_1 > 0$, duas ondas podem se propagar no plasma, mas se $|\varepsilon_2| > |\varepsilon_1| = -\varepsilon_1$, então apenas uma onda se propaga aquela para a qual $n^2 > 0$. Nesses casos, o plasma deve ser colocado no primeiro quadrante da Fig. 9, e μ é da ordem de 1. Quanto à segunda onda, no caso $|\varepsilon_2| > |\varepsilon_1| = -\varepsilon_1$, não pode se propagar porque para ela $\varepsilon < 0$, o que pela eq. (129) leva a um valor imaginário de n . Neste caso, o plasma pertence ao segundo quadrante da Fig. 9.

Outro exemplo de substâncias girotrópicas está relacionado à materiais magnéticos nos quais, em contraste com o plasma, μ é um tensor. Para estes materiais, o análogo da eq. (129) é:

$$n^2 = \mu(\mu_1 \pm \mu_2). \quad (130)$$

Aqui também pode, em princípio, haver uma situação em que $|\mu_2| > |\mu_1| = -\mu_1$, o que corresponde ao quarto quadrante da Fig. 9.

Metais ferromagnéticos puros e semicondutores são exemplos de materiais girotrópicos nos quais tanto ε quanto μ são tensores. Para tais substâncias, o índice de refração de uma onda circularmente polarizada que se propaga paralelamente à direção do campo magnético estático aplicado, é dado por:

$$n^2 = (\varepsilon_1 \pm \varepsilon_2)(\mu_1 \pm \mu_2). \quad (131)$$

Nessas circunstâncias, tanto a permissividade elétrica efetiva quanto a permeabilidade magnética efetiva podem assumir valores simultaneamente negativos, mantendo ainda n^2 positivo, o que permite a propagação ondulatória. Esses materiais correspondem exatamente ao terceiro quadrante da Fig. 9, e também ao quarto, dependendo da combinação de sinais. Portanto, infere-se que a busca por meios com $\varepsilon < 0$ e $\mu < 0$ deve concentrar-se prioritariamente em materiais girotrópicos. Além disso, é importante destacar que, em substâncias girotrópicas, a obtenção simultânea de ε e μ negativos é viável somente para ondas que se propagam paralelamente à direção do campo magnético aplicado. Para outras orientações de propagação, os parâmetros ε e μ deixam de ser tratáveis como grandezas escalares. Ainda assim, existe uma faixa angular entre $\vec{H}$ e $\vec{k}$ na qual os vetores $\vec{S}$ e $\vec{k}$ formam um ângulo próximo a 180° , reproduzindo qualitativamente todas as leis características dos meios de orientação levógira.

Notamos então, que valores negativos simultâneos de ε e μ existem apenas quando há dispersão em frequência. De fato, podemos observar isso a partir da seguinte relação:

$$W = \varepsilon \vec{E}^2 + \mu \vec{H}^2. \quad (132)$$

Quando não há dispersão em frequência nem absorção, não podemos ter $\varepsilon < 0$ e $\mu < 0$, pois nesse caso a energia total seria negativa. Quando há dispersão em frequência, no entanto, eq. (132) deve ser substituída por:

$$W = \frac{\partial(\varepsilon\omega)}{\partial\omega} \vec{E}^2 + \frac{\partial(\mu\omega)}{\partial\omega} \vec{H}^2. \quad (133)$$

Para que a energia W em (133) seja positiva, é necessário que:

$$\frac{\partial(\varepsilon\omega)}{\partial\omega} > 0, \frac{\partial(\mu\omega)}{\partial\omega} > 0. \quad (134)$$

O índice de refração n é um escalar, independente de coordenadas e de tempo, mas dependente da frequência. De fato, se o índice de refração não dependesse da frequência, a energia do campo eletromagnético eq. (132) seria

negativa, quando ε e μ são negativos. Quando a dispersão de frequência existe, a energia é descrita pela eq. (133), que é positiva para uma classe muito ampla de equações de dispersão para $\varepsilon(\omega)$ e $\mu(\omega)$. Um modelo simples e amplamente utilizado para descrever a dispersão em meios com resposta plasmática é o modelo de Drude, que leva às seguintes expressões para a permissividade e permeabilidade:

$$\begin{aligned}\varepsilon &= 1 - \frac{A_\varepsilon^2}{\omega^2}, \\ \mu &= 1 - \frac{A_\mu^2}{\omega^2}.\end{aligned}\tag{135}$$

Para o caso especial $A_\varepsilon^2 = A_\mu^2$, substituindo essas expressões nas definições de velocidades de fase e grupo e simplificando, obtemos a seguinte relação:

$$\frac{c}{v_{ph}} + \frac{c}{v_{gr}} = 2.\tag{136}$$

Para as ondas em meios de índice negativo, o vetor de onda obtém um sinal negativo em relação à direção de propagação da energia. Em meios levógiros $\vec{S}$ e $\vec{k}$ se tornam antiparalelos. Porém, em meios dissipativos, o vetor de onda é complexo, sendo a parte imaginária resultado das partes imaginárias de ε e μ (VESELAGO *et al.*, 2006). Dessa forma, surge a seguinte questão: o sinal da parte imaginária do vetor de onda muda quando o sinal de sua parte real muda? Para esclarecer isso, escrevemos:

$$\varepsilon = \varepsilon' + j\varepsilon'', \mu = \mu' + j\mu''.\tag{137}$$

Assim, o número de onda k é dado por:

$$\begin{aligned}k &= k' + jk'' = \frac{\omega}{c} \sqrt{(\varepsilon' + j\varepsilon'') + (\mu' + j\mu'')} \\ &= \frac{\omega}{c} \sqrt{\varepsilon'\mu'} \left[1 + \frac{j}{2} \left(\frac{\varepsilon''}{\varepsilon'} + \frac{\mu''}{\mu'} \right) \right],\end{aligned}\tag{138}$$

Considerando a dissipação desprezível.

A partir disso, segue que a mudança do sinal da parte real k' não leva necessariamente à alteração do sinal da parte imaginária k'' . Para mudar o sinal da parte imaginária do vetor de onda temos que mudar o sinal das partes imaginárias de ε e μ . Isso corresponde à transição de um material com absorção positiva para um material com absorção negativa, como no caso de amplificadores quânticos. Essa transição não está relacionada à possível transição de materiais usuais para materiais com refração negativa (VESELAGO *et al.*, 2006).

A fabricação de materiais com as propriedades descritas anteriormente, ou seja, metamateriais compostos caracterizados por valores simultaneamente negativos de ε e μ proporcionou um grande avanço na pesquisa de materiais com índice de refração negativo. Os primeiros metamateriais foram feitos de anéis de cobre e fios retos, dispostos em uma ordem geométrica rigorosa. Os fios retos, essencialmente, são as antenas que interagem com o campo elétrico, e os anéis são as antenas que interagem com o campo magnético. O tamanho desses elementos e as distâncias entre eles são menores do que o comprimento de onda da radiação eletromagnética incidente, e o sistema inteiro pode ser caracterizado por um modelo macroscópico com valores efetivos negativos de ε e μ (VESELAGO *et al.*, 2006).

4 O ESTADO DA ARTE DOS METAMATERIAIS

4.1 O primeiro metamaterial com índice de refração negativo

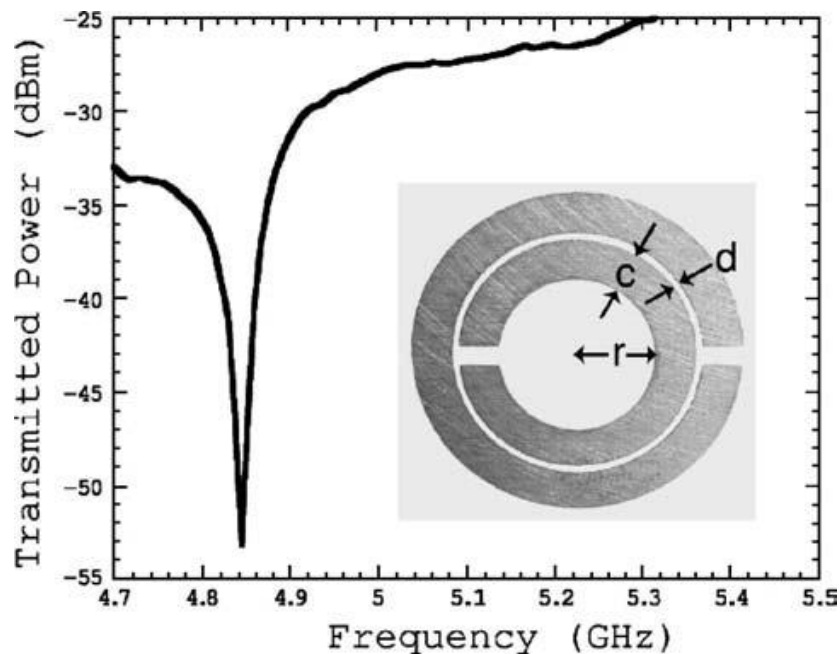
Em 1998, o físico britânico John Pendry e colaboradores, desenvolveram um conceito experimental para a obtenção de materiais com permissividade negativa em micro-ondas, baseado em arranjos de fios metálicos (PENDRY *et al.*, 1998). No ano seguinte, o mesmo grupo sugeriu explorar a resposta indutiva do movimento coletivo ressonante de elétrons em elementos condutores não magnéticos; usaram os ressonadores de anel aberto, para também alcançar uma permeabilidade negativa (PENDRY *et al.*, 1999). Essas contribuições foram a base para o desenvolvimento dos metamateriais de índice de refração negativo. Atualmente, pode-se distinguir duas classes principais de materiais que apresentam refração negativa: os compósitos e os cristais fotônicos. Os compósitos exibem simultaneamente permissividade e permeabilidade negativas, dentro de uma faixa espectral específica, o que resulta diretamente em um índice de refração negativo. Por outro lado, os cristais fotônicos dielétricos são constituídos por materiais com permissividade e permeabilidade positivos, mas manifestam refração negativa em virtude de peculiaridades em suas características de dispersão, mais especificamente, devido à estrutura de seus diagramas de bandas, que apresentam curvaturas anômalas em determinadas frequências, o que leva a um comportamento de índice de refração efetivo negativo em certas faixas espectrais (VESELAGO *et al.*, 2006).

Os primeiros compósitos, constituídos por matrizes artificiais de osciladores *LC* fabricados em placas de circuito impresso e capazes de interagir com campos eletromagnéticos incidentes, foram confeccionados para operar em frequências próximas a 10GHz , $\lambda \cong 3\text{cm}$.

Para a maioria dos compósitos que exibem propriedades de metamateriais com índice de refração negativo, dois métodos de fabricação são predominantemente utilizados: a integração de elementos condutores sobre um substrato dielétrico e a utilização de configurações baseadas em linhas de transmissão. Relatou-se a fabricação de materiais compósitos com índice de refração negativo capazes de guiar ondas em uma dimensão (*1D*) ou em duas dimensões (*2D*). Inicialmente, ressonadores de anel aberto combinados com fios

retilíneos foram fabricados empregando tecnologia de circuito impresso em cobre. A geometria específica dos ressonadores de anel aberto é mostrada na Fig. 10. As fendas presentes nos anéis induzem uma ressonância em um comprimento de onda significativamente maior que o diâmetro do próprio anel, enquanto o anel menor orientado em oposição dentro do maior, proporciona uma capacitância elevada. Quando uma quantidade de ressonadores de anel aberto é orientada ao longo das três direções espaciais e disposta em uma rede cúbica, obtem-se um metamaterial com uma permeabilidade efetiva (μ_{eff}) negativa (VESELAGO *et al.*, 2006).

Figura 10 - Projeto e curva de ressonância de um ressonador de anel aberto de cobre individual para a construção de um *CMM 1D*.



Fonte: D.R. Smith *et al.* (2000).

Onde se observou ressonância em $\approx 4.845 \text{ GHz}$, e dimensões $c = 0.58 \text{ mm}$, $d = 0.52 \text{ mm}$, $r = 1.55 \text{ mm}$.

Para μ_{eff} , obtêm-se aproximadamente:

$$\mu_{eff} = 1 - \frac{F \omega^2}{\omega^2 - \omega_0^2 + i\omega\Gamma}, \quad (139)$$

onde F é a área fracionária da célula unitária ocupada pelo ressonador de anel aberto, e Γ é o fator de dissipação. Para obter um metamaterial com índice de

refração negativo, os ressonadores de anel aberto são combinados com um meio de fios finos que fornece permissividade negativa.

A partir deste princípio, o campo de estudo dos metamateriais expandiu-se exponencialmente, dando origem a uma gama de aplicações que exploram o controle de ondas eletromagnéticas, acústicas e térmicas de maneiras impossíveis com materiais encontrados na natureza. Entre elas, destacamos as capas de invisibilidade, que utilizam a óptica de transformação para camuflar objetos sobre superfícies planas; os metamateriais quirais, que exploram a quebra da simetria especular para controle preciso de polarização e aprisionamento de átomos; os metamateriais não lineares, que ampliam a faixa de absorção acústica em relação aos sistemas lineares; e os metamateriais fotônicos com dispersão hiperbólica, que permitem imageamento com resolução abaixo do limite de difração. Examinaremos cada uma das aplicações a seguir, destacando seus princípios físicos, realizações experimentais e seu impacto tecnológico.

4.2 Possibilidade de “capa da invisibilidade”

Uma das possibilidades fascinantes que os metamateriais podem proporcionar é o desenvolvimento de uma “capa da invisibilidade”. Porém, isso é uma tarefa bastante complicada, devido à necessidade de materiais com parâmetros singulares, anômalos e de difícil fabricação. No entanto, Jensen Li e John Pendry, em 2008, propuseram uma reformulação teórica do problema da camuflagem eletromagnética. A proposta foi a de esconder um objeto colocado sobre uma superfície condutora plana, como um “carpete”. O objetivo não era tornar o objeto invisível por si só, mas sim fazer com que a superfície refletora, incluindo a saliência gerada pelo objeto oculto, apresentasse a mesma resposta de reflexão que uma superfície perfeitamente lisa e contínua. Desse modo; um observador externo não seria capaz de detectar a presença do objeto sob o carpete. Nesta seção, toda a discussão sobre a capa de invisibilidade será baseada exclusivamente no trabalho de LI, PENDRY, (2008), por ser o artigo seminal que introduziu o conceito de camuflagem por transformação quase-conforme e por estabelecer as bases teóricas e computacionais para a realização experimental desse tipo de dispositivo.

A chave para resolver esse problema está nas chamadas transformações quase-conformes, que preservam os ângulos localmente, levando a malha

deformada no espaço físico a permanecer ortogonal ou quase ortogonal. Esta propriedade é fundamental porque, ao aplicar uma transformação quase-conforme às equações de Maxwell, os tensores de permissividade dielétrica ε e permeabilidade magnética μ resultantes são majoritariamente isotrópicos e não singulares.

A técnica de transformações quase-conformes baseia-se no mapeamento entre o espaço físico, que contém a região deformada (a saliência a ser camuflada), e o espaço virtual, que corresponde a uma configuração de referência perfeitamente plana. Esse mapeamento é descrito por uma transformação de coordenadas $\vec{r}' = \vec{r}'(\vec{r})$.

Em uma transformação puramente conforme, o mapeamento preserva os ângulos localmente, ou seja, a malha deformada permanece ortogonal em todos os pontos. A consequência disso é que os parâmetros constitutivos no espaço transformado, ε' e μ' , são escalares e isotrópicos, dados por:

$$\varepsilon' = \varepsilon \cdot \frac{1}{\det(\Lambda)}, \quad \mu' = \mu \cdot \frac{1}{\det(\Lambda)}, \quad (140)$$

onde Λ é o Jacobiano da transformação e o $\det(\Lambda)$ representa a mudança de volume local.

Porém, uma transformação exatamente conforme só é possível em duas dimensões e para geometrias muito específicas. Para o problema do tapete, não é possível obter uma conformidade perfeita com as condições de contorno exigidas. Por isso, os autores recorrem a uma transformação quase-conforme, onde a ortogonalidade da malha é relaxada, permitindo pequenas distorções angulares. Esse relaxamento é controlado por um parâmetro de anisotropia residual, uma pequena diferença entre as respostas do material em diferentes direções, que surge como consequência da impossibilidade de se obter uma transformação perfeitamente conforme.

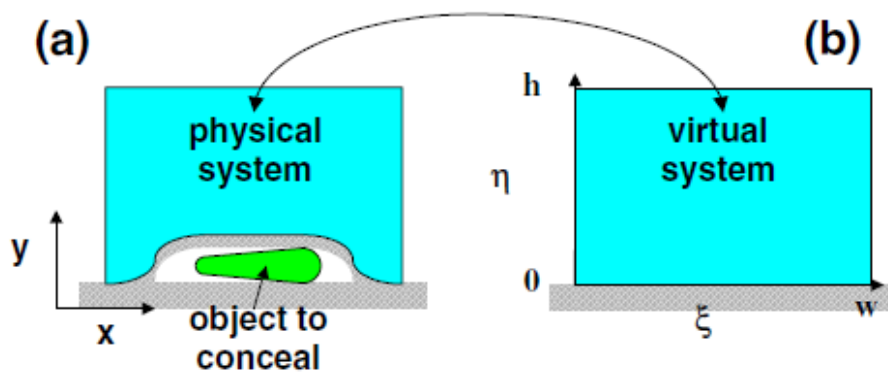
Matematicamente, o mapeamento é obtido resolvendo-se um sistema de equações diferenciais para o potencial escalar que minimiza a distorção angular entre as malhas. Na notação tensorial, a métrica do espaço transformado pode ser escrita como:

$$g_{ij} = \frac{\partial x^k}{\partial x'^i} \frac{\partial x^k}{\partial x'^j}, \quad (141)$$

e a condição de quase-conformidade exige que os elementos fora da diagonal sejam pequenos em comparação com os elementos diagonais. Dessa forma, o resultado é que a anisotropia residual pode ser desprezada para a maioria das aplicações práticas.

Assim, as transformações quase-conformes permitem a utilização de um material dielétrico comum, com índice de refração variando suavemente no espaço, uma função contínua e gradual $n(x, y, z)$ que não apresenta descontinuidades ou saltos abruptos ao longo da estrutura. Dessa forma, a capa pode ser fabricada sem a necessidade de parâmetros exóticos ou singulares. Assim, os autores definiram um mapeamento entre o espaço físico contendo uma região deformada, a saliência, e um espaço virtual de referência perfeitamente plano, conforme mostrado na Fig. 11.

Figura 11 - Os sistemas (a) virtual e (b) físico.

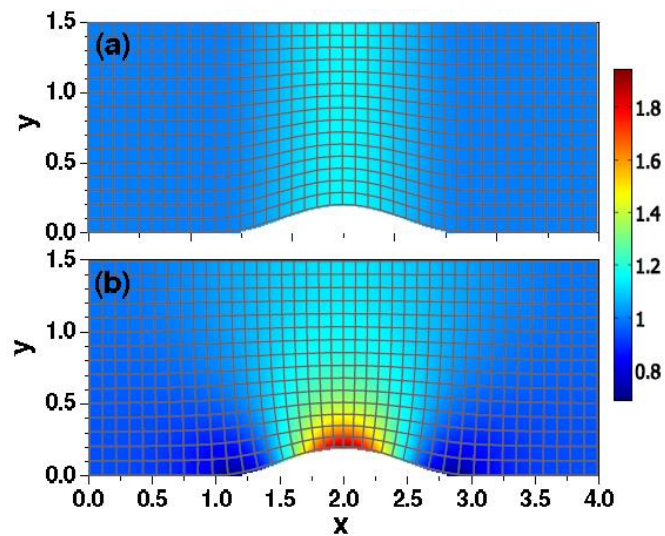


Fonte: LI, PENDRY (2008).

O espaço físico é definido com um contorno inferior que possui uma certa saliência, ou seja, a região a ser camuflada. O espaço virtual é definido com um contorno inferior perfeitamente plano. Assim, ambos os domínios, físico e virtual, são divididos em uma malha computacional, onde um algoritmo é executado para encontrar o mapeamento que minimiza a anisotropia (a distorção dos ângulos) entre as duas malhas, respeitando as condições de contorno (as laterais e o topo do domínio são mapeados neles mesmos). Este processo resulta em uma transformação quase-conforme.

Uma vez que é definido o mapeamento numérico, os parâmetros constitutivos do material, ε e μ são calculados em cada ponto da malha. O resultado é um perfil de índice de refração suave; ou seja, o índice de refração não apresenta saltos abruptos ou descontinuidades ao longo do material, variando de forma contínua e gradual no espaço, como uma função suave e, crucialmente, com anisotropia residual que pode ser desprezada ou que é constante em toda a estrutura.

Figura 12 - A grade transformada no sistema físico com limite interno de camuflagem especificado. Para (a) a grade transfinita e (b) a grade quase-conforme. Os mapas de cores mostram o perfil de n^2 .



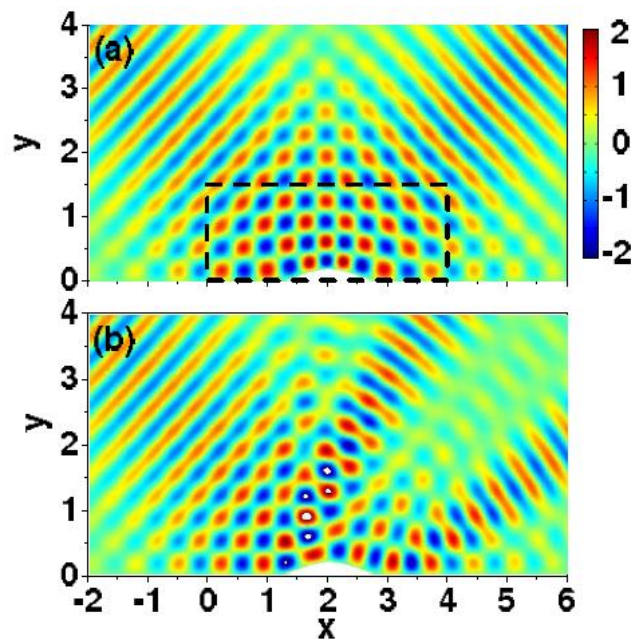
Fonte: LI, PENDRY (2008).

Na região externa à capa, a configuração do campo eletromagnético é equivalente àquela que seria observada na presença exclusiva de um plano de aterramento perfeitamente liso. As três interfaces que separam a capa do meio circundante (SiO_2) não geram reflexões espúrias, pois o valor da permissividade elétrica na fronteira da capa iguala-se efetivamente ao do material de fundo. Essa condição pode ser verificada pela qualidade da grade apresentada na Fig. 12 (b), onde se observa que as células localizadas nas três interfaces são aproximadamente quadradas e apresentam dimensões equivalentes.

A Fig. 12 (a), mostra a grade transfinita, uma malha computacional preliminar que ainda não passou pelo processo de otimização quase-conforme. Nesta grade, as células não são ortogonais e apresentam distorções significativas, especialmente nas regiões próximas à saliência. O mapa de cores exibe o perfil de n^2 associado a essa grade, que ainda não corresponde a um material fisicamente realizável. Na Fig.

12 (b), a grade quase-conforme já foi otimizada: as células são aproximadamente quadradas, a ortogonalidade é preservada e o perfil de n^2 é suave e varia continuamente. Esta é a grade que efetivamente define o projeto da capa. Por sua vez, no interior da capa, o campo exibe um padrão de interferência resultante da superposição entre o feixe incidente e o feixe refletido. Esse padrão se mostra simplesmente deslocado verticalmente para cima quando comparado com a situação em que há apenas um plano de aterramento plano. Para fins de comparação, a Fig. 13 (b) apresenta o padrão do campo elétrico obtido na presença exclusiva do objeto (sem a capa); neste caso, o feixe incidente sofre desvio e se divide em duas componentes com ângulos distintos, aproximadamente 38° e 53° , conforme se verifica na análise do campo distante. Dessa forma, o dispositivo de camuflagem reproduz com êxito o comportamento de um plano de aterramento ideal.

Figura 13 - (a) Padrão do campo elétrico com a capa localizada dentro do retângulo, (b) Padrão do campo elétrico quando apenas o objeto está presente, sem a capa.



Fonte: LI, PENDRY (2008).

A Fig. 13 (a) nos apresenta o padrão do campo elétrico, com a capa localizada dentro do retângulo em linha tracejada, quando um feixe gaussiano (um feixe cuja distribuição transversal de intensidade é descrita por uma função gaussiana, caracterizada por uma intensidade máxima no centro, que decai suavemente para

as bordas) incide a 45° em direção ao plano do solo (parte esquerda da figura). A Fig. 13 (b) nos apresenta o padrão para o campo elétrico quando apenas o objeto (uma superfície refletora com o formato do limite interno da capa) está presente, sem a capa.

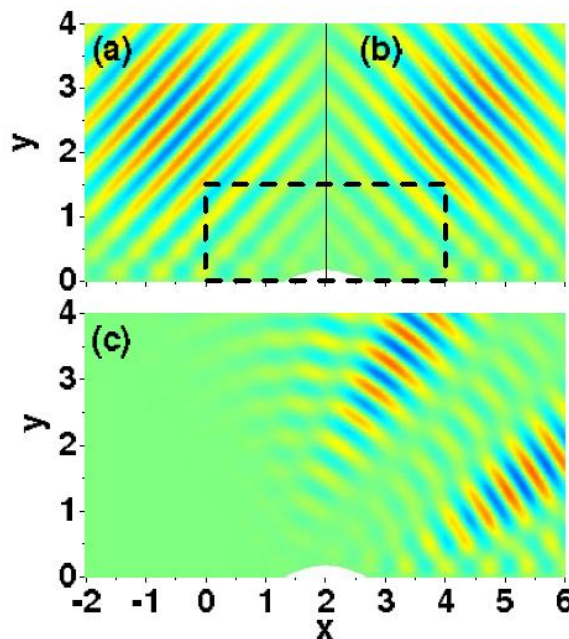
A validação do dispositivo de camuflagem proposto considera uma geometria retangular de $4m$ por $1,5m$. O meio de referência utilizado é o dióxido de silício (SiO_2), cujo índice de refração vale $n_{ref} = 2,25$. No projeto da capa, emprega-se a técnica da grade quase-conforme, porém, a anisotropia do material é desprezada, admitindo-se a permeabilidade magnética unitária $\mu = 1$ em toda a estrutura. Nestas condições, o valor da permissividade elétrica da capa situa-se entre aproximadamente $\varepsilon = 1,5$ e $\varepsilon = 4,4$. Essa variação pode ser realizada experimentalmente por meio de técnicas como corrosão ou abertura de microcavidades (orifícios com dimensões inferiores ao comprimento de onda) ao longo da direção z em um substrato dielétrico de alta constante, ou seja, um material com alta permissividade dielétrica relativa ε_r , como o silício. Materiais com alta constante dielétrica permitem que o índice de refração efetivo seja modificado em uma ampla faixa de valores com pequenas variações geométricas, o que os torna ideais para a fabricação de capas com perfis de permissividade ajustáveis. O restante do sistema, externo à capa, é preenchido por sílica (SiO_2), que funciona como material de fundo; um revestimento metálico de alta refletividade é depositado na superfície interna da capa. Para um observador externo, essa interface metálica produz a mesma sensação visual de um plano de aterramento convencional, aspecto de grande relevância para aplicações que envolvem o controle da trajetória da luz em circuitos fotônicos integrados. No teste computacional, um feixe gaussiano de comprimento de onda igual a 750 nm (que corresponde a 500 nm no interior da sílica) incide com ângulo de 45° em relação ao alvo posicionado juntamente com a capa. A Fig. 13 (a) exibe o padrão da componente real do campo elétrico obtido via simulação por elementos finitos; o retângulo tracejado na imagem delimita a região ocupada pela capa.

Os autores ressaltam que a estratégia proposta é aplicável tanto nos regimes da óptica geométrica e da óptica ondulatória. A capa apresenta, por sua natureza, comportamento de banda larga, uma vez que tanto a dispersão em frequência quanto as perdas intrínsecas dos materiais dielétricos podem ser reduzidas a níveis

extremamente baixos. Para demonstrar esse aspecto, os pesquisadores consideram um pacote de ondas gaussiano centrado no comprimento de onda de 750 nm , incidindo a 45° em direção ao objeto e à capa. O pacote incidente possui largura transversal de 2 m (valor compatível com a escala macroscópica da simulação, que considera uma capa de dimensões $4\text{ m} \times 1,5\text{ m}$) e duração temporal de $20fs$, o que corresponde a aproximadamente oito períodos da frequência central.

Consideramos apenas um condutor perfeito como limite inferior, mas os resultados parecem muito semelhantes se for usada prata (com absorção). Além disso, a capa também funciona para a polarização H . Ou seja, para ondas eletromagnéticas cujo campo magnético $\vec{H}$ é perpendicular ao plano de incidência (polarização transversal magnética). Neste caso, o campo elétrico $\vec{E}$ está contido no plano de incidência, e as condições de contorno para as componentes tangenciais de $\vec{H}$ e normais de $\vec{E}$ são satisfeitas pela estrutura da capa, garantindo que a camuflagem também seja eficaz para esse estado de polarização. Um exemplo é, que quando a capa é espelhada na direção y , ela se torna uma capa direcional, de modo que o objeto pode ser comprimido a uma fina placa de metal, tornando-se invisível para uma onda plana que se propaga na direção x .

Figura 14 - Propagação do pacote de ondas gaussiano: incidência, reflexão com camuflagem e reflexão sem camuflagem.



Fonte: LI, PENDRY (2008).

Essa configuração gera, no instante $t = 0$, um pacote com perfil espacial circular, conforme ilustrado na Fig. 14 (a). Após um intervalo correspondente a 14,8 períodos, $37fs$, o pacote refletido retorna com ângulo de 45° , preservando sua forma gaussiana original e apresentando distorções praticamente nulas, como se observa na Fig. 14 (b). Na ausência da capa, por outro lado, o mesmo pacote de ondas se divide em dois pacotes alongados, mostrados na Fig. 14 (c). Esse conjunto de resultados caracteriza um efeito de camuflagem operando no domínio temporal, demonstrando que a capa é capaz de preservar a integridade do pulso refletido. Os autores advertem, no entanto, que o emprego de uma capa mais fina ou de um objeto de maiores dimensões pode amplificar as distorções, em virtude do aumento da anisotropia que foi desprezada no perfil da capa.

Os autores demonstraram que é possível camuflar um objeto sobre um plano de aterramento utilizando uma capa dielétrica projetada por transformação quase-conforme. As simulações confirmaram que a estrutura proposta elimina reflexões espúrias, preserva a frente de onda refletida e opera em regime de banda larga, tanto no domínio da óptica geométrica quanto no da óptica ondulatória. Embora distorções possam surgir em configurações com capas mais finas ou objetos maiores, os resultados nos indicam que esse tipo estratégia abre caminho para aplicações práticas em circuitos fotônicos integrados e dispositivos de camuflagem eletromagnética em escala micrométrica.

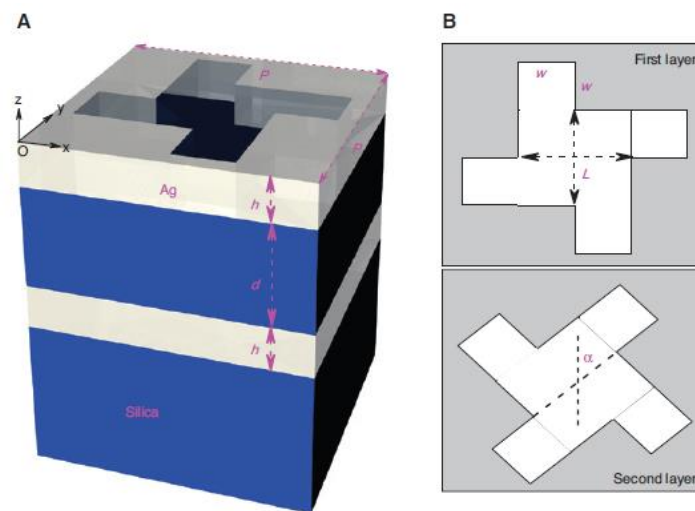
4.3 Metamateriais quirais

A quiralidade está associada à quebra da simetria especular. Na natureza, temos muitos exemplos de quiralidade; um material é "quiral" se não puder ser sobreposto à sua imagem especular por meio de operações de rotação ou translação. Desse modo, os metamateriais quirais comportam-se de forma distinta de suas contrapartes especulares. Devido a essas propriedades singulares, metamateriais quirais mecânicos de baixa densidade são frequentemente utilizados para atenuação de vibrações e captação de energia. A sua estrutura proporciona uma construção leve com adaptação topológica flexível, tornando-os bastante adequados para biossensores ultrassensíveis (VALIPOUR *et al.*, 2021).

Em 2019, Chen e colaboradores introduziram um novo tipo de metamaterial quiral, que se baseava em nanopartículas plasmônicas, bicamadas e em forma de

"costela" (*rib-shaped*). A Fig. 15 nos mostra o esquema da estrutura proposta (CHEN, Z, *et al.*, 2019). Durante esta seção, a discussão sobre metamateriais quirais será baseada no trabalho de Chen *et al.*, (2019), por ser um dos artigos mais representativos da área e por apresentar uma estrutura plasmônica quiral com alto dicroísmo circular e aplicações em aprisionamento de átomos

Figura 15 - Representação esquemática da estrutura do metamaterial quiral e a sua vista superior.



Fonte: CHEN *et al.* (2019).

A Fig. 15 (A) ilustra o esquema da configuração experimental. Uma estrutura plasmônica é um dispositivo que explora a excitação de plasmons de superfície, oscilações coletivas dos elétrons livres em uma superfície metálica, acopladas ao campo eletromagnético da luz incidente, resultando em uma intensificação localizada do campo elétrico e na confinamento da luz em escalas sublongitudinais. A célula unitária da estrutura plasmônica quiral mostrada na Fig.15 é composta por duas camadas finas de prata, cada uma com espessura de $h = 9 \text{ nm}$, ambas perfuradas em formato de engrenagem e rotacionadas entre si por um ângulo $\alpha = 60^\circ$. O ponto O na figura indica a origem do sistema de coordenadas, com a seta indicando a direção positiva. A segunda camada metálica é depositada sobre um substrato de sílica (cujo índice de refração é 1,45) e separada da primeira camada por uma fina camada intermediária do mesmo material dielétrico, com espessura $d = 350 \text{ nm}$. As camadas de sílica são contínuas, ou seja, não apresentam perfurações em sua estrutura, e também não preenchem as aberturas existentes nas camadas metálicas.

A vista superior das duas camadas de prata (primeira e segunda) é mostrada na Fig. 15 (B). A fabricação do dispositivo pode ser realizada por meio de deposição química de vapor assistida por plasma (PECVD) combinada com litografia por feixe de íons focalizados (FIB). Os valores da permissividade relativa da prata foram obtidos da literatura, e estendidos por interpolação com resolução de 1 nm. ou seja, os dados experimentais da permissividade da prata, disponíveis apenas para alguns comprimentos de onda discretos, foram ajustados por um método de interpolação (como interpolação linear) para gerar valores contínuos em intervalos de 1 nm, garantindo que as simulações numéricas tivessem precisão suficiente para capturar as ressonâncias plasmônicas. Condições de contorno periódicas foram impostas nas direções x e y da célula unitária, enquanto condições absorvedoras de camada perfeitamente casada (*perfectly matched layer*) foram aplicadas nas faces superior. As condições de excitação para as polarizações circulares nas portas foram configuradas com a seguinte expressão para o campo elétrico incidente:

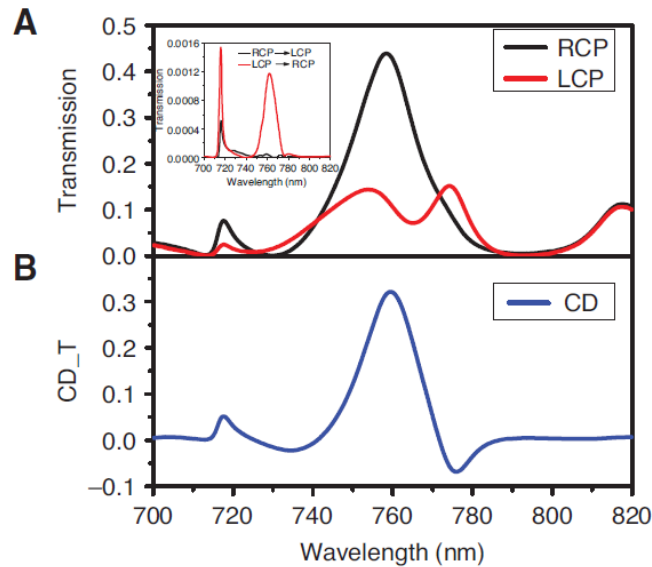
$$E_x = \exp(-jk_0 n_{\text{silica}} z), E_y = \exp(-jk_0 n_{\text{silica}} z + j\alpha), E_z = 0, \quad (142)$$

onde $k_0 = 2\pi/\lambda$ é o vetor de onda no vácuo, e $\alpha \in (0, 2\pi)$ representa a fase da luz circularmente polarizada $\alpha = \pi/2$ para LCP (*left circular polarization*), polarização circular à esquerda, e $\alpha = 3\pi/2$ para RCP (*right circular polarization*), polarização circular à direita. Os demais parâmetros otimizados são: período da célula $P = 700$ nm, comprimento da engrenagem $L = 300$ nm e largura da abertura $w = 150$ nm. O objetivo da otimização é maximizar a resposta quiral no comprimento de onda de aprisionamento de átomos, ou seja, maximizar a diferença de transmitância entre as duas polarizações circulares (RCP e LCP) no comprimento de onda em que os átomos serão confinados.

O aprisionamento óptico de átomos neutros ocorre por meio do potencial dipolar, que é gerado pela interação entre o momento de dipolo induzido no átomo e o gradiente de intensidade do campo elétrico. Numa estrutura plasmônica quiral, a intensidade do campo elétrico e, portanto, o potencial de aprisionamento, depende da polarização da luz incidente. Isso permite que, ao selecionar a polarização (RCP ou LCP), seja possível controlar a posição e a profundidade do poço de potencial onde os átomos ficam confinados. Desse modo, o alto dicroísmo circular (CD_T)

obtido no comprimento de onda de aprisionamento fornece um controle mais preciso sobre a localização e a energia potencial dos átomos aprisionados, o que é essencial para aplicações em informação quântica e simulações quânticas com átomos frios.

Figura 16 - Resposta quiral da estrutura plasmônica: espectros de transmissão para polarizações RCP e LCP e espectro de dicroísmo circular.

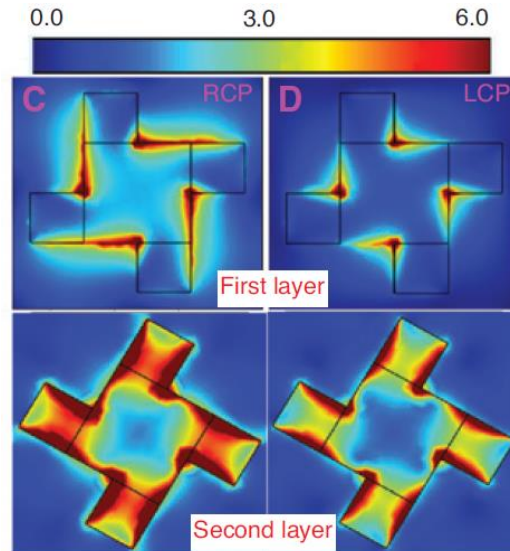


Fonte: CHEN *et al.* (2019).

As curvas de transmitância calculadas para incidência com polarização circular direita (RCP, curva preta) e esquerda (LCP, curva vermelha) são mostradas na Fig. 16 (A). Observa-se uma ressonância plasmônica pronunciada em $\lambda = 760 \text{ nm}$ sob incidência RCP, ou seja, uma excitação coletiva dos elétrons livres nas nanoestruturas metálicas (no caso, as camadas de prata), que resulta em efeito de engrandecimento local do campo elétrico, e em um pico de absorção ou transmissão em uma frequência característica. Essa ressonância ocorre quando a frequência da luz incidente coincide com a frequência natural de oscilação dos elétrons na superfície do metal, confinando a energia eletromagnética em regiões sublongitudinais, os chamados *hotspots*. Em contrapartida, a transmissão para LCP é fortemente suprimida, gerando uma grande diferença entre as duas curvas. Para distinguir esse efeito do dicroísmo circular, característica típica de respostas quirais definida como a diferença de absorção entre RCP e LCP, os autores denominaram a transmitância diferencial de CDT, exibida na Fig. 16 (B). O valor máximo nessa figura indica o ponto de maior diferença entre as intensidades elétricas das duas

polarizações, fornecendo uma base para o subsequente ajuste de potencial e posição dos átomos neutros aprisionados.

Figura 17 - Resposta quiral da estrutura plasmônica: distribuição do campo elétrico.



Fonte: CHEN *et al.* (2019).

As Fig. 17 (C) e (D) mostram as distribuições de intensidade do campo elétrico para uma célula unitária sob iluminação com polarização circular, um estado de polarização no qual o vetor campo elétrico gira em torno da direção de propagação com amplitude constante, descrevendo uma hélice no espaço. Quando a luz é circularmente polarizada à direita RCP, o vetor gira no sentido horário para um observador que olha na direção de propagação; quando é polarizada à esquerda LCP, o giro ocorre no sentido anti-horário. As posições da primeira e segunda camadas correspondem aos planos $z = 0$ e $z = -440$ nm, respectivamente, para uma célula unitária sob iluminação RCP e LCP no comprimento de onda ressonante $\lambda = 760$ nm. As regiões de *hotspots* associadas ao engrandecimento do campo elétrico apresentam forte dependência com a polarização da luz incidente, resultando na grande diferença de transmitância observada entre RCP e LCP. Além disso, o estado de polarização circular é perfeitamente preservado na onda transmitida, com uma taxa de conversão entre RCP e LCP inferior a 0,16%, conforme mostrado no painel interno da Fig. 16 (A). O surgimento do espectro CD_T pode ser atribuído à quebra da simetria especular causada pela diferença dos índices de refração entre o meio superior (superstrato) e o substrato.

Os resultados demonstram que a estrutura plasmônica quiral proposta apresenta uma resposta fortemente dependente da polarização circular da luz incidente. A ressonância pronunciada em $\lambda = 760 \text{ nm}$ para a polarização RCP, combinada com a supressão da transmissão para LCP, resulta em um elevado dicroísmo circular (CD_T), fenômeno no qual a absorção ou transmissão de luz circularmente polarizada depende do sentido de rotação da polarização, sendo uma assinatura direta da quebra da simetria especular na estrutura. A taxa de conversão entre polarizações é inferior a 0,16%, indicando que o estado de polarização circular é praticamente preservado na transmissão. Os mapas de campo elétrico revelam que as regiões de engrandecimento do campo mudam de posição e intensidade conforme o sentido de rotação da polarização, evidenciando a quebra da simetria especular na estrutura.

Do ponto de vista da nanofotônica e dos metamateriais quirais, esse trabalho se destaca por duas razões fundamentais. Primeiramente, ele demonstra a viabilidade de estruturas plasmônicas quirais com alta pureza de polarização, operando em comprimentos de onda ópticos, uma região do espectro onde a obtenção de respostas quirais fortes e seletivas é particularmente desafiadora. Em segundo lugar, a estrutura proposta é compatível com técnicas de fabricação estabelecidas, como a PECVD (*Plasma-Enhanced Chemical Vapor Deposition*), Deposição Química de Vapor Assistida por Plasma, que permite a deposição de filmes finos em temperaturas relativamente baixas, com bom controle de espessura e composição; e a FIB (*Focused Ion Beam*), Feixe de Íons Focalizados, que possibilita a escrita direta de padrões em escala nanométrica com alta resolução, sendo amplamente utilizada na fabricação de protótipos e dispositivos plasmônicos. Essa compatibilidade com técnicas padrão da indústria de semicondutores facilita a integração da estrutura em dispositivos práticos e sua eventual produção em larga escala. Esse trabalho abre caminho para o desenvolvimento de dispositivos quirais em escala nanométrica com controle de polarização circular, incluindo: sensores plasmônicos ultrasensíveis para detecção de moléculas quirais, com aplicações em química e biologia; manipuladores de átomos individuais para computação quântica e simulações quânticas; componentes fotônicos integrados com controle de polarização para comunicações ópticas e processamento de informação; plataformas para estudo de interações luz-matéria em regime de acoplamento forte, com potencial para novas fontes de luz e emissores quânticos. Dessa forma, CHEN,

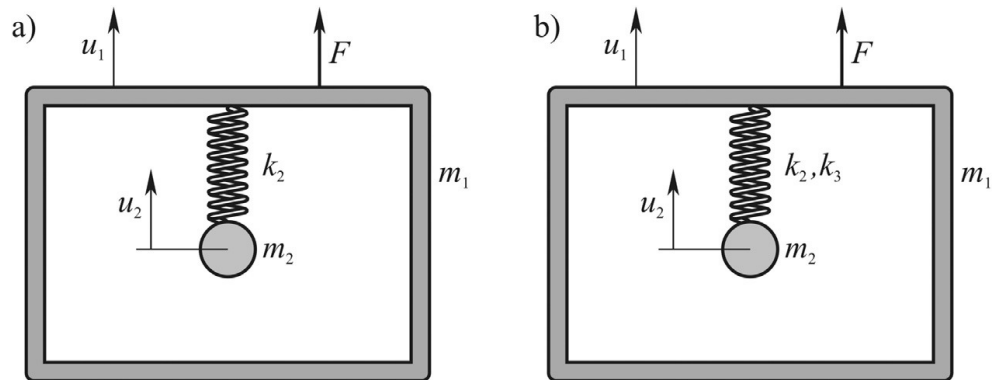
Z, *et al.* não apenas avançam no entendimento fundamental da interação entre luz e matéria em estruturas quirais, mas também estabelecem uma base tecnológica para aplicações que vão desde a detecção de biomoléculas até a computação quântica, consolidando os metamateriais quirais como uma ferramenta essencial para a nanofotônica do futuro.

4.4 Metamateriais não lineares

Os metamateriais não lineares são estruturas artificiais periódicas ou aperiódicas onde a resposta eletromagnética, representada pelos parâmetros constitutivos ε e μ dependem da intensidade do campo aplicado. Os metamateriais não lineares exibem comportamentos como variação do índice de refração com a intensidade da luz (efeito Kerr), geração de harmônicos, mistura de frequências e birrefringência induzida por campo. Essa não linearidade é geralmente obtida pela incorporação de materiais com resposta não linear intrínseca (como semicondutores ou dielétricos de alto coeficiente não linear) ou pela própria geometria da estrutura metálica, que pode produzir efeitos não lineares efetivos mesmo quando os materiais constituintes são lineares. Essas propriedades abrem caminho para dispositivos tais como diodos ópticos, chaveamento all-óptico (totalmente óptico), limitadores de potência e processamento de sinais em frequências ópticas. Em 2017, Cveticanin e Zukovic projetaram um subsistema de metamaterial não linear. O modelo não linear proposto possibilita a absorção de ondas acústicas em uma ampla faixa de frequência, ou seja, apresenta uma resposta de atenuação que se estende por um intervalo significativo de frequências, ao contrário dos sistemas lineares convencionais, que operam em bandas estreitas. Este subsistema consiste em duas massas concentradas e conectadas por uma mola com rigidez não linear, um modelo no qual a massa de cada elemento é considerada como pontual, ou seja, com distribuição espacial e dimensões físicas desprezíveis. Visando modelar a excitação do sistema, propõe-se o uso da função elíptica de Jacobi, uma família de funções que generalizam as funções trigonométricas seno e cosseno para o domínio complexo, sendo periódicas em duas direções no plano complexo e frequentemente utilizadas para descrever oscilações não lineares e soluções de ondas em meios periódicos não lineares. Nesta seção, essa discussão sobre metamateriais não

lineares decorrerá deste trabalho de Cveticanin e Zukovic (2017), por ser um dos artigos mais representativos da área e por demonstrar que a não linearidade amplia a faixa de absorção acústica, superando a principal limitação dos sistemas lineares. O esquema correspondente ao sistema é apresentado na Fig. 18 (CVETICANIN; ZUKOVIC, 2017).

Figura 18 - (a) Modelo de sistema linear (b) Modelo de sistema não linear.



Fonte: CVETICANIN, ZUKOVIC (2017).

Quando a frequência natural do subsistema $\sqrt{k_2/m_2}$ é igual à frequência da excitação externa, ocorre a eliminação dessa frequência específica do sistema. Na literatura, diversos modelos de metamateriais elásticos foram apresentados como subsistemas do tipo massa-sobre-massa conectados de diferentes maneiras. Alguns autores desenvolveram a teoria de meta-estruturas com esses subsistemas dispostos em linha, enquanto outros consideraram modelos contendo dois subsistemas massa-sobre-massa acoplados. Introduziu-se, assim, o conceito de razão de massa efetiva negativa para metamateriais.

Este parâmetro artificial é calculado por analogia com os parâmetros de metamateriais eletromagnéticos e pode assumir valores positivos ou negativos. É importante notar que essa grandeza não possui significado físico real nem relação com a massa física propriamente dita. Porém, com base no sinal da massa efetiva, desenvolveu-se o conceito de ressonâncias óptica e acústica.

Cveticanin e Zukovic (2017) propõem um novo modelo de sub-sistemas, onde metamateriais são capazes de absorver ondas acústicas em uma faixa de frequência muito maior. A principal característica do modelo sugerido é sua não linearidade. O subsistema contém uma massa sobre a qual uma massa m_2 é

conectada por meio de uma mola com propriedades não lineares. A excitação F é assumida na forma da função elíptica de Jacobi cn :

$$F = F_0 cn(\omega t, k_2), \quad (143)$$

onde F_0 é a amplitude da excitação, ω a frequência e k o módulo da função elíptica de Jacobi.

O modelo matemático do sistema é transformado em duas equações diferenciais acopladas do tipo Duffing, equações diferenciais ordinárias de segunda ordem que descrevem osciladores não lineares com rigidez cúbica, caracterizada por uma força restauradora do tipo $F = -k_1 x - k_3 x^3$, onde k_1 é o coeficiente linear e k_3 o coeficiente não linear. Este tipo de equação é amplamente utilizado para modelar sistemas com não linearidades moderadas, capazes de produzir fenômenos como ressonância, histerese e oscilações periódicas não harmônicas. Os autores assumem uma não linearidade cúbica de rigidez para as molas e decompueram o sistema em duas equações diferenciais, uma linear e outra não linear, conseguindo resolver a equação de Duffing para uma excitação determinada na forma da função elíptica de Jacobi $F = F_0 cn(\omega t, k_2)$. O movimento das massas dentro do sistema ocorre alternadamente em torno de uma faixa média. Quando o movimento da primeira massa é muito menor que o da segunda, a excitação com determinados parâmetros resulta na criação de um sistema dinâmico de alta atenuação, embora a amplitude do movimento da primeira massa não se anule completamente; ela se torna pequena para uma ampla faixa de frequências de excitação. Os resultados obtidos mostram que a largura de banda de frequência para o sistema não linear é significativamente maior do que para o sistema linear correspondente. No sistema não linear, quando a razão de massas efetiva assume valores negativos, as frequências associadas a essa condição situam-se na banda de rejeição (*stopband*). Observa-se que a razão de massa efetiva é um parâmetro artificial, calculado por analogia com os parâmetros de metamateriais eletromagnéticos, que não possuem significado físico real nem relação com a massa propriamente dita. A forma dos modos correspondentes a essas frequências de massa efetiva negativa é conhecida como modo óptico.

Em síntese, os metamateriais não lineares, tal como o sistema massa-mola proposto por Cveticanin e Zukovic (2017), representam uma classe de estruturas

capazes de superar a principal limitação dos sistemas lineares, a estreita largura de banda de absorção. Ao introduzir não linearidades cúbicas na rigidez das molas, esses sistemas exibem uma resposta dinâmica rica, com fenômenos como ressonância, histerese e modos ópticos associados à massa efetiva negativa.

Diferentemente dos sistemas lineares, cuja resposta é limitada a faixas estreitas de frequência, os sistemas não lineares podem operar em regimes de banda larga, absorvendo ou atenuando ondas acústicas e vibrações em uma ampla gama de frequências. Isso tem implicações diretas em setores como: o de engenharia civil, onde isoladores de vibração não lineares podem proteger estruturas contra terremotos e ventos fortes; o da engenharia aeroespacial, onde a atenuação de vibrações em banda larga é essencial para a integridade estrutural de aeronaves e satélites; e o da indústria automotiva, onde absorvedores acústicos mais eficientes podem reduzir o ruído interno e melhorar o conforto dos veículos.

Os metamateriais não lineares também abrem caminho para o desenvolvimento de dispositivos de captação de energia (*energy harvesting*) capazes de converter vibrações ambientais, como as geradas por máquinas, vento ou movimento de veículos, em energia elétrica utilizável, com eficiência em uma faixa de frequências bem mais larga do que a dos sistemas lineares convencionais. Essa capacidade é particularmente relevante para aplicações em sensores autônomos, dispositivos vestíveis e redes de sensores sem fio, onde a substituição de baterias é inviável.

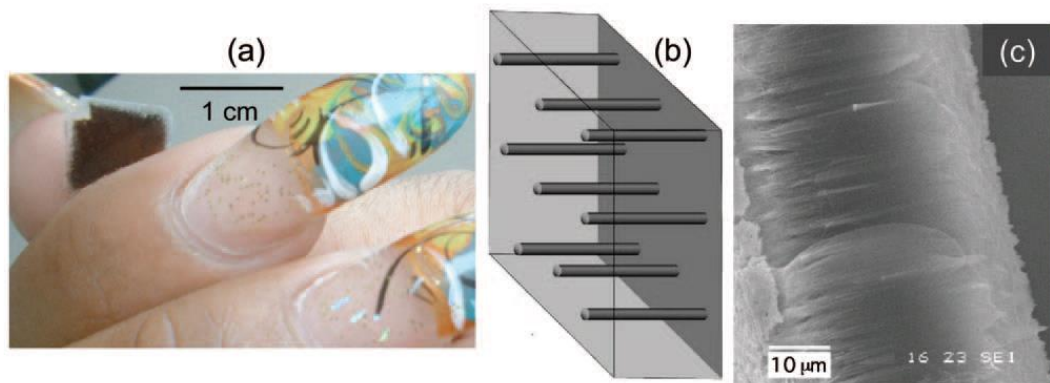
O estudo de metamateriais não lineares também contribui para a compreensão de fenômenos como a localização de ondas, a formação de bandas de rejeição sintonizáveis e a interação entre não linearidades e periodicidade estrutural. Tais avanços não apenas ampliam o escopo da física de metamateriais, mas também fornecem ferramentas para o design de materiais com propriedades sob medida para aplicações específicas.

Assim, o trabalho de Cveticanin e Zukovic (2017) representa um marco importante na área, demonstrando que a não linearidade pode ser explorada como um grau de liberdade adicional no projeto de metamateriais, com potencial para transformar setores que vão desde a construção civil até a indústria aeroespacial e a eletrônica de baixo consumo.

4.5 Metamateriais fotônicos

Metamateriais fotônicos são materiais com índices de refração altos, baixos ou até negativos, que podem manipular ondas ópticas em dimensões sub-longitudinais, ou seja, em escalas espaciais menores que o comprimento de onda da luz incidente, o que permite confinar e controlar a propagação da luz em volumes extremamente reduzidos, viabilizando fenômenos como o imageamento subdifrativo e a amplificação de ondas evanescentes (VALIPOUR *et al.*, 2021). Em 2009, um grupo formado por Noginov e colaboradores demonstraram experimentalmente, e caracterizaram fisicamente, um metamaterial tridimensional autossustentado com espessura de $51\ \mu\text{m}$, baseado em uma rede de nanofios de prata inseridos em uma membrana de alumina. Este material constitui um meio efetivo anisotrópico com dispersão hiperbólica; um regime de propagação no qual as constantes dielétricas ao longo de diferentes direções apresentam sinais opostos. Esse tipo de material pode ser empregado em imageamento subdifrativo (resolução abaixo do limite clássico de difração) ou em capas de invisibilidade óptica. As constantes dielétricas altamente anisotrópicas do material variam de valores positivos à negativos, e o feixe de laser transmitido sofre dois efeitos simultâneos: desloca-se em direção à normal à superfície, como em dielétricos convencionais, e também se afasta da normal, comportamento típico de materiais com índice de refração menor que a unidade (NOGINOV, *et al.*, 2009). O metamaterial projetado é mostrado na Fig. 19.

Figura 19 - (a) membrana preenchida com prata; (b) nanofios de prata em uma membrana de alumina; (c) imagem microscópica da parede lateral da membrana.



Fonte: NOGINOV, *et al.* (2009).

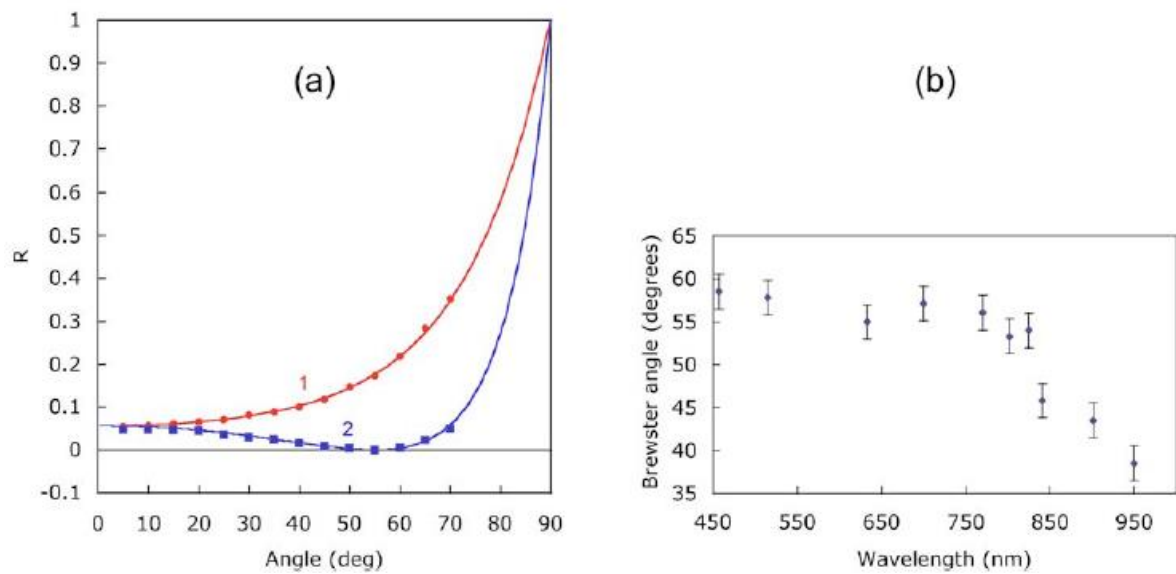
Membranas de alumina anódica com dimensões de $1\text{ cm} \times 1\text{ cm} \times 51\text{ }\mu\text{m}$, diâmetro dos poros de 35 nm e porosidade de 15% foram adquiridas comercialmente. A Fig. 19 (a) mostra a membrana utilizada. Os nanofios de prata foram sintetizados no interior das membranas de alumina por meio de eletrodeposição eletroquímica. Uma fina película de ouro com aproximadamente 50 nm de espessura, depositada sobre a superfície da membrana por evaporação térmica, serviu como eletrodo de trabalho, enquanto uma haste de grafite atuou como contra eletrodo. A solução eletrolítica utilizada foi uma mistura aquosa de nitrato de prata e ácido bórico, tamponada com ácido nítrico para atingir pH entre 2 e 3. Aplicou-se uma tensão contínua de 1 V durante aproximadamente 300 minutos de deposição. O eletrodo de ouro foi removido antes dos estudos ópticos. Os nanofios sintetizados no interior das membranas foram duas ordens de grandeza mais longos do que os nanobastões sublongitudinais, nanobastões com comprimento menor que o comprimento de onda da luz incidente, típicos de estruturas plasmônicas convencionais que operam no regime de ressonância localizada. Essa diferença de comprimento é crucial, pois nanofios mais longos permitem um maior confinamento da luz e uma resposta plasmônica mais eficiente.

As membranas foram preenchidas quase completamente com prata no lado próximo ao eletrodo, enquanto a concentração de prata diminuiu gradualmente em direção ao lado oposto, conforme ilustrado na Fig. 19 (b). Nas melhores amostras, as constantes dielétricas ϵ medidas em ambos os lados da membrana, determinadas por meio de estudos de refletância descritos adiante, apresentaram valores muito próximos entre si; indicando alta uniformidade no preenchimento da estrutura.

Nos estudos de refletância, as amostras foram montadas no eixo de rotação de um goniômetro, onde foram interceptadas por um feixe de laser com aproximadamente $0,5\text{ mm}$ de diâmetro. A refletância das amostras nas polarizações s (campo elétrico perpendicular ao plano de incidência) e p (campo elétrico paralelo ao plano de incidência), foi medida em função do ângulo de incidência, para dez comprimentos de onda diferentes na faixa de 458 a 950 nm , conforme mostrado na Fig. 20 (a). O espectro dos ângulos de Brewster, ângulos de incidência nos quais a refletividade da luz polarizada p se anula completamente, resultando em transmissão total, foi determinado experimentalmente. Esse fenômeno ocorre quando o ângulo de incidência satisfaz a seguinte relação $\tan\theta_B =$

n_2/n_1 , onde n_1 e n_2 são os índices de refração dos meios incidente e transmitido, respectivamente. Para meios anisotrópicos como o metamaterial com dispersão hiperbólica, a condição de Brewster é modificada pela anisotropia das constantes dielétricas, e o ângulo de Brewster pode ser usado como uma sonda sensível para determinar as componentes do tensor dielétrico efetivo, ϵ_x e ϵ_z . Os espectros de refletância nas polarizações s e p foram medidos nos mesmos ângulos de incidência e são apresentados no painel principal e no gráfico inserido da Fig. 20 (b).

Figura 20 - Refletância em função do ângulo de incidência e ângulos de Brewster medidos.



Fonte: NOGINOV, *et al.* (2009).

A Fig. 20 (a) apresenta os resultados experimentais da refletância da amostra em função do ângulo de incidência para o comprimento de onda de $632,8 \text{ nm}$. As curvas distinguem as duas polarizações: a polarização s (curva 1, círculos) e a polarização p (curva 2, quadrados). O painel (b) resume os ângulos de Brewster obtidos experimentalmente, ângulos nos quais a refletância da polarização p se anula, indicando transmissão total da luz.

O trabalho de NOGINOV, *et al.*, (2009) representa um marco importante no desenvolvimento de metamateriais fotônicos, ao demonstrar experimentalmente a fabricação de um meio tridimensional com dispersão hiperbólica operando em frequências ópticas. A principal contribuição desse estudo reside na combinação de três elementos inovadores: (i) a utilização de uma estrutura autossustentada com espessura de $51 \mu\text{m}$, superando a limitação dos filmes finos sublongitudinais que

dominavam a área; (ii) a fabricação por eletrodeposição, um método não litográfico e de baixo custo, que viabiliza a produção em larga escala; e (iii) a obtenção de constantes dielétricas com sinais opostos em diferentes direções ($\varepsilon_x > 0, \varepsilon_z < 0$), caracterizando a dispersão hiperbólica e permitindo o controle de ondas evanescentes.

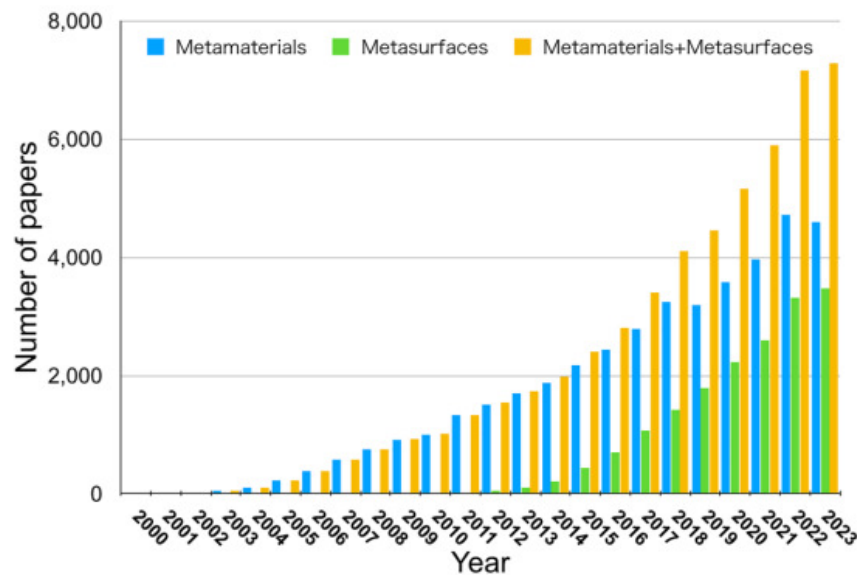
O imageamento subdifrativo, a capacidade de formar imagens com resolução abaixo do limite de difração, é uma das consequências imediatas, com potencial para revolucionar a microscopia óptica e a biologia celular, permitindo a visualização de estruturas intracelulares com detalhes sem precedentes. Além disso, a dispersão hiperbólica pode ser explorada em capas de invisibilidade óptica, na amplificação de ondas evanescentes para sensores ultrasensíveis e no controle da emissão espontânea de emissores quânticos, com aplicações em fontes de luz mais eficientes e em informação quântica.

Para o futuro, espera-se que os metamateriais fotônicos evoluam em várias direções. A integração com materiais 2D, como o grafeno, e com estruturas plasmônicas de materiais alternativos (como nitretos e óxidos transparentes condutores) pode ampliar a faixa espectral de operação e reduzir as perdas ópticas. A combinação com técnicas de manufatura aditiva e com inteligência artificial para design inverso permitirá a criação de dispositivos com geometrias otimizadas e funcionalidades sob medida. Finalmente, a integração desses materiais em circuitos fotônicos e em sistemas de comunicação óptica promete aumentar a capacidade de transmissão de dados e a eficiência de dispositivos fotônicos, consolidando os metamateriais fotônicos como uma tecnologia essencial para a fotônica do século XXI.

4.6 Crescimento da Pesquisa em Metamateriais

Desde o início do século XXI, o campo de pesquisa dos metamateriais evoluiu de uma área de nicho para um dos campos mais dinâmicos da física e da engenharia de materiais nos dias atuais. O crescimento exponencial da área pode ser quantificado pelo volume de produção científica, em que o número de publicações sobre metamateriais ultrapassou a marca de 7 mil artigos em 2023, com uma trajetória de crescimento contínuo que se manteve mesmo durante o período da pandemia de COVID-19 (TAKANA *et al.*, 2024).

Figura 21 - Número de publicações sobre metamateriais por ano (2001–2023)



Fonte: TAKANA *et al.* (2024).

O crescimento mostrado na Fig. 21 reflete não apenas a amplitude do campo, mas também a rápida adoção do conceito por pesquisadores de diversas áreas. O campo tem atraído talentos das mais diversas disciplinas, incluindo ciências ópticas e de micro-ondas, física do estado sólido, ciência dos materiais, acústica, mecânica, nanotecnologia e computação de alto desempenho.

A dimensão econômica desse crescimento é igualmente expressiva. O mercado global de tecnologias de metamateriais foi avaliado em aproximadamente US 500,200 milhões em 2024, com projeção de crescimento de US 3 bilhões até 2030. Esse crescimento é impulsionado pela crescente demanda por melhor desempenho em sistemas de comunicação, imageamento e aplicações de segurança, além da busca por maior eficiência em energias renováveis e gestão térmica. A região da Ásia-Pacífico é a que apresenta o crescimento mais acelerado, enquanto a América do Norte mantém a maior participação devido à sua robusta infraestrutura de P&D e forte base industrial.

Esse crescimento exponencial, tanto no âmbito acadêmico quanto no comercial, confirma que os metamateriais deixaram de ser uma curiosidade teórica para se tornarem uma plataforma tecnológica consolidada, em franca expansão e com impacto crescente em múltiplos setores da ciência e da indústria.

5 CONCLUSÕES

Este trabalho investigou a trajetória dos metamateriais desde seus fundamentos teóricos até as mais interessantes aplicações, evidenciando como essa classe de materiais artificiais tem desafiado e expandido os limites da eletrodinâmica clássica. Partimos das equações de Maxwell e das relações constitutivas que definem a resposta eletromagnética dos meios, estabelecendo o papel central da permissividade elétrica ε e da permeabilidade magnética μ na caracterização da propagação ondulatória.

A contribuição seminal de Victor Veselago, em 1968, foi o marco teórico que previu a possibilidade de materiais com ε e μ simultaneamente negativos, materiais de orientação levógira ou de índice de refração negativo. A validação experimental dessas previsões só foi ocorrer por volta do ano 2000, quando Smith e colaboradores fabricaram o primeiro metamaterial com ε e μ efetivamente negativos na faixa de micro-ondas, utilizando anéis ressoadores abertos e fios condutores.

Ao longo do trabalho, exploramos as propriedades fundamentais desses materiais, e também, analisamos as aplicações, como capas de invisibilidade em forma de carpete 2D, estruturas quirais, metamateriais não lineares e metamateriais fotônicos. As pesquisas em andamento apontam para direções promissoras como metamateriais sintonizáveis, topológicos, acústicos, térmicos e quânticos, além do desenvolvimento de métodos de fabricação escaláveis.

Diante do exposto, concluímos que, os metamateriais representam uma das frentes mais dinâmicas e promissoras da física aplicada e da engenharia de materiais. Como principais consequências, eles permitem o controle sem precedentes da propagação de ondas eletromagnéticas, viabilizando dispositivos como superlentes, hiperlentes, sensores ultraprecisos e componentes fotônicos integrados, além de abrirem novas fronteiras em áreas como acústica, termologia e óptica quântica. O estudo desses materiais deverá consolidar os metamateriais como uma tecnologia madura nas próximas décadas.

REFERÊNCIAS

STRAUSS, Valerie. Stephen Hawking famously said, 'Intelligence is the ability to adapt to change.' But did he really say it? **The Washington Post, Washington, D.C.**, 29 mar. 2018. Disponível em: <https://www.washingtonpost.com/news/answer-sheet/wp/2018/03/29/stephen-hawking-famously-said-intelligence-is-the-ability-to-adapt-to-change-but-did-he-really-say-it/>. Acesso em: 09 jul. 2026.

NUSSENZVEIG, H. M. **Curso de Física Básica 3: Eletromagnetismo**. 1. ed. São Paulo: Edgard Blücher, 1977.

WALKER, Bruce H. **Optical engineering fundamentals**. 2. ed. Bellingham: SPIE Press, Tutorial texts in optical engineering, v. TT82, 2008.

PRIVAT-DESCHANEL, A. **Elementary treatise on natural philosophy**. Translated and edited by J. D. Everett. New York: D. Appleton and Company, 1873. Disponível em: <https://quod.lib.umich.edu/m/moa/agh6799.0001.001> Acesso em: 31 jul. 2026.

MAXWELL, J. C. **On Physical Lines of Force**. Philosophical Magazine, 23, 1862.

HAWKING, Stephen. **Uma Breve História do Tempo: do Big Bang aos buracos negros**. Rio de Janeiro: Rocco, 1988.

JACKSON, John David. **Classical Electrodynamics**. 1. ed. New York: Wiley, 1962.

REITZ, J. R.; MILFORD, F. J.; CHRISTY, R. W. **Fundamentos da Teoria Eletromagnética**. 3. ed. Rio de Janeiro: Editora Campus, 1982.

GRIFFITHS, David J. **Introdução à Eletrodinâmica**. 3. ed. São Paulo: Pearson, 2011.

NUSSENZVEIG, H. M. **Curso de Física básica 4: óptica, relatividade, física quântica**. 1. ed. São Paulo: Editora Edgar Blücher, 1998.

VESELAGO, V. G. The electrodynamics of substances with simultaneously negative values of ε and μ . **P. N. Lebedev Physics Institute, Academy of Sciences, U.S.S.R.** v. 10, n. 4, january-february, 1968.

SMITH, D. R. et al. Composite medium with simultaneously negative permeability and permittivity. **Physical Review Letters**, v. 84, n. 18, p. 4184-4187, 1 may 2000.

VESELAGO, V, et al. Negative Refractive Index Materials. **Journal of Computational and Theoretical Nanoscience**, v. 3, 1–30, 2006.

ZHANG, Y, et al. Total Negative Refraction in Real Crystals for Ballistic Electrons and Light. **Phys. Rev. Lett.** v. 91, oct, 2003.

PENDRY, J, et al. Low frequency plasmons in thin-wire structures. **Journal of Physics: Condensed Matter**, v. 10, n. 22, p. 4785–4809, jun. 1998.

PENDRY, J. B. et al. Magnetism from conductors and enhanced nonlinear phenomena. **IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques**, v. 47, n. 11, p. 2075-2084, nov, 1999.

LI, Jensen; PENDRY, John B. Hiding under the carpet: a new strategy for cloaking. **Physical Review Letters**, v. 101, n. 20, p. 203901, nov. 2008.

VALIPOUR, Ali et al. Metamaterials and their applications: An overview. Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part L: **Journal of Materials: Design and Applications**, v. 236, n. 11, p. 2171-2210, 2022.

CHEN Z, et al. Tunable atom-trapping based on a plasmonic chiral metamaterial. **Nanophotonics**; v. 8, p 1739–1745, 2019.

CVETICANIN L AND ZUKOVIC M. Negative effective mass in acoustic metamaterial with nonlinear mass-in-mass subsystems. **Commun Nonlinear Sci Numer Simul**, v. 51, p 89–104, 2017.

NOGINOV M, et al. Bulk photonic metamaterial with hyperbolic dispersion. **Appl Phys Lett**; v. 94, p 151105, 2009.

TANAKA, T. et al. Editorial on special issue "Metamaterials and Plasmonics in Asia". **Nanophotonics**, v. 13, n. 8, p. 1197-1199, 2024.



INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA DA PARAÍBA
Campus Campina Grande - Código INEP: 25137409
R. Tranquílino Coelho Lemos, 671, Dinamérica, CEP 58432-300, Campina Grande (PB)
CNPJ: 10.783.898/0003-37 - Telefone: (83) 2102.6200

Documento Digitalizado Ostensivo (Público)

TCC

Assunto:	TCC
Assinado por:	Joao Victor
Tipo do Documento:	Folheto
Situação:	Finalizado
Nível de Acesso:	Ostensivo (Público)
Tipo do Conferência:	Cópia Simples

Documento assinado eletronicamente por:

- João Victor Nunes de Sousa, ALUNO (201911240028) DE LICENCIATURA EM FÍSICA - CAMPINA GRANDE, em 07/08/2026 14:37:01.

Este documento foi armazenado no SUAP em 07/08/2026. Para comprovar sua integridade, faça a leitura do QRCode ao lado ou acesse <https://suap.ifpb.edu.br/verificar-documento-externo/> e forneça os dados abaixo:

Código Verificador: 1941330

Código de Autenticação: e58836333a

